
Un nuevo mundo del procesamiento de audio musical mediante análisis matemático de sistemas no lineales

Michel Franchesco Angel Ramírez Nájera



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería



**Un nuevo mundo del procesamiento de audio musical
mediante análisis matemático de sistemas no lineales**

Trabajo de graduación presentado por Michel Franchesco Angel
Ramírez Nájera para optar al grado académico de Licenciado en
Ingeniería Electrónica

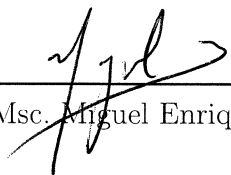
Guatemala,

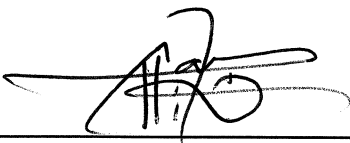
2019

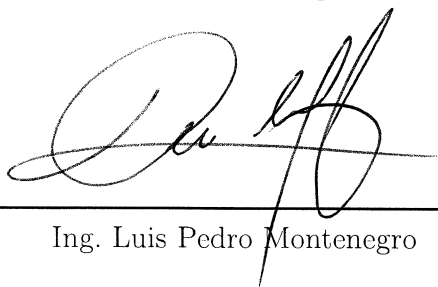
Vo.Bo.:

(f) 
Msc. Miguel Enrique Zea

Tribunal Examinador:

(f) 
Msc. Miguel Enrique Zea

(f) 
MSc. Carlos Esquit

(f) 
Ing. Luis Pedro Montenegro

Fecha de aprobación: Guatemala, 4 de 12 de 2018.

Primeramente quisiera agradecer a mis maestros de la Universidad del Valle de Guatemala, ya que debido a los conocimientos que me han transferido a lo largo de los años en los que he estudiado la Licenciatura en Ingeniería Electrónica, he podido desarrollar y ampliar más mi visión como estudiante y como ser humano y en especial a mi asesor y maestro Miguel Enrique Zea, quien con su forma tan profesional de preparar sus clases y su manera tan responsable de ser, ha influido mucho en mi vida y en este proyecto en el cual me guió para que la investigación se pudiera desarrollar de una manera profesional. Siempre le tendré eterno aprecio ya que gracias a él pude encontrar algo que desarrollara mi carrera profesional con mi pasión por la música. A mi familia por haberme apoyado desde el principio hasta el final de mi Licenciatura, en especial a mis abuelos, mi tía y mis papás quienes siempre me brindaron toda clase de ayuda económica y fortaleza ante cualquier dificultad a lo largo de estos años. Mucha de la manera soñadora con la que veo la vida se las debo a ellos. Ellos siempre han sido mi soporte en el deseo por estudiar y estar desarrollado en el campo de la música, por lo que haber desarrollado un trabajo de graduación que involucra la música y la Ingeniería Electrónica se debe en gran parte a ellos.

Por último quisiera agradecer a personas externas quienes fueron parte fundamental para el desarrollo de esta investigación; a Will Pirkle, el creador del software RackAFX, quien siempre me contesto las dudas acerca de RackAFX y su software, lo cual hizo posible que este trabajo de graduación tuviera prototipos de muy buena calidad y a Pablo Oliva quien guió el trabajo a sus inicios y mediante su alto conocimiento en sistema dinámicos no lineales brindó ideas y delimitó muchas de las formas en la que se trabajó la metodología de la investigación.

¡Gracias a todos los mencionados por el apoyo, son personas increíbles!

Prefacio	III
Lista de figuras	VIII
Lista de cuadros	IX
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Antecedentes	2
3. Justificación	3
4. Objetivos	4
4.1. Objetivo general	4
4.2. Objetivos específicos	4
5. Alcance	5
6. Marco teórico	6
6.1. Generalidades de la generación de música digital	6
6.1.1. Introducción	6
6.1.2. Muestreo de una señal de audio	6
6.1.3. Sistemas de procesamiento de señales	7
6.1.4. Escritura de la señal de salida	7
6.2. Conociendo RackAFX	8
6.2.1. Generalidades	8
6.2.2. Uso del software	8
6.3. Descubriendo la matemática detrás de la música	9
6.3.1. Axioma 1	9
6.3.2. Axioma 2	11

6.3.3.	Axioma 3	13
6.4.	Sistemas dinámicos no lineales	14
6.4.1.	Introducción	14
6.4.2.	Modelado de espacio de estados	16
6.4.3.	Estabilidad de un sistema dinámico	17
6.4.4.	Análisis de sistemas dinámicos no lineales, método numérico	21
6.5.	Sistemas dinámicos estudiados a profundidad	23
6.5.1.	Péndulo simple	23
6.5.2.	Péndulo doble	25
6.5.3.	Oscilador de Van Der Pol	27
6.5.4.	Sistema de Lorenz	29
6.6.	Generar espacios acústicos mediante la operación de convolución	31
6.6.1.	El problema de la reverberación	31
6.6.2.	Implementación formal de la reverberación mediante convolución	32
6.7.	Procesamiento de audio no lineal	33
6.7.1.	Introducción	33
6.7.2.	Controles dinámicos de rango	34
6.7.3.	Efectos de saturación como distorsiones	36
6.7.4.	Excitadores y enhancer	37
7.	Comprobación de efectos musicales existentes mediante axiomas	39
7.1.	Definición de la métrica utilizada para indicar la musicalidad del efecto de audio	40
7.2.	Análisis efecto analógico	40
7.2.1.	Efecto Overdrive/Distortion OS-2 BOSS	42
7.3.	Análisis efectos digitales	43
7.3.1.	Tritik, Krush	44
7.3.2.	HY-Plugins, HY-TP2	45
8.	Pruebas preliminares	48
8.1.	Metodología	48
8.1.1.	Introducción	48
8.1.2.	Aplicación mediante software	49
8.2.	Resultados	51
8.2.1.	Resultados mediante péndulo simple	51
8.2.2.	Resultados mediante péndulo doble	54
8.2.3.	Resultados mediante oscilador de Van Der Pol	57
8.3.	Discusión de resultados	59
9.	Una nueva propuesta basada en acústica	61
9.1.	Metodología final	61
9.1.1.	Preliminares	61
9.1.2.	La convolución en la aplicación de sistemas dinámicos no lineales a audio.	62
9.1.3.	Metodología propuesta basada en convolución	62
9.1.4.	Nuevas topologías	64

10.La implementación final de nuevos efectos musicales propuestos mediante software	66
10.1. Algoritmo de programación final	66
10.2. Funciones de programación	68
10.2.1. Funciones de operaciones aritméticas de vectores	68
10.2.2. Función para definir el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no lineal	70
10.2.3. Función para el método numérico	72
10.2.4. Función que implementa el algoritmo de convolución	73
10.3. Interfaz GUI y exportación del VST3	75
10.3.1. Interfaz GUI	75
10.3.2. Exportación del VST3	76
11.Resultados finales	78
11.1. Efecto de audio basado en el péndulo simple	79
11.1.1. Configuración 1	79
11.1.2. Configuración 2	80
11.1.3. Configuración 3	81
11.1.4. Interfaz GUI	82
11.2. Efecto de audio basado en el péndulo doble	83
11.2.1. Configuración 1	83
11.2.2. Configuración 2	84
11.2.3. Configuración 3	85
11.2.4. Interfaz GUI	86
11.3. Efecto de audio basado en el oscilador de Van Der Pol	87
11.3.1. Configuración 1	87
11.3.2. Configuración 2	88
11.3.3. Configuración 3	89
11.4. Efecto de audio basado en el sistema de Lorenz	90
11.4.1. Configuración 1	90
11.4.2. Configuración 2	91
11.4.3. Configuración 3	92
11.4.4. Interfaz GUI	93
11.5. Discusión final de resultados	94
11.5.1. Péndulo simple	94
11.5.2. Péndulo doble	95
11.5.3. Oscilador de Van Der Pol	95
11.5.4. Sistema de Lorenz	96
12.Conclusiones	97
13.Recomendaciones	98
14.Bibliografía	99
15.Anexos	101
15.1. Código de RackAFX y MATLAB	101
16.Glosario	102

Lista de figuras

1.	Tapped Delay Line	31
2.	Diagrama de bloques de efecto de reverberación	32
3.	Diagrama de bloques de procesamiento de audio no lineal	33
4.	Diagrama de bloques control dinámico de rango	34
5.	Diagrama de bloques de excitador	37
6.	Diagrama de bloques de enhancer	38
7.	Nota A_4 , señal limpia de la guitarra eléctrica	41
8.	Señal de la guitarra vs señal producida en Matlab	41
9.	Señal Overdrive/Distortion OS-2 BOSS	42
10.	Señal producida en Matlab vs señal de la guitarra digital	43
11.	Señal producida en Matlab vs señal de la guitarra digital, armónicos	44
12.	Señal del Tritik, Krush	45
13.	Señal del HY-Plugins, HY-TP2 a rate 75 %	46
14.	Señal del HY-Plugins, HY-TP2 a rate 100 %	47
15.	Diagrama de bloques metodología preliminar	49
16.	Péndulo simple configuración 1 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	52
17.	Péndulo simple configuración 2 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	52
18.	Péndulo simple configuración 3 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	53
19.	Péndulo simple configuración 4 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	54
20.	Péndulo doble configuración 1 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	54
21.	Péndulo doble configuración 2 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	55
22.	Péndulo doble configuración 2 metodología preliminar, senoide 440Hz	55
23.	Péndulo doble configuración 3 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	56
24.	Péndulo doble configuración 3 metodología preliminar, senoide 440Hz	56
25.	Oscilador de Van Der Pol configuración 1 metodología preliminar, sumatoria de sinusoides	57
26.	Oscilador de Van Der Pol configuración 1 metodología preliminar, senoide 440 Hz	57
27.	Oscilador de Van Der Pol configuración 1 metodología preliminar, senoide 440 Hz, análisis en tiempo	58

28.	Oscilador de Van Der Pol configuración dos metodología preliminar, sinusoides 440 Hz	58
29.	Oscilador de Van Der Pol configuración 2 metodología preliminar, sinusoides 440 Hz, análisis en tiempo	59
30.	Diagrama de bloques, topología 1, metodología final	64
31.	Diagrama de bloques, topología 2, metodología final	65
32.	Interfaz GUI del efecto de audio basado en el oscilador de Van Der Pol	75
33.	Péndulo simple configuración 1, sumatoria de sinusoides	79
34.	Péndulo simple configuración 1, senoide 440 Hz	80
35.	Péndulo simple configuración 2, sumatoria de sinusoides	80
36.	Péndulo simple configuración 2, senoide 440 Hz	81
37.	Péndulo simple configuración 3, sumatoria de sinusoides	81
38.	Péndulo simple configuración 3, senoide 440 Hz	82
39.	Interfaz GUI final del péndulo simple	82
40.	Péndulo doble configuración 1, sumatoria de sinusoides	83
41.	Péndulo doble configuración 1, senoide 440 Hz	84
42.	Péndulo doble configuración 2, sumatoria de sinusoides	84
43.	Péndulo doble configuración 2, senoide 440 Hz	85
44.	Péndulo doble configuración 3, sumatoria de sinusoides	85
45.	Péndulo doble configuración 3, senoide 440 Hz	86
46.	Interfaz GUI final del péndulo doble	86
47.	Oscilador de Van Der Pol configuración 1, sumatoria de sinusoides	87
48.	Oscilador de Van Der Pol configuración 1, senoide 440 Hz	87
49.	Oscilador de Van Der Pol configuración 2, sumatoria de sinusoides	88
50.	Oscilador de Van Der Pol configuración 2, senoide 440 Hz	88
51.	Oscilador de Van Der Pol configuración 3, sumatoria de sinusoides	89
52.	Oscilador de Van Der Pol configuración 3, senoide 440 Hz	89
53.	Sistema de Lorenz configuración 1, sumatoria de sinusoides	90
54.	Sistema de Lorenz configuración 1, senoide 440 Hz	91
55.	Sistema de Lorenz configuración 2, sumatoria de sinusoides	91
56.	Sistema de Lorenz configuración 2, senoide 440 Hz	92
57.	Sistema de Lorenz configuración 3, sumatoria de sinusoides	92
58.	Sistema de Lorenz configuración 3, senoide 440 Hz	93
59.	Interfaz GUI final del sistema de Lorenz	93

Lista de cuadros

1.	Configuración de parámetros péndulo simple	79
2.	Configuración de parámetros péndulo doble	83
3.	Configuración de parámetros oscilador de Van Der Pol	87
4.	Configuración de parámetros sistema de Lorenz	90

El objetivo principal de la siguiente investigación fue desarrollar efectos de audio digital basados en sistemas dinámicos no lineales y medir su musicalidad mediante recursos gráficos y matemáticos. Los efectos de audio digital fueron desarrollados en el software RackAFX mediante la tecnología de estudio virtual (VST3). En primera instancia se desarrollo un algoritmo en donde el sistema dinámico no lineal se representaba mediante su modelo de espacio de estados y la salida de audio se obtenía de la solución del sistema, producida por el método numérico de Runge Kutta 4, cuando este tenía como entrada una señal de audio. Este método no produjo los resultados deseados y se prosiguió a crear una metodología similar, pero con consideraciones acústicas. La metodología final unifico el concepto descrito anteriormente con la diferencia de que la salida final del efecto de audio estaría dada por la convolución de la señal de audio original y la solución del sistema dinámico no lineal obtenida mediante el método numérico. Se diseñaron cuatro efectos de audio basados en los siguientes sistemas dinámicos no lineales: Péndulo Simple, Péndulo Doble, Oscilador de Van Der Pol, Sistema de Lorenz. Finalmente, se desarrolló una métrica basada en axiomas musicales la cual se utilizó para determinar la musicalidad de nuestros nuevos efectos de audio, para poder validar la métrica se aplicó a diversos efectos no lineales de audio digital ya existentes. Los resultados finales basados en la métrica de los axiomas determinaron que una de las configuraciones del efecto no lineal del péndulo doble resulta ser la más musical, el efecto no lineal del oscilador de Van Der Pol tiene mucha similitud con el efecto digital tremolo HY-TP2, el efecto no lineal del péndulo simple no presenta mayor incidencia sobre la señal original y el efecto no lineal del sistema de Lorenz produce demasiado contenido espectral que no es posible analizar mediante la métrica.

The main objective of the following investigation is to develop digital audio effects based on non-linear dynamic systems and to measure their musicality using graphical and mathematical resources. These effects were developed within the RackAFX software using Virtual Studio Technology (VST3). At first, an algorithm was developed in which the non-linear dynamic system was represented through its state-space model, the input was an audio signal, and the audio output was obtained from the system's solution. This method was unsuccessful; thus, a similar methodology was followed, this time with acoustic considerations.

The final methodology unified the aforementioned concepts, with the difference that the output signal would be given by the convolution of the original signal and the solution to the non-linear dynamic system. Four audio effects based in the following non-linear dynamic systems were designed: a simple pendulum, a double pendulum, a Van Der Pol oscillator and a Lorenz system.

At last, a metric based in music axioms was developed to measure the musicality of the new effects. This metric was used in different commercial non-linear audio effects to validate it. The final results indicates that: one the configurations of the double pendulum effect had greater musicality than the other new effects, the Van Der Pol oscillator effect had a lot of similarity with HY-TP2 non linear commercial effect, the simple pendulum effect not produced interesting results and the Lorenz system effect produced to much spectral content that is impossible to analyse with the metric.

Los sistemas dinámicos no lineales son objetos de estudio en el área de la matemática e ingeniería. Estos sistemas pueden llegar a describir desde el comportamiento de un fenómeno físico, como el de un péndulo, hasta la interacción neuronal en nuestro cerebro. Están descritos mediante ecuaciones diferenciales y su aplicación y desarrollo en los diferentes campos de la ciencia ha sido de gran utilidad para el desarrollo de tecnología como Robots, sistemas de control, instrumentos meteorológicos, etc.

La investigación para la elaboración de nuevos efectos musicales de audio esta en continuo desarrollo. El área de procesamiento de señales en audio se encarga de la creación de efectos que emulen sonidos acústicos de diversos instrumentos o efectos analógicos de uso habitual mediante tecnología digital por lo que la unión entre la ingeniería y la música se define como el desarrollo de diversas herramientas para facilitar la creación de música y ampliar la creatividad mediante el desarrollo de nuevos efectos de audio.

En esta investigación se pretende desarrollar una metodología para poder crear efectos de audio basados en sistema dinámicos no lineales, que se encuentran en la naturaleza. El trabajo también pretende crear una métrica para poder determinar que tan musicales pueden ser estos nuevos efectos de audio y así poder intuir la aceptación de estos en la industria musical. Para el desarrollo de estos efectos de audio se utilizaran diversas herramientas de software como MATLAB, RackAFX, Visual Studio 15 y CMake.

Finalmente, los efectos de audio que se produzcan serán exportados utilizando tecnología de audio virtual (VST) para el uso de estos en diversos software de grabación de audio.

El área de procesamiento no lineal de audio no se encuentra muy desarrollada actualmente como se especifica en la justificación, sin embargo si existe material como el que se presenta en la sección 6.7 del capítulo 6. En esta se determina que el procesamiento no lineal actual de audio se hace en base a efectos analógicos existentes y que el fundamento matemático de musicalidad no se determina formalmente ya que solo se intenta hacer el efecto digital lo más cercano a su representación análoga, por lo que la rama de investigación y desarrollo en esta área se basa más en la emulación de sonido analógico previamente existentes.

Actualmente el campo se ha desarrollado no solo en la emulación de efectos de distorsión sino que también en obtener métodos basados en procesamiento no lineal para simular la respuesta impulsional de un determinado espacio 3D. Como se determinó en el capítulo 6 sección 6.6 la convolución se utiliza para simular la reverberación de un espacio 3D, sin embargo cuando se realiza la grabación de la respuesta impulsional de un respectivo espacio se debe realizar un proceso de desconvolución para poder obtener únicamente la respuesta impulsional y así poder crear un nuevo efecto que se base en la reverberación del respectivo espacio 3D. El proceso de desconvolución resulta ser implementado por diferentes técnicas lineales pero tiene un alto costo de procesamiento, por lo que existen técnicas de procesamiento no lineal que resultan ser más efectivas para realizar esta labor [1].

Finalmente, ciertos estudios realizados por parte del área de emulación constan en determinar la partes lineales y no lineales de circuitos físicos, pedales de efectos analógicos no lineales, y utilizar ciertos modelos matemáticos para intentar acercarse de una manera más minuciosa el sonido original presentado por el efecto. Existen diferentes técnicas que involucran procesamiento no lineal para emular efectos analógicos lo más cercano posible a la realidad [2]. Por lo que se puede concluir que no existe material que haya realizado efectos no lineales digitales basados en sistemas dinámicos no lineales encontrados en la naturaleza.

Es importante indicar que no existe mucho material que unifique una rama científica como la ingeniería electrónica y una artística como la música. Aunque se tiene conciencia de que existe la rama de ingeniería en sonido y producción musical esta se limita a la implementación y desarrollo de las herramientas electrónicas y de software que faciliten la creación y ejecución de la música, por ejemplo: la utilización de compresores, micrófonos, estaciones de trabajo de audio digital (DAW), filtros analógicos y digitales, etc. No se tiene un área formal para la exploración de los diferentes efectos o sonidos que se pueden llegar a obtener utilizando los recursos de la ingeniería electrónica sobre la música.

Este trabajo pretende ampliar el campo investigativo de análisis de audio y utilizar diversas herramientas de la rama de ingeniería electrónica y matemática para poder sumergirse en posibles nuevos efectos que enriquezcan el sonido proveniente de diferentes instrumentos como: guitarra, teclado o bajo. El estudio de sistemas dinámicos es una área de continua investigación para la matemática e ingeniería electrónica por lo mismo intentar generar nuevos efectos musicales a partir de sistemas dinámicos no lineales resulta enriquecedor tanto para la rama artística como para la ingeniería electrónica. Actualmente solo se realiza procesamiento no lineal estático para simular efectos analógicos como distorsiones mediante funciones matemáticas no lineales como se muestra en el libro *DAFX* de Zölzer [3]. Por lo tanto la mayoría de potencial que nos brinda el procesamiento de señales, mediante cómputo, no se aprovecha para poder crear efectos cuya implementación sea imposible de realizar en el mundo analógico, pero si de manera digital. Esta investigación pretende obtener una metodología para poder implementar cualquier efecto musical basado en sistemas dinámicos mediante software, sin importar si estos existen o si tienen versión analógica.

Por último, al ser un trabajo de investigación exploratoria se genera la posibilidad de crear áreas específicas que logren desarrollar este tema en un futuro con el fin de enriquecer el desarrollo de la ingeniería electrónica y la rama artística musical.

4.1. Objetivo general

Describir y analizar las características musicales de efectos de audio digital basados en sistemas dinámicos encontrados en la naturaleza

4.2. Objetivos específicos

- Implementar un efecto digital basado en sistemas no lineales utilizando tecnología de estudio virtual (VST).
- Evaluar la musicalidad de los efectos no lineales mediante matemática y simulaciones.
- Generar un catálogo de sistemas no lineales simples que permitan un diseño intuitivo de efectos musicales.

Debido a que la rama de los sistemas dinámicos es bastante amplia se intento seleccionar ciertos sistemas dinámicos, los cuales fueron elegidos por cercanía en diversos cursos a lo largo de la Licenciatura en Ingeniería Electrónica y por la intuición física, para poder cubrir los subgrupos a interés. Los sistemas dinámicos seleccionados están categorizados en los subgrupos de: osciladores, sistemas dinámicos no lineales de segundo orden y sistemas dinámicos no lineales con presencia de caos. Es importante de igual forma indicar que el método desarrollado, en esta investigación, para el análisis de sistemas dinámicos y implementación de estos como efectos musicales digitales, es bastante general, por lo que si el lector quisiera proponer cualquier otro sistema dinámico que tenga en mente podría utilizar la metodología descrita en los capítulos posteriores e implementar un nuevo efecto musical basado en el sistema dinámico que seleccionó.

Aunque la metodología de implementación resulta ser bastante general por el hecho que la mayoría fue fundamentada mediante matemática, esta no cuenta con una derivación estrictamente formal, por lo que ciertas decisiones a la hora de implementar la metodología final se tomaron por intuición y experiencia previa obtenida en las pruebas preliminares.

El software que se utiliza para poder generar la implementación de software mediante VST3 es RackAFX[®]. Es importante indicar que este software brinda diversas facilidades al programador para que este se enfoque más en la programación de procesamiento de audio más que en la basada en la interfaz gráfica, como se indicó en el capítulo 6, sección 6.2, por lo mismo es que no es un programa que optimice la implementación del algoritmo de audio por lo que hubo ciertos limites los cuales estuvieron dados por las características físicas del computador. Estos limites fueron más que todo proporcionados por la operación de convolución que se debe de efectuar a una tasa dada por la frecuencia de muestreo del audio. La cantidad de muestras de cada señal fue limitada a 4700 para que así la operación se efectuara eficientemente en el tiempo explicado anteriormente.

Finalmente, el alcance de esta investigación es generar una metodología general para poder crear efectos musicales digitales basados en sistemas dinámicos, los cuales no tienen una implementación óptima a nivel del algoritmo utilizado para el procesamiento de audio.

6.1. Generalidades de la generación de música digital

6.1.1. Introducción

En la actualidad la música y la tecnología están bastante relacionadas. La tecnología es una herramienta que la música utiliza para poder facilitar los procesos de grabación y aumentar la cantidad de sonidos para crear piezas más creativas y de mejor calidad. Los primeros dispositivos de audio digital fueron desarrollados aproximadamente a mediados de los 80's . Los Procesadores Digitales de Señales (DSP) tuvieron su mayor auge cuando salio a la venta el Disco Compacto (CD) y se empezaron a desarrollar métodos para realizar el muestreo de una señal de audio analógica y así poder digitalizarla. Los discos compactos utilizaban una frecuencia de muestreo de 44,100 Hz, actualmente existen frecuencias de muestreo de mayor calidad. [4]

6.1.2. Muestreo de una señal de audio

Debido a que las señales musicales son ondas sonoras que se dispersan en el aire y que existen de una manera continua. Se necesita realizar un muestreo o adquisición de los puntos que conforman la información de esta señal musical para poder almacenarla en una computadora y así obtener una versión digital de la señal. Para el muestreo de una señal de audio comúnmente se utiliza un convertidor análogo digital también llamado ADC. Por lo que si esta adquisición de datos se realiza a una frecuencia de 44,100 Hz cada muestra de la señal de audio analógica se estaría obteniendo cada $22.7 \mu s$. Es importante indicar que para que no exista perdida de información y la señal de audio analógica pueda ser reconstruida de una manera correcta se debe cumplir con el teorema del muestreo. El teorema de muestreo define que una señal continua analógica puede ser muestreada y reconstruida de manera digital si la frecuencia más alta que esta señal tiene no es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo utilizada. [4]

Si el teorema de muestreo no se cumple las frecuencias más altas que la mitad de la frecuencia del muestreo producen un alias de las frecuencias más bajas y se genera un problema de aliasing en la señal digitalizada.

6.1.3. Sistemas de procesamiento de señales

Existen diferentes métodos que involucran algoritmos matemáticos que al momento de ejecutarlos generan nuevas características a la señal de audio digital, a la implementación de estos algoritmos se le conoce como procesamiento de señales. La plataforma en donde se emplean los algoritmos matemáticos se conoce como DSP que es un microcontrolador designado a realizar operaciones matemáticas sobre las señales de audio o mediante un CPU.[4] De manera convencional un sistema de procesamiento de señales consiste en:

- Un ADC para el muestreo de la señal de audio.
- Una unidad de procesamiento de señales como DSP o CPU.
- Memoria para almacenar el algoritmo matemático de procesamiento (memoria de programa).
- Memoria para el almacenamiento de la información obtenida mediante el muestreo de la señal (Memoria de datos).
- Una unidad gráfica con botones, interruptores, perillas y pantallas.

Una serie de pasos que describe el proceso que realiza un sistema de procesamiento de señales se describe de la siguiente forma:

1. Se realiza la inicialización de todas las variables y se colocan el estado actual del procesador de manera que las interrupciones estén listas para recibir la información.
2. La unidad de procesamiento espera por que la interrupción ocurra.
3. La información se obtiene y se clasifica si es de audio o es de control.
4. Si es de audio se lee la información, se realiza el procesamiento mediante el algoritmo de proceso, se actualizan los datos de las variables para prepararlas para la siguiente muestra y se escribe la señal de salida en un pin o en memoria.
5. Si es de control directamente actualizamos las variables para prepararlas para la siguiente muestra y escribimos la señal de audio anterior en respectiva salida.
6. Si no la reconoce como de control o audio sigue esperando la interrupción hasta que se reciba una de ellas.

6.1.4. Escritura de la señal de salida

Un convertidor digital analógico también llamado DAC se utiliza para volver analógica la señal procesada. Este dispositivo toma la información de cada muestra obtenida por el ADC y le asigna un valor de voltaje. Por lo que después del DAC se obtiene una señal compuesta por muchos puntos. Finalmente, la señal de salida pasa por un filtro pasa bajas el cual se

conoce como filtro re constructor y tiene la frecuencia de corte en un medio de la frecuencia de muestreo. [4]

6.2. Conociendo RackAFX

En esta sección se discute sobre el software que se utilizó para poder obtener los VST3 y crear los efectos musicales mediante software que se estarán explicando a detalle en los próximos capítulos.

6.2.1. Generalidades

RackAFX es un software creado por Will Pirkle en 2004 para uso personal y luego implementado, en 2009, para sus estudiantes de Music Engineering Technology Program de la Universidad de Miami. Este software pretende facilitar la parte de programación en c++ orientada a la GUI y la exportación del VST, para que de esta forma el usuario pueda dedicarse con mayor facilidad al código del procesamiento de audio. RackAFX termino siendo un software de código abierto el cual puede ser utilizado tanto en Windows como en Apple's iOS. [4]

Actualmente RackAFX sigue en continuo desarrollo y Will Pirkle continua brindándole soporte mediante una pagina de Internet dedicada a este. En esta pagina de Internet también existe un foro con preguntas constantes así como pequeñas guías que brindan material adicional al libro para la realización de plug-ins digitales.

6.2.2. Uso del software

Así como se determinó en la sección pasada RackAFX es una herramienta que trabaja en C++ y que nos facilita la creación de plug-ins digitales. Cuando se crea un nuevo proyecto en RackAFX este automáticamente genera la mayoría de archivos necesarios para simplemente dedicarnos al código de procesamiento de señales de audio y despreocuparnos en la GUI o otros códigos adicionales. A continuación se explicaran de manera general las 3 partes fundamentales que tiene RackAFX.[4]

- **Creación de plug-in:** Se tiene un constructor que automáticamente inicializa todas las variables de la interfaz GUI así como las de el procesamiento de audio. RackAFX tiene un compilador que lo que hace es crear una biblioteca de enlace dinámico (DLL) y así con esto poder generar el plug-in de audio.
- **La interfaz gráfica:** RackAFX cuenta con una interfaz gráfica la cual actualiza la información en los archivos de programación de nuestro proyecto automáticamente. Por lo que el uso de botones, perillas y demás resulta bastante intuitivo para el usuario, ya que solo se debe seleccionar estos en la interfaz gráfica y colocar de manera visual los máximo, mínimos y el tipo de variable y automáticamente el código para usar estas variables en nuestro proyecto se generara.

- **Procesamiento de audio:** En RackAFX se puede realizar el procesamiento de audio a un archivo WAV o mediante un instrumento conectado por medio de una interfaz de audio. Los archivos que se encuentran en el proyecto están de tal manera que al momento de obtener la señal de entrada, por cualquiera de los dos métodos indicados anteriormente, el código obtenga automáticamente la frecuencia de muestreo y la cantidad de canales de la señal. Por lo que el usuario solo debe preocuparse por colocar en las propiedades del software los equipos de salida y entrada de audio.

6.3. Descubriendo la matemática detrás de la música

En esta sección se determinó el método matemático que se utilizó para poder evaluar que tan musical es un sistema. A continuación se presentan los axiomas que se seleccionaron para poder determinar si nuestros sistemas no lineales están produciendo música o no. Adicionalmente se realizaron pruebas para poder demostrar la validez de estos axiomas.

6.3.1. Axioma 1

- El espectro de frecuencia esta limitado por una frecuencia baja.
- El eje de frecuencias esta escalado por \log_2 . Permitiendo frecuencias que se encuentren solamente en el estándar musical actual que es denominado como "Temperamento Igual".
- El eje de frecuencias es discreto, indexado por un entero positivo que se describe a continuación.

$$p(\omega) = 12(\log_2(\omega) - \log_2(27.5)) \quad (1)$$

Donde:

- p : El numero discreto de la frecuencia musical.
- ω : Es la frecuencia musical.

Es importante indicar que el estándar musical de "Temperamento Igual" hace referencia a que todas las notas musicales en una octava tienen una división de un semitono el cual es $1/12$ de la octava. Esto quiere decir que en una octava existen 12 notas cada una de ellas divididas por un semitono. Este sistema de afinación es el más utilizado en la música contemporánea occidental, por lo cual nos estaremos basando en este para poder verificar el axioma 1. Para poder obtener las frecuencias que aplican en este sistema existe una ecuación de sucesión (2) que sirve para determinar cualquier frecuencia partiendo de $A_4 = 440$ Hz la cual también esta estandarizada. También se pueden tomar diversas tablas que muestran las frecuencias que existen en este estándar. [5]

$$F_{n+1} = F_n 2^{1/12} \quad (2)$$

Donde:

- F : Es la frecuencia del Temperamento Igual

Explicación axioma 1

El axioma 1 limita el espectro de frecuencia para que este cumpla con el estándar musical descrito anteriormente. Mediante la ecuación (1) se determina que cualquier frecuencia en ω que cumpla con el estándar musical dará como resultado un número entero positivo. De esta forma se delimitó el espectro de tal modo que sea discreto y que solo contenga las frecuencias establecidas dentro del estándar musical. Es importante indicar que debido a que el número de frecuencias del estándar musical es discreto, si no se obtienen resultados exactamente enteros en la ecuación (1) se redondea al número entero superior.

Con el axioma 1 se determina si algún armónico que despierte nuestro sistema no lineal se encuentran en las frecuencias permitidas por el estándar musical. Adicionalmente el axioma 1 figura que el espectro en frecuencias también está delimitado por una frecuencia inicial la cual indica el límite inferior. Esta frecuencia es $A_0 = 27.5$ Hz, una de las frecuencias más bajas audibles por el ser humano.

Evaluando el axioma 1

Muestra de frecuencias presentes en el estándar de "Temperamento Igual"

- $A_4 = 440$ Hz
- $D_2 = 146.832384$ Hz
- $E_4 = 659.2551138$ Hz
- $A\#_4 = 466.1637615$ Hz
- $A_0 = 27.5$ Hz
- $B_0 = 30.86770633$ Hz

Se realiza la prueba mediante la ecuación (1) para poder obtener los números enteros positivos que corresponden a las frecuencias determinadas anteriormente.

- $p(A_4) = 48$
- $p(D_2) = 29$
- $p(E_4) = 55$
- $p(A\#_4) = 49$
- $p(A_0) = 0$
- $p(B_0) = 2$

Se puede observar con la prueba mostrada anteriormente que el axioma 1 si se cumple para las frecuencias musicales del estándar musical. Esta será una buena herramienta para solo obtener frecuencias musicales, cuando se prueben los diferentes sistemas no lineales.

6.3.2. Axioma 2

- El espectro es discreto y finito. Esto indica que la señal esta constituida por un numero finito de senosoides.
- Cada señal además de ser diferenciada por su frecuencia también sera diferenciada por su magnitud. La magnitud de una señal estará determinada por un entero positivo real. La fase, expresada en números complejos, no sera tomada en cuenta.

A continuación se presentan las herramientas matemáticas que describen ciertos conceptos fundamentales musicales con el fin de poder empezar a evaluar definiciones precisas de armonía. [5]

El espectro musical se define como:

$$S(p) = \sum_{n=0}^N c_n \delta(p - n) \quad (3)$$

Convolución de una función con la Delta de Dirac:

$$[f * \delta_a](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \delta(x - a) dx = f(t - a) \quad (4)$$

Describiendo un acorde musical:

$$I = \sum_m c_m \delta_m \quad (5)$$

Describiendo la traslación de este acorde en el espectro de frecuencias:

$$I * \delta_n = \sum_m c_m \delta_{m+n} \quad (6)$$

Traslación de un tono musical:

$$I * T \quad (7)$$

Donde:

- c_n : constante que expresa la magnitud de la frecuencia.
- $S(P)$ El espectro discreto de la música.
- I Es un acorde musical.

Explicación axioma 2

El axioma 2 se fundamenta en poder describir mediante matemática los conceptos fundamentales de la armonía musical, acordes e intervalos. Para poder hacer esto primero se define el espectro musical, el cual ya se había especificado en el axioma 1, de una manera más general. En la ecuación (3) se describen todas las frecuencias musicales del respectivo estándar musical. Para hacer esto de una manera discreta se utiliza la expresión matemática delta de Dirac. Esta define un impulso de magnitud c_n en un respectivo momento. Por lo

tanto una sumatoria de deltas de Dirac, se puede observar análogamente en este caso como una sumatoria de sinusoides discretos cada uno con una frecuencia P y una magnitud c_n . La frecuencia P descrita en el axioma 1 como las frecuencias musicales de nuestro estándar musical.

La ecuación (4) simplemente describe la integral de convolución con una delta de Dirac. Esta tiene el beneficio de poder desplazar una función hacia donde la delta de Dirac se encuentre centrada. Esta propiedad se utiliza para poder realizar los diferentes desplazamientos en frecuencia de cualquier nota musical descrita en la ecuación (3). Con el fin de poder definir el espacio entre cada nota. Dicho espacio se define como semitono musical y dos semitonos se definen como un tono musical.

La ecuación (5) describe un acorde musical, I . Un acorde musical se define teóricamente como 3 o más notas tocadas al mismo tiempo. Por lo tanto un acorde musical se define como la suma de 3 o más deltas de Dirac, las cuales hacen referencia a cada nota musical. En la ecuación (5) se puede observar la sumatoria de cierta cantidad m de notas que va a tener un acorde.

Finalmente, las ecuaciones (6) y (7) indican el traslado de un acorde musical. Es importante indicar que el traslado va a ser útil para definir cualquier acorde mayor, menor, aumentado o disminuido. Los cuales son fundamentales en la teoría musical. La ecuación (7) indica el traslado de un tono musical. Un tono musical estaría definido en la ecuación (6) cuando $n = 2$ debido a que la menor traslación es de $n = 1$ y esta corresponde a un semitono musical.

Evaluando el axioma 2

Definiendo los siguientes acordes musicales:

- Acorde de A mayor (A): $\delta_0 + \delta_4 + \delta_7$
- Acorde de A menor (Am): $\delta_0 + \delta_3 + \delta_7$
- Acorde de A aumentado (A+): $\delta_0 + \delta_4 + \delta_8$
- Acorde de A disminuido (A^o): $\delta_0 + \delta_3 + \delta_6$

Realizando la traslación de un tono hacia la nota B.

Se aplica la ecuación (7), con esta realizamos la traslación de un tono sobre cada acorde definido anteriormente. Debido a que el acorde esta definido como una suma de deltas de dirac. Se puede aplicar la traslación de un tono a cada una de ellas.

- $\delta_0 \times \delta_2 + \delta_4 \times \delta_2 + \delta_7 \times \delta_2 = \delta_2 + \delta_6 + \delta_9$: Acorde de B mayor
- $\delta_0 \times \delta_2 + \delta_3 \times \delta_2 + \delta_7 \times \delta_2 = \delta_2 + \delta_5 + \delta_9$: Acorde de B menor
- $\delta_0 \times \delta_2 + \delta_4 \times \delta_2 + \delta_8 \times \delta_2 = \delta_2 + \delta_6 + \delta_{10}$: Acorde de B aumentado
- $\delta_0 \times \delta_2 + \delta_3 \times \delta_2 + \delta_6 \times \delta_2 = \delta_2 + \delta_5 + \delta_8$: Acorde de B disminuido

6.3.3. Axioma 3

- Se especifica diferentes tipos de agrupaciones para poder entender los acordes formados por la suma de las señales. Se determina si un acorde es armónico o si no lo es.
- Se realiza un isomorfismo, ecuación (8), para poder analizar los acordes descritos en el Axioma 2 como polinomios.

$$S(p) = \sum_{n=0}^N c_n \delta_n \leftrightarrow A(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n \quad (8)$$

- Se determinan la siguientes condiciones. Se considera un acorde armónico el cual cumpla con que su respectivo polinomio solo tenga una representación. Se considera un acorde inarmónico el cual cumpla con que su polinomio tenga una representación ambigua.[5]

Explicación axioma 3

El axioma 3 resulta ser más intuitivo que los descritos anteriormente. Musicalmente un acorde armónico se describe como una unidad musical que se distingue debido a su textura y la sensación que este trasmite, consta de 3 a 7 notas musicales. Cualquier acorde que tenga un uso musical específico en un círculo armónico se puede considerar armónico. Los acordes inarmónicos son aquellos que no transmite una textura o sensación específica esto debido a que no logran ser diferenciados a su totalidad por el oído humano. Algunos pueden considerarse ruido, pero en ocasiones se utilizan para hacer ambientaciones en películas o series de televisión. Estos acordes no pueden existir en un círculo armónico debido a que no se consideran acordes musicales ya que el oído humano no logra diferenciar su textura o sensación correspondiente.

El axioma 3 logra diferenciar entre estos dos tipos de acordes mediante el uso de un tema básico matemático, factorización de polinomios. Como se puede observar en la ecuación (8) mediante el uso del isomorfismo ahora se representan los acordes como suma de potencias de polinomios. Por lo tanto, debido a que existirá una representación polinomial de cada acorde musical se puede indicar que cuando exista una única representación el acorde será armónico debido a que este tendrá una textura y sensación definida. Si existe más de una representación el acorde será inarmónico por lo que existirá una representación ambigua y por lo tanto no tendrá una textura o sensación definida. Con este axioma se puede diferenciar entre el ruido y un acorde musical.

Adicionalmente, también se puede verificar si un intervalo musical tiene una única representación. En la teoría musical actual los intervalos musicales muestran una sola representación respecto a su tónica.

Evaluando el axioma 3

Se definen tres acordes y un intervalo musical, con su respectiva representación polinomial. Se factorizan y se determinan si estos son armónicos o inarmónicos.

- Un intervalo musical: (Tercera Mayor)
- $A(x) = x^0 + x^4 = 1 + x^4$: Intervalo existente
- Un acorde menor: (Acorde menor)
- $A(x) = 1 + x^3 + x^7$: Acorde armónico
- Un acorde mayor séptima: (Acorde Maj 7)
- $A(x) = 1 + x^4 + x^7 + x^{11}$: Acorde armónico
- Un acorde no existente:
- $A(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (1 + x^3)(x^2 + x + 1) = (1 + x)(x^4 + x^2 + 1)$: Acorde inarmónico

6.4. Sistemas dinámicos no lineales

En esta sección se presenta una breve explicación sobre la definición matemática de un sistema dinámico no lineal. Estos sistemas cuentan con características esenciales como el caos, puntos de estabilidad, ciclos limites, comportamiento no lineal, etc. Estas características hacen que estos sistemas cuenten con un alto potencial y por lo mismo justifican un alcance amplio para la investigación de efectos musicales basados en estos sistemas. [6]

6.4.1. Introducción

Los sistemas dinámicos nos permiten un análisis de fenómenos físicos que se presentan en la vida real como: péndulos, Osciladores, fluidos, etc. El estudio sobre estos sistemas empezó a surgir a mediados de los 1600 cuando Newton invento las ecuaciones diferenciales que describían las leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y se combinaron con las leyes de Kepler para el movimiento de los planetas. Por muchas generaciones se intentó utilizar los métodos analíticos de Newton para analizar el problema de los tres cuerpos, por ejemplo: sol, tierra, luna. Pero este era demasiado complicado de resolver en ese entonces.[6].

Más adelante en los 1800s Poincaré planteo otra perspectiva del problema de los tres cuerpos y analizó, en vez de un posición exacta, la estabilidad del sistema en el tiempo infinito dependiendo de sus condiciones iniciales. También fue de las primeras personas en utilizar el concepto de caos sobre un sistema. Este lo definió como cuando un sistema determinista presenta un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales.[6]

El estudio de los sistemas dinámicos fue creciendo en áreas como biología, química, ingeniería, etc. Las herramientas digitales como la computadora de alta velocidad de 1950

ampliaron el panorama de estos sistemas y empezaron a realizar aproximaciones a las soluciones de sistemas dinámicos no lineales los cuales, por no tener una solución analítica, eran imposibles de comprender.

Los sistemas dinámicos pueden dividirse en dos grupos principales: Ecuaciones diferenciales y mapas iterativos (ecuaciones de diferencia). Las ecuaciones diferenciales describen la evolución de un sistema en el tiempo continuo. Los mapas iterativos realizan el mismo análisis pero en tiempo discreto. Las ecuaciones diferenciales se utilizan más en la ciencia y en la ingeniería para describir fenómenos naturales. Los mapas iterativos nos sirven para poder obtener soluciones de ecuaciones diferenciales, esto mediante un análisis discreto del sistema.[6]

Las ecuaciones diferenciales se pueden dividir en dos tipos: Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Una ecuación diferencial ordinaria presenta solo derivadas ordinarias, esto quiere decir que solo existe una dependencia sobre la variable a analizar. Por ejemplo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (9)$$

La ecuación (9) representa el sistema dinámico de un resorte con una masa en una superficie con fricción. Se puede observar que la variable a analizar es x : la posición de la masa y que la dependencia de esta variable es t : el tiempo. Por lo tanto este sistema dinámico describe la posición de la masa a lo largo del tiempo. Esta ecuación diferencial también es de orden dos, ya que la máxima derivada que describe el sistema es de segundo orden.[6]

Las ecuaciones diferenciales parciales, involucran derivadas parciales. La variable a analizar presenta múltiples dependencias. Por ejemplo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

En la ecuación (10) se puede observar que la variable u tiene una dependencia tanto de x como de t . Por lo tanto este sistema dinámico está descrito por una ecuación diferencial parcial.

Ambas ecuaciones descritas anteriormente, son ecuaciones diferenciales lineales. Esto ya que en ninguna de ellas existe una dependencia no lineal. Por ejemplo para poder observar esto se describe la ecuación diferencial de orden n , como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (11a)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11b)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \quad (11c)$$

En el sistema de ecuaciones (11) se puede observar que el sistema dinámico de la ecuación (10) se expresa como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Debido a que este sistema cuenta solo con funciones lineales. La ecuación (10) es una ecuación diferencial lineal.

Dada las diferencias entre una ecuación diferencial lineal y no lineal. Se determinó que un sistema dinámico no lineal va a ser aquel en el cual la ecuación diferencial o mapa iterativo presenta un comportamiento no lineal en la variable a analizar.

Por último, es importante indicar por que los sistemas dinámicos no lineales son tan complicados de analizar. A continuación se presenta una lista de dificultades que presentan estos sistemas

1. No todos presentan una solución analítica.
2. No se pueden analizar por partes y luego sumar estas para obtener la solución del sistema debido a que no cuentan con la característica de superposición
3. Algunas herramientas matemáticas como la transformada de Laplace o de Fourier, no se pueden aplicar a estos sistemas por la falta de linealidad.

A pesar de las dificultades que tienen los sistemas dinámicos no lineales la mayoría de sistemas de la vida real son no lineales y por lo mismo la investigación sobre estos sistemas resulta enriquecedora y satisfactoria.

Existen diferentes métodos para descubrir el comportamiento de la variable a analizar en un sistema dinámico no lineal. Los métodos numéricos brindan una aproximación a la solución real del sistema. También existen métodos gráficos que ayudan a visualizar el posible comportamiento del sistema.[6]

6.4.2. Modelado de espacio de estados

El estado de un sistema se define como una colección de variables que resumen el comportamiento pasado de un sistema con el fin de poder predecir la acción futura de este. Por ejemplo, para un sistema físico las variables de estado son aquellas que brindan información de la conservación de la masa, momentum o energía. Este análisis es empleado mediante álgebra lineal por lo que las variables de estado van a estar representadas mediante un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el cual recibe el nombre de vector de estados, las variables de control están representadas mediante un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ el cual recibe el nombre de vector de entradas y la señal medida esta representada mediante un vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ y esta recibe el nombre de vector de salidas. Finalmente, cualquier sistema puede ser representado mediante la siguiente ecuación diferencial.[7]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (12)$$

En donde: $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa la tasa de cambio de el vector de estados como función del estado \mathbf{x} y la entrada \mathbf{u} y $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ representa la salida del sistemas como una función de del estado \mathbf{x} y la entrada \mathbf{u} . Esto hace referencia a un modelado de espacio de estados.

Las dimensiones del vector de estados hacen referencia al orden de un sistema. Este tipo de modelado puede considerarse invariante en el tiempo ya que las funciones f y h no

dependen explícitamente de la variable t . Adicionalmente un sistema puede ser lineal si su espacio de estados puede ser representado por las siguientes funciones f y h . [7]

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad (13)$$

Donde: A, B, C y D son matrices de constantes. Si el sistema cumple con la ecuación (13) entonces se puede indicar que el sistema es LTI (lineal e invariante en el tiempo). [7]

- La matriz A : es llamada matriz dinámica y es una matriz de $n \times n$.
- La matriz B : es llamada matriz de control y es una matriz de $n \times p$.
- La matriz C : es llamada matriz de sensores y es una matriz de $q \times n$.
- La matriz D : es llamada matriz de termino directo y es una matriz de $q \times p$.

Entonces por ejemplo si se tiene una ecuación diferencial descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + ay = u \quad (14)$$

El espacio de estados del sistema estaría descrito mediante la ecuación 13. Por lo que el sistema resultantes sería el siguiente

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (15)$$

$$y = [1 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] \mathbf{x} + d\mathbf{u} \quad (16)$$

Este forma de plantear las ecuaciones diferenciales es de gran utilidad para poder realizar el análisis mediante el método numérico. [7]

6.4.3. Estabilidad de un sistema dinámico

Puntos de equilibrio de un sistema dinámico

Antes de definir la estabilidad de un sistema dinámico se debe de tener algunos conceptos claros como el de puntos de equilibrio. Para definir este concepto se debe considerar un sistema dinámico representado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Donde: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ Por lo tanto, mediante la ecuación 17 Un punto de equilibrio se define como aquel punto que al evaluarse en la función f esta de como resultado 0. Por ejemplo un punto de equilibrio $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$. es aquel que cumple lo siguiente:

$$f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0$$

Estabilidad de un sistema dinámico

La estabilidad de un sistema dinámico es una cualidad que brinda información esencial para poder saber como el sistema se va a comportar a lo largo del tiempo. La estabilidad esta relacionada con la evolución del sistema. Esta indica si el sistema se llega a estabilizar a un valor constante después de cierto tiempo, si el sistema diverge, o si el sistema se logra estabilizar de manera periódica [7]. La estabilidad de un sistema dinámico es una cualidad interna, por lo que a continuación se considera una sistema dinámico autónomo de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{18}$$

Donde: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y por último definimos que (\mathbf{x}^*) es un punto de equilibrio del sistema dinámico por lo que se cumple que $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Dado el sistema definido en la ecuación (18) se determina la estabilidad en el sentido de Lyapunov. Este tipo de estabilidad va estrechamente relacionada con el punto de equilibrio del sistema y es importante definir dos parámetros más para poder indicar el tipo de estabilidad que tiene el sistema dinámico mediante Lyapunov. Estos parámetros son: δ y ϵ . Donde tanto δ como ϵ son fronteras cercanas al punto de equilibrio solo que se cumple que $\epsilon > \delta$. Mediante estos parámetros a continuación se define los tipos de estabilidad que puede llegar a presentar un sistema dinámico.[7]

Los tipos de estabilidad para un sistema dinámico son:

- Estable: si para cada $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

- Asintóticamente Estable: si es estable y además:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$$

- Inestable: si no es estable.
- Exponencialmente Estable: si $\exists M, \alpha > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq M e^{-\alpha t} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$$

donde $\|\cdot\|$ representa cualquier norma vectorial.

Es también importante indicar que la estabilidad es una cualidad local dada por un punto de equilibrio y las condiciones iniciales del sistema. En el caso que las condiciones de estabilidad sean indiferentes de \mathbf{x}_0 , se dice que el punto de equilibrio tiene estabilidad (o inestabilidad) global.[7]

A continuación se presentan los métodos para determinar la estabilidad de un sistema dinámico. Tanto el método para sistemas lineales como para sistemas no lineales.

Estabilidad de sistemas LTI

Los sistemas LTI cuentan con la característica que su evolución en el tiempo esta estrechamente relacionado con los eigenvalores de la matriz A . Por lo que, si se obtienen los eigenvalores del sistema se puede determinar el tipo de estabilidad [7]. Por lo que si se considera un sistema LTI de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{19}$$

donde: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. El punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = 0$ es:

- Globalmente (exponencialmente) asintoticamente estable (G.A.S) si y solo si $Re(\lambda) \leq 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$.
- (Marginalmente/Críticamente) Estable si $Re(\lambda) \leq 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$ y $Re(\lambda) = 0$ corresponde a eigenvalores de multiplicidad algebraica unitaria.
- Inestable si $\exists \lambda \in \sigma(A)$ tal que $Re(\lambda) > 0$

Es importante determinar que para un sistema LTI todas las condiciones de estabilidad resultan siendo globales por lo que si el origen es un punto de equilibrio G.A.S decimos que el sistema a su totalidad es G.A.S.

Estabilidad de los sistemas no lineales

Existen dos formas de obtener la estabilidad de un sistema no lineal. Primero es importante volver a indicar que la estabilidad de un sistema es una cualidad local con respecto a un punto de equilibrio. En el caso de los sistemas LTI ya que las cualidades de este sistema pueden considerarse globales, entonces se puede indicar que las condiciones de estabilidad también son globales. Pero para los sistema no lineales no ocurre eso, por lo que la selección del punto de equilibrio si sera sumamente importante para poder determinar las condiciones de estabilidad de un sistema no lineal [7]. A continuación se presentan los dos criterios de estabilidad para sistemas no lineales:

- El teorema de Hartman-Grobman
- El teorema de estabilidad de Lyapunov

Teorema de Hartman-Grobman

En este método es importante tener conciencia de la linealización de un sistema con respecto a un punto de equilibrio. Lo que pretende este métodos es poder linealizar un sistema no lineal y así poder utilizar los criterios de estabilidad de los sistemas LTI [7]. Para que

este método se cumpla se debe considerar el siguiente teorema: *El comportamiento local de un sistema dinámico no lineal alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico, es cualitativamente el mismo que el de su linealización alrededor de dicho punto de equilibrio.* Un punto de equilibrio hiperbólico cumple con la siguiente definición.

Punto de equilibrio hiperbólico: sea \mathbf{x}^* un punto de equilibrio del sistema dinámico descrito por la ecuación (18), y si se considera el siguiente sistema LTI que resultada de la linealización del sistema dinámico con respecto al punto de equilibrio \mathbf{x}^* :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= A\mathbf{z} \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0\end{aligned}\tag{20}$$

con $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ y

$$A = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

Si la matriz del sistema A corresponde a la de un sistema G.A.S o (exclusive) un sistema inestable, entonces \mathbf{x}^* se denomina un punto equilibrio hiperbólico. Por lo que en conclusión se puede indicar que el teorema de Hartman-Grobman determina si un punto de equilibrio de un sistema no lineal es localmente asintóticamente estable o inestable, al evaluar si la linealización alrededor de dicho punto de equilibrio es G.A.S. o inestable respectivamente. El teorema no indica nada si el resultado de la linealización es marginalmente estable.[7]

Teorema de estabilidad de Lyapunov

Debido a que el método de Hartman-Grobman no indica nada cuando la estabilidad de su respectivo sistema linealizado es marginalmente estable. Se utiliza otro método para indicar la estabilidad de un sistema no lineal. Para este método antes se considera perspectiva de energía del sistema. En el caso de un sistema mecánico la energía del sistema esta descrita por una función $V(\mathbf{x})$. Esta indica que $V(\mathbf{x})$ da una noción energética de que tan lejos esta el punto del equilibrio. Por lo que si esta función tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, se puede indicar que el sistema llego a ser asintoticamente estable. A esta función $V(\mathbf{x})$ se le como una de las funciones de Lyapunov, estas funciones son las bases para el método directo de Lyapunov.[7]

El método directo de Lyapunov indica que sea: $V(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con primeras derivadas parciales continuas en un vecindario del origen de \mathbb{R}^n adicionalmente se supone que $V(\mathbf{x})$ es positiva definida, eso quiere decir que: $V(0) = 0$ y $V(\mathbf{x}) > 0$ para $\mathbf{x} \neq 0$. Entonces $V(\mathbf{x})$ es llamada un candidato a función de Lyapunov. Cuando ya se tiene un candidato para función de Lyapunov entonces se utiliza el teorema de estabilidad de Lyapunov para indicar si $V(\mathbf{x})$ es una función de Lyapunov.[7]

El teorema de estabilidad de Lyapunov: sea $\mathbf{x}^* = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ f diferenciable continua en D y $V(\mathbf{x})$ un candidato de función de Lyapunov entonces:

- \mathbf{x}^* es estable si:

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \in D - \{0\}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D$$

- \mathbf{x}^* es (localmente) asintóticamente estable si \mathbf{x}^* es estable y adicionalmente:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{0\}$$

- \mathbf{x}^* es inestable si

$$V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{0\}$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{0\}$$

Una función $V(\mathbf{x})$ que satisface las condiciones de este teorema se denomina función de Lyapunov.

Finalmente, también se puede determinar la estabilidad asintóticamente global de un sistema: si $D = \mathbb{R}^n$, $V(\mathbf{x})$ es radialmente sin límites, $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ y $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$, y se cumplen las condiciones de A.S para $\mathbf{x}^* = 0$, entonces $\mathbf{x}^* = 0$ es globalmente asintóticamente estable (G.A.S)

6.4.4. Análisis de sistemas dinámicos no lineales, método numérico

Los métodos numéricos constituyen técnicas mediante las cuales se pueden solucionar cualquier problema matemático solamente utilizando operaciones aritméticas de forma recursiva, por lo mismo es que estos se implementan en computadoras. El desarrollo de las computadoras actuales ha hecho posible la resolución aproximada de muchos problemas matemáticos los cual se pueden solamente analizar mediante métodos numéricos.[8]

Debido a que los métodos numéricos resultan siendo iteraciones de operaciones aritméticas se necesita de software de programación para poder implementar los algoritmos que realicen el método numérico deseado. En este trabajo de graduación se utiliza MATLAB y C++, en su respectivo momento, para poder implementar el método numérico y realizar las pruebas con los respectivos sistemas dinámicos no lineales.[8]

Debido a que se realizara un análisis de los sistemas dinámicos no lineales se debe emplear métodos numéricos que existen para poder aproximar la solución de una ecuación diferencial.

Para poder solucionar una ecuación diferencial ordinaria se tienen diferentes técnicas. Las técnicas de Runge-Kutta son las más conocidas. En estas se pueden encontrar los métodos numéricos de Runge-Kutta de diversos ordenes y los métodos de pasos múltiples.[8]

Antes de empezar a describir el método numérico que se utilizara para poder analizar los respectivos sistemas dinámicos no lineales. Es importante definir ciertos conceptos claves.

Primero es importante indicar que para un proceso recursivo matemático que pretenda solucionar una ecuación mediante valores pasados se plantea la siguiente método numérico:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \tag{21}$$

Donde:

- y_{i+1} : nuevo valor
- y_i : valor pasado
- ϕ : pendiente
- h : tamaño del paso

De acuerdo con esta ecuación la pendiente estimada ϕ se usa para extrapolar desde un valor anterior y_i hasta el nuevo valor y_{i+1} en una distancia h . Mediante el calculo del valor posterior se traza una trayectoria de la solución en donde la resolución de esta curva va estar definida para el paso h .

Con lo mostrado anteriormente se indica que las técnicas de Runge-Kutta nos van a servir para poder determinar el valor de la pendiente ϕ y así poder describir mediante una trayectoria la solución de la ecuación diferencial ordinaria. Entre estas técnicas existen diferentes métodos para poder calcular la pendiente ϕ . Algunos posibles métodos son: Método de Euler, Método de Heun y los Métodos de Runge-Kutta. Debido a su exactitud se utilizan con mucha mayor frecuencia los métodos de Runge-Kutta [8]. A continuación se presenta una descripción de estos métodos.

Métodos de Runge-Kutta

Este método logra la exactitud del procedimiento de la serie de Taylor sin necesitar el calculo de derivadas de orden superior. La forma general de este método es:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (22)$$

La ecuación (22) es bastante similar a la ecuación (21). Pero se puede observar que la pendiente ϕ fue cambiada por una función de tres variables, $\phi(x_i, y_i, h)$. Esta función recibe el nombre de función incremento. Esta representa una pendiente representativa en el intervalo deseado y se define por diferentes constantes los cuales se calculan mediante la evaluación de la ecuación diferencial en cierto punto. La función incremento se describe como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (23)$$

donde a son constantes y las k se calculan de la siguiente forma:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (24a)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (24b)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (24c)$$

$$\cdot \quad (24d)$$

$$\cdot \quad (24e)$$

$$\cdot \quad (24f)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (24g)$$

Al igual que con a , p y q son constantes que se determinan mediante la expansión de la serie de Taylor. Se puede observar en el sistema de ecuaciones (24) que el valor n hace referencia al orden del método de Runge-Kutta. Por ejemplo para un Runge-Kutta de orden dos se tiene que calcular hasta la constante k_2 .

El método de Runge-Kutta más popular es el de cuarto orden. Existen diferentes versiones de este método ya que las constantes cambian. Pero a continuación se presenta el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (25)$$

donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (26a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (26b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (26c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (26d)$$

Este es el método que se utilizara para poder analizar los sistemas dinámicos no lineales. Por ultimo es importante indicar que el método de Runge-Kutta de cuarto orden aplica para resolver también sistemas de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto así como se observo en el sistema de ecuaciones (11) donde se representa una ecuación diferencial de segundo orden como un sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto quiere decir que es posible resolver ese sistema utilizando Runge-Kutta de cuarto orden para cada ecuación diferencial ordinaria.[8]

6.5. Sistemas dinámicos estudiados a profundidad

6.5.1. Péndulo simple

Introducción

El primer sistema dinámico no lineal que se analizó fue el sistema del péndulo simple. Debido a que este sistema es mecánico, resulta intuitivo el comportamiento de este sistema con una señal de entrada. Se analizó la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo con la consideración de la fricción. Los puntos de equilibrio del sistema son:

$$\mathbf{x}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^* = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: \mathbf{x}_1^* es un punto estable y \mathbf{x}_2^* es un punto inestable.

Ecuación diferencial

La ecuación diferencial ordinaria que describe el movimiento del péndulo es la siguiente:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin \theta = u(t) \quad (27)$$

Donde:

- g : es la gravedad
- L : es el largo del péndulo
- γ : es la constante de amortiguamiento
- $u(t)$: Es la señal de entrada

La ecuación (27) cuenta con la señal de entrada, $u(t)$. Esta debido a la naturaleza del sistema se puede analizar como una fuerza externa que se aplica sobre el péndulo. También se puede observar las constantes que acompañan a la velocidad del péndulo y a la posición. A continuación se realiza una lista de los parámetros de entrada y salida del sistema.

Parámetros de entrada y salida

- Parámetros de entrada
 - g : es la gravedad
 - L : es el largo del péndulo
 - γ : es la constante de amortiguamiento
- Parámetros de salida
 - $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$: velocidad del péndulo
 - θ : Posición del péndulo

Sistema de ecuaciones diferenciales

Luego de obtener los parámetros del sistema dinámicos. Se representa nuestro sistema dinámico como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias esto con el fin de obtener un modelado de espacios del sistema. Para ello se realiza una sustitución en la ecuación (27) y se reorganizan las ecuaciones.

$$\dot{\theta} = v \quad (28a)$$

$$\dot{v} = Z(t) - \gamma v - \frac{g}{L} \sin(\theta) \quad (28b)$$

Modelado de espacio de estados

Mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ por lo que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ v \end{bmatrix}$$

y el vector de entradas esta definido de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

Por lo que el modelo de espacio de estados descrito por la ecuación (12) para el péndulo simple se puede formar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\gamma v - \frac{g}{L} \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Mediante la ecuación (29) ya es posible definir la salida del sistema \mathbf{y} mediante el método numérico Runge Kutta 4. Esta metodología se estará realizando en capítulos posteriores.

6.5.2. Péndulo doble

Introducción

El segundo sistema dinámico que se analizó fue el del péndulo doble. Este resulta ser un sistema dinámico no lineal al igual que el péndulo simple pero es un sistema de cuarto orden que presenta caos. Se analizó la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo doble con la consideración de la fricción. El sistema del péndulo doble cuenta con los siguientes puntos de equilibrio:

$$\mathbf{x}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^* = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4^* = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: \mathbf{x}_1^* es un punto estable y tanto \mathbf{x}_2^* , \mathbf{x}_3^* , \mathbf{x}_4^* son puntos de equilibrio inestables.

Debido a la complejidad del sistema este ya se encuentra expresado como un sistema de ecuaciones diferenciales. El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que describe el movimiento del péndulo doble se presentan a continuación:

Sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{v}_1 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)(g/l_1 \sin(\theta_2) - (v_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - l_2/l_1((m+1)g/l_2 \sin(\theta_1) + (v_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - \alpha v_1}{m + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (30a)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)(g/l_2(m+1) \sin(\theta_1) - (v_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - (m+1)l_1/l_2(g/l_1 \sin(\theta_2) + (v_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)) - \beta v_2}{m + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (30b)$$

$$\dot{\theta}_1 = v_1 \quad (30c)$$

$$\dot{\theta}_2 = v_2 \quad (30d)$$

Donde:

- g : es la gravedad.
- m : es una relación racional entre la masa del primer péndulo y la masa del segundo.
- l_1 : es el largo del primer péndulo.
- l_2 : es el largo del segundo péndulo.
- α : factor de amortiguamiento del primer péndulo.
- β : factor de amortiguamiento del segundo péndulo.

Parámetros de entrada y salida

- Parámetros de entrada
 - g : es la gravedad
 - m : es una relación racional entre la masa del primer péndulo y la masa del segundo.
 - l_1 : es el largo del primer péndulo.
 - l_2 : es el largo del segundo péndulo.
 - α : factor de amortiguamiento del primer péndulo.
 - β : factor de amortiguamiento del segundo péndulo.
- Parámetros de salida
 - v_1 : velocidad del péndulo 1
 - θ_1 : Posición del péndulo 1
 - v_2 : velocidad del péndulo 2
 - θ_2 : Posición del péndulo 2

Modelado de espacio de estados

Mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene el siguiente vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ por lo que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_1 \\ \theta_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

y el vector de entradas esta definido de la siguiente forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

En este caso la señal de entrada $Z(t)$ puede ser colocada en cualquier componente del vector \mathbf{u} , esto solo dependerá de a que componente del vector de estado se quiera alterar mediante la señal de entrada.

El modelado de espacio de estados descrito por la ecuación (12) para el péndulo doble se puede formar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dot{v}_1 \\ v_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

Donde: tanto v_1 y v_2 están descritos en el sistema de ecuaciones (30).

Mediante la ecuación (31) ya es posible definir la salida del sistema \mathbf{y} mediante el método numérico Runge Kutta 4. Esta metodología se estará realizando en capítulos posteriores.

6.5.3. Oscilador de Van Der Pol

Introducción

El tercer sistema dinámico que se analizó fue el del oscilador de Van Der Pol con una respuesta forzada mediante una señal de entrada. En este caso el sistema se analiza de igual forma como se analizaron los sistema mecánicos: péndulo simple y péndulo doble debido a que es un sistema no lineal aunque este sistema también cuenta con las características de ser un oscilador. El punto de equilibrio para este sistema es:

$$\mathbf{x}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: \mathbf{x}_1^* es un punto de equilibrio inestable, pero las trayectorias a partir de él tienden a un ciclo límite por lo que el sistema tiende a oscilar.

Ecuación diferencial

La ecuación diferencial ordinaria que describe al oscilador de Van Der Pol es:

$$\ddot{x}_1 - \epsilon(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + x_1 = z(t) \quad (32)$$

Donde:

- ϵ : parámetro de estabilidad del oscilador ϵ debe ser mayor a cero.
- $z(t)$: Señal de entrada

Parámetros de entrada y salida

- Parámetros de entrada
 - ϵ : parámetro de estabilidad del oscilador
- Parámetros de salida
 - x_1 : Determina la posición.
 - x_2 : Determina la velocidad de oscilación.

Sistema de ecuaciones diferenciales

Se representa nuestro sistema dinámico como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para ello se realiza una sustitución en la ecuación (32).

$$\dot{x}_2 = z(t) + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \quad (33a)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (33b)$$

Modelado de espacio de estado

Mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ por lo que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y el vector de entradas esta definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

Por lo que el modelo de espacio de estados descrito por la ecuación (12) para el Oscilador de Van Der Pol se puede formar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \epsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (34)$$

Mediante la ecuación (34) ya es posible definir la salida del sistema \mathbf{y} mediante el método numérico Runge Kutta 4. Esta metodología se estará realizando en capítulos posteriores.

6.5.4. Sistema de Lorenz

Introducción

El cuarto sistema dinámico que se analizó fue el del sistema de Lorenz con una respuesta forzada mediante una señal de entrada. En este caso el sistema es muy similar al oscilador de Van Der Pol, con la diferencia que este resulta ser un sistema de tercer orden. El punto de equilibrio para este sistema es:

$$\mathbf{x}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde: \mathbf{x}_1^* es un punto de equilibrio inestable, pero las trayectorias a partir de él tienden a un ciclo límite por lo que el sistema tiende a oscilar.

Este sistema no cuenta con una representación mediante una única ecuación diferencial por lo que su representación es mediante un sistema de ecuaciones diferenciales:

Sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (35a)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \quad (35b)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (35c)$$

Donde:

- σ : es un parámetro del oscilador que se conoce como Número de Prandtl debe ser mayor a cero.
- ρ : es un parámetro del oscilador que se conoce como Número de Rayleigh debe ser mayor a cero.
- β : es un parámetro debe ser mayor a cero.
- $z(t)$: Señal de entrada

Parámetros de entrada y salida

- Parámetros de entrada
 - σ : es un parámetro del oscilador que se conoce como Número de Prandtl debe ser mayor a cero.
 - ρ : es un parámetro del oscilador que se conoce como Número de Rayleigh debe ser mayor a cero.
 - β : es un parámetro debe ser mayor a cero.
 - $z(t)$: Señal de entrada
- Parámetros de salida
 - x : Determina la posición x.
 - y : Determina la posición y.
 - z : Determina la posición z

Modelado de espacio de estado

Mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ por lo que:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

y el vector de entradas esta definido por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

En este caso la señal de entrada $Z(t)$ puede ser colocada en cualquier componente del vector \mathbf{u} , esto solo dependerá de a que componente del vector de estado que se desean alterar mediante la señal de entrada.

Por lo que el modelo de espacio de estados descrito por la ecuación (12) para el Sistema de Lorenz se puede formar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ x(\rho - z) - y \\ xy - \beta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

Mediante la ecuación (34) ya es posible definir la salida del sistema \mathbf{y} mediante el método numérico Runge Kutta 4. Esta metodología se estará realizando en capítulos posteriores.

6.6. Generar espacios acústicos mediante la operación de convolución

En esta sección se describe el uso de la operación de convolución para generar espacios acústicos y así poder describir la reverberación natural de un sitio en específico. El método para implementar la convolución es mediante matemática discreta por lo tanto la operación de convolución será descrita de manera finita.

6.6.1. El problema de la reverberación

Si se considera una simulación acústica de un espacio que hace referencia a una sala de conciertos se puede simular la señal que se propaga desde la fuente de sonido hacia el oído del oyente con un simple delay y una atenuación escalada. El sonido de la fuente llega al usuario por diversas direcciones ya que este ha sido reflejado por diversos muros de la sala de concierto, cada una de estas ondas sería representada por un delay y un factor de atenuación. Por lo que se concluye de manera general que cualquier reflexión de audio puede ser simulada por una línea de delays con su respectivo factor de escala a esto se le conoce como “tapped delay line” (TDL).[9]

Un TDL es un tipo de delay que extrae la señal de audio, aplica el delay y lo escala por un factor de atenuación para luego brindar una salida tap que se puede sumar con otro TDL y al final tener una salida total de todos los delays sumados. A continuación en la Figura 1 se muestra el diagrama de bloques que describe un TDL

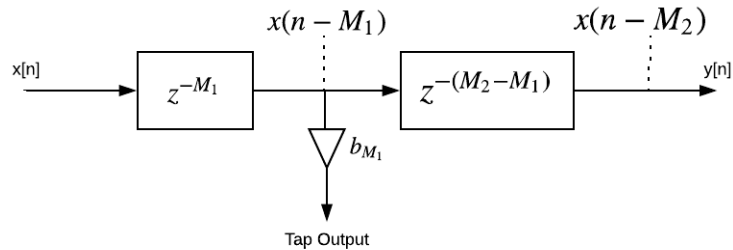


Figura 1: Diagrama de bloques de un TDL

Donde:

- $x[n]$: Señal de entrada.
- M_1 : es la cantidad de delay que se le aplica de primero a la señal de entrada.
- b_{M_1} : Factor de atenuación para el primer delay.
- M_2 : es la cantidad de delay que se le aplica de segundo a la señal de entrada.
- $y[n]$: Señal de salida.

Por lo que en principio se puede indicar que un conjunto de TDLs puede llegar a simular cualquier espacio de reverberación, ya que la reverberación se define como todos los ecos que se producen por las diferentes caminos que tiene la propagación acústica de la onda de sonido hacia el oyente. El problema con este tipo de reverberación es que resulta ser muy cara de manera computacional, por el calculo excesivo de los diversos TDLs que representan los ecos de nuestro espacio 3D.[9]

6.6.2. Implementación formal de la reverberación mediante convolución

Como se explicó anteriormente para simular el eco de nuestra señal de audio original se utiliza un TDL. Por lo que si queremos desarrollar un diagrama de bloques que defina la interacción de tres fuentes de sonido a los dos oídos del oyente y sus respectivos TDLs debemos realizar una combinación de sumas de las diferentes fuentes. Por lo que el diagrama estaría dado de la siguiente forma:

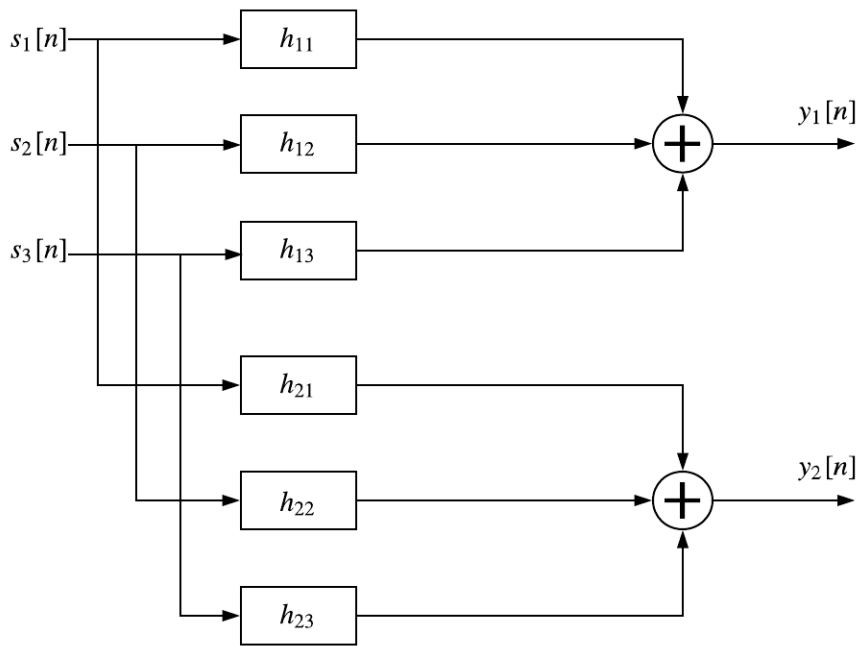


Figura 2: Diagrama de bloques de una reverberación

En donde:

- $s_1[n]$, $s_2[n]$ y $s_3[n]$: son las fuentes de audio, la entradas del sistema.
- h : se le conoce como respuesta impulsional de la habitación y esta determinada por el delay y la constante de atenuación, el cual es simulado mediante los TDLs.
- $y_1[n]$ y $y_2[n]$: son los oídos de el oyente, las salidas de audio después de la reverberación.

Mediante este diagrama de bloques se determinó que la ecuación de diferencias que

describe el efecto de reverberación esta descrita por la siguiente expresión:

$$y_i[n] = \sum_{j=1}^3 s_j * h_{ij}[n] = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^{M_{ij}} s_j[m] h_{ij}[n - m], \quad i = 1, 2 \quad (37)$$

Por lo tanto se puede observar que cualquier reverberación puede ser simulada mediante una convolución. Es importante destacar que la convolución a nivel discreto resulta equivalente a un filtro FIR, por lo que debido a que M_{ij} es la cantidad de muestras que abarca la convolución también se puede hacer referencia al orden del filtro FIR equivalente.[9]

6.7. Procesamiento de audio no lineal

Así como se indico en el capítulo de justificación no existe mucho material informativo sobre el tema principal de este trabajo de graduación, aunque si existe el área de procesamiento no lineal de señales, para poder emular efectos como: distorsiones, compresores, imitadores, etc. Esta área utiliza funciones matemáticas no lineales para poder modelar de manera digital los efectos mencionados anteriormente.

6.7.1. Introducción

En la primera parte del capítulo se determina que una señal que pasa por un procesamiento no lineal es aquella que en su salida presenta armónicos. Por lo mismo es que una de las pruebas para verificar que una señal acaba de pasar por un bloque de procesamiento no lineal es utilizar una señal sinusoidal de entrada debido a que se conoce que una señal sinusoidal en el dominio de la frecuencia se representa como una delta de Dirac en su frecuencia fundamental con magnitud dada por la amplitud de esta. Por lo tanto si la señal sinusoidal $x[n] = A \sin(2\pi f_1 T n)$ se introduce en un sistema no lineal, como se muestra en la Figura 3 la salida $y[n]$ presentara en su salida diferentes armónicos adicionales al que presenta en su frecuencia fundamental.[3]

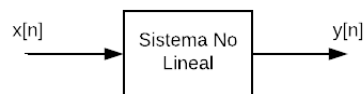


Figura 3: Diagrama de bloques de procesamiento de audio no lineal

Debido a que existen diferentes tipos de efectos no lineales este libro trata de representar el procesamiento no lineal de estos efectos en tres categorías las cuales se especificaran con mayor detalle a continuación. Estas categorías son:

1. Controles dinámicos de rango. Estos efectos son los que menos armónicos introducen

en la señal de audio y sirven para mejorar el desenvolvimiento de la señal musical a lo largo del tiempo.

2. La creación de efectos que producen bastantes armónicos como distorsiones u Overdrive para guitarra.
3. Los efectos psicoacústicos como excitadores o Enhacer. Colocan armónicos en ciertas frecuencias para mejorar las características auditivas de la señal de audio.

Es importante indicar que antes de realizar el procesamiento de audio no lineal se debe colocar una etapa de filtros pasa baja con frecuencia de corte ubicada en $f_s/2$ para poder evitar la distorsión Aliasing. La cual se presenta en el sistema cuando uno de los armónicos que genera el sistema no lineal se encuentra fuera de la frecuencia máxima dada por el teorema de muestreo, la cual es $f_s/2$. Por lo mismo se debe realizar una etapa de filtros pasa baja en la señal de entrada asegurando que su ancho de banda no supere la frecuencia máxima.[3]

6.7.2. Controles dinámicos de rango

El procesamiento no lineal mediante controles dinámicos hace referencia a dispositivos de amplificación en donde la ganancia de estos está determinada mediante la magnitud de la señal de entrada. Dentro de estos sistemas se encuentran: compresores, limitadores y expansores. Cada uno de ellos tiene una curva estática que los describe. Para este tipo de procesamiento no lineal se utiliza la topología determinada por la Figura 4. Esta con el fin de obtener la siguiente ecuación.[3]

$$Y = X + G \tag{38}$$

Donde:

- Y: es el nivel o magnitud de la señal de salida.
- X: es el nivel o magnitud de la señal de entrada.
- G: es el nivel o magnitud de la señal de ganancia.

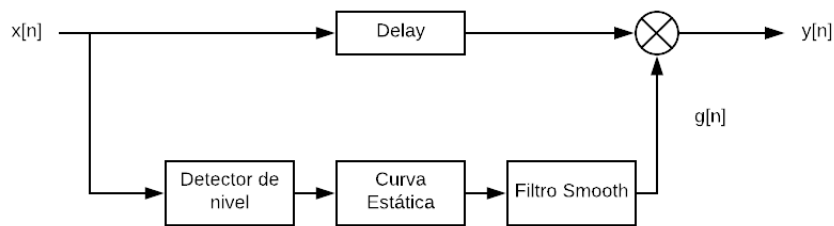


Figura 4: Diagrama de bloques control dinámico de rango

En la topología mostrada en la Figura 4 cada bloque realiza la siguiente función:

- Detector nivel: sirve para poder obtener el nivel o magnitud actual de la señal de entrada. Este se puede realizar mediante un rectificador de onda completa y un promediador AR. Las topología más específicas se encuentra en el capítulo 4, sección 4.2 Dynamic range control del libro DAFX: Digital Audio Effects.
- Curva estática: es el bloque que nos indica el comportamiento de la señal de ganancia. Es en este bloque donde se describe si se implementa un compresor, limitador o expansor.
- Filtro smooth: su principal función es evitar los cambios abruptos de nivel en la señal de Gain.
- Delay: sirve para poder retrasar la muestra y así sopesar con cualquier delay que se produzca en la etapa de ganancia.
- Al final se encuentra un bloque operador en donde se multiplica la señal de entrada con el respectivo factor de ganancia.

A continuación se explica como funciona cada uno de los diferentes efectos dinámicos mencionados anteriormente.

Limitadores

La función de un limitador es controlar los picos de magnitud de la señal de entrada mediante cambios sutiles a la dinámica del sistema. Por lo mismo es que si la señal de entrada presenta niveles más altos a lo establecido en el umbral límite del limitador (Threshold Limiter "LT"). Este corta la señal y mantiene constante el valor máximo de esta. A continuación se presenta la función por partes que describe la componente G del limitador.

$$G = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \text{si } X < LT \\ LT - X & \text{else.} \end{cases} \quad (39)$$

Con esta ecuación podemos determinar que la salida mostrada en la ecuación 38 no puede ser mayor que el umbral límite del limitador.

Compresor y expansor

Al igual que el limitador estos efectos funcionan mediante el nivel o magnitud que tenga la señal de entrada. La diferencia es que el compresor no elimina la dinámica del sistema cuando esta supera el umbral límite. El compresor solo reduce la dinámica del sistema para que esta se encuentre en los rangos permitidos. Esto hace que la señal mantenga su dinámica y que esta se encuentre dentro de los rangos permitidos. Un expansor hace lo contrario que el compresor. Cuando una señal tiene cambios pequeños en su dinámica el expansor realiza un mapeo de estos cambios para que se transformen en cambios grandes. A continuación se presenta la función por partes que describe un compresor para dinámica que rebase el umbral superior y un expansor para los que rebasen un umbral inferior.[3]

$$G = \begin{cases} CS(CT - X) & \text{si } X < CT \\ 0 \text{ dB} & \text{si } ET \leq X \leq CT \\ ES(ET - X) & \text{si } X < ET \end{cases} \quad (40)$$

Donde:

1. CS: es el parámetro que indica la pendiente que va a tener la curva del compresor.
2. ES: es el parámetro que indica la pendiente que va a tener la curva del expensor.
3. CT: umbral límite del compresor.
4. ET: umbral límite del compresor.

Existen otros efectos que se explican a su totalidad en este capítulo como: los Noise gate o los De-esser. Pero no se entrara a mucha explicación en este resumen debido a que el procedimiento de análisis es muy similar al presentado con los compresores, limitadores y expensor.

6.7.3. Efectos de saturación como distorsiones

En la primera parte de esta sección del libro determina el origen histórico de la saturación basada en la guitarra eléctrica luego se determina los procesos que se utilizaron para poder crear aproximaciones a estos diferentes tipos de saturaciones mediante procesamiento no lineal. Es importante indicar que la saturación que se determina en este libro esta enfocado en la presentada en los amplificadores de válvulas fender, Vox, Marshall y Mesa-Boogie. También se debe indicar que la saturación la dividen en tres diferentes categorías:

1. Overdrive: es el primer estado de la saturación. La mayor parte del comportamiento de este efecto resulta ser lineal y luego presenta un comportamiento no lineal que tiene una transición suave con respecto a la región lineal. El procesamiento no lineal para implementar este tipo de saturación consta en implementar una función matemática que describa el comportamiento descrito anteriormente. El vector de entrada que tiene la señal de audio entra a esta función matemática y la salida es la señal con overdrive.[3] La función matemática que describe esta señal es la mostrada en la ecuación 41

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ \frac{3-(2-3x)^2}{3} & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (41)$$

donde:

a) x: es la señal de entrada.

2. El segundo estado es la distorsión, este efecto mayormente opera en la sección no lineal. Este estado describe una buena parte del proceso en donde el tubo empieza a calentarse y a presentar efectos como zumbidos.[3] Al igual que en el overdrive el procesamiento no lineal para poder representar este efecto en digital esta basado en una función matemática representada en la siguiente ecuación 42

$$f(x) = \text{sign}(x)(1 - e^{-|x|}) \quad (42)$$

3. El ultimo estado se determina fuzz. Y tiene la característica que todo el efecto se encuentra operando en la sección no lineal. Para este tercer estado no se presenta una implementación digital en el libro.

También se tiene otros efectos que se basan en generar armónicos y subarmónicos a conveniencia. Para lo mismo se utilizan diferentes funciones digitales sencillas como detectar cuando la señal esta por debajo del cero y cortar la señal o mantenerla constante en cero esto produce que la señal tenga armónicos en los múltiplos pares. La señal que presenta estos efectos se dice que fue rectificada a media onda. También esta la señal que esta rectificada completamente para implementar esta señal se utiliza la función matemática de valor absoluto $|x|$. Esta función presenta armónicos pares pero elimina a su totalidad el armónico fundamental de la señal original.[3]

Por último podemos concluir que la mayor parte de procesamiento no lineal manipulado en esta sección se encuentra determinada mediante la evaluación de la señal de entrada en diferentes funciones matemáticas que describen mediante aproximaciones el comportamiento real de la saturación producida mediante los diversos circuitos analógicos.[3]

6.7.4. Excitadores y enhancer

Un excitador es un efecto que enfatiza o desenfatisa ciertas frecuencias de una señal de entrada con el único fin de modificar el timbre de la señal. Los excitadores pueden agregar brillo a la señal sin necesidad de agregar una ecualización. El resultado del excitador, el cual se determina como una señal más brillante, se puede realizar a menudo agregando pequeñas distorsiones a las frecuencias altas de la señal de entrada, otra alternativa se logra mediante el cambio de fase. El excitador tiene dos parámetros que se pueden llegar a variar. Uno de ellos es el parámetro de “Mix” y el otro es el parámetro de frecuencia. El parámetro de Mix, hace referencia a la cantidad de efecto de excitador que va a tener la señal. El parámetro de frecuencia determina la frecuencia de la señal de entrada a la que va a empezar a realizar el efecto el excitador. Por último en la Figura 5 podemos observar la topología que se utiliza para poder implementar el efecto del excitador.[3]

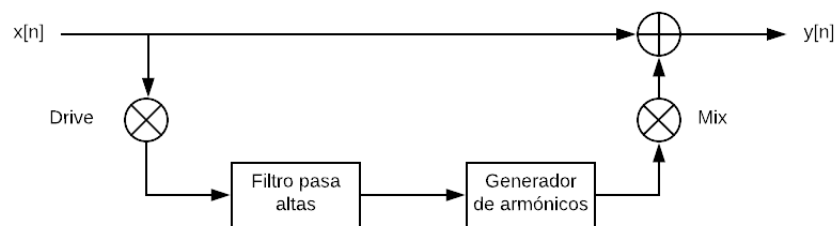


Figura 5: Diagrama de bloques de excitador

Podemos observar que el bloque de generador de armónicos se puede realizar con lo presentado en la sección 5.1.2.

Por último se presenta el efecto titulado enhancer. El cual combina diferentes tipos de

ecualizaciones con procesamiento no lineal. Este realiza una ecualización basada en la psicoacústica, con cambios muy minuciosos. Estos cambios pueden referirse a pequeñas distorsiones en ciertas frecuencias. En este efecto también se produce una ecualización que mejora los graves, corta los medios y brinda un refuerzo a las altas frecuencias [3]. El diagrama de bloques que describe este tipo de efectos se muestra en la Figura 6

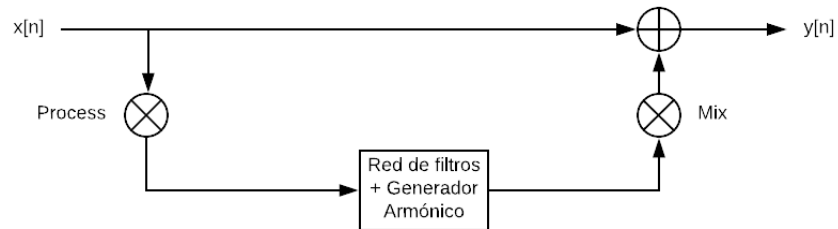


Figura 6: Diagrama de bloques de enhancer

Finalmente, se puede concluir que la mayoría de procesamiento no lineal en audio se basa en diagramas de bloques que se realizan según la frecuencia o al nivel o magnitud de la señal de entrada y en modelos matemáticos que simulen el comportamiento de efectos analógicos como distorsiones que se encontraban presentes en los circuitos electrónicos de audio.

Comprobación de efectos musicales existentes mediante axiomas

En este capítulo se define formalmente la métrica utilizada para medir la musicalidad de los efectos de audio basados en sistemas dinámicos no lineales. Como se aclaró en el capítulo 6 sección 6.3 debido a que la musicalidad resulta ser un tema subjetivo intentar obtener una manera objetiva de evaluar este concepto es un desafío que involucra de muchas herramientas para poder solucionarlo. En esta investigación se utilizara el recurso de los axiomas musicales teniendo en cuenta que porque un efecto no cumpla rigurosamente con esto no se debe descartar a su totalidad y se determina que se necesita utilizar otro tipo de métrica para poder determinar esto. Sin embargo si el efecto cumple con los axiomas a su totalidad se determina que el efecto es musical.

El objetivo principal de este capítulo es aplicar la métrica desarrollada a efectos existentes y observar que tan cercanos a esta se encuentran o que tan musicales pueden llegar a ser. Los resultados brindaran un panorama más amplio de lo que produce un efecto no lineal en el audio y que tan riguroso se debe ser con la métrica seleccionada. Para poder obtener resultados consistentes con lo indicado anteriormente se utilizaron efectos musicales de uso comercial los cuales por criterio auditivo y aplicación en la industria de la música se consideran musicales. Los efectos que se utilizaron fueron:

- Efecto Analógico: Overdrive/Distortion OS-2 BOSS [10]
- Efecto Digital: Tritik, Krush (Distorsión) [11]
- Efecto Digital: HY-Plugins, HY-TP2 (Tremolo) [12]

Estos efectos son no lineales por lo que no se espera un comportamiento intuitivo de los mismos. Los resultados de este capítulo son fundamentales para el desarrollo de la discusión final de la investigación.

7.1. Definición de la métrica utilizada para indicar la musicalidad del efecto de audio

Se puede determinar mediante el capítulo 6 que existen tres axiomas musicales que indican la musicalidad de una señal. Estos axiomas se pueden resumir como:

- Axioma 1: Las frecuencias analizadas se encuentran en las frecuencias dadas por el estándar musical actual, Temperamento Igual.
- Axioma 2: Las frecuencias obtenidas se puedan combinar entre ellas para formar los pilares fundamentales de la armonía musical: Intervalos, Triadas y acordes.
- Axioma 3: Estos Intervalos, Triadas o acordes tienen una única representación que puede ser ambigua.

De lo descrito anteriormente se puede determinar que para nuestros efectos musicales el axioma 2 se cumple ya que las frecuencias que estamos analizando provienen de un instrumento musical y por lo tanto estas pueden formar intervalos, triadas o acordes musicales. Ahora bien el Axioma 1 y el Axioma 3 serán evaluados mediante métodos gráficos para determinar la musicalidad de nuestros efectos.

Por lo tanto esta métrica se basa en analizar los armónicos que producen los efectos no lineales sobre una nota musical fundamental, (440 Hz). Lo primero a evaluar será el axioma 1 este se llegará a cumplir si los armónicos adicionales presentados por nuestro efecto de audio musical se encuentran dentro de nuestras frecuencias musicales producidas por el estándar musical, Temperamento Igual.

Si el axioma 1 se cumple se valida el axioma 3 en donde se analiza si los intervalos o triadas producidas por estos nuevos armónicos y la nota fundamental producen un acorde que cuenta con una sola representación.

Es importante indicar que esta métrica se define para todo armónico que se encuentre a una mayor frecuencia que la nota fundamental. Así que no se consideraran los armónicos de menor frecuencia.

Por último, en base a los resultados que se mostraran a continuación, basado en efectos musicales comerciales, también se realizara en un capítulo posterior una comparación con los resultados que se obtengan de los nuevos efectos basados en sistemas dinámicos no lineales para determinar que tan musicales y comerciales pueden llegar a ser estos.

7.2. Análisis efecto analógico

Para realizar estas mediciones se utilizó el osciloscopio Tektronix TDS2022C [13]. Primero se midió la señal de la guitarra limpia por lo que se hizo sonar la nota A_4 (440Hz). En la Figura 7 se puede observar que la guitarra por su propia naturaleza, siendo un instrumento de cuerda, produce ciertos armónicos. Esto se interpreta como el timbre del instrumento, quiere decir que estos armónicos adicionales enriquecen la nota fundamental y esto brinda un cierto sonido que diferencia tocar la misma nota en un piano o un violín. Es importante también notar que los armónicos adicionales se encuentran dentro de las frecuencias musicales por lo que no se produce ningún tipo de disonancia, esto cumple con el Axioma

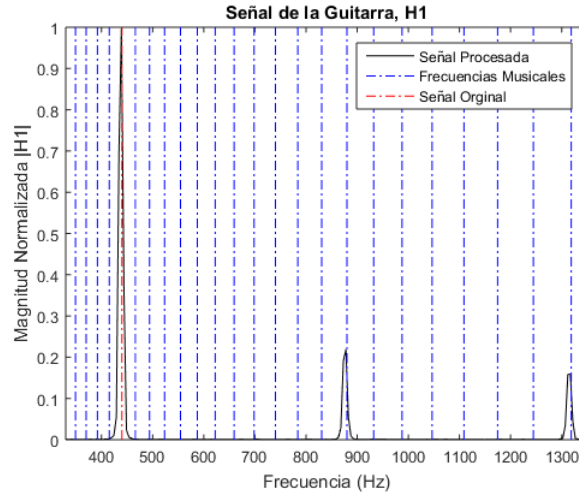


Figura 7: Señal limpia de la guitarra, nota A_4 . Las líneas azules son las frecuencias musicales, línea roja frecuencia fundamental

1. Finalmente, los armónicos que se producen en base a la nota fundamental dan como resultado el siguiente polinomio:

$$A(x) = x^0 + x^{12} + x^{19}$$

El cual resulta ser un polinomio irreducible por lo que se cumple con el axioma 3 y por lo tanto el resultado de la métrica determina que el sonido de la guitarra en limpio es musical.

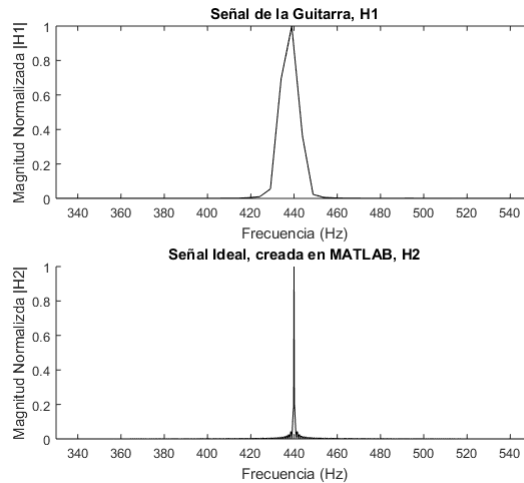


Figura 8: Señal de la guitarra vs señal producida en Matlab

Finalmente, es importante recalcar que cuando se realice el análisis sobre los armónicos producidos mediante el efecto musical no se debe considerar los armónicos producidos por la naturaleza de la guitarra.

Otro resultado que es importante de indicar es que el sonido del instrumento de cuerdas no es perfecto. Mediante la Figura 8 se puede observar que la frecuencia producida por la guitarra tiene un ancho de banda similar a un filtro pasa bandas y la señal producida en MATLAB es más cercana a una delta Dirac, que es la manera en la que también se realiza los fundamentos para nuestros axiomas musicales, por lo que habrá menos rigurosidad a la hora de implementar la métrica. Esto quiere decir que no se descartara estas frecuencias adicionales percibidas por el ancho de banda de la señal analógica y se realizara el análisis basado en la frecuencia central de las mismas.

7.2.1. Efecto Overdrive/Distortion OS-2 BOSS

El primer efecto que se analizó entra en la categoría de efectos no lineales según el capítulo 6. Es un efecto que produce distorsión analógica en la señal de entrada. Por intuición se espera que produzca diversos armónicos en la señal original. En la Figura 9 se puede observar que si se produjeron diversos armónicos en la señal de audio es importante observar la información en el punto que se encuentra en uno de los armónicos esta nos confirma que la magnitud resulta ser bastante menor a la fundamental por lo que se puede intuir que el efecto no se muestra de una manera muy presente.

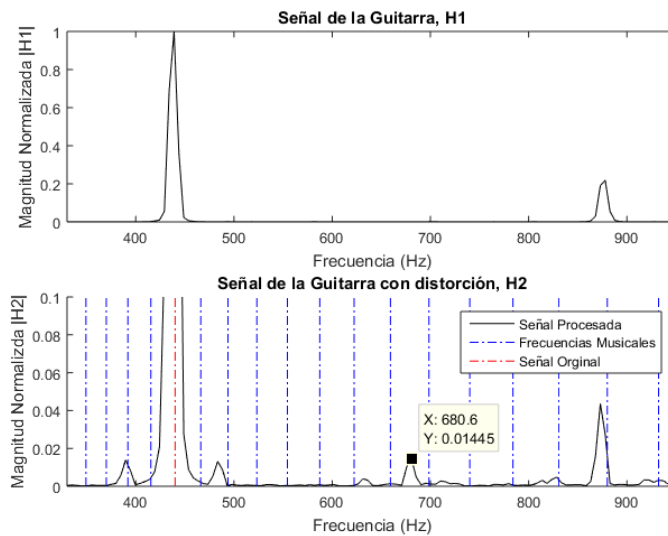


Figura 9: Señal de la guitarra limpia vs señal después de pasar por el efecto de audio Overdrive/Distortion OS-2 BOSS

Al momento de aplicar la métrica a esta prueba se determino que el armónico que se encuentra seleccionado tiene una frecuencia central que se encuentra en una zona de desafinación por lo que nuestro axioma 1 no se cumpliría y por lo tanto no se puede determinar que este efecto es musical.

Observaciones:

- Aunque los resultados obtenidos mediante la métrica no indican nada certero sobre

este efecto es importante notar que un efecto comercial no lineal de uso frecuente no cumple con la rigurosidad de los axiomas musicales. Sin embargo sí aclara la idea de que un efecto no lineal puede llegar a producir diversos armónicos adicionales a la nota fundamental.

- Es importante indicar que la magnitud del armónico aunque era muy pequeña por lo que se determina que este efecto no tiene mucha incidencia sobre la frecuencia seleccionada.

Por lo tanto, debido a que las mediciones analógicas son más susceptibles al ruido y los instrumentos de medición que se tienen no son los ideales para realizarlas. Se realizaron mediciones de ámbito digital.

7.3. Análisis efectos digitales

Para obtener los resultados en esta sección se utilizó la interfaz de audio: Behringer U-Phoria UMC404HD [14] y el software Reaper v5.91. Al igual que lo realizado en el análisis del efecto de audio analógico primero se obtiene la muestra de la señal de la guitarra en limpio. En la Figura 10 se puede observar un comportamiento similar al indicado en la Figura 8, sin embargo la señal de audio muestra una menor cantidad de ancho de banda por lo que la medición digital se acerca más al modelo idealizado. También se puede observar que al igual que la Figura 7, la señal muestra armónicos naturales del instrumento por el concepto de timbre explicado anteriormente aunque también estas tienen menor ancho de banda y menor magnitud. Por lo tanto, se puede concluir que las mediciones obtenidas en digital presentan resultados más explicativos y más cercanos a la teoría, por la menor susceptibilidad al ruido de la herramienta de medición.

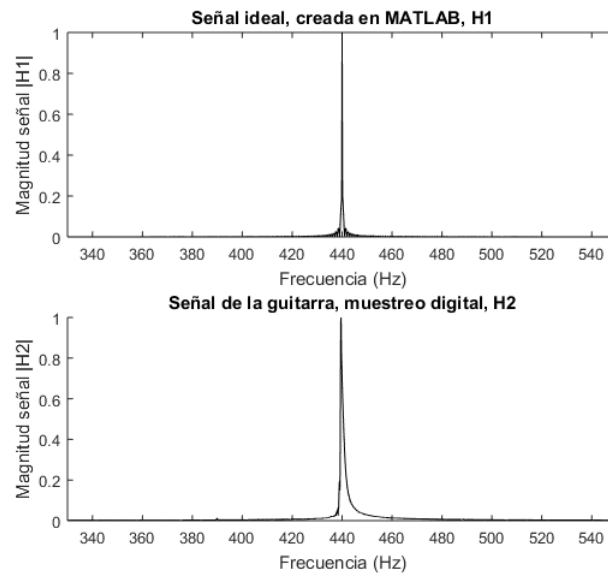


Figura 10: Señal producida en Matlab vs señal de la guitarra digital

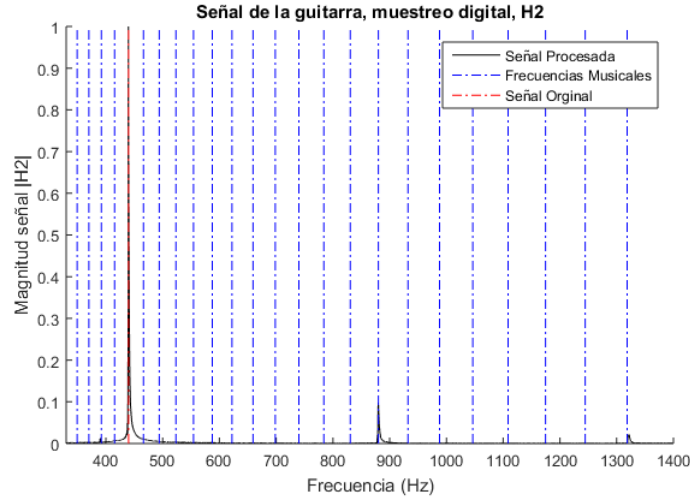


Figura 11: Señal producida en Matlab vs señal de la guitarra digital, armónicos

7.3.1. Tritik, Krush

El primer efecto digital que se analizó es el que produce una distorsión en la señal de audio. Es importante indicar que este efecto es mucho más presente auditivamente a comparación que el efecto de distorsión analógica. Por lo tanto se intuye que los armónicos producidos por este efecto serán de mayor magnitud, a diferencia de los que se pueden observar en la Figura 9.

En la Figura 12 se puede observar que efectivamente el efecto produce mayor cantidad de armónicos en la señal de audio. A primera vista se puede llegar a notar que uno de los dos armónicos producidos, sin tomar en cuenta el armónico producido por la naturaleza de la guitarra, se encuentra exactamente en su respectiva frecuencia musical. Sin embargo el armónico con mayor magnitud se encuentra cercano a la frecuencia fundamental por lo que debido a esto el axioma 1 no se cumpliría y no se puede indicar si el efecto es musical o no. Ahora bien que ocurre si se asume que este armónico si se encuentra en su respectiva frecuencia musical. El polinomio que describe al acorde obtenido por las frecuencias adicionales por el efecto y las provenientes de la guitarra es el siguiente:

$$A(x) = 1 + x^5 + x^{12} + x^{15}$$

Este polinomio solo tiene una representación por lo que se puede indicar que el efecto de audio es musical. Por lo tanto mediante el supuesto, los resultados de la métrica si estarían acertados con respecto a la vida real. Ya que este es un efecto comercial que se utiliza habitualmente.

Observaciones:

- Aunque pareciera que el armónico de mayor magnitud es el único con información valiosa. También es importante indicar que el armónico de menor magnitud se encuentra en los rangos de los armónicos producidos en el efecto de audio analógico, Figura 9, pero como se indico anteriormente este efecto es mucho más pronunciado en la muestra

de audio que el efecto analógico (esto por la misma naturaleza del efecto). Por lo que con esto se concluye que la magnitud de los armónicos adicionales producidos por el efecto no lineal están directamente relacionados con la cantidad de efecto que tenga nuestra señal original y la naturaleza el efecto. Por lo tanto aunque el armónico sea muy pequeño es importante considerarlo a la hora de realizar el análisis mediante los axiomas. También se concluye que más armónicos indican un comportamiento más pronunciado del en efecto en la señal limpia de audio.

- Aunque el segundo armónico no se encontraba exactamente en su respectiva frecuencia musical es importante darse cuenta que el efecto puede considerarse musical asumiendo que esta frecuencia esta en el centro. Por lo que al momento de aplicar la prueba a los nuevos efectos no se sera totalmente rigurosos ya que ni los efectos comerciales cumplen con esta característica que es demasiado idealizada.

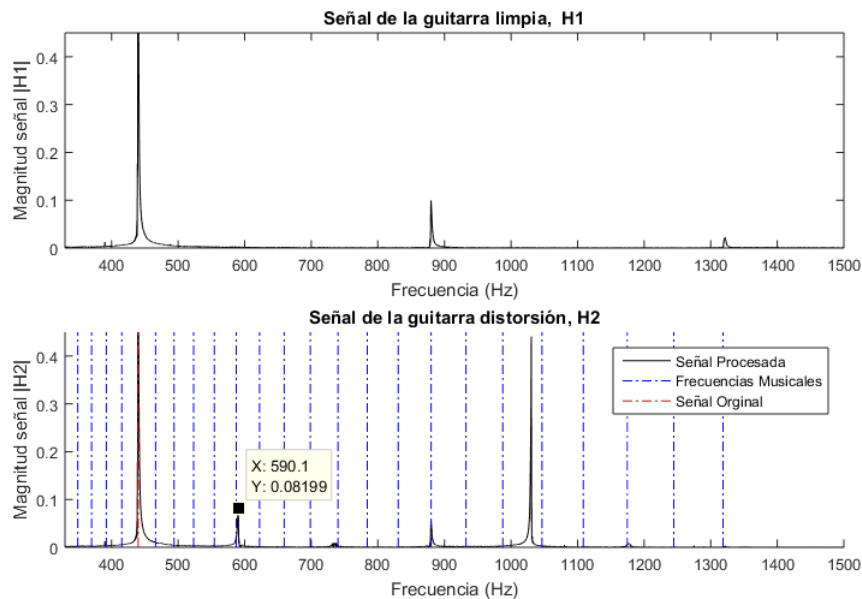


Figura 12: Señal de la guitarra digital sonido limpio vs señal de la guitarra distorsión

7.3.2. HY-Plugins, HY-TP2

Por último se analizó un efecto que no se basa en distorsión sino que en modulación de audio. El efecto de tremolo se estudio en dos diferentes configuraciones. Como el efecto tiene una perilla titulada “rate” esta se cambio para ver la evolución del efecto. El “rate” es una perilla que aumenta la cantidad de repeticiones a la cual la señal original se activa [3]. Este efecto al igual que los anteriores es un efecto no lineal.

En la Figura 13 se puede observar que se producen dos armónicos adicionales a la señal original que son simétricos con respecto al armónico fundamental, recordemos que solo se tomaran los armónicos que se encuentran más arriba en Hz que nuestra frecuencia fundamental como se explicó al inicio del capítulo, en este caso el “rate” se encuentra a 75 %. Los resultados de la métrica indicarían que este efecto no se puede determinar como musical

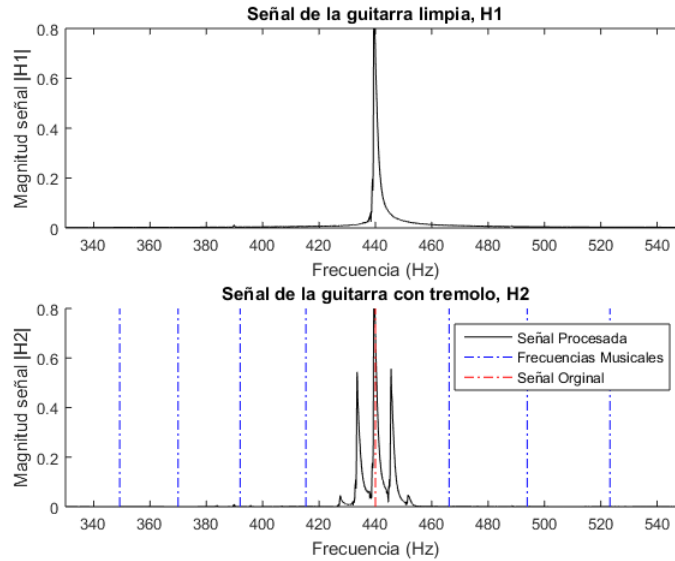


Figura 13: Señal de la guitarra digital sonido limpio vs Señal de la guitarra con tremolo. Variable rate 75 %

ya que no se cumple con el axioma 1. En este caso no se puede realizar una aproximación del armónico ya que este se encuentra más cercano a la frecuencia fundamental que al siguiente armónico y se concluiría que no se produce ningún efecto. Por lo tanto, en este caso la musicalidad del efecto no puede llegar a ser medida mediante los axiomas. Sin embargo cuando el parámetro “rate” se encuentra a 100 % como se puede observar en la Figura 14 el armónico tiende a una de las frecuencias musicales y por lo tanto se cumple el axioma 1 y el axioma 3 ya que el polinomio que se forma es de dos frecuencias por lo que tiene una única representación. En este caso si se puede indicar que el efecto es musical mediante la validación de los axiomas.

Observaciones:

- Los efectos no lineales analizados todos produjeron nuevos armónicos sobre la señal original por lo que es muy probable que los nuevos efectos musicales basados en sistemas dinámicos no lineales produzcan armónicos adicionales.
- Es muy importante la configuración de los parámetros para los efectos no lineales. Por lo que en ciertas configuraciones puede que la validación de la métrica nos indique que es musical y en otros no pueda determinar nada en absoluto. Se deben analizar diferentes configuraciones del efecto.

Finalmente, se concluye que a pesar de que los efectos analizados anteriormente todos son de uso comercial y, por lo tanto, se consideran musicales. La métrica obtenida mediante axiomas no resulta ser muy robusta ya que no logra identificar todos los casos. Sin embargo sí da una noción cercana como en el caso de los efectos de distorsión. Una combinación entre esta métrica y la aplicación musical mediante una pista de audio de los nuevos efectos basados en sistemas dinámicos no lineales es una forma más completa de indicar que el efecto producido es musical.

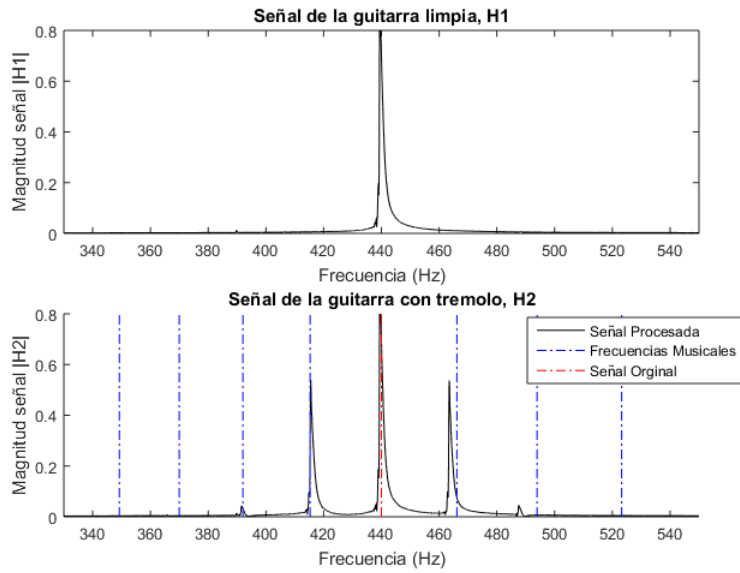


Figura 14: Señal de la guitarra digital sonido limpio vs Señal de la guitarra con tremolo. Variable rate 100 %

En este capítulo se describe el procedimiento que se utilizó de primera instancia para poder realizar un efecto musical de audio basado en un sistema dinámico no lineal. Es importante recalcar que aunque el procedimiento presentado a continuación no fue utilizado al final debido a que no presentaba los resultados deseados fue la base fundamental para poder llegar a la metodología final. Finalmente, es importante indicar que los resultados que se presentan en este capítulo no son tan detallados ya que su único fin es demostrar porqué esta metodología no presentaba los resultados deseados. Por lo mismo es que esta metodología nunca fue implementada en tiempo real.

8.1. Metodología

8.1.1. Introducción

La metodología presentada a continuación esta diseñada de tal forma de que cualquier lector pueda replicarla para así obtener diversos efectos musicales mediante cualquier sistema dinámico no lineal. Los sistemas dinámicos no lineales que se utilizaron para crear su implementación como efectos musicales de audio fueron los expuestos en la sección 6.5 del capítulo de marco teórico. Es importante indicar que existen diferentes fases las cuales de manera general están divididas en la descripción matemática del sistema no lineal, el uso de métodos numéricos para resolver el sistema y la interacción con la señal de audio. En esta metodología se pretende utilizar la señal de audio como entrada del sistema dinámico no lineal. Esto quiere decir que si un sistema dinámico no lineal esta descrito mediante su modelo de espacio de estados de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (43)$$

En donde: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa la tasa de cambio de el vector de estados como función del estado \mathbf{x} y la entrada \mathbf{u} y $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ representa la salida del sistemas como una función de del estado \mathbf{x} y la entrada \mathbf{u} .

El vector \mathbf{u} el cual es p dimensional tendrá la señal de audio en alguna de sus componentes. Por ejemplo sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ y $Z(t)$ la señal de audio. Entonces el vector de entradas a nuestro sistema dinámico no lineal esta dado por:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

Por lo que teniendo la señal de entrada del sistema dinámico no lineal como la señal de audio. La salida del sistema, vector \mathbf{y} , se obtendrá mediante la implementación del método numérico de Runge Kutta 4 por lo que el procesamiento de la señal de audio sera la pura resolución del método numérico y la normalización del vector de salida, \mathbf{y} , para que este se encuentre entre los margenes correctos de audio digital.

Para poder implementar lo descrito anteriormente se utilizó el software MATLAB. Es importante indicar que ya no se realizó una aplicación de esta metodología mediante RackAFX debido a que los resultados no fueron satisfactorios a su totalidad por lo que la implementación en tiempo real mediante RackAFX no hubiera traído ningún beneficio a la investigación. Por último, el diagrama de bloques que describe la metodología indicada anteriormente pero ya representada en su manera discreta se puede observar en la Figura 15.

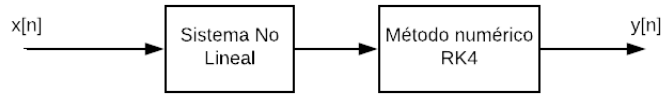


Figura 15: Diagrama de bloques: descripción de metodología de resultados preliminares

Donde:

- $x[n]$: es la representación discreta de la señal de audio $Z(t)$ (es la señal de audio muestreada).
- $y[n]$: es la señal de audio discreta de salida luego del procesamiento mediante la resolución del método numérico.
- Sistema no Lineal: es el bloque que hace referencia al modelos espacio de estados del sistema no lineal utilizado.
- Método numérico RK4: es el método numérico de Runge Kutta 4 que se utiliza para poder obtener la solución del sistema no lineal.

8.1.2. Aplicación mediante software

Para poder pasar a esta sección se asume que el lector ya puede describir el sistema no lineal seleccionado mediante su respectivo modelo de espacio de estados. Finalmente,

también es importante recalcar que la señal de entrada de audio es un archivo “.WAV“ ya que este archivo tiene una buena resolución de bits y es el utilizado actualmente en la industria de audio.

El algoritmo que se utilizó en MATLAB para poder aplicar la metodología descrita anteriormente fue el siguiente:

- **Lectura de archivo .WAV:** Se lee el archivo .WAV que contiene la muestra de audio. Se obtiene: la información de la señal, la frecuencia de muestreo (FS) y la duración del archivo. La señal de audio es guardada en un vector $\mathbf{z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde: n es el tamaño en muestras de la canción. Mediante la frecuencia de muestreo y el tamaño de muestras se obtiene la duración del archivo.
- **Parámetros del sistema dinámico no lineal:** Se inicializan las variables necesarias para describir los parámetros de entrada y de salida del sistema dinámico no lineal (ver sección 6.5 del capítulo 6), adicionalmente también se colocan variables para las condiciones iniciales del sistema.
- **Implementación del modelo de espacio de estados del sistema no lineal:** se definen las variables de tipo vector para el vector de estados \mathbf{x} , el vector de entradas \mathbf{u} y el vector de salida \mathbf{y} así como se describe en la ecuación 43. Se implementa la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, esta debe de estar descrita correctamente mediante el procedimiento indicado en el capítulo 6 sección 6.5.
- **Implementación del método numérico:** se programa el método de Runge-Kutta de cuarto orden para poder encontrar la solución del sistema dinámico no lineal es importante indicar que cada solución obtenida en cada parámetro del vector de salida \mathbf{y} y se almacena en un respectivo vector con el fin de obtener todas las soluciones cada vez que se itera el método numérico. Aquí también se realiza la asignación de las muestras del vector de música \mathbf{z} a una respectiva componente del vector de entrada \mathbf{u} .
- **Generar el archivo .WAV de la señal procesada:** Se selecciona el vector de salida deseado, obtenido después del método numérico. Se genera un archivo .WAV con la nueva canción procesada, por la resolución del sistema dinámico no lineal mediante la señal de audio como señal de entrada del vector \mathbf{u} .
- **Análisis en frecuencia:** se obtiene la transformada discreta de Fourier tanto para la señal de entrada como la procesada. Se grafican ambas señales en el plano de magnitud vs frecuencia.

Mediante el algoritmo indicado anteriormente se obtienen resultados visuales los cuales son las gráficas en frecuencia de ambas señales y se obtienen resultados de audio mediante el archivo .WAV generado. Los resultados de audio darán una guía intuitiva de si el procesamiento de audio descrito anteriormente produce una salida musical. Por último, los resultados visuales brindan un criterio un poco más robusto para indicar que la señal producida si es musical o innovadora con respecto a la señal de entrada. A continuación se presentan los resultados obtenidos mediante pruebas realizadas a los sistemas dinámicos no lineales descritos en el capítulo 6 sección 6.5. Mediante estos resultados se realizó la conclusión por lo cual esta metodología no fue la utilizada finalmente.

8.2. Resultados

Para los resultados descritos a continuación se utilizaron los sistema dinámicos no lineales del: Péndulo simple, Péndulo doble y oscilador de Van Der Pol. También se utilizaron diversas señales de entrada para poder observar mediante los resultados visuales la transformación obtenida por el procesamiento de audio basado en el algoritmo descrito en la sección anterior. Finalmente, es importante volver a recalcar que estos resultados no tienen el fin de ser totalmente específicos ya que solo muestran generalidades que complementadas a los archivos de audio obtenidos. Se puede llegar a concluir que esta metodología no era la apropiada para cumplir con los objetivos de esta investigación.

Las señales de audio que se utilizaron para obtener los resultados fueron:

- **Pista musical de un único instrumento:** Este es un archivo .WAV que contiene un fragmento de canción donde solo se escucha el instrumento aislado, el fragmento es corto para que el procesamiento de la señal sea más efectivo. Resultados: con esta señal de entrada se obtiene una idea empírica de cual fue el efecto que realizó el sistema dinámico no lineal en la señal de entrada.
- **Señal sinusoidal:** Un archivo que tiene simplemente una señal sinusoidal en la frecuencia de 440 Hz. Resultados: nos permite evaluar si la señal presenta algún tipo de distorsión o desfase. Esto mediante el análisis de armónicos o desfase en frecuencia de la señal de salida
- **Sumatoria de sinusoides:** un archivo que contiene la suma de sinusoides con frecuencias fundamentales en todas las notas musicales de un piano de 8 octavas. Resultados: se puede observar cuales son las notas que presentan algún tipo de distorsión o pitch shift. Se puede observar si el comportamiento es uniforme o solo en una región del espectro. Y se determina si existe algún tipo de comportamiento de filtro natural de parte del sistema dinámico no lineal.

Los resultados que se presentaran a continuación cuentan con configuraciones (selección de parámetros de entrada del sistema dinámico no lineal) seleccionadas de manera específica obtenidas mediante prueba y error. Estas configuraciones fueron utilizadas ya que solidifican la conclusión realizada para esta metodología. Por lo que se deja abierta la posibilidad de mayor investigación sobre otro tipo de configuraciones.

8.2.1. Resultados mediante péndulo simple

Configuración 1

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 100$
 - $L = 1$

- $\gamma = 100$
- Parámetros de salida:
 - v

Resultados:

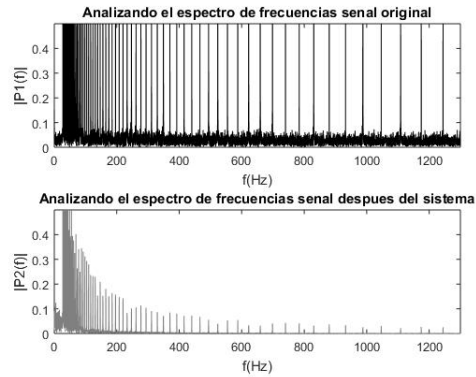


Figura 16: Determinando la configuración como filtro pasa bajas

Configuración 2

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 95000000$
 - $L = 1$
 - $\gamma = 2500$
- Parámetros de salida:
 - θ

Resultados:

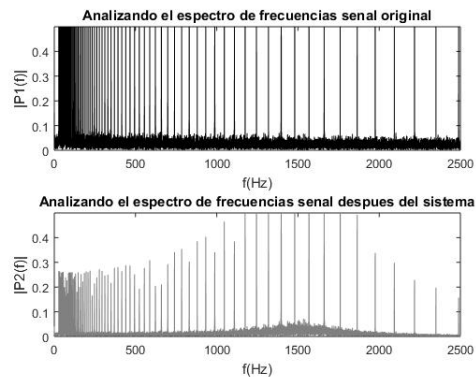


Figura 17: Determinando la configuración como filtro pasa bandas

Configuración 3

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 75000000$
 - $L = 1$
 - $\gamma = 2500$
- Parámetros de salida:
 - θ

Resultados:

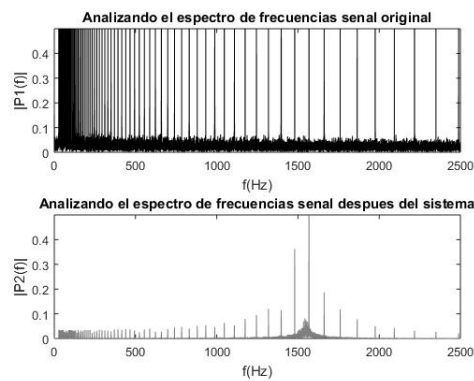


Figura 18: Determinando la configuración como filtro pasa bandas

Configuración 4

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 95000000$
 - $L = 1$
 - $\gamma = 500$
- Parámetros de salida:
 - θ

Resultados:

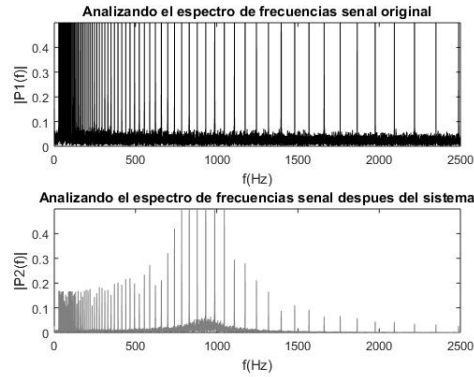


Figura 19: Determinando la configuración como filtro pasa bandas

8.2.2. Resultados mediante péndulo doble

Configuración 1

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 3100$
 - $l_1 = 0.0001$
 - $l_2 = 0.001$
 - $m = 100000$
 - $\alpha = 80$
 - $\beta = 50$
- Parámetro de salida:
 - θ_2

Resultados:

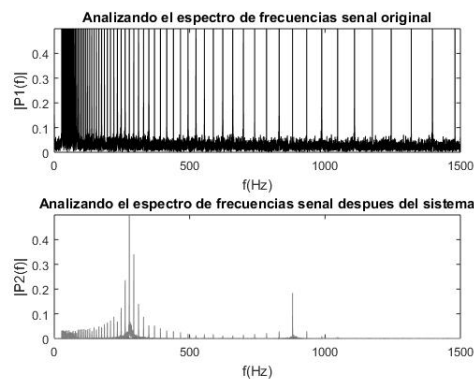


Figura 20: Análisis en frecuencia de configuración uno péndulo doble

Configuración 2

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 3100$
 - $l_1 = 0.01$
 - $l_2 = 0.001$
 - $m = 100000$
 - $\alpha = 0.0001$
 - $\beta = 50$
- Parámetro de salida:
 - θ_2

Resultados:

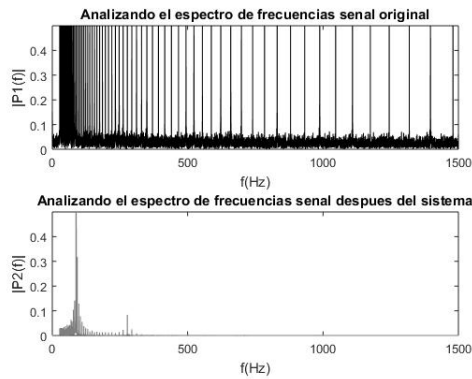


Figura 21: Análisis en frecuencia de configuración dos péndulo doble entrada señal: sumatoria de sinusoides

- Señal de entrada: sinusoidal en 440 Hz.

Resultados:

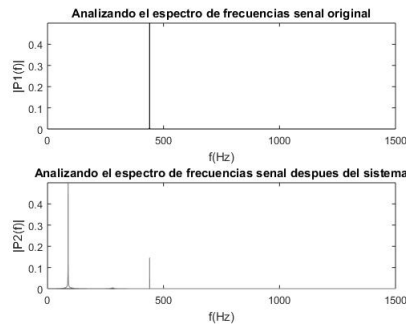


Figura 22: Análisis en frecuencia de configuración dos péndulo doble entrada: señal sinusoidal

Configuración 3

- Señal de entrada: Sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $g = 3100$
 - $l_1 = 0.0003$
 - $l_2 = 0.001$
 - $m = 100000$
 - $\alpha = 0.0001$
 - $\beta = 50$
- Parámetro de salida:
 - θ_2

Resultados:

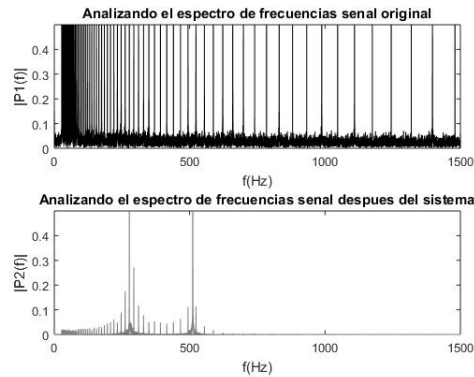


Figura 23: Análisis en frecuencia de configuración tres péndulo doble entrada señal: sumatoria de sinusoides

- Señal de entrada: sinusoidal en 440 Hz.

Resultados:

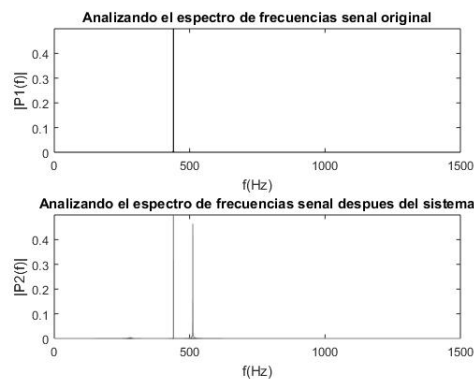


Figura 24: Análisis en frecuencia de configuración tres péndulo doble entrada: señal sinusoidal

8.2.3. Resultados mediante oscilador de Van Der Pol

Configuración 1

- Señal de entrada: sumatoria de sinusoides
- Parámetros de entrada:
 - $\epsilon = 5$
- Parámetro de salida:
 - x_2

Resultados:

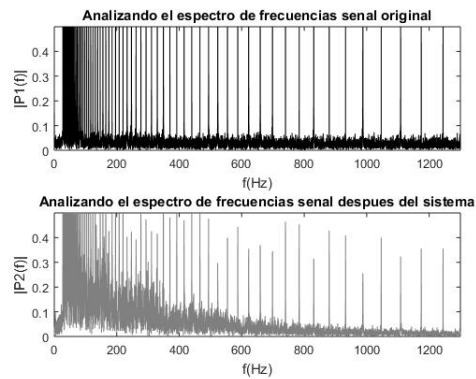


Figura 25: Análisis en frecuencia de configuración uno oscilador de Van Der Pol entrada: sumatoria de sinusoides.

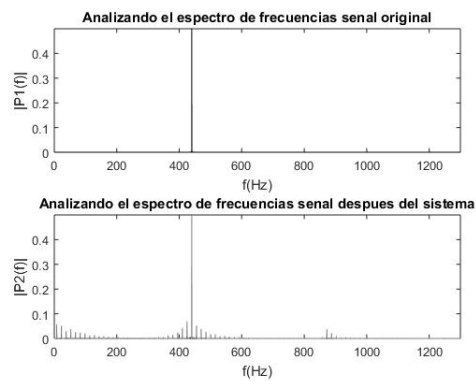


Figura 26: Análisis en frecuencia de configuración uno oscilador de Van Der Pol entrada: Señal sinusoidal 440 Hz.

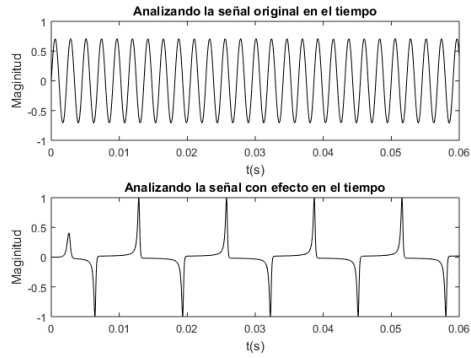


Figura 27: Análisis en el tiempo de configuración uno oscilador de Van Der Pol entrada: Señal sinusoidal 440 Hz.

Configuración 2

- Señal de entrada: sinusoidal a 440 Hz
- Parámetros de entrada:
 - $\epsilon = 12$
- Parámetro de salida:
 - x_2

Resultados:

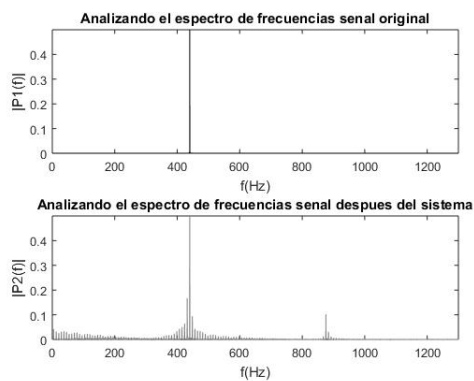


Figura 28: Análisis en frecuencia de configuración 2 oscilador de Van Der Pol entrada: Señal sinusoidal 440 Hz.

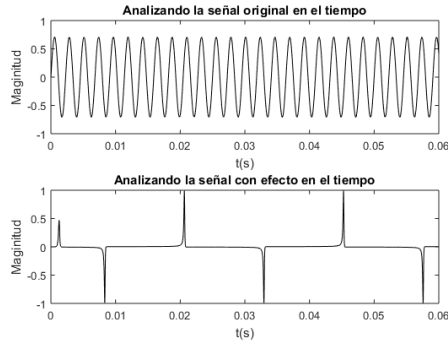


Figura 29: Análisis en el tiempo de configuración dos oscilador de Van Der Pol entrada: Señal sinusoidal 440 Hz.

8.3. Discusión de resultados

En general se puede observar que los resultados obtenidos en la sección 8.2 corresponden a un tipo de filtro para la señal de audio. En el caso de la señal de audio producida por las configuraciones del Péndulo simple (8.2.1) se puede observar en la Figura 16 que la salida es básicamente la misma señal solo que después de un filtro pasa bajas. De igual forma las Figuras 17,18, 19 muestran la señal de entrada filtrada por un filtro pasa bandas en donde los parámetros de entrada del péndulo simple cambian la frecuencia de corte (central) y la de las bandas, del filtro. En el caso de la señal de audio producida por las configuraciones del sistema del péndulo doble se puede observar que la Figura 20 muestra una combinación entre dos filtros pasa bandas. Es importante recalcar que mediante la primera señal de entrada, sumatoria de sinusoides, no se puede determinar totalmente si se trata de dos filtros pasa bandas o de armónicos extras por lo que este sistema se analizó con la señal de entrada dos, la cual es la señal sinusoidal en 440 Hz. Mediante las Figuras 22 y 24 se puede observar que el sistema con sus respectivas configuraciones produce un armónico en la señal adicional. Las Figuras 17 y 19 muestran comportamientos similares a los indicados en el péndulo simple con la diferencia de que solo son dos filtros pasa bandas a excepción de uno. Los resultados obtenidos mediante el sistema del oscilador de Van Der Pol son los que menos información brindan debido a que el análisis en frecuencia no produce ningún tipo de información factible como se puede evidenciar en las Figuras 25, 26 y 28, solo se puede observar la obtención de un armónico en la ultima de ellas con una magnitud muy pequeña por lo que podría llegar a ser despreciable con respecto a la señal original. Debido a lo indicado anteriormente se realizó un análisis basado en tiempo en donde aunque no se logra observar completamente el comportamiento de la señal de salida se puede observar como la señal sinusoidal de 440 Hz de entrada se monta a la señal de un oscilador, lo esperado intuitivamente.

Finalmente, mediante lo discutido se determino que el uso de esta metodología no produce resultados satisfactorios ya que los más enriquecedor va desde tipos de filtros, pasa bajas y pasa bandas, y la incorporación de un solo armónico a la señal que en ciertos casos su magnitud resulta ser bastante menor a la señal original. Debido a que no se encuentran resultados enriquecedores para la rama musical y en la mayoría de resultados los efectos producidos mediante estos sistemas se pueden imitar con efectos existentes en la actualidad, como filtros o distorsiones se puede indicar que esta metodología no es la más adecuada

para poder cumplir con los objetivos de este trabajo. Se deja abierta la posibilidad de seguir indagando e investigando nuevas maneras para obtener resultados gráficos y nuevas configuraciones de los sistemas con el fin de obtener mejores señales de salida que si demuestren una posibilidad innovadora en los efectos de audio producidos.

Una nueva propuesta basada en acústica

En este capítulo se explica la metodología final utilizada para implementar un efecto de audio mediante un sistema dinámico no lineal. Es importante indicar que esta nueva metodología se basó en características mucho más acústicas y de procesamiento de señales que puramente matemáticas. Este capítulo complementa al capítulo 10 en donde ya se especifica de forma clara la implementación en el software RackAFX y la exportación del VST3.

9.1. Metodología final

9.1.1. Preliminares

Mediante lo presentado y discutido en la sección 8.3 del capítulo 8 se llegó a la conclusión que la metodología presentada en el respectivo capítulo cuenta con resultados que eran totalmente insatisfactorios ya que la mayoría de sistema dinámicos analizados con sus respectivas configuraciones producían un tipo de filtraje o distorsión, no significativa, en la señal de audio. Adicionalmente la manera visual con la que se realizó el análisis de los resultados no daba un fundamento totalmente certero para poder indicar que la salida de audio era musical a su totalidad mediante los axiomas musicales. Debido a esto y la intuición auditiva sobre los audios producidos mediante la metodología anterior se optó por aplicar la dinámica de los sistema no lineales al audio mediante otro método basado en cuestiones básicas de procesamiento de señales como los filtros FIR y la implementación de estos mismos en acústica como se discute en la sección 6.6 del capítulo 6. A continuación se explica detalladamente la idea central de la nueva forma de aplicar los sistemas dinámicos no lineales al audio. Es importante volver a indicar que los sistemas dinámicos no lineales se siguen analizando de la misma manera que en la metodología del capítulo 8. Finalmen-

te, esta nueva metodología permite obtener una nueva forma de crear efectos musicales de manera intuitiva y general, por lo que aunque en esta investigación solo se utilizaron cuatro sistemas dinámicos no lineales para los resultados. El método es tan amplio que cualquier sistema dinámico no lineal puede ser aplicado, por lo que se obtiene una nueva forma de producir diversos efectos de audio basados en sistemas dinámicos no lineales, lo cual cumple con el tercer objetivo específico de esta investigación.

9.1.2. La convolución en la aplicación de sistemas dinámicos no lineales a audio.

Así como se aclaró anteriormente la metodología final basa sus fundamentos en acústica y procesamiento de señales. La implementación de filtros FIR mediante convolución fue fundamental para poder asegurar la musicalidad del efecto de audio y obtener resultados más agradables auditivamente por lo que de la sección 6.6 del capítulo 6 se obtiene que la reverberación de un espacio 3D, que es percibida por los dos oídos del espectador, puede ser modelada mediante la siguiente expresión:

$$y_i[n] = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^{M_{ij}} s_j(m)h_{ij}(n - m), \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

Donde:

- $y_i[n]$: representa la salida de audio que perciben ambos oídos.
- $s_j(m)$: Representa la entrada de audio de tres diferentes fuentes.
- $h_{ij}(n - m)$: describe la respuesta impulsional del filtro.
- M_{ij} : Denota el orden del filtro.

En la ecuación (44) se puede observar que la convolución sirve para representar la reverberación de un espacio 3D solo mediante la respuesta impulsional del filtro y la señal de entrada. También se puede observar mediante la información del capítulo 6 que la convolución hace referencia a un filtro FIR. Por lo que aunque la señal de entrada se vea modificada esta seguirá siendo musical ya que solo se está aplicando un filtro que realiza un cambio en fase de la señal original. Por lo tanto, el hecho de utilizar la convolución podría facilitar diversas fronteras presentadas en la metodología del capítulo 8. A continuación se presenta la manera en la que se implementó la convolución en el análisis de la salida de nuestro sistema dinámico no lineal.

9.1.3. Metodología propuesta basada en convolución

Mediante la ecuación (44) se puede observar que una reverberación puede ser descrita mediante una operación de convolución de la respuesta impulsional del filtro, que simula el espacio 3D, y la señal de entrada de audio. El vector de salida y producido después del

método numérico de Runge Kutta 4 es un vector que obtiene la salida del sistema dinámico cada vez que se itera el método numérico por lo que si no existe una entrada de audio como tal y el sistema solo empieza a producir punto debido a sus condiciones iniciales entonces tendríamos que el vector \mathbf{h}_i es un vector en \mathbb{R}^N (donde N es el tamaño del buffer de almacenamiento) que tiene almacenado el valor actual de una de las salidas $y(i) = y_i$ y todos sus valores pasados. A este vector \mathbf{h}_i se le dará el nombre de respuesta impulsional del sistema dinámico en la salida " i ". Por lo que este vector estaría representado de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}_i[n] = [y_i[0] \quad y_i[1] \quad y_i[2] \quad . \quad . \quad . \quad y_i[N-1] \quad y_i[N]]$$

Donde: N es el tamaño del vector \mathbf{h} .

Con este nuevo vector y mediante la información obtenida por la ecuación (44) se cambiará la idea del capítulo pasado en donde se obtenía la salida de audio automáticamente después de aplicar el método de Runge Kutta 4 al sistema dinámico no lineal con la entrada \mathbf{u} dada por la señal \mathbf{z} de audio. Es importante recordar que la señal \mathbf{z} en el caso de la implementación en tiempo no real resultaba siendo un vector con todo el contenido del audio ingresado, por lo que este vector tendría la siguiente forma:

$$\mathbf{z}[n] = [z[0] \quad z[1] \quad z[2] \quad . \quad . \quad . \quad z[M-1] \quad z[M]]$$

Donde: M es el tamaño total del audio analizado

Por lo que ahora mediante los vectores descritos anteriormente se tiene una nueva salida producida por la operación de convolución entre ellos. Esta nueva salida sera un vector \mathbf{s} que es de dimensiones \mathbb{R}^N por lo que mediante lo explicado se puede indicar que la nueva forma que tendrá la salida de audio, para un valor " i " específico (una de las salidas del vector \mathbf{y}), estaría dada por la siguiente ecuación basada en un modelo acústico de la reverberación.

$$\mathbf{s}[n] = \sum_{m=0}^N \mathbf{z}(m)\mathbf{h}(n-m) \quad (45)$$

Donde:

- \mathbf{s} : es la nueva señal de salida del circuito
- \mathbf{z} : es un vector que contiene la señal de audio de entrada.
- \mathbf{h} : respuesta impulsional, es un vector que contiene los valores de las muestras de la salida del sistema seleccionada.
- N : es el tamaño total de la convolución y del vector resultante \mathbf{s} .

De esta manera la nueva salida tendrá las características del sistema dinámico no lineal pegadas a un filtro FIR. Debido a que la salida de este sistema dinámico no lineal cambia continuamente entonces se obtiene un filtro FIR con coeficientes variables el cual finalmente se conoce como un filtro FIR variante en el tiempo. Mediante esta explicación se intuye que los resultados que se lleguen a obtener serán más interesantes con respecto a la salida final de audio.

Comparación con la metodología presentada en el capítulo 8

Finalmente, es importante recalcarle al lector las diferencias y similitudes que existen con esta nueva metodología para el análisis de sistemas dinámicos no lineales aplicados audio. A continuación se presentan ambos aspectos:

Similitudes: Se sigue realizando el mismo método para analizar sistemas dinámicos no lineales basado en un modelo de espacio de estados. De igual forma el sistema se sigue resolviendo con Runge Kutta 4 y se siguen considerando los parámetros de estos.

Diferencias: Se implemento una nueva salida s basada en operación de convolución entre la señal de entrada y el vector h . El cual es un vector que tiene almacenado el valor actual y los valores pasados de la salida y_i seleccionada. Existen dos distintas topologías.

9.1.4. Nuevas topologías

Mediante la información obtenida en las secciones pasadas se determinaron los dos tipos de topologías, diagramas de bloques, que se utilizaran para poder generar un efecto de audio basado en un sistema dinámico no lineal. Finalmente, es importante recalcar que la diferencia entre topologías se basa en las condiciones en las que se utilice el sistema dinámico

Primera topología: sistema dinámico no lineal autónomo

Esta primera topología tiene como referencia obtener los datos del vector de salida y solo mediante las condiciones locales del sistema como sus condiciones iniciales. Esto quiere decir que cualquier sistema dinámico no lineal analizado en esta topología no tendrá la entrada de audio que se describía en el capítulo 8. simplemente el usuario colocara las condiciones iniciales del sistema y este empezara a producir su propia respuesta. En el caso que las condiciones iniciales del sistema produzcan cambios que resulten en mantener la salida y estable y no mantener un cambio o un comportamiento periódico. Las condiciones iniciales se reiniciarán cada cantidad de tiempo (explicación más detallada en el capítulo 10). Finalmente, se utilizará la operación de convolución para unir tanto la entrada como la solución del sistema dinámico no lineal. A continuación se presenta, en la Figura 30, el diagrama de bloque de la topología:

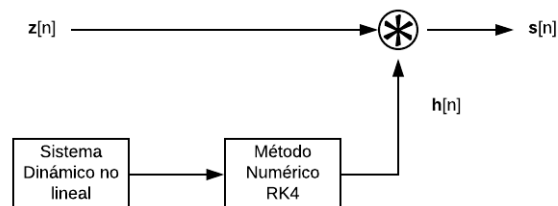


Figura 30: Diagrama de bloques: Descripción topología 1

Segunda topología: sistema dinámico no lineal respuesta forzada

Esta topología es muy similar a la de la Figura 30, con la diferencia que en este caso si colocamos la señal de audio \mathbf{z} como una entrada \mathbf{u} del sistema dinámico no lineal con el fin de incitar a que el sistema responda al audio. Por lo que en este caso no se necesita de reiniciar las condiciones iniciales del sistema. Simplemente con el hecho tener la señal de entrada de audio el sistema siempre se mantendrá con una salida cambiante. Finalmente, al igual que en la topología anterior la señal de entrada de audio \mathbf{z} se une a la solución del sistema dinámico mediante la operación de convolución. A continuación se presenta, en la Figura 31, el diagrama de bloque de la topología:

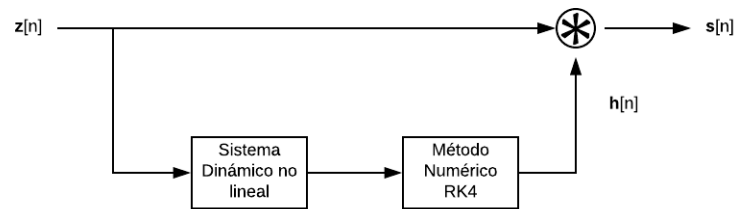


Figura 31: Diagrama de bloques: Descripción topología 2

La implementación final de nuevos efectos musicales propuestos mediante software

En este capítulo se describe la implementación final en RackAFX de los efectos de audio digitales al utilizar la metodología implementada en el capítulo 9. Se describe el algoritmo final de programación y adicionalmente se explica detalladamente la creación de un efecto musical basado en el sistema dinámico no lineal del oscilador de Van Der Pol. Para poder generar la versión final del efecto musical se utilizaron los siguientes software con su respectiva versión:

- RackAFX Versión 6.9.2.0
- Visual Studio Community 2017
- CMake 3.12.2

A continuación se describe el proceso detallado del algoritmo final para implementar un efecto de audio musical basado en un sistema dinámico no lineal.

10.1. Algoritmo de programación final

Como se describió en el capítulo 9 la forma de unir la salida de un sistema dinámico no lineal con la entrada de audio es mediante el operador de convolución por lo que para este algoritmo se utilizaran principios similares al descrito en el capítulo 8, pero con la integración de un algoritmo de convolución [4] y la creación de métodos alternos para calcular operaciones aritméticas de vectores debido a la implementación del método numérico Runge Kutta 4 y el modelado de espacio de estados de los sistemas dinámicos no lineales. Por lo

que de manera general las funciones o métodos que debe tener nuestro algoritmo final son las siguientes:

- Funciones de operaciones aritméticas de vectores
- Función para definir el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no Lineal
- Función para el método numérico
- Función que implementa el algoritmo de convolución

Es importante recordar que las funciones basadas en procesamiento de audio como las que se encargan del muestreo de la señal de audio de entrada, La señal de audio de salida o la interfaz gráfica son propias de RackAFX por lo que no se explicaran con mayor detalle.

El algoritmo final puesto en palabras mediante una serie de pasos, se puede especificar de la siguiente forma:

1. Definir los parámetros de entrada del sistema dinámico no lineal y condiciones iniciales como variables de entrada en el software.
2. Definir los vectores que describen el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no lineal como arreglos unidimensionales.
3. Definir las siguientes funciones específicas para el análisis del sistema dinámico no lineal:
 - Multiplicación entre dos arreglos.
 - Suma entre dos arreglos.
 - Multiplicación de un arreglo y un escalar.
 - Función que describe el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no lineal.
 - Método de Runge Kutta 4.
 - Convolución entre dos arreglos.
4. Inicializar los parámetros del inciso 1 que sean necesarios.
5. Fijar el tamaño máximo M que va a poder procesar el algoritmo de convolución. Este tamaño M hace referencia al tamaño máximo de muestras de nuestros arreglos de entrada a la operación de convolución.
6. Obtener el punto actual de la muestra de audio que se esta analizando.
7. Si la topología (capítulo 9 sección 9.1.4) seleccionada es la 1. Ir a paso 9.
8. En la topología 2 la muestra de audio entra al método de Runge Kutta 4 como una entrada del sistema dinámico no lineal.
9. Se manda a llamar la función de Runge Kutta 4.

10. Se obtiene el valor de salida del sistema dinámico no lineal que se obtuvo mediante el método numérico. Este se almacena en un arreglo.
11. La muestra actual de audio se almacena en un arreglo que contiene las muestras pasadas de audio.
12. Se realiza la operación de convolución entre el arreglo que contiene las salidas del método numérico y el arreglo que tiene la muestra de la señal de audio de entrada.
13. La salida de la operación de convolución se coloca en el vector de salida de audio.

El algoritmo que se describió anteriormente de manera general nos sirve como guía para poder realizar la implementación de nuevos efectos de audio musical basado en sistemas dinámicos no lineales. No se colocó la parte de la exportación del VST3 ya que este es un proceso alternativo al de procesamiento de audio por lo cual será explicado en una sección específica de este capítulo.

Ahora que ya se describió una idea general de la implementación de nuestro efecto de audio, debemos analizar más a fondo las funciones necesarias y cómo estas fueron implementadas. Para describir la implementación se utilizará pseudocódigo de manera que el lector pueda implementarlo en el lenguaje de programación que se desee.

10.2. Funciones de programación

Como se describió en la sección anterior se implementaron diversas funciones las cuales son necesarias para poder implementar el método numérico de Runge Kutta 4, el modelado de espacio de estados que describe un sistema dinámico no lineal y la convolución. En esta sección se especifica a mayor detalle las funciones que se implementaron y finalmente se muestra al lector el pseudocódigo que describe dicha función.

10.2.1. Funciones de operaciones aritméticas de vectores

Para poder describir un vector se utiliza un arreglo de programación con el fin de poder dejarlo de la manera más general posible y que las funciones puedan ser implementadas en cualquier lenguaje de programación. Estos en la mayoría de lenguajes de programación no cuentan con una manipulación aritmética por lo que es indispensable crear funciones de programación que implementen dichas operaciones. Para cada una de las operaciones descritas a continuación se indican los parámetros de entrada y de salida y el pseudocódigo que describe la programación de la función.

Las operaciones de vectores que se implementaron son las siguientes:

- Multiplicación entre dos vectores elemento por elemento.
- Multiplicación de un escalar por los elementos de un vector.
- Suma de dos vectores.

Multiplicación entre dos vectores elemento por elemento

En esta función se multiplican los elementos de dos vectores, elemento por elemento y se obtiene un vector resultante. El método debe ser general para cualquier tamaño de vector, ya que no sabemos el tamaño exacto de nuestro vector de estados de nuestro sistema dinámico no lineal que se analizará.

Los parámetros de entrada para esta función son:

- x1 : arreglo unidimensional de valores doble, entrada 1.
- x2: arreglo unidimensional de valores doble, entrada 2.
- n: constante entera del tamaño de los vectores de entrada.

Los parámetros de salida para esta función son:

- x3: arreglo unidimensional de valores doble, salida.

Es importante indicar que para que este método funcione todos los vectores deben de ser del mismo tamaño "n". Para poder implementar la multiplicación de los elementos de estos vectores se debe recorrer cada vector y realizar la multiplicación elemento por elemento de los respectivos vectores de entrada. Por lo que se utiliza un ciclo for, que recorra los elementos de nuestros vectores y la operación aritmética de multiplicación.

El pseudocódigo que implementa esta función es:

ENTRADAS: x1, x2 y n

SALIDAS: x3

1. Se realiza un ciclo FOR de 0 hasta n.
2. Se recorre los vectores y se multiplica elemento por elemento.

```
-----  
1. for i = 0 to i < n do:  
2. x3[i] = x1[i] * x2[i]  
-----
```

Multiplicación de un escalar por los elementos de un vector

Esta función sirve para poder ejecutar la multiplicación entre un valor constante y cada uno de los elementos de nuestro vector de entrada. En esta función al igual que la anterior se tiene un tamaño n para el vector de entrada

Los parámetros de entrada para esta función son:

- x1: arreglo unidimensional de valores doble, entrada 1.

- x2: valor doble (escalar), entrada 2.
- n: Constante entera del tamaño de los vectores de entrada.

Los parámetros de salida para esta función son:

- x3: arreglo unidimensional de valores doble, salida.

Es importante indicar que para que este método funcione todos los vectores deben de ser del mismo tamaño n. La implementación de esta función se realiza esencialmente mediante un ciclo for.

El pseudocódigo que implementa esta función es:

ENTRADAS: x1, x2 y n

SALIDAS: x3

1. Se realiza un ciclo FOR de 0 hasta n.
2. Se recorre el vector x1 y se multiplica por el valor constante x2

```
-----
1. for i = 0 to i < n do:
2. x3[i] = x1[i] * x2
-----
```

Suma de dos vectores

Esta función sirve para poder ejecutar la suma entre dos vectores. Esta función es muy similar a la multiplicación de dos vectores elemento por elemento, con la única diferencia de que la operación aritmética que se utiliza es la de suma por lo tanto para esta operación solo se mostrará el pseudocódigo. Los parámetros de entrada y salida y la descripción de la función es exactamente igual a la función de multiplicación de dos vectores.

El pseudocódigo que implementa esta función es:

ENTRADAS: x1, x2 y n

SALIDAS: x3

1. Se realiza un ciclo FOR de 0 hasta n.
2. Se recorre el vector x1 y se multiplica por el valor constante x2

```
-----
1. for i = 0 to i < n do:
2. x3[i] = x1[i] + x2[i]
-----
```

10.2.2. Función para definir el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no lineal

Esta función sirve para describir nuestro sistema dinámico no lineal mediante vectores, como se describe en el capítulo 6 y 8. Se deben tener variables que contengan el vector de

estados \mathbf{x} , el vector de entrada \mathbf{u} y el vector de derivadas $\dot{\mathbf{x}}$. Es importante recordar que el vector de salida \mathbf{y} se obtiene de la función que implementa el método numérico. Los cuales se realizarán mediante variables de tipo arreglo de dobles de tamaño n . Por lo que esta función tendrá los siguientes parámetros de entrada y de salida.

Los parámetros de entrada para esta función son:

- x_1 : arreglo unidimensional de valores doble, vector de estados \mathbf{x} .
- x_2 : arreglo unidimensional de valores doble, vector de entrada \mathbf{u} .

Los parámetros de salida para esta función son:

- x_3 : arreglo unidimensional de valores doble, vector de salida $\dot{\mathbf{x}}$.

Para esta función solo se declara el modelo de espacio de estados del sistema de dinámico no lineal que se desea implementar. Por lo que para poder realizar el pseudocódigo se utilizará el ejemplo del sistema dinámico no lineal del oscilador de Van Der Pol. Es importante indicar que se consideran los parámetros de entrada y salida del sistema como variables globales que se puede utilizar en la función.

El pseudocódigo que implementa la función es:

ENTRADAS: x_1, x_2

SALIDAS: x_3

1. Se realiza el modelo de espacio de estados del sistema dinámico no lineal del Oscilador de Van Der Pol.

#Las variables "j" y "e" se consideran variables globales que describen los parámetros de entrada del Oscilador de Van Der Pol

```
-----
1.  $x_3[0] = j * x_1[1] + x_2[0]$ 
    $x_3[1] = j * (e * (1 - x_1[0]^2 * x_1[1] - x_1[0]) + x_2[1])$ 
-----
```

Nota: Es importante recalcar el uso del parámetro j . Este aunque no se encuentra como un parámetro de entrada del sistema de ecuaciones diferenciales que describe al oscilador de Van Der Pol se utilizó ya que sirve para aumentarle o disminuirle la frecuencia de oscilación de la onda producida. Lo cual nos interesa como parámetro de nuestro efecto musical. Por lo que con este pequeño cambio el modelo de espacio de estados descrito en el capítulo 6 del oscilador de Van Der Pol resultaría siendo:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jx_2 \\ j\epsilon(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

10.2.3. Función para el método numérico

Como se explicó en la metodología final, capítulo 9, el método numérico que se utiliza para obtener el vector \mathbf{y} de salida es el de Runge Kutta 4. Este método se implementa de manera iterativa como se explica en el capítulo 6. Es importante determinar por lo tanto la frecuencia de muestreo de este método, esta frecuencia va a estar determinada por la frecuencia de muestreo estándar de audio la cual es de 44100 Hz, el paso al cual se itera el método numérico es de $1/44100$. Debido a que estas funciones serán implementadas en RackAFX no se debe poner un ciclo de iteración del método ya que en esta plataforma el método se realiza cada vez que se obtiene un muestra de audio, lo cual concuerda con el paso numérico descrito anteriormente.

La función que implementa el método numérico y la convolución serán las únicas que se ejecuten formalmente en la función principal de nuestro programa. Las funciones que se describieron anteriormente serán utilizadas dentro de esta función para poder obtener la solución a nuestro sistema dinámico no lineal. Es importante recalcar que debido a que el vector de salida \mathbf{y} es de tamaño n al igual que nuestro vector de estados \mathbf{x} se tendrán múltiples salidas, por lo que la función de método numérico tiene un parámetro para seleccionar que salida se desea obtener. Finalmente, a la salida de este método se le realiza una normalización para que esta se encuentre entre menos uno y uno y así cumpla con los estándares de vector de audio. Todos los vectores de esta función al igual que en las funciones anteriores son representados por arreglos de variables tipo doble.

Los parámetros de entrada para esta función son:

- $x1$: arreglo unidimensional de valores doble, vector de estados evaluado en las condiciones iniciales del sistema, vector de estado actual $\mathbf{x}0$.
- $x2$: valor doble que tiene la muestra actual de audio. (Este solo se utiliza en caso se haga lo topología 2 presentada en el capítulo 9).
- p : constante entera que sirve para seleccionar la salida deseada, una de las componentes de nuestro vector de salidas \mathbf{y} .
- n : constante entera del tamaño de los vectores.

Los parámetros de salida para esta función son:

- $x3$: valor doble de salida. Contiene una de las componentes de solución de nuestro vector de salidas \mathbf{y} el cual solo esta definido adentro de nuestra función.

Es importante indicar que este método cambiara de dimensiones en los arreglos dependiendo del vector de estado del sistema dinámico no lineal seleccionado. Finalmente, se mostrara el pseudocódigo de esta función basado en descrito en el capítulo 6 y utilizando como referencia el sistema dinámico no lineal del oscilador de Van Der Pol.

El pseudocódigo que implementa la función es:

ENTRADAS: x1, x2, p y n

SALIDAS: x3

1. Se definen los vectores de constantes k: k1, k2, k3, k4. los cuales son variables arrays de double que tienen tamaño "n" al igual que nuestro vector x1.
no lineal del Oscilador de Van Der Pol.
2. Se crea un vector de entradas u para poder almacenar el valor x2.
3. Se evalúa la función "f" del sistema dinámico no lineal con el fin de obtener el valor de las constantes k1, k2, k3, k4. Esta función f es la descrita anteriormente mediante el modelo de espacio de estados.
4. Se obtiene el vector de salida y.
5. Se selecciona la salida "y" se coloca en x3
6. Se almacena "y" en el vector de estados actuales x1.
Es importante indicar que "h" es una variable global que tiene el tamaño del paso de muestreo. h= 1/44100.
Es importante destacar que todas las funciones aritméticas que se necesiten suma, multiplicación dos vectores, multiplicación de escalar y utilizadas en este pseudocódigo. Deben ser implementadas mediante sus respectivas funciones.

```
-----  
1. double k1[n]  
   double k2[n]  
   double k3[n]  
   double k4[n]  
2. u = {0,x2}  
3. k1: f(x1,u,k1)  
   k2: f(x1 + k1*h/2,u,k2)  
   k3: f(x1 + k2*h/2,u,k3)  
   k4: f(x1 + k3*h,u,k4)  
4. y = x1 + h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4)  
5. if (p==1):  
    x3= y[0]  
   else:  
    x3= y[1]  
6. x1= y  
-----
```

10.2.4. Función que implementa el algoritmo de convolución

En generalidades el algoritmo aplica la ecuación 45 del capítulo 9, mediante un ciclo for. El tamaño de este for será la cantidad de muestras máximas que se va poder realizar y el tamaño de los búfers de almacenamiento o vectores de entrada **z** y **h**, que como se explico en el capítulo 9 **z** tiene las muestras de audio almacenadas y **h** la respuesta impulsional descrita por las soluciones del sistema dinámico no lineal, obtenidas por la función del método numérico. Por lo que esta función debe tener dos entradas y una salida la cual haría

referencia al vector \mathbf{s} de la ecuación (45).[4]

Nota: el tamaño máximo del búfer N es una condición límite de la investigación como se discutió en el capítulo 6, esto es debido a que la implementación final de este algoritmo de convolución no soporta cantidades mayores a un $N=4700$. El procesamiento no es lo suficiente para poder tener un tamaño máximo en ordenes más grandes. Lo importante a destacar es que aunque este parámetro N si influye en la cantidad de efecto que percibe el usuario, con 4700 muestras el efecto resulta lo suficientemente adecuado para presenciar la esencia auditiva del sistema no lineal sobre el audio de entrada. Se queda por lo tanto abierto a futuras investigaciones el poder desarrollar un algoritmo de convolución más eficiente que permita tamaños más grandes del búfer N . [4]

Los parámetros de entrada para esta función son:

- x_1 : arreglo unidimensional de memoria dinámica de valores doble, búfer de almacenamiento de muestras de audio \mathbf{z} .
- x_2 : arreglo unidimensional de memoria dinámica de valores doble, búfer de respuesta impulsional (tiene las muestras de la solución al sistema dinámico no lineal. \mathbf{h} .

Los parámetros de salida para esta función son:

- x_3 : valor doble de salida. Contiene la convolución entre las señales x_1 y x_2 , vector \mathbf{s} .

Finalmente, debido a que esta operación de convolución maneja una desfase m y un subíndice n , como se aprecia en la ecuación (45). Se manejan variables locales en la función para el direccionamiento de ambos arreglos.

El pseudocódigo que implementa este algoritmo es el siguiente:

ENTRADAS: x_1 , x_2

SALIDAS: x_3

1. Se almacena la muestra actual de audio en nuestro vector x_1 al igual que la salida de la solución del método numérico en el vector x_2 .
2. Se le asigna al subíndice "n" un valor "p" y el subíndice "m" se coloca en 0.
3. Se coloca x_3 en cero.
4. Se hace un for desde 0 al valor máximo $N = 4700$. Se realiza la operación de convolución entre las dos señales. Se aumenta el valor del subíndice "m" y se disminuye el del subíndice "n". Se verifica el valor del subíndice "n" si es menor a cero se le asigna el valor de $N-1$.
5. se aumenta el valor de p.
6. Se verifica que p no sea mayor a N. Si lo es se lo asigna 0.

-
1. $x_1[p]$ = muestra de audio actual
 $x_2[p]$ = salida de nuestra función de método numérico

```

2. n = p
   m = 0
3. x3 = 0
4. for i = 0 to i < N do:
x3= x3 + x1[n]*x2[m]
   m = m+1
   n = n-1
   if ( n < 0):
       n = N-1
5. p=p+1
6. if ( p >= N):
   p = 0

```

10.3. Interfaz GUI y exportación del VST3

El procedimiento para poder generar la interfaz gráfica del usuario se centra en las cuestiones más de diseño. Estas acciones son propias del software que se utilizó para la implementación en tiempo real el cual fue RackAFX. Por lo que no se entrará en mucho detalle del como se realizó más que en los resultados finales y dificultades al momento de hacer la implementación final.



Figura 32: Interfaz GUI del efecto de audio basado en el oscilador de Van Der Pol

10.3.1. Interfaz GUI

Para la interfaz de los efectos basados sistemas dinámicos no lineales se utilizan los parámetros de entrada de su respectivo modelo espacio de estados y se convierten en perillas

o paneles “xy”, para que el usuario cambie los valores de manera más agradable. En la Figura 32 se muestra la interfaz del efecto basado en el oscilador de Van Der Pol, las interfaces de los otros efectos musicales que se crearon se encuentran en el siguiente capítulo.

En la Figura 32 se puede observar lo siguiente:

- (1): DRY/WET. Es un parámetro que modifica la cantidad de efecto de audio que se desea colocar es simplemente un factor que se multiplica a la salida de audio para que así cuando este en 0% salga la salida natural de nuestro instrumento y cuando este 100% la salida del efecto a su totalidad.
- (2): PARAMETRO J. Hace referencia a la variable j que se describió en la ecuación (32) con este parámetro se aumenta o disminuye la frecuencia del oscilador.
- (3): PARAMETRO E. Este es uno de los parámetros de entrada del sistema dinámico no lineal. Modifica la característica no lineal de nuestro del mismo.
- (4) OSCchange. Es importante recalcar que a diferencia de los anteriores este no es una perilla sino que es un panel “xy” con el único fin de que sea más amigable para el usuario. Este maneja una salida que es una combinación entre dos componentes del vector de salida y , lo que quiere decir que combina las dos salidas del sistema. Entonces al igual que el parámetro DRY/WET este modifica la cantidad porcentual de ambas componentes de salida que va a tener la salida final.

Dificultades: La implementación de la interfaz GUI no presento mayores problemas, RackAFX resulta tener un diseño bastante amigable y sencillo de comprender para el diseño de interfaces GUI. Lo único que es importante recordar es que cuando se cree el proyecto en RackAFX colocar la casilla de “Use RackAFX custom GUI” para de esta manera cuando se realice la exportación de el VST3 este tenga la interfaz diseñada en el DAW que se desee probar.

10.3.2. Exportación del VST3

Para realizar la exportación del VST3 se utilizó el software CMake conjunto a RackAFX. La documentación que se utilizó para realizar esto se encuentra en la pagina web oficial de RackAFX [15]. Sin embargo debido a que este proceso se acaba de adquirir para al última versión de RackAFX existen ciertas dificultades que se deben considerar. Si se toma en cuenta las dificultades que se van a describir a continuación y el proceso que se indica en la pagina web oficial de RackAFX, la exportación del VST3 resulta un procedimiento bastante sencillo, con un tiempo de ejecución que depende únicamente de la computadora utilizada. A continuación se muestran las dificultades que se tuvieron:

Dificultades:

- VST3 SDK: Esta es una carpeta necesaria que se debe descargar desde el sitio que se encuentra descrito en la pagina oficial de RackAFX. Hay que verificar la versión de este VST3 SDK la cual al momento de descargarlo se puede verificar en el Agreemente

de la licencia, la versión que funcionó fue la 3.6.10. La descarga en de este archivo es un comprimido .ZIP que contiene la carpeta, esta carpeta se puede colocar en cualquier parte de nuestra computadora. Si no funciona el procedimiento descrito en la página de RackAFX verifica la versión de RackAFX, debe ser la 6.9.2.0 y la del VST3 SDK 3.6.10. Nota: En esta carpeta es donde se debe correr el programa CMake para poder crear nuestro proyecto final.

- CMake: Este fue uno de los software que más problemas presento. Es el software encargado de crear el proyecto final en Visual Studio 15 al cual simplemente con hacerle Build podemos obtener el VST3. El problema con esto es que no existe mucha información de soporte sobre el uso de CMake en RackAFX más que la producida en la página oficial de este software. Es importante entender que al momento de descargar CMake no se debe obtener un ejecutable sino que se descarga la distribución binaria, el archivo .ZIP que corresponde a la arquitectura de la computadora, x86 o x64. Este archivo .ZIP tiene la carpeta con todos los archivos del programa CMake por lo que se debe copiar esta carpeta en su respectivo folder de program Files. Luego se debe crear una variable de path para poder ejecutar CMake desde el command Prompt. Luego de ello ya se debería poder utilizar CMake para poder crear el archivo final. Si de igual forma al realizar los pasos que están en la página oficial de RackAFX no se logra crear el proyecto final mediante CMake. Se debe crear una carpeta vacía muy comúnmente en C:\ProgramFiles\CommonFiles. De nombre VST3. Debido a que CMake debe encontrar esta dirección para poder crear el proyecto final del nuevo efecto.

Finalmente, se recomienda al lector seguir los pasos que se indican en la página oficial de RackAFX [15], los cuales están descritos mediante videos producidos por Will Pirkle. Y se existen inconvenientes extras revisar esta sección con bastante detalle.

Resultados finales

En este capítulo se exponen los resultados finales obtenidos mediante los efectos de audio producidos por la metodología final. Es importante indicar que estos resultados se utilizaron mediante lo explicado en el capítulo 8, en el software MATLAB, por lo que se exportaron en RackAFX los archivos .WAV con las señales de entrada indicadas anteriormente: señal sinusoidal y sumatoria de sinusoides y se procesaron con su respectivo efecto de audio y el archivo .WAV resultante se analizó en MATLAB. Los resultados que se presentaran a continuación están basados en los cuatro sistemas dinámicos no lineales que se analizaron en el capítulo 6: Péndulo Simple, Péndulo Doble, Oscilador Van Der Pol y sistema de Lorenz.

Estos resultados cuentan con configuraciones, diferentes parámetros de entrada del sistema dinámico no lineal, seleccionadas de manera específica mediante un criterio auditivo al momento de utilizar el efecto con instrumentos musicales reales. Por lo que esta configuración solidifica la conclusión realizada para esta metodología. Se deja abierta la posibilidad de mayor investigación sobre otro tipo de configuraciones.

Finalmente, es importante recalcar que estos resultados fueron analizados de una mejor manera a los discutidos en el capítulo 8. Se realizó un análisis mediante la métrica basada en axiomas presentada en el capítulo 7 y los resultados auditivos fueron percibidos de una mejor forma, ya que los efectos producen una característica más enriquecedora al audio original.

En esta sección también se muestran las interfaces GUI de los tres efectos restantes producidos y una discusión del porque los resultados analizados son más efectivos sobre el audio que los analizados con la metodología preliminar.

	Parámetros				
Péndulo simple	Dry/Wet	G/L	PHI	Condición inicial	Péndulo
Configuración 1	57.43	8.485	0.81	21	7.5
Configuración 2	44.06	28.44	1.29	1	2.05
Configuración 3	40.59	70.86	0.81	6	41.15

Cuadro 1: Configuración de parámetros péndulo simple

11.1. Efecto de audio basado en el péndulo simple

Como se puede observar en la Tabla 1 algunos parámetros adicionales fueron controlados para la implementación final del efecto. El motivo de esto era realizar cambios más pronunciados el sistema dinámico no lineal para producir efectos más elaborados. A continuación se explican los parámetros adicionales:

- Condición inicial: este es un parámetro que cambia la condición inicial de nuestro sistema dinámico, se utiliza cuando se realiza la aplicación del sistema dinámico no lineal mediante la topología uno. Es importante indicar que se utilizó en el Péndulo simple ya que por ser un sistema que no produce una oscilación periódica, debido al amortiguamiento, se debe reiniciar el sistema cada cierto tiempo para que no tienda a cero. Cada vez que se reinicia se cambian los valores de las condiciones iniciales de modo que este parámetro se encuentra entre 1 a 21 y cuando se coloca el valor 3 por ejemplo se cambia la condición inicial de θ a ser equivalente a $\theta = 3\pi/4$ si el valor fuera 5 la nueva condición inicial sería $\theta = 5\pi/6$.
- Péndulo: es un parámetro que da porcentajes de cuanto de cada ángulo de salida del péndulo, mediante las componentes del vector \mathbf{y} , se desea tener.

11.1.1. Configuración 1

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

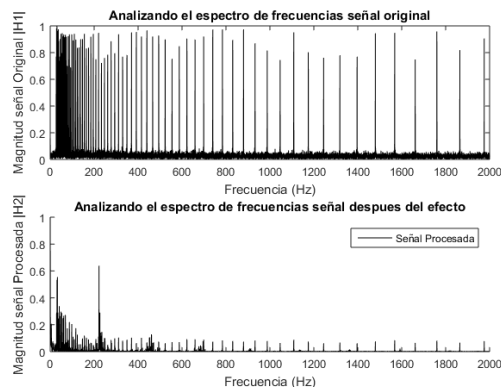


Figura 33: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración uno péndulo simple

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

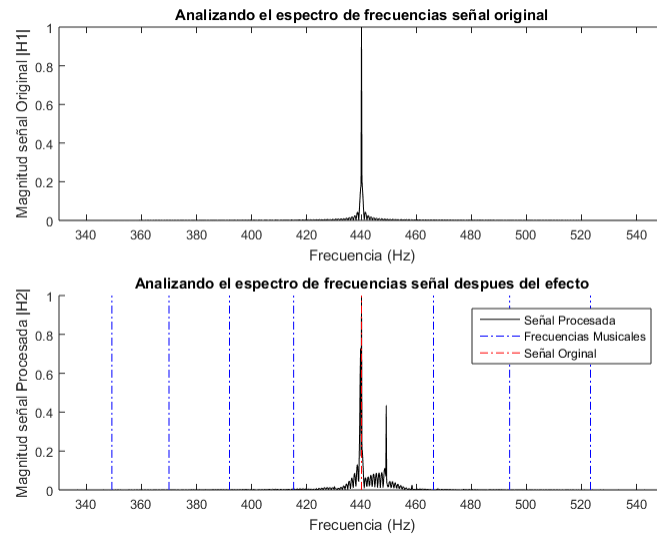


Figura 34: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración uno péndulo simple

11.1.2. Configuración 2

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

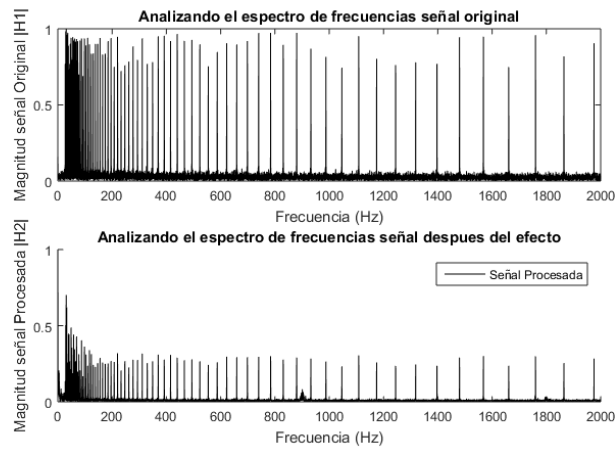


Figura 35: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración dos péndulo simple

Señal de entrada: Sinusoidal 440 Hz

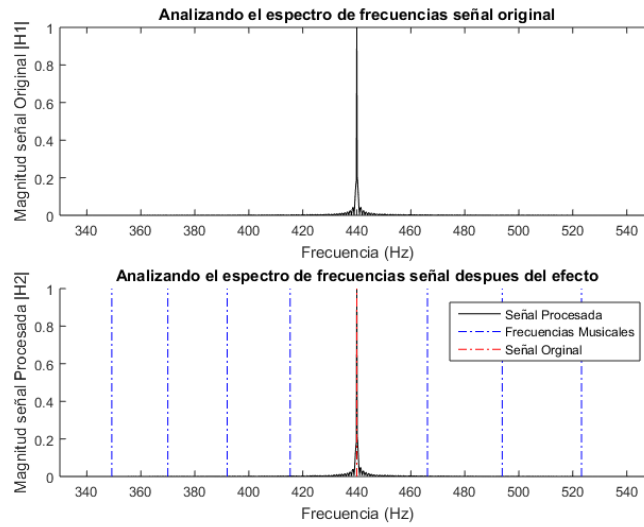


Figura 36: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración dos péndulo simple

11.1.3. Configuración 3

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

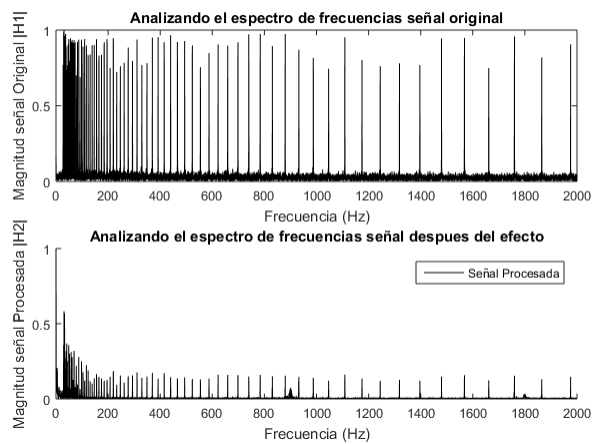


Figura 37: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración tres péndulo simple

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

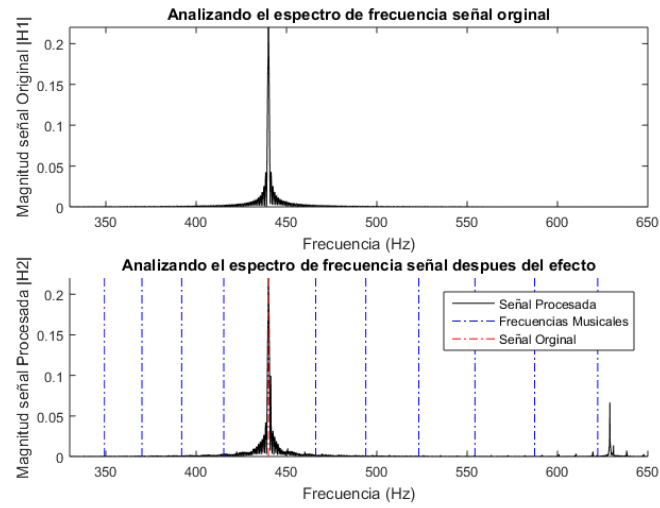


Figura 38: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración tres péndulo simple

11.1.4. Interfaz GUI

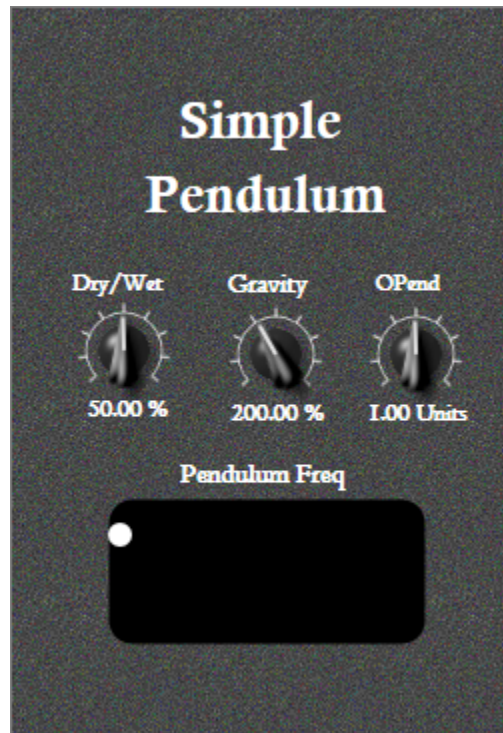


Figura 39: Interfaz GUI final del péndulo simple

(El parámetro Condición Inicial al igual que el PHI son los que se encuentran en el panel XY de la Figura 39, el parámetro Péndulo es el de la perilla Opend de la Figura 39).

11.2. Efecto de audio basado en el péndulo doble

péndulo doble	Parámetros						
	Dry/Wet	G	L1	L2	Alpha	Beta	M
Configuración 1	67.32	110	0.000758	0.0001	81.3	0	75.25
Configuración 2	59.40	15	0.000725	0.000074	48	10.79	64.85
Configuración 3	64.84	10	0.000263	0.000022	87.3	91.59	16.84

Cuadro 2: Configuración de parámetros péndulo doble

Es importante aclarar que el efecto del péndulo doble adicional a los parámetros indicados cuenta con un botón que sirve para poder seleccionar una determinada salida de su vector de salida y , este botón se puede observar en la Figura 46 con el nombre de Change Angle. Las salidas que se puede seleccionar son entre la componente θ_1 y θ_2 . A continuación se especifica que salida se utilizó para cada una de las configuraciones:

- Configuración 1: salida θ_1
- Configuración 2: salida θ_2
- Configuración 1: salida θ_1

Finalmente, como se puede observar en la Figura 46. La interfaz GUI cuenta con dos paneles XY. El primer panel XY, Pendulum Length, tiene en sus variables los parámetros L1 y L2. El segundo panel XY, Pendulum Damping, tiene en sus variables los parámetros alpha y beta.

11.2.1. Configuración 1

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

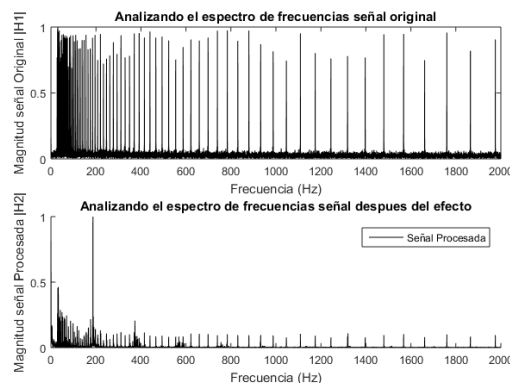


Figura 40: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración uno péndulo doble

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

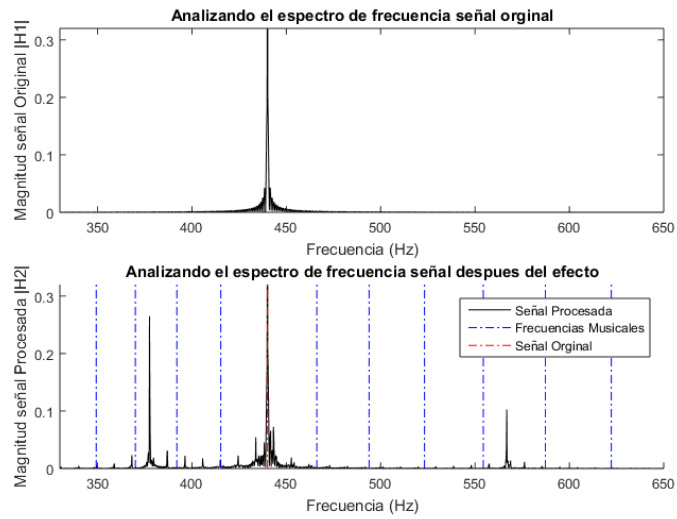


Figura 41: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración uno péndulo doble

11.2.2. Configuración 2

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

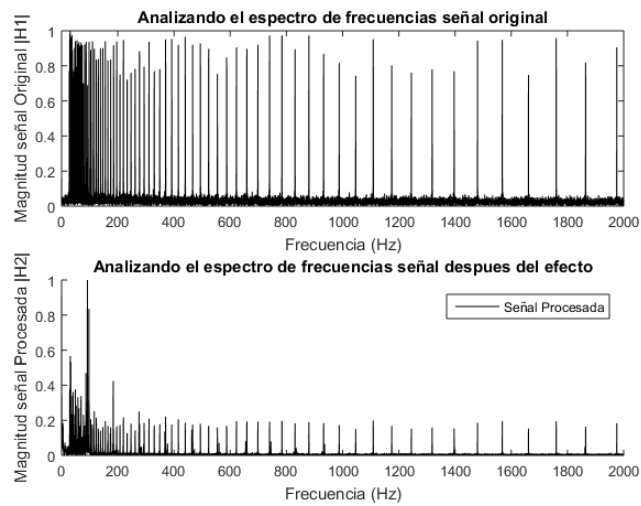


Figura 42: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración dos péndulo doble

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

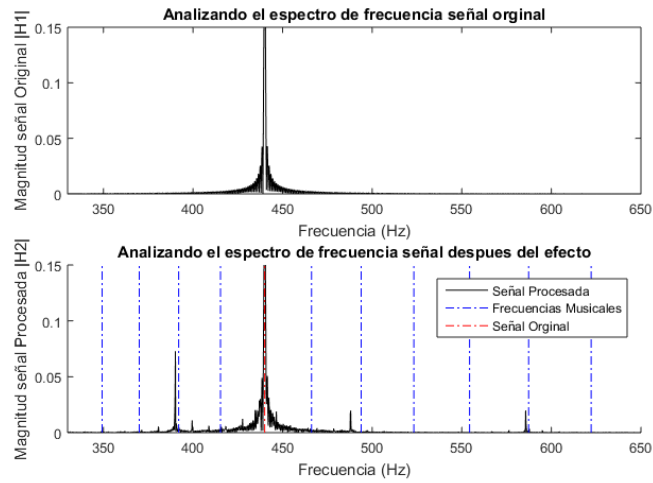


Figura 43: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración dos péndulo doble

11.2.3. Configuración 3

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

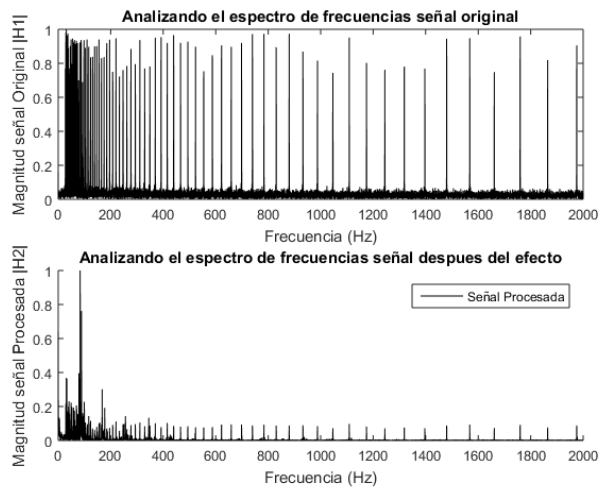


Figura 44: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración tres péndulo doble

Señal de entrada: sinusoides 440 Hz

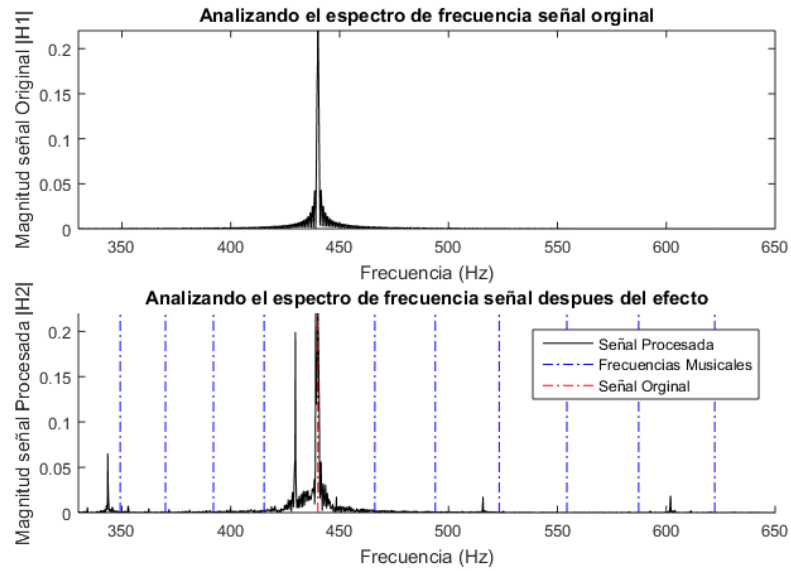


Figura 45: Análisis señal de entrada sinusoides 440 Hz configuración tres péndulo doble

11.2.4. Interfaz GUI

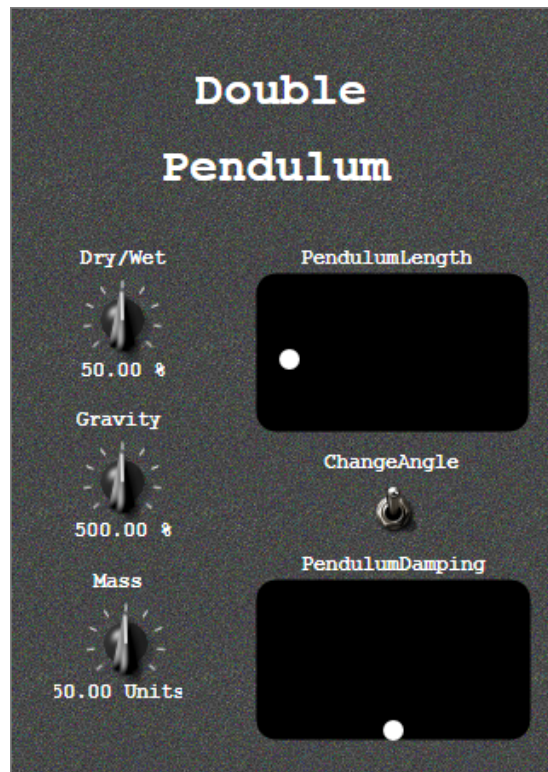


Figura 46: Interfaz GUI final del péndulo doble

11.3. Efecto de audio basado en el oscilador de Van Der Pol

	Parámetros			
Oscilador de Van Der Pol	Dry/Wet	E	J	OSCselec
Configuración 1	88.61	30.77	870.99	0.578
Configuración 2	53.96	30.77	145.99	0.781
Configuración 3	43.07	5.61	909.99	0.875

Cuadro 3: Configuración de parámetros oscilador de Van Der Pol

11.3.1. Configuración 1

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

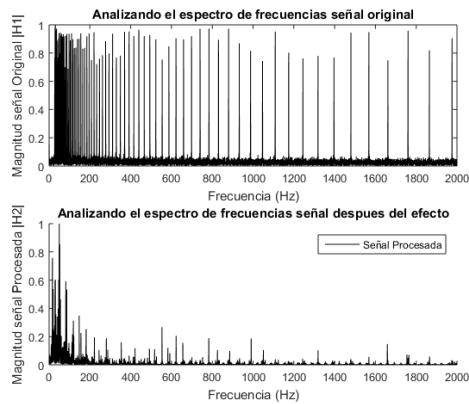


Figura 47: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración uno oscilador de Van Der Pol

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

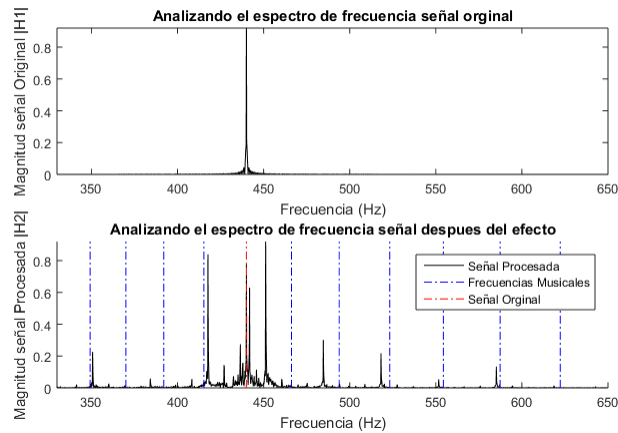


Figura 48: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración uno oscilador de Van Der Pol

11.3.2. Configuración 2

Señal de entrada: sumatoria de sinusoidal en frecuencias musicales

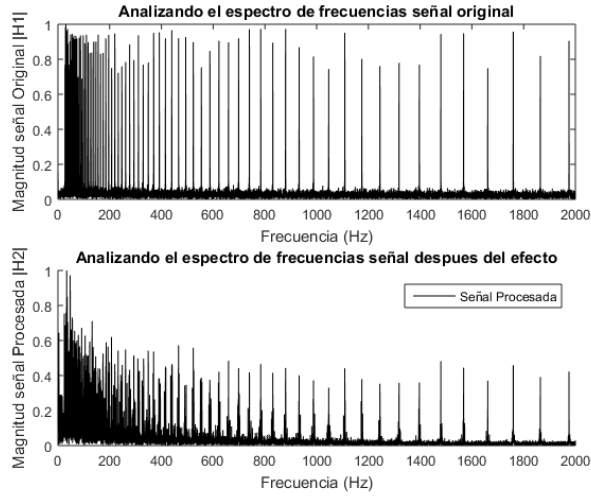


Figura 49: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración dos oscilador de Van Der Pol

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

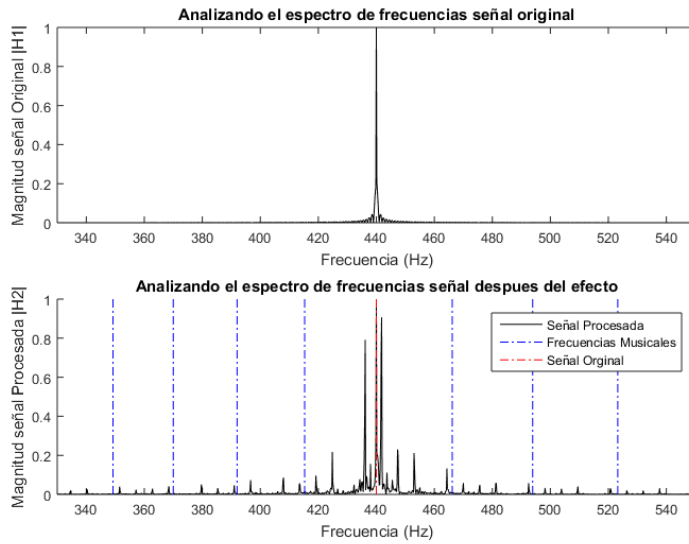


Figura 50: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración dos oscilador de Van Der Pol

11.3.3. Configuración 3

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

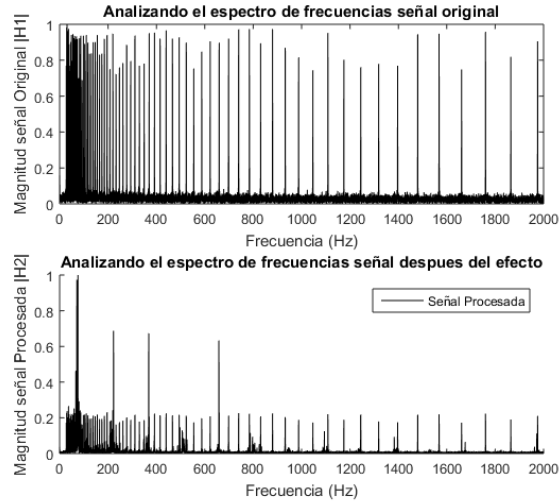


Figura 51: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración tres oscilador de Van Der Pol

Señal de entrada: Sinusoidal 440 Hz

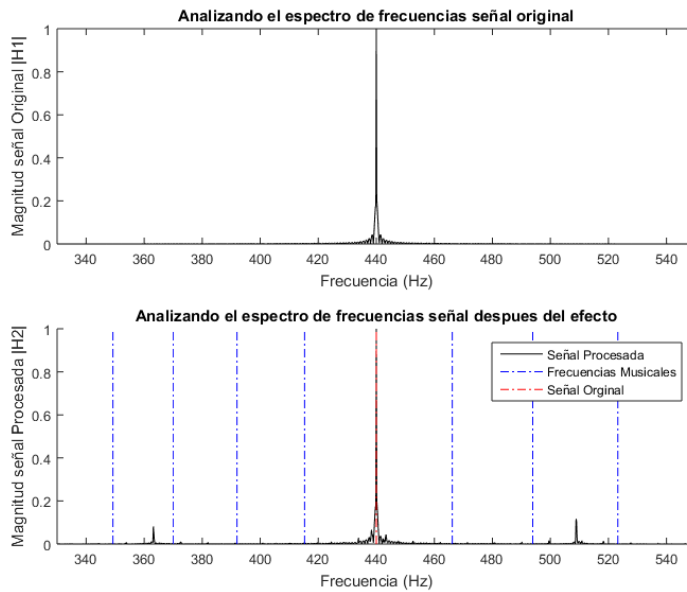


Figura 52: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración tres oscilador de Van Der Pol

11.4. Efecto de audio basado en el sistema de Lorenz

	Parámetros					
Sistema de Lorenz	Dry/Wet	Sigma	Rho	Beta	J	OSCchange
Configuración 1	63.86	8.15	23.65	0.464	358.12	0.132
Configuración 2	44.06	8.45	26.35	1	1344.91	0.408
Configuración 3	52.48	5.77	20.8	1.136	907.90	0.684

Cuadro 4: Configuración de parámetros sistema de Lorenz

Como se puede observar en la Tabla 4. Para este efecto audio basado en el sistema dinámico no lineal del sistema de Lorenz existen ciertos parámetros adicionales que se colocaron para poder aprovechar características adicionales que brindaba el sistema dinámico no lineal. Los parámetros adicionales se explican no tan detalladamente ya que estos son similares a los explicados en el capítulo 10, los cuales fueron aplicados al oscilador de Van Der Pol.

- J : es un parámetro que nos sirve para poder aumentar o disminuir la frecuencia de oscilación de la salida.
- OSCchange: es un parámetro porcentual que brinda una combinación entre dos posible salidas que tiene este sistema. Las salidas que se seleccionaron fueron $y(2)$ y $y(3)$. Por lo que la salida final es una combinación entre las salidas indicadas anteriormente.

Finalmente, es importante indicar que en la 59 el panel xy que se muestra tiene las variables descritas anteriormente.

11.4.1. Configuración 1

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

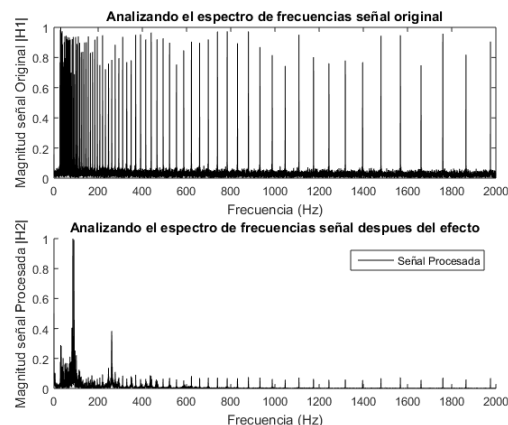


Figura 53: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración uno sistema de Lorenz

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

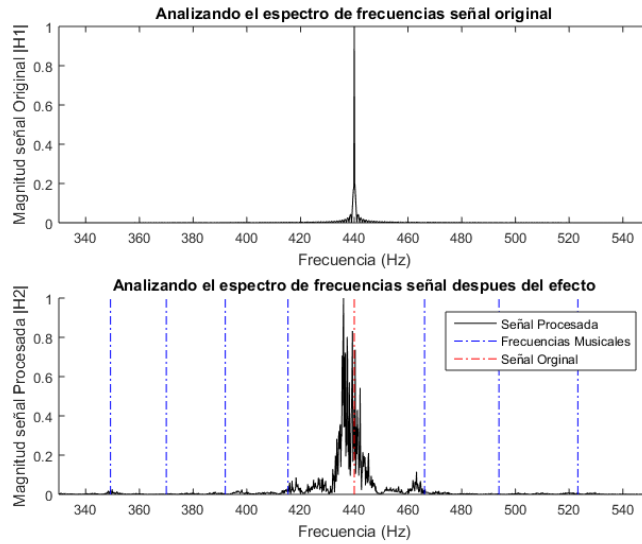


Figura 54: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración uno sistema de Lorenz

11.4.2. Configuración 2

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

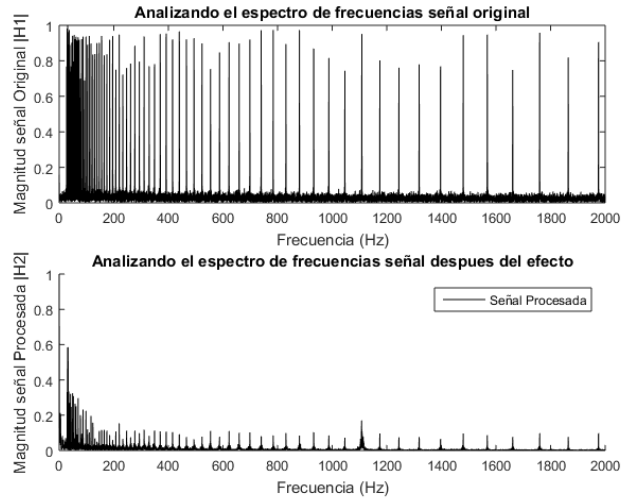


Figura 55: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración dos sistema de Lorenz

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

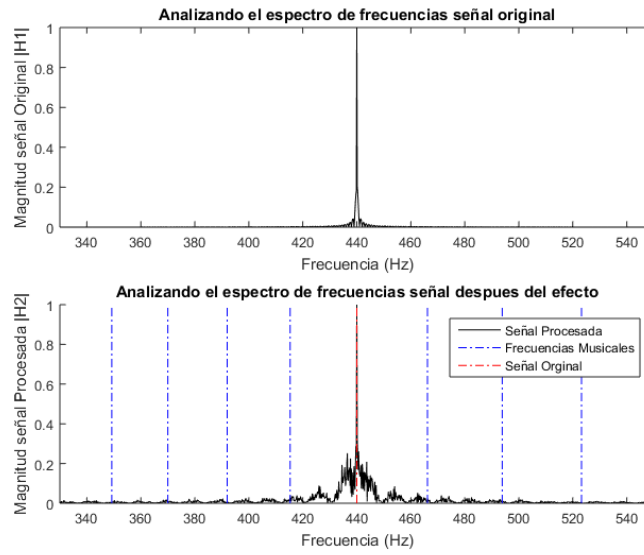


Figura 56: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración dos sistema de Lorenz

11.4.3. Configuración 3

Señal de entrada: sumatoria de sinusoides en frecuencias musicales

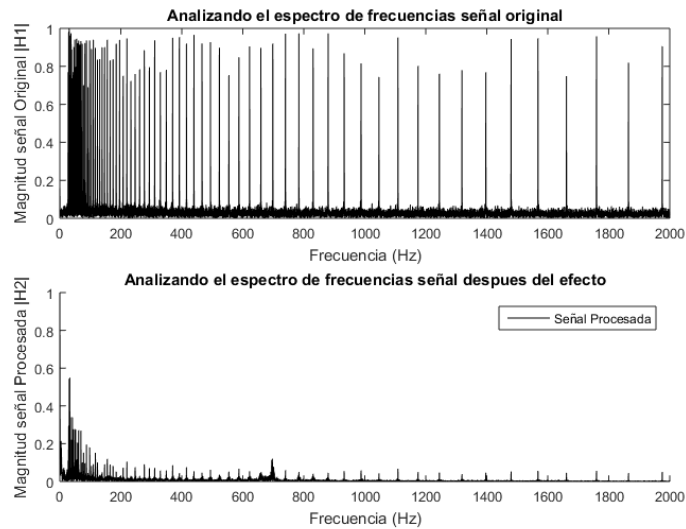


Figura 57: Análisis señal de entrada sumatoria de sinusoides configuración tres sistema de Lorenz

Señal de entrada: sinusoidal 440 Hz

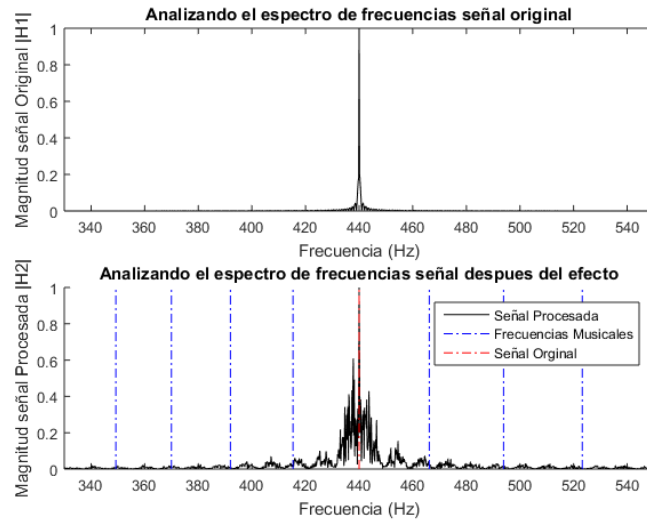


Figura 58: Análisis señal de entrada sinusoidal 440 Hz configuración tres sistema de Lorenz

11.4.4. Interfaz GUI



Figura 59: Interfaz GUI final del sistema de Lorenz

11.5. Discusión final de resultados

Mediante los resultados producidos anteriormente se puede determinar que la metodología final sí logro producir efectos más enriquecedores con respecto a la discutida en el capítulo 8. En este caso las gráficas que brindan soporte a este enunciado son las de sumatorias de sinusoides en las frecuencias musicales ya que estas gráficas no muestra simples filtros como las obtenidas en el capítulo 8 por lo que la no linealidad del efecto musical resulta ser mucho mejor aprovechada. Estas gráficas únicamente se utilizaron para poder fundamentar esta comparación con respecto a la metodología del capítulo 8 y terminar de concluir que la metodología final es una mejor forma de crear efectos de audio basados en sistemas dinámicos no lineales. Adicionalmente es importante recalcar que aunque la convolución también se puede considerar como un filtro FIR y, por lo tanto, por intuición se podría haber asumido que en la metodología final las señal de audio final solo iba a ser filtradas de forma dinámica este enunciado se rechaza al observar las gráficas en donde la señal de entrada esta descrita por una señal sinusoidal a 440 Hz. En estas gráficas se puede observar que nuestro efecto dinámico no lineales introducen armónicos adicionales a nuestra señal de audio así como con los efectos no lineales mostrados en el capítulo 7.

Ahora que ya se termino de justificar la metodología final se debe realizar el análisis de los resultados producidos mediante la señal de entrada sinusoidal a 440 Hz y la métrica desarrollada en el capítulo 7. Como se discutió anteriormente en las observaciones realizadas en este capítulo puede que ciertas configuraciones de los sistemas estén más cercanas a cumplir con los axiomas musicales, por lo mismo se obtuvieron resultados de tres diferentes configuraciones. Para que el análisis sea más ordenado se dividió la discusión en subsecciones para cada efecto y se realizó una conclusión final.

11.5.1. Péndulo simple

Como se puede observar en las figuras 34, 36 y 38. Este efecto presenta a lo sumo un armónico adicional con respecto a su frecuencia fundamental. En el caso de la Figura 34 el armónico adicional muestra mucho contenido espectral en la zona no musical. Este armónico se encuentra más cercano a la frecuencia fundamental que a la siguiente frecuencia musical en este caso el axioma 1 no se cumple ya que la frecuencia es disonante y aunque se pretenda aproximar este frecuencia no es factible por lo que se indica que la métrica no puede determinar la musicalidad de la configuración 1 del efecto.

En la 36 no se observa ningún armónico por lo que no se puede utilizar la métrica.

Y por último en la Figura 38 se puede observar un pequeño armónico cercano a una frecuencia musical después de los 600 Hz, aunque este armónico tiene una magnitud muy pequeña, es importante recordar que alguno de los efectos musicales presentados en el capítulo 7 tenían esta cualidad. Si se analiza este armónico adicional asumiendo que tiende a esta frecuencia musical se puede determinar que para esta configuración se cumple el axioma 1 y el axioma 3 ya que el polinomio resultante sería un intervalo y por lo tanto es irreducible. Por lo tanto esta configuración podría determinarse como musical.

Aunque no existe una configuración que cumpla a su totalidad con la rigurosidad de

la métrica. La configuración 3 del sistema podría considerarse de las más musicales. Es importante destacar que este efecto no tiene una mayor incidencia en la señal de audio original ya que la cantidad de armónicos que este produce son a lo sumo uno.

11.5.2. Péndulo doble

En las figuras 41, 43 y 45 se puede observar que el efecto del péndulo doble brinda una mayor cantidad de armónicos que el efecto del péndulo simple, también se puede observar que el efecto proporciona armónicos que se encuentra detrás de la frecuencia fundamental como se aclaró en el capítulo 7 estas no serán analizadas mediante la métrica. En la Figura 41 se puede observar que el armónico adicional se encuentra cercano a una de las frecuencias musicales y asumiendo que estuviera en esta frecuencia podríamos indicar que nuestra configuración es musical, ya que cumple con el axioma 1 y 3.

La configuración 2, Figura 43 es la que mayor característica de musicalidad presenta, con respecto a las demás configuraciones. En este resultado podemos observar que uno de los 2 armónicos adicionales se encuentra muy cercano a una frecuencia musical. También se puede observar que el otro armónico tiene bastante tendencia a estar en una frecuencia musical por lo que si se asume que ambos armónicos se encuentran en la frecuencia musical, por lo tanto el axioma 1 se cumple. El polinomio que describiría el acorde producido sería:

$$A(x) = 1 + x^2 + x^5$$

Lo cual es un polinomio irreducible con una sola interpretación por lo que el axioma 3 se cumpliría y el efecto de audio resulta ser musical.

La configuración 3, 45, tiene un comportamiento cercano al producido por la configuración 2 con la única diferencia de que los armónicos producidos están más alejados de las frecuencias musicales, por lo tanto debido a que el comportamiento es similar al discutido anteriormente pero los armónicos están más desafinados no utilizaremos la métrica para determinar la musicalidad mediante supuestos en esta configuración. Finalmente, podemos concluir que la configuración 2 de este efecto es de las más musicales según los axiomas.

11.5.3. Oscilador de Van Der Pol

Como se puede observar en las figuras 48, 50 y 52, el comportamiento de este efecto musical tiende a ser similar al efecto de tremolo analizado en el capítulo 7. Esto debido a que el efecto produce en sus tres configuraciones armónicos simétricos con respecto a la frecuencia fundamental. Con la diferencia de que este efecto produce mayor cantidad de armónicos y también se disminuye la magnitud de la frecuencia fundamental. En la Figura 48 se puede observar que el efecto produce una cantidad alta de armónicos es interesante notar que la frecuencia fundamental, debido a que se le redujo su magnitud, tiene una magnitud menor a dos de los armónicos. Los primeros dos armónicos más cercanos a la frecuencia fundamental se encuentran en la zona de desafinación y el resto de los armónicos aunque no están exactamente en su respectiva frecuencia musical tienden a esta. Es importante recalcar que la métrica no puede analizar esta configuración con respecto a la nota fundamental ya que en los fundamentos de los axiomas musicales se determina que la nota fundamental debe

ser la de mayor magnitud o que sus armónicos sean de una magnitud igual o menor a esta. Sin embargo si se aproxima este armónico a la frecuencia fundamental y se aplica el análisis al resto de armónicos entonces el polinomio que describe esta configuración sería:

$$A(x) = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

Lo cual nos indicaría que si es musical la configuración del efecto. Sin embargo en este caso nuestra métrica no puede determinar nada ya que la frecuencia de mayor magnitud aparte de no ser la fundamental se encuentra lejos de estar afinada.

En la configuración 2 se puede observar un comportamiento muy similar al efecto de tremolo que se analizó en el capítulo 7. En este caso aunque el armónico fundamental no se ve reducido la métrica no puede indicar la musicalidad del efecto debido a que los armónicos se encuentra en zona de desafinación, pero adicionalmente los de mayor magnitud están muy cercanos a la frecuencia fundamental. Por lo que se esperaría a que esta configuración tuviera un comportamiento similar al efecto de tremolo.

Finalmente, la configuración 3 es la que menos armónicos presenta en esta se puede observar que la frecuencia también es simétrica solo que de menor magnitud. El armónico que se produce se encuentra en medio de dos frecuencias musicales por lo que se puede indicar que la métrica no es capaz de determinar la musicalidad de esta configuración.

11.5.4. Sistema de Lorenz

Como se puede observar en las figuras 54, 56 y 58. Los resultados para este efecto musical tienen la mayor cantidad de contenido espectral, con respecto a los efectos analizados anteriormente. Se puede observar que este efecto no produce armónicos único sino que produce una gran cantidad de armónicos cercanos a un armónico central. En la configuración uno, Figura 54, se puede observar que el efecto produce una gran cantidad de armónicos alrededor de la frecuencia fundamental. Sin embargo otros armónicos adicionales se encuentran cercanos a la frecuencia musical que le sigue por lo que si consideramos el armónico con magnitud más amplia de esta serie de armónicos se podría evaluar esta configuración con la métrica y esta daría como resultado la musicalidad del efecto. Sin embargo no se puede determinar nada por el alto contenido espectral que tiene esta configuración. La configuración dos y tres, Figuras 56 y 58, muestran un comportamiento similar debido al alto contenido espectral presentado. Por lo tanto no es posible determinar la musicalidad de estas configuraciones mediante los axiomas. Este efecto puede tener demasiada incidencia en la señal de audio.

Por lo discutido anteriormente se determina que la configuración dos del efecto del péndulo doble es la que más cercana a la musicalidad, de parte de la métrica de axiomas, estuvo. El efecto del péndulo simple no tiene mayor impacto en la señal de audio ya que no produce mayor cantidad de armónicos, con una magnitud amplia, solo la configuración uno puede ser determinante sin embargo esta muy alejada de la musicalidad con respecto a los axiomas. El efecto del oscilador de Van Der Pol muestra una similitud bastante amplia con el efecto de tremolo con la diferencia de que también provee nuevos armónicos a la señal. Por último, el efecto del sistema de Lorenz es en donde la métrica basada en axiomas menos información brinda debido a su alto contenido espectral.

- Mediante la metodología final planteada en este trabajo se logro concluir que si es posible implementar efectos de audio digitales utilizando tecnología de estudio virtual (VST3) basados en sistemas dinámicos no lineales.
- Mediante los resultados obtenidos y la métrica producida a partir de los axiomas musicales se concluye que es posible evaluar la musicalidad de los efectos de audio basados en sistemas dinámicos no lineales al analizar los armónicos adicionales que se presentan en una señal de entrada que consiste de un senoide a 440 Hz.
- Se implementaron cuatro efectos de audio basados en los siguientes sistemas dinámicos no lineales: Péndulo simple, Péndulo Doble, oscilador de Van Der Pol y sistema de Lorenz. A lo largo del informe se explica detalladamente la creación del efecto basado en el Oscilador de Van Der Pol y la metodología esta generalizada para poder obtener efectos de cualquier sistema dinámico no lineal por lo que se genero un diseño intuitivo para el desarrollo de efectos musicales basados en sistemas dinámicos no lineales.
- El efecto y su respectiva configuración más cercano a cumplir con los criterios de musicalidad basados en los axiomas es el del péndulo doble configuración dos.
- La métrica de los axiomas mostro que el efectos de Van Der Pol tiene una alta similitud con el efecto de tremolo HY-TP2.
- Debido a los resultados gráficos obtenidos mediante las entradas de sumatoria de sinusoides y señal sinusoidal a 440 Hz se concluye que la metodología final basada en acústica produce resultados con mayor contenido espectral adicional que la metodología inicial.

- Se recomienda el uso de una plataforma de desarrollo de VST3 que sea más óptima para el cálculo de la operación de convolución en tiempo real ya que el uso de RackAFX limita la cantidad de procesamiento dedicado al algoritmo.
- Se recomienda desarrollar una plataforma desde cero para el diseño de los efectos de audio basados en sistemas dinámicos no lineales para que el código de implementación sea lo más óptimo posible.
- Se recomienda realizar una investigación de diversos análisis en fase y tiempo para el desarrollo de una mejor métrica de evaluación de la musicalidad de los efectos debido a que la métrica desarrollada mediante los armónicos resulta ser limitada y rigurosa.
- Se recomienda la evaluación cualitativa de la musicalidad de los nuevos efectos de audio mediante la presentación de estos a diferentes músicos profesionales para obtener más criterios para evaluar la musicalidad.
- Se recomienda la evaluación de la musicalidad mediante la métrica basada en axiomas de más configuraciones de los efectos de audio presentados en esta investigación debido a la posible existencia de configuraciones que presenten mayor musicalidad.
- Se recomienda aplicar la metodología de diseño de efectos de audio a más sistemas dinámicos no lineales de ordenes superiores a cuatro, o que presenten características interesantes como los mapas iterativos.

-
- [1] T. Collins, “Department of Electronic, Electrical and Computer Engineering University of Birmingham, Edgbaston, Birmingham, UK”, pág. 6, 2003.
 - [2] F. Eichas, U. Zölzer, A. Two, A. Three y A. Four, “Black-box modeling of distortion circuits with block-oriented models”, pág. 7, 2016.
 - [3] U. Zölzer, ed., *DAFX: Digital Audio Effects*, 2 edition. Chichester, West Sussex, England: Wiley, abr. de 2011, ISBN: 978-0-470-66599-2.
 - [4] W. Pirkle, *Designing Audio Effect Plug-Ins in C++: With Digital Audio Signal Processing Theory*, Edición: 1. Burlington, MA ; Abingdon, Oxon: Routledge, nov. de 2012, ISBN: 978-0-240-82515-1.
 - [5] A. Tanguiane, “Towards axiomatization of music perception”, *Journal of New Music Research*, vol. 24, n.º 3, págs. 247-281, sep. de 1995, ISSN: 0929-8215. DOI: 10.1080/09298219508570685. dirección: <https://doi.org/10.1080/09298219508570685> (visitado 29-04-2018).
 - [6] s. results search, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*, 1 edition. Cambridge, Mass: CRC Press, dic. de 2000, ISBN: 978-0-7382-0453-6.
 - [7] K. J. Aström y R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton: Princeton University Press, 2008, ISBN: 978-0-691-13576-2.
 - [8] R. P. C. S. C. Chapra, *MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS*. México, etc: MC GRAW HILL, 2007, ISBN: 978-970-10-6114-5.
 - [9] *Artificial Reverberation*. dirección: https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/Artificial_Reverberation.html (visitado 16-09-2018).
 - [10] B. Corporation, *BOSS - OS-2 | OverDrive/Distortion*. dirección: <https://www.boss.info/us/products/os-2/> (visitado 30-09-2018).
 - [11] *Krush - Free Bitcrusher Plugin*. dirección: <https://www.tritik.com/products/krush/> (visitado 30-09-2018).

- [12] *HY-TP2 Tremolo/Pan VST/AU Plugin By HY-Plugins (Free Download)*, ene. de 2018. dirección: <https://bedroomproducersblog.com/2018/01/11/hy-plugins-tp2/> (visitado 30-09-2018).
- [13] “Digital Storage Oscilloscopes - TDS2000C Series”, *Digital Storage Oscilloscopes*, pág. 12,
- [14] *UMC404HD | Interfaces | Computer Audio | Behringer | Categories | MUSIC Tribe*. dirección: <https://www.musictribe.com/Categories/Behringer/Computer-Audio/Interfaces/UMC404HD/p/POBK1> (visitado 30-09-2018).
- [15] *RackAFX | RackAFX*. dirección: <http://www.willpirkle.com/rackafx/> (visitado 01-10-2018).

15.1. Código de RackAFX y MATLAB

Ambos links que se presentan en este capítulo hace referencia a los códigos tanto en MATLAB como en RackAFX utilizados para generar los resultados he implementar los efectos de audio. La carpeta Tesis pruebas en MATLAB tiene los resultados obtenidos con la metodología anterior como con la metodología final. También vienen adjuntos archivos .WAV los cuales se utilizaron para generar la señales de entrada sinusoidal y de sumatoria de sinusoides así como los audio importados desde RackAFX los cuales tienen la respectivas configuraciones de cada efecto no lineal. Por último, la carpeta Efectos no lineales RackAFX tiene los códigos de implementación de los efectos desarrollados en esta investigación. A continuación se presenta el link donde se pueden encontrar cada una de las carpetas con los respectivos códigos:<https://drive.google.com/drive/folders/1P4ByPH3t1EvelFQJDyC-amYRONFwWsME?usp=sharing>

ADC Viene del inglés Analog to Digital Converter. Es un instrumento que se utiliza para poder convertir una señal analógica en digital. 6

Aliasing Es el efecto que produce que la señal analógica no pueda ser reconstruida digitalmente ya que es indistinguible. 34

CPU Viene del inglés Central Processing Unit. Es el hardware que se utiliza para interpretar instrucciones de programa. 7

DAC Viene del inglés Digital to Analog Converter. Es un instrumento que se utilizar para poder convertir una señal digital en analógica. 7

DAW Viene del inglés Digital Audio Workstation. Un sistema que dedicado a grabar y editar audio mediante software. 3

De-esser Hace referencia a un efecto no lineal reduce el exceso de silbas en una señal de voz. 36

DSP Puede referirse a Digital Signal Processor o a Digital Signal Processing. Es un microprocesador optimizado para aplicaciones con alta cantidad de operaciones matemáticas como procesamiento de señales. 6

Enhacer Hace referencia a un efecto no lineal que aplica pequeñas distorsiones en ciertas frecuencias en específico. 34

GUI Viene del inglés Graphical User Interface. Es una aplicación en software que incluye imágenes, botones, etc. Para que al usuario se le haga más intuitivo el uso del programa. 8

Noise gate Hace referencia a un efecto no lineal que elimina los ruidos del instrumento. 36

Overdrive Hace referencia a un tipo de distorsión ligera que se presenta en efectos musicales de uso comercial. 34

TDL Viene del inglés Tapped Delay Line. Es una forma de diagrama de bloques que indica diversos Delays en línea que se pueden utilizar para representar los ecos en un espacio 3D, y por lo tanto la respuesta impulsional del espacio. 31