

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE  
GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Cómo introducir Topología

Guatemala  
Febrero, 1987



# Cómo introducir Topología

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

# Cómo introducir Topología

Marco Vinicio Barrientos Carles

---

Guatemala

3 de febrero, 1987

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

- C Ó M O   I N T R O D U C I R   T O P O L O G Í A -

MARCO VINICIO BARRIENTOS CARLES

---


Guatemala

1987.

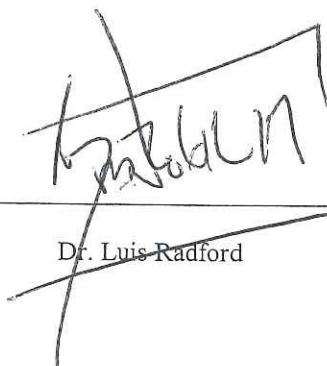
Nombre del estudiante:


  
Marco Vinicio Barrientos Carles

Vo. Bo.:

  
Dr. Leonel Morales Aldana (Asesor)

Tribunal Examinador:

(f)   
Dr. Luis Radford

(f)   
Dr. Antonio Gillot

(f)   
Dr. Raúl Benjamín González de Paz - Director

La Matemática le permite crear al hombre,  
mundos en donde él gobierna , de donde el  
hacer matemática sea para el hombre ,  
básicamente , una forma de gobernarse  
a sí mismo.

VB.

## PREFACIO

*Una de las características más sorprendentes del edificio matemático, en el estado en el que actualmente se encuentra, es su versatilidad al momento de desarrollar una cierta teoría o estructura, en el sentido que una determinada axiomática puede ser reemplazada por otra equivalente, y en el que muchas veces teoremas y axiomas pueden ser intercambiados de una manera que muestra, no sólo la autonomía del constructo, sino la gran belleza que posee el proceso mismo de la construcción. Con ello, el desarrollo y la evolución de la teoría básica referida a estas estructuras no puede ser siempre descrito como inherentemente lineal, y los teoremas de equivalencia y la circularidad Inmanente representarán desde la perspectiva meta-teórica una gran fortaleza conceptual.*

*Este hecho de la existencia de distintas axiomáticas funcionalmente equivalentes e intercambiables ha representado un tema de especial interés personal, y de manera particular, en lo referido al área de la Topología Elemental, en donde históricamente se observa que no se establecieron acuerdos unívocos al respecto de cuál de las distintas axiomáticas propuestas sería la más conveniente y perdurable, y esto posiblemente debido en parte a la gran cantidad de matemáticos notables que trabajaban en ello, y a la diversidad de los enfoques y los particulares intereses perseguidos. Así, en el caso específico de la estructura topológica de una determinada abstracción espacial, se encontrarán diferentes enfoques y distintas perspectivas, para nada similares entre sí, pero totalmente reemplazables la una por la otra. No puede negarse que algo de estética y de arte subyace bajo estos hechos, tanto en el sentido de los modos y preferencias, como en el énfasis de ciertos resultados.*

*La presente monografía se encuentra grandemente motivada por un primer curso universitario orientado a la abstracción matemática, el cual tuvo a bien exponer la diversidad de áreas existentes en la Matemática, y las distintas estructuras que en cada una de ellas se estudia. Así, detrás de todo el escrito, subyace, como motivación principal, la generación de una axiomática propia para un Espacio Topológico, es decir, una nueva forma de proveer de alguna estructura topológica a un espacio dado. El autor ha considerado que la novedad encontrada, y mostrada en el último Capítulo, resulta mucho más intuitiva, y por ello de preferencia estética e intelectual. Sin embargo, así como con otras tantas visiones, no ha dejado de ser una curiosidad académica, un ejercicio matemático interesante, y se entrega sin mayores pretensiones como una opinión más sobre la cual sea factible un ameno coloquio académico, disfrutando de la correspondiente y gratificante conversación.*

# CONTENIDO

	Página
PREFACIO .....	iv
CONTENIDO .....	v
RESUMEN .....	vi
Capítulos	
1. INTRODUCCIÓN .....	01
2. ESPACIOS TOPOLÓGICOS DEFINIDOS MEDIANTE FAMILIAS DE ABIERTOS .....	18
3. OPERADOR DE CERRADURA DE KURATOWSKI .....	45
4. ESTRUCTURAS TOPOLÓGICAS INTRODUCIDAS MEDIANTE SISTEMAS DE VECINDADES .....	68
5. ESTRUCTURAS DETERMINADAS POR UN OPERADOR DE ADHERENCIA .....	82
BIBLIOGRAFÍA .....	92

## RESUMEN

El Capítulo 1 muestra la importancia histórica y conceptual en torno de la pregunta *¿qué es la topología?* Se aborda la problemática de una apropiada definición para la estructura espacial, que no sea demasiada específica, por un lado, ni en extremo general, por el otro. El papel de los mapeos doblemente continuos que preserven lo fundamental en la estructura espacial es crucial. Se concluye que la palabra topología asume varios niveles de significación, siendo tres sus acepciones principales, a saber: como área de estudio de la Matemática (la Topología), como genérico de la estructura espacial (o estructura topológica), y como específico para el elemento particular que aparece en una de las formas de introducir la estructura topológica, misma que es la usualmente utilizada en el grueso de la disciplina.

En el Capítulo 2 se presenta el concepto de topología como una familia de conjuntos, denominados conjuntos abiertos, los cuales cumplen ciertas propiedades de interacción, y que vendrán a constituirse como las piezas fundamentales sobre las cuales es posible describir la estructura espacial que posee el Universo o Espacio en cuestión, el cual se define como la unión de todos los miembros de la familia de conjuntos abiertos en la topología dada. La escogencia de esta estructura en particular para el inicio del ejercicio teórico de la equivalencia entre los distintos sistemas responde al hecho primordial que éste suele ser el mecanismo estándar para introducir la estructura espacial en un determinado conjunto. Un conjunto sobre el cual se ha definido este tipo de estructura se denomina un Espacio Topológico.

De una manera similar se desarrollan los Capítulos subsiguientes, presentando tres tipos de estructuras topológicas basadas en los conceptos de Operador de Cerradura, de Sistema de Vecindades y de Operador de Adherencia, respectivamente. La estructura y la axiomática mostradas en el Capítulo 5 responden a una propuesta inédita, cuya propiedad pertenece al autor de esta monografía.

Vale la observación que para hacer explícita la correspondencia entre las diferentes estructuras, se procede de manera similar en cada una de las secciones que conforman cada Capítulo, respondiendo a una lógica de simetrías. De manera específica, para cada uno de los cuatro sistemas o estructuras, se dan los axiomas del sistema y las definiciones básicas de los otros tres elementos, comprobando posteriormente que estos elementos cumplen con los teoremas que se corresponden con los axiomas en los otros sistemas. A su vez, para cada estructura topológica asumida como primaria se procede a demostrar que las otras tres pueden ser generadas de manera secundaria, y que éstas nuevas estructuras derivadas “reconstruyen” totalmente la estructura originaria que las ha definido, alcanzando así el objetivo fundamental del presente trabajo monográfico, el cual es el de mostrar la completa equivalencia teórica entre las cuatro modalidades de introducción desarrolladas, dejando en el lector académico la selección oportuna o deseada dentro de la diversidad de formas existentes para introducir una topología o estructura topológica en un determinado espacio.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN.

o 1.1 ¿ QUE ES TOPOLOGIA ?

Para responder a la pregunta de qué es topología, es de utilidad dar primero una mirada a todas las disciplinas matemáticas. Llamamos sistema matemático a un conjunto (no vacío) con una cierta estructura definida en él. Esta estructura puede algunas veces describirse adecuadamente en más de una manera y es propio de cada disciplina algún mecanismo específico para hacerlo. Es típico que las estructuras algebraicas (objeto del estudio de álgebra) estén determinadas por operaciones binarias - (o finitas en dado caso) - con ciertas propiedades características.

Una disciplina matemática estudia pues, cierto tipo de sistemas matemáticos, definiéndolos introduciendo ciertos conceptos y descubriendo propiedades y relaciones existentes entre ellos. Es de esencial interés aquellas entidades que son inherentes a la estructura, en el sentido que no cambian bajo mapeos biunívocos que preservan a la misma (llamados isomorfismos en álgebra, homeomorfismos en topología, difeomorfismos en geometría diferencial, etc.). A estas entidades las llamamos invariantes. Así, a groso modo, podemos mencionar que el estudio de una disciplina matemática estudia el comportamiento de funciones de un sistema a otro (dentro de éstas a los morfismos y sus invariantes) para determinar las propiedades más básicas de los mismos. Esto nos lleva a una clasificación de los sistemas que incluye el problema de la representación, que se resume, es una adecuada traslación de un sistema dado a alguno más accesible de otra naturaleza, un subsistema o un universo más general que contenga al original como parte de su tipología.

Con esta introducción nos podemos lanzar a una primera tenta-

tiva de respuesta. Traducimos lo afirmado por Klein en 1872 en su Erlanger Programm (reeditado en 1921: "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen"): "Topología es el estudio de todas las propiedades del espacio que son invariantes bajo mapeos uno-uno bicontinuos." Intuitivamente aceptaríamos que esta definición está inspirada en la idea de la topología como la geometría de la distorsión, es decir, del estudio de las propiedades geométricas fundamentales que permanecen inalteradas cuando estiramos, retorremos o cambiamos de cualquier otra manera el tamaño, forma y posición de un objeto (algo así como un juguete de goma). La topología aparece como una geometría no métrica, a diferencia de la geometría de Euclides, Labatchewsky, Riemann y otros. La definición de Klein es entonces justificable en 1872. Sin embargo, ahora contiene, básicamente dos grandes problemas; el primero es el de definir el concepto de espacio de forma que retenga las características más esenciales, de lo que entendemos por "un espacio", el segundo está en establecer para ese concepto de espacio qué significa continuidad.

Para la resolución del primer efecto basta consultar la historia, la noción de espacio va depurándose hasta llegar a un punto en el cual se pueden tener varios conceptos de éste. Así, por ejemplo en la sección 1.2 de este capítulo se presentan diversas versiones, las cuales guardan una cierta relación entre sí; de hecho cada espacio métrico (axiomas M) es un espacio Hausdorff (H), cada espacio Hausdorff es un espacio topológico (i.e. el determinado por los axiomas O, ver 1.2). A su vez cada espacio topológico es completamente equivalente a un espacio con una función de cerradura (K) y a otras modalidades de presentación, para después observar que todo espacio topológico es un V-espacio de Fréchet. Estas

nociones son solo para mencionar algunas de las que se especificarán en nuestro resumen histórico, pero hay muchas más intermedias y más extremas. Quizá los límites para la noción de espacio sean por el lado de lo más general (y a su vez menos exigente), un conjunto  $X$  cualquiera diferente del vacío, y por el otro, por la vía de lo más determinístico (y de menos abstracción) nuestro espacio físico, "tal como es". Es de observar que tarea de la topología será considerar las diversas estructuras espaciales para después estudiar la relación entre estas.

Para la segunda inconveniencia de la definición propuesta por Klein es de utilidad primero notar que si se está interesado solo en el estudio de propiedades invariantes bajo continuidad se sugiere que existen espacios (geométricos) en los cuales un exceso de estructura se da, es decir, que una serie de características sobran de la configuración topológica básica. Por otro lado la idea de continuidad fué originalmente construída para funciones reales y complejas, de donde sufre su primera generalización con los espacios métricos para después seguir con espacios Hausdorff. De esto llegamos a una noción de continuidad en espacios de vecindades y así en lo que ahora llamamos espacios topológicos. Así, la función  $f: (X, \mathcal{N}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  con  $\mathcal{N} = \{N_x\}_{x \in X}$ ,  $\mathcal{V} = \{V_y\}$  es continua si  $\forall x \in X \text{ stq } \forall V_{f(x)} \exists N_x \in \mathcal{N} \ni f(N_x) \subseteq V_{f(x)}$ . Usando esta definición nosotros damos pronto la definición de conjunto abierto en términos de vecindades de donde parafraseando continuidad se establece en términos de abiertos que  $f$  es continua sobre  $X$  si la imagen inversa de abiertos en  $Y$ , es abierta en  $X$ .

Si llamamos homeomorfismo a una biyección tal que ella y su inversa son continuas obtenemos que dicho mapeo no hace más que corresponder biunívocamente todos los conjuntos abiertos del domi

nio con los abiertos del contradominio. Sin embargo por otro lado, en general las vecindades de  $X$  (el dominio) no son mapeadas en vecindades de  $Y$ . Asi pues, si establecemos como estructura espacial la familia de abiertos y definimos continuidad como se estableció en el parrafo anterior, tenemos que una biyección bicontinua es un morfismo de tal estructura y de esta manera hace que la familia de abiertos sea un invariante topológico (como también lo será el operador de cerradura). Esto no sucede con la familia  $\mathcal{F}_X$  de vecindades que define un Hausdorff ni con la función  $\rho$  que define una métrica. Podría parecer que los abiertos son invariantes por construcción y que por lo mismo no tienen nada de preferencia sobre los otros conceptos, pero hay que recordar que el proceso fue inverso. Se generalizó el concepto de continuidad y de este resultó que los abiertos nos proporcionaban la estructura "básica" de un espacio. A esta familia se le llamó topología y define una estructura topológica sobre el espacio que puede, dicho sea de paso, ser definida por otros muchos caminos.

Sin embargo para espacios Hausdorff existe algún exceso significativo de estructura por sobre la estructura topológica (geometría básica), que se pierde de una manera no muy conocida (solo relacionamos tal exceso con un axioma de separación, que llamamos  $T_2$ ). En el caso de los espacios métricos ( $T_4$ ) existen dos clases de estructura más especial siempre presentes, a saber, la estructura métrica (preservada bajo isometrías) y la estructura uniforme (preservada bajo biyecciones biuniformemente continuas).

Podemos lanzarnos ya a una mejor definición que la dada anteriormente. Topología es la disciplina matemática que estudia la estructura geométrica más básica en un espacio, aquella que es preservada bajo biyecciones continuas en ambas direcciones. Pero esta

es aparentemente la misma que la primera, en efecto, así es. Sin embargo la diferencia estriba en que ahora ya sabemos qué es continuidad y qué tipo de estructura espacial no cae dentro del concepto topológico (sea por muy general o muy específica). Hablando estrictamente las estructuras uniforme y métrica no forman parte de la topología, sin embargo, así se le considera, como capítulos anexos. De esto sería más propio definir a la Topología como la disciplina matemática concerniente a dar definiciones para el concepto de estructura espacial, comparándolas entre sí e investigando las relaciones entre las propiedades que pueden ser introducidas en un sistema topológico (i.e conjuntos con una estructura espacial sobre ellos). Así, un ejemplo de sistema topológico son los llamados espacios topológicos que son preservados bajo bicontinuidad (y motivo para la estabilización de la búsqueda); estos, de hecho, son definidos mediante una familia de conjuntos - llamados abiertos - a la que se llamó a su vez topología. Por otro lado los espacios topológicos son equivalentes a otros sistemas que llamamos estructuras topológicas y que son el objetivo de esta tesis; además tenemos sistemas topológicos que no constituyen en sí estructuras topológicas, por ser más generales, como los V-espacios de Fréchet y otros por ser más especiales como los ya mencionados espacios métricos, espacios uniformes\*, espacios Hausdorff (que son a su vez estructuras topológicas con un exceso de estructura dada respectivamente por encima de  $T_4$ ,  $T_{3\frac{1}{2}}$ , completitud regular,  $T_2$  ).

De lo dicho anteriormente existen problemas básicos en el estudio de estructuras topológicas, y ellos son determinar cuando corresponden a estructuras más específicas. El problema de la uni-

\*espacios de proximidad

formización y los axiomas  $T$  está totalmente resuelto . Por otro lado el problema de metrización sigue ocupando un lugar central. El objetivo es determinar condiciones necesarias y suficientes para que una estructura topológica sea un espacio métrico, y es de hacer notar que estas no envuelven requerimientos cuantitativos (i.e envolviendo al sistema  $\mathbb{R}$  de los números reales). Metrizable, uniformizable y todas éstas son invariantes topológicos.

Posiblemente los sistemas matemáticos más poderosos e interesantes son aquellos que poseen ambas cualidades, topológicas y algebraicas, para los cuales se pide compatibilidad entre ambas estructuras (usualmente se requiere que las operaciones binarias de la estructura algebraica sean continuas con respecto al sistema topológico). Grupos topológicos, espacios lineales topológicos, espacios normados, espacios Hilbert son ejemplos de tales sistemas.

La Topología está dividida en dos grandes ramas: Topología general (la llamada también Topología punto-conjunto) y la Topología algebraica (Topología combinatoria). La primera distinción entre ellas está en las herramientas utilizadas que por supuesto influyen poderosamente en el tipo de resultados obtenidos. En Topología algebraica encontramos preponderancia en los resultados globales, mientras que en Topología general la localidad es más común. Como dan a entender sus nombres Topología general usa herramientas de teoría de conjuntos y la Topología combinatoria usa álgebra - principalmente teoría de grupos -.

Como siempre quedará una duda con respecto a la pregunta original, pero conforme se ahonda en Topología se llega en lo personal a una mejor respuesta y con seguridad que los conceptos que aquí he tratado de transcribir serán más claros y por supuesto incompletos. Como en todas las disciplinas de la Matemática, es muy difícil

explicar en que consisten si no es a través de su aprendizaje. Así, nuestra pregunta original tiene diversas respuestas, según el lector. Si es un principiante quien la hace, la mejor respuesta será: "después de estudiarla un poco la entenderemos mejor". Si es un intermedio la más adecuada viene a ser cualquiera de una gran colección, que quedarán más dudas que puntos en claro. Si es un perito, no creo que le interese saber ya que es lo que ha hecho durante algún tiempo ni porqué le agradó. ¡Así es la Matemática!

1.2 RESUMEN HISTORICO

Para llegar a entender lo que la estructura espacial es, un acercamiento intuitivo es probablemente el mejor. La pregunta es ¿qué tipo de intuición seguir? . A un geómetra le parece que la característica esencial del espacio es el concepto de distancia entre dos puntos, o más en general algún concepto de cercanía. Para un analista le parecerá preferible usar como punto de partida el conocimiento de los puntos límites de todos los conjuntos en el espacio o una lista de todas las secuencias convergentes y sus límites. A un algebrista la escogencia de una función que cumpla ciertas propiedades que logren reunir sabiamente la noción de cercanía y borde para cada conjunto parecerá preferible. Todos estos enfoques han sido usados y veremos a continuación un poco de su apareamiento.

Los espacios métricos, introducidos por Fréchet en 1906 con "Sur quelque points du calcul fonctionnel", y sus variantes están basados en el concepto de distancia . Un espacio métrico (un sistema topológico, si somos rigurosos) es un par  $(X, \rho)$  tq:

- M0.  $\rho \in \mathbb{R}^{x^2}$ .
- M1.  $\forall x \forall y : \{x, y\} \subseteq X \Rightarrow [\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y]$ .
- M2.  $\forall x \forall y \forall z : \rho(x, z) + \rho(x, y) \geq \rho(y, z)$ .

Estos son una abstracción de bien conocidas propiedades de la distancia en espacios euclidianos usuales. Tal axiomática se ha aceptado en su mayoría, en el sentido que un debilitamiento en las propiedades produce espacios mucho más generales y propiedades extra reducen de tal forma la caracterología del espacio en cuestión que conducen, casi inevitablemente, a las estructuras euclidianas.

Una segunda forma, ya antes mencionada, de introducir estruc

tura espacial en un conjunto es tratando de precisar el concepto intuitivo de cercanía. Históricamente esto se sucedió trasladando dicho concepto intuitivo al concepto de mayor maleabilidad matemática de vecindad. Una vecindad de un punto  $\alpha$  es un subconjunto cualquiera del espacio que satisface ciertas condiciones, dentro de ellas la arbitrariedad que contenga al punto en cuestión (se verá más adelante como esto es no necesario para el desenvolvimiento de una teoría que conduzca a los resultados usualmente esperados para la noción de espacio). Así pues la estructura espacial en un conjunto  $X$  es dada especificando para cada parte del mismo una familia:  $\mathcal{F}_x, x \in X$  de vecindades. Si ninguna restricción es impuesta sobre la familia  $\mathcal{F}_x$ , entonces  $(X, \{\mathcal{F}_x\}_x)$  es llamado un Fréchet-V-espacio, debido a que él los presentó por primera vez en 1918 con "Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits". Éste es probablemente el espacio topológico de mayor generalidad que ha sido estudiado. Las primeras restricciones a este concepto fueron presentadas por Hausdorff en 1914 con su "Grundzüge der Mengenlehre". Los requerimientos para la familia son: Sea  $\mathcal{N}_x = \{N_x | N_x \text{ es vecindad de } x\}$  para cada  $x \in X$ :

- H1.  $\forall x \in X \exists N_x \in \mathcal{N}_x \ni x \in N_x$ .
- H2.  $\forall N_x, N'_x: \{N_x, N'_x\} \subseteq \mathcal{N}_x \Rightarrow \exists N_x^* \in \mathcal{N}_x \ni N_x^* \subseteq \bigcap \{N_x, N'_x\}$ .
- H3.  $\forall N_x \in \mathcal{N}_x \forall y \in N_x \exists N_y \in \mathcal{N}_y \ni N_y \subseteq N_x$ .
- H4.  $\forall x \forall y: \{x, y\} \subseteq X \Rightarrow \exists N_x \in \mathcal{N}_x, N_y \in \mathcal{N}_y \ni \bigcap \{N_x, N_y\} = \emptyset$ .

Existe una conexión entre espacios métricos y espacios Hausdorff, a saber, en todo espacio métrico dado  $r \in \mathbb{R}$ , stq:

$N_x(r) = \{y \in X | \rho(x, y) < r\} = B(x; r)$ , son vecindades y satisfacen los axiomas H. Así pues, cada espacio métrico es un espacio Hausdorff. Una mirada atrás vemos que la selección de Hausdorff para sus axiomas es realmente admirable.

El concepto de punto límite de un conjunto fue utilizado re-

petidamente por Riesz en sus escritos (1906, "Die Genesis des Raumkegriffs"; 1908, "Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre") para definir estructura espacial sobre un conjunto. Más tarde Kasimier Kuratowski encontró conveniente proponer sus axiomas en términos de una función de cerradura definida sobre  $\mathcal{P}X$ . Por cerradura de un conjunto nosotros entendemos el conjunto  $\bar{A}$  que consiste de  $A$  y todos sus puntos límites, quedando así este cerrado. Los axiomas son:  $\forall A \forall B: \{A, B\} \subseteq \mathcal{P}X$ :

$$K1. \bar{\emptyset} = \emptyset, \bar{A} \supseteq A.$$

$$K2. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad [\text{en la notación de Halmos: } \overline{U\{A, B\}} = U\{\bar{A}, \bar{B}\}].$$

$$K3. \bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}.$$

Un espacio topológico viene entonces a ser un par  $(X, f)$ , donde  $f: \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$  es la función definida por  $\forall B \in \mathcal{P}X: f(B) = \bar{B}$ . Es claro que acá el axioma K1 es necesario puesto que todos los conceptos (incluyendo el concepto de punto límite) son definidos en términos del concepto primario, que es, según el acercamiento de Kuratowski, la función de clausura.

Por otro lado, puntos límites (y así cerraduras) pueden ser definidos en términos de vecindades mediante: un punto  $x$  es punto límite de un conjunto  $B$  si cada vecindad de  $x$  contiene puntos de  $B$  diferentes de  $x$ . Es acá donde aparece la noción de conjuntos abiertos (y cerrados). Un conjunto es abierto si cumple cierto requerimiento, que en términos de vecindades viene a ser aquel conjunto  $G$  tal que para cada uno de sus puntos existe una vecindad del punto contenida en  $G$ . Por otro lado según la cerradura un conjunto  $G$  es abierto si su complemento está ya cerrado, i.e.  $\overline{C_x G} = C_x G$ . Es de hacer notar que en un espacio Hausdorff (según los axiomas H planteados anteriormente), todas las vecindades son conjuntos abiertos.

Sucede así que, de un sistema de vecindades se trató de caracterizar a los conjuntos abiertos para las mismas. Se encuentra que la familia de vecindades de todos los puntos del espacio no nos lleva a la estructura intrínseca del mismo, pudiendo distribuirse estas vecindades de muchas maneras, mientras que la familia de abiertos no requiere localidad para sus elementos.

En resumen podemos decir, que aparecieron desde el principio otras muchas sofisticadas y menos intuitivas, pero teóricamente más convenientes, formas de introducir estructura topológica. Con el paso del tiempo se va escogiendo la manera más adecuada y es así como lo que parecía ser un concepto de no mucha importancia llega a ser el más conveniente para ocupar el lugar de concepto primitivo y que ahora es utilizado casi universalmente.

Este camino es el de especificar la familia  $\mathcal{T}$  de conjuntos abiertos. Los requerimientos para la colección son:

01.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $X \in \mathcal{T}$ .
02. si  $A_i \in \mathcal{T}$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ .
03. si  $A \in \mathcal{T}$  y  $B \in \mathcal{T}$ , entonces  $A \cap B \in \mathcal{T}$ .

Es su popular preferencia la que nos motivó a iniciar la tesis con su estudio. Es de hacer notar que quizá la razón más poderosa para la selección de la piedra angular es la antes comentada: el concepto primitivo utilizado para definir la estructura viene a ser un invariante para la misma; esto no es general. Por otro lado es fácil comparar diferentes estructuras topológicas en términos de sus familias  $\mathcal{T}_K$  de conjuntos abiertos. Sin embargo, es de insistir que el camino que se tome para definir un espacio topológico es algo más de estética y gusto personal que de justificadas razones para ello. Esta vasta libertad en un sistema matemático no es algo frecuente, y es lo que caracteriza y enriquece nota-

blemente a la Topología, y dicho sea de paso, esa misma riqueza se deba quizá a lo universal de la noción intuitiva de espacio. Si fuéramos sinceros con la historia y con el tema deberíamos presentar, no cuatro, como modestamente acá hemos hecho, sino como mínimo cuatro veces cuatro maneras de iniciar un estudio de las propiedades más básicas e inmutables (bajo continuidad) del espacio.

Para finalizar esta breve reseña hagamos mención de otra interesante manera de dar existencia a la estructura topológica (y que acá no hemos podido desarrollar). Ésta también fué presentada por Fréchet (1906) y se refiere a dar una lista de las sucesiones convergentes (clases de convergencia) y sus límites. Este es un procedimiento deseable particularmente para espacios de funciones donde uno puede querer estudiar los diferentes constructos espaciales según son definidos mediante convergencia puntual, convergencia uniforme, convergencia en la media, convergencia en medida y posiblemente otras. Sin embargo, es de hacer constar, que ha resultado difícil determinar axiomas apropiados y suficientes. Esta aspereza ha sido resuelta solo muy recientemente después que las sucesiones fueron reemplazadas por los conceptos más generales (y completamente equivalentes) de redes y filtros.

Por otro lado, siendo rigurosos, es difícil fijar una fecha para el inicio de la topología como rama independiente de la Matemática. Es bien conocido de todos que problemas de naturaleza topológica fueron considerados por Euler y Gauss. De hecho, aún actualmente se le presenta como la materia relacionada con la cinta de Möebius, la botella de Klein, el problema de los colores y los mapas, los puentes de Königsberg y muchos más que son problemas relativamente viejos ya. El primer uso del término topología de que tenemos conocimiento es en el título de los libros "Vorstudien zur Topologie" publicados en 1847 por el matemático alemán Listing, los cuales vienen a ser un primer tratado en este campo.

Sabemos por otro lado que sus orígenes se remontan a descubrimientos fundamentales hechos por Descartes (1640) y Euler (1742). Los dos habían observado la relación entre vértices, aristas y caras de un poliedro simple. Euler la estableció con su famosa fórmula  $V + C - A = 2$ . También resolvió el famoso problema, antes mencionado, de los puentes de Königsberg, en una memoria que debe -se- gún James von Neumann- considerarse como una de las piedras angulares de la Topología. Euler era tan prolífico (quizá el más vasto, a la par que Gauss y Cauchy) que no sería muy propio considerarlo fundador de la Topología, a diferencia de otras ramas matemáticas que sí tienen un origen y pionero bien establecido. Otros trabajos de relevancia hechos durante el siglo diecinueve son quizá los debidos a Riemann (1892, "Gesammelte mathematische Werke"), Cantor (1932, "Gesammelte Abhandlungen"), y Poincaré (1895, "Analysis Situs"), entre otros. Sin embargo, de querer pensar en una fecha exacta, sería agradable escojer a 1906 como el año en el cual la Topología General tuvo su real punto de partida, desde que tres diferentes personas tomaron fuerza para solventar el problema de definir una estructura espacial general. Ellos fueron F. Riesz ("die Genesis des Raumbegriffs"), M. Fréchet ("Sur quelque points du calcul fonctionnel") y E.H. Moore ("Introduction to a Form of General Analysis"). Por otro lado para la Topología Combinatoria no pudo darse después de 1895 cuando Poincaré publicó su primer libro sobre el tema.

La Topología nació sin saber que nacía y existió mucho tiempo sin que los matemáticos supieran muy bien con quien estaban tratando ni que pretendían con ella. Simple y sencillamente nació, erigió y a pesar de su juventud es ahora una de las pilastras fundamentales de la Matemática actual y nos parece aun un tema extraño que se sumerge en formas improbables y raras con proposiciones, que son, o infantilmente obvias (es decir, hasta que uno trata de de-

demostrarlas), o tan difíciles y abstractas que incluso un experto topólogo no pueda explicarlas intuitivamente.

Lo que a continuación se expone en este trabajo de graduación pretende ser una presentación didáctica, mas que informativa, y un buen ejercicio en teoría de conjuntos y la notaciones empleadas, para aquel que ya se ha iniciado en Topología y desea adentrar en la rica y abundante forma de introducirse en su estudio.

### 1.3 Notaciones

Quizá debamos iniciar esta sección aclarando la notación empleada para el álgebra usual de conjuntos. Cuando decimos: "sea  $X$  un conjunto" suponemos a éste no vacío ( $X \neq \emptyset$ ). Denotamos para cada conjunto  $X$ , por  $\mathcal{P}X$  la potencia del mismo. Así pues:  $\mathcal{P}X = \{B \mid B \subseteq X\}$ . Además dado  $X$  universal, definimos:  $\bar{\mathcal{P}}_X B = \{A \mid B \subseteq A \subseteq X\}$  para cada  $B \in \mathcal{P}X$ . Generalmente se usan minúsculas para elementos de  $X$ , mayúsculas (latinas) para elementos de  $\mathcal{P}X$ , cursivas para elementos de  $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ , o bien griegas (como  $\tau$ ) y otra tipografía para otras entidades, aunque esto no es forzoso y puede variar. Se trata de mantener las mismas letras para un uso determinado a lo largo de la tesis, aunque a veces se varíen estas para establecer la arbitrariedad de los elementos.

La simbología de lógica es la acostumbrada:  $\forall, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ ; y  $\neg$  para la negación. Usamos  $::$  para definir una proposición que pronto se usará. Tenemos abreviaturas en el metalenguaje, algunas conocidas:

i.e. : esto es	ent : entonces
stq : se tiene que	ssi : si y solo si
teo : teorema	dem : demostración
	def : definición

Usamos cuantificadores:  $\forall, \exists$ .

Indicamos con un guión - un paso en alguna demostración, y con  $\square$  indicamos el fin de alguna parte de ella. Para hacer ver que ha terminado totalmente, usamos  $\square$  QED! Aunque no es muy utilizado,  $\mathbb{R}$ , guardamos la notación usual para el campo  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  de los números reales. Además usamos símbolos como  $\div, \odot, *$  y otros para distintas finalidades.

Ahora bien dado  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}X$ , con algún  $X$  universal, el álgebra de conjuntos  $(\mathcal{U}, \cup, \cap, C_x)$  es tal que:  $\forall H \subseteq \mathcal{U}$

$$\cup H = \{x \in X \mid \exists H \in \mathcal{H} : x \in H\}$$

$$\cap H = \{x \in X \mid \forall H \in \mathcal{H} : x \in H\}$$

Ésta es la notación de Halmos que se usa en todo el trabajo.

Además  $C_x: U \rightarrow PX :: \forall B \in U: C_x B = \{x \in X \mid \neg x \in B\}$ .

Por otro lado dada  $f: A \rightarrow B$  una función, denotamos  $\hat{f}; \hat{f}^{-1} = f^{-1}$  a las funciones de conjunto asociadas i.e.

$$\forall H: H \subseteq A \Rightarrow \hat{f}(H) = \hat{f}H = \{y \in B \mid \exists x \in A: y = f(x)\}$$

$$\forall F: F \subseteq B \Rightarrow \hat{f}^{-1}(F) = \hat{f}^{-1}F = \{x \in A \mid \exists y \in B: y = f(x)\}$$

Para  $\hat{C}_x$  usamos la notación más cómoda  $C$ . En algunos casos se omiten los parentesis en  $f(x)$  puesto que no es posible confusión alguna. Esto es frecuente cuando el dominio de  $f$  es algún  $PX$ .

Como la mayoría de las funciones tienen variable y valores de conjuntos (operadores conjuntistas) se induce un álgebra en el conjunto de todas ellas. Por ejemplo, sea  $U$  un álgebra de Boole  $(U, \cup, \cap, C_x)$  y sea  $\bar{F} = U^X$  ent definimos  $\forall f \forall g: \{f, g\} \subseteq U^X$

$$\forall H \in U: f \cup g: U \rightarrow U :: (f \cup g)(H) = U \{fH, gH\}$$

$$f \cap g: U \rightarrow U :: (f \cap g)(H) = \cap \{fH, gH\}$$

$$f - g: U \rightarrow U :: (f - g)(H) = \cap \{fH, C_x gH\}$$

Además tenemos la composición  $\circ$  dada por:  $f \circ g: U \rightarrow U :: (f \circ g)(H) = f[gH]$   
Obtenemos que  $(\bar{F}, \cup, \cap, C_x, \circ)$  es un álgebra booleana, distributiva con  $\circ$  por la derecha. Hacemos uso continuamente de ella; por otro lado induce un orden parcial (puntual) definido por:  $f \leq g$  ssi  $\forall H \in U: fH \subseteq gH$ .

(Con esto  $\bar{F}$  es también un retículo  $\rightarrow$  y booleano  $\rightarrow$ )

Una de las razones para esta escogencia es que trabajamos álgebra a dos niveles, para los conjuntos y para los mapeos entre conjuntos. Podría darse que deseamos la unión - como conjuntos - de dos funciones o bien la unión - como mapeos - i.e. el mapeo unión de ellos. De hecho esto se da. Sea  $\alpha: PX \rightarrow PX$  y  $I: PX \rightarrow PX$  ent.

$$\alpha \cap I: PX \rightarrow PX$$
$$B \mapsto (\alpha \cap I)B = \cap \{\alpha B, IB\}$$

y por otro lado también

$$\cap \{\alpha, I\} = \{y \mid y \in \alpha \wedge y \in I\} = \{(x, w) \mid w = \alpha x = Ix, \forall x \in \cap \{\text{Dom } \alpha, \text{Dom } I\}\}$$

Algunos elementos de  $\mathcal{F}$  aparecen frecuentemente.  $I$  es la identidad.  
 $I_X: X \rightarrow X$  si  $I(x) = x$ .  $Nul$  es el operador nulo:  $\forall A \in \mathcal{P}X$

$$Nul(A) = \emptyset.$$

Para finalizar, para la cardinalidad de un conjunto usamos barras paralelas. Así  $|A| < \aleph_0$  significa que  $A$  es finito,

$|A| = \aleph_0$  que  $A$  es contable, etc.

1

## CAPÍTULO 2

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

DEFINIDOS MEDIANTE

FAMILIAS DE ABIERTOS.

ESPACIOS TOPOLOGICOS DEFINIDOS  
MEDIANTE FAMILIAS DE ABIERTOS.

• 2.1 INTRODUCCION.

Ya hemos comentado sobre las ventajas de iniciar un tratamiento sistemático de la topología basandose en la colección de todos los conjuntos abiertos para el espacio en cuestión, y es quizá la inmediata simplicidad de los axiomas (que aquí hemos nombrado axiomas A), de tinte casi algebraico, la más reelevante. Esto no niega que para ciertas estructuras espaciales, otro punto de partida para el estudio resulte más conveniente debido a la naturaleza intrínseca del mismo, o a la facilidad de obtener de esa manera una mejor aproximación intuitiva para los resultados.

Quien primero consideró utilizar el concepto de "conjunto abierto" como punto de partida para el estudio de la topología fué Tietze en 1923 con la publicación "Über Analysis Situs" del anuario de matemática de la universidad de Hamburgo. Dos años más tarde, Alexandroff ("Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie") dió una axiomática para un espacio Hausdorff usando abiertos.

La mayoría de los textos de introducción actuales presentan la colección de axiomas que fue utilizada por vez primera por Alexandroff y Hopf en 1935, y que hicieron lucir como una de las tantas formas de introducir estructura topológica en un cierto conjunto. Aquí, sin embargo, hemos empleado la versión de Bourbaki (1940, "Topologie Générale. Chapitre I et II), en la cual se omitió de los axiomas usuales el que aparece en la sección 2.3 como lema G1. Por otro lado, Kelley (1955, "Ge-

neral Topology") presentó algo parecido, pero él consideró primero a una familia  $\mathcal{T}$  cumpliendo los axiomas A1 y A2, para después definir el espacio  $X$  del discurso como  $\cup \mathcal{T}$ , el que existe en virtud de A1. Fué él, además, quien usó por primera vez el nombre de "topología" para  $\mathcal{T}$ . Así pues, según Kelley, para cada topología existe un espacio topológico  $(X)$  topologizado por la familia presentada inicialmente. Esta visión difiere de la aquí presentada unicamente por el caso en que la familia  $\mathcal{T}$  sea  $\{\phi\}$ .

Para finalizar, quien primero hizo consideraciones formales sobre teoría de orden en un texto de topología fue, en 1947, Vaidyanathaswamy ("Treatise on Set Topology", I. Madras). Antes de él Stone (1936), Wallman (1938) y Birkhoff (1936) habían investigado como aplicar tópicos de orden a el estudio de la topología, pero sin llegar a conclusiones serias. Es de hacer notar que la mayoría de resultados clásicos son debidos a Cantor (1932, "Gesammelte Abhandlungen"; Berlin), aunque estos fueran establecidos sólo para espacios Euclideanos.

2.2 ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS (X, T).

def G1 Dado X un conjunto, T es una topología para X ssi:

- A0.  $T \in PPX \equiv 2^{PX}$
- A1.  $\forall H: H \subseteq T \Rightarrow \cup H \in T$ .
- A2.  $\forall H: H \subseteq T \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cap H \in T$ .

def G2 (X, T) es una estructura A-topológica (ET-A), o espacio topológico, ssi T es una topología para X. Además:

- 1.  $\forall B \in PX: C_{(X,T)}^l B =_{df} \cap \{ \bar{P}_x B, CT \}$ .
- 2.  $\forall x \in X: \sum_{(X,T)}(x) =_{df} \{ N \in PX \mid \exists G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{x\} \}$ .
- 3.  $\forall B \in PX: \partial_{(X,T)} B =_{df} C_x \cup \{ B, \cup \cap \{ P_x B, T \} \}$ .

Observación: Podemos considerar una variante en la def G2 cambiando las expresiones presentadas para  $C_{(X,T)}^l$  y  $\partial_{(X,T)}$ . Demostramos a continuación la equivalencia entre ambas modalidades asumiendo para (X, T) una ET-A.

obs(1) G2 Dado (X, T) una ET-A ent  $C_{(X,T)}^l B = \{ x \in X \mid \forall G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{x\} : \cap \{ G, B \} \neq \emptyset \}$

dem

[ $\subseteq$ ] Dado  $x \in \cap \{ \bar{P}_x B, CT \}$  por demostrar  $\forall G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{x\} : \cap \{ G, B \} \neq \emptyset$ .

-Sea  $x \in \cap \{ \bar{P}_x B, CT \}$  ent  $\forall F: F \in CT \wedge F \in \bar{P}_x B \Rightarrow x \in F$   
 i.e.  $\forall F: C_x F \in T \wedge F \supseteq B \Rightarrow x \in F :: (1)$ , y tomemos  $G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{x\} \}$   
 arbitrario, ent  $G \in T \wedge G \in \bar{P}_x \{x\}$  i.e.  $x \in G \in T :: (2)$

-Queremos probar que  $\cap \{ G, B \} \neq \emptyset$ .  
 -Supongamos que  $\cap \{ G, B \} = \emptyset$  ent  $C_x G \supseteq B :: (3)$ , y así renombrando  $\bar{F} = C_x G$  stq  $C_x \bar{F} \in T \wedge \bar{F} \supseteq B$ ; de esto y por (1)  $x \in \bar{F}$ , i.e.  $x \notin G$  ( $\uparrow$  2)  $\therefore \neg(3) : \cap \{ G, B \} \neq \emptyset$ .  $\square$

[ $\supseteq$ ] Dado  $x \in \{ y \in X \mid \forall G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{y\} : \cap \{ G, B \} \neq \emptyset \}$  por demostrar  $x \in \cap \{ \bar{P}_x B, CT \}$ .

-Sea  $x \in X$  tq  $\forall G: G \in \cap \{ T, \bar{P}_x \{x\} \Rightarrow \cap \{ G, B \} \neq \emptyset$ , o escrito de otra

manera tq  $\forall G: x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow \cap \{G, B\} \neq \emptyset :: (1)$ , y considérese  $F$   
 tq  $F \in \mathcal{CT} \wedge F \in \bar{P}_x B :: (2)$

-Queremos mostrar que  $x \in F$ .

-Supongamos entonces que  $x \notin F$  ent  $x \in C_x F \in \mathcal{T}$  y por (1)  $\cap \{C_x F, B\} \neq \emptyset$   
 i.e.  $F \not\subseteq B$  ( $\downarrow$  2), de donde concluimos que  $x \in F$ .  $\square$  QED!

obs(2) G2 Dado  $(X, \mathcal{T})$  una ET-A ent  $\partial_{(x, \mathcal{T})} B = \{x \in C_x B \mid \forall G \in \cap \{\mathcal{T}, \bar{P}_x(x)\} : \cap \{G, B\} \neq \emptyset\}$ .  
 dem

-Utilizando el hecho de que, dado  $\{A, H, \{B\}\} \in PPPX$  stq:

$$\vdash C_x \cup A = \cap C_x A. \quad (\text{Ley de D'Morgan})$$

$$\vdash C \cap \{A, H\} = \cap \{C A, C H\}, C P C_x B = \bar{P}_x B \quad (\text{Notación C.})$$

$$\begin{aligned} \text{, vemos que: } C_x \cup \{B, \cup \cap \{P C_x B, \mathcal{T}\}\} &= \cap \{C_x B, C_x [\cup \cap \{P C_x B, \mathcal{T}\}]\} \\ &= \cap \{C_x B, \cap \cap \{P C_x B, \mathcal{T}\}\} = \cap \{C_x B, \cap \cap \{C P C_x B, C \mathcal{T}\}\} \\ &= \cap \{C_x B, \cap \cap \{\bar{P}_x B, C \mathcal{T}\}\} = \cap \{C_x B, C_{(x, \mathcal{T})} B\} \quad :: (1) \end{aligned}$$

$$\text{-Por obs(1)} \text{ G2 } C_{(x, \mathcal{T})} B = \{x \in X \mid \forall G \in \cap \{\mathcal{T}, \bar{P}_x(x)\} : \cap \{G, B\} \neq \emptyset\}$$

$$\text{de donde por (1) stq } \partial_{(x, \mathcal{T})} B = C_x \cup \{B, \cup \cap \{P C_x B, \mathcal{T}\}\}$$

$$= \cap \{C_x B, \{x \in X \mid \forall G: G \in \cap \{\mathcal{T}, \bar{P}_x(x)\} \Rightarrow \cap \{G, B\} \neq \emptyset\}\}$$

$$\therefore \partial_{(x, \mathcal{T})} B = \{x \in C_x B \mid \forall G \in \cap \{\mathcal{T}, \bar{P}_x(x)\} : \cap \{G, B\} \neq \emptyset\}$$

$\square$  QED!

def G3 Dado  $(X, \mathcal{T})$  una ET-A ent definimos

$$\vdash G \text{ es } A\text{-abierto en } (X, \mathcal{T}) \text{ ssi } G \in \mathcal{T}.$$

$$\vdash x \text{ es } A\text{-punto de clausura de } B \text{ en } (X, \mathcal{T}) \text{ ssi } x \in C_{(x, \mathcal{T})} B.$$

$$\vdash N \text{ es } A\text{-vecindad de } x \text{ en } (X, \mathcal{T}) \text{ ssi } N \in \Sigma_{(x, \mathcal{T})}(x).$$

$$\vdash x \text{ es } A\text{-punto de adherencia de } B \text{ en } (X, \mathcal{T}) \text{ ssi } x \in \partial_{(x, \mathcal{T})} B.$$

Nota: En el resto del capítulo suponemos a  $(X, \mathcal{T})$  una ET-A y omitimos la frase "en  $(X, \mathcal{T})$ ", salvo cuando sea necesario o útil especificar.

def. G4

- F es A-cerrado ssi  $F \in \mathcal{CT}$ .
- x es A-punto exterior de B ssi  $x \in C_x \mathcal{C}_{(x, \tau)} B$ .
- x es A-punto interior de B ssi  $B \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ .
- x es A-punto libre de B ssi  $B \notin \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ .
- x es A-punto borde de B ssi  $x \in B \wedge x$  es A-punto libre de B.
- x es A-punto frontera de B ssi  $x \in \partial_{(x, \tau)} B \vee x \in \partial_{(x, \tau)} C_x B$ .
- x es A-punto límite de B ssi  $\forall G: G \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \bar{P}_x(x)\} \Rightarrow \mathcal{C} \cap \{G, B, C_x(x)\} \neq \emptyset$ .
- x es A-punto aislado de B ssi  $x \in B \wedge x$  no es A-punto límite de B.

Nota: Omitiremos de ahora en adelante el prefijo A para los conceptos antes definidos, necesario si somos rigurosos puesto que éstos están basados, en última instancia, en una ET-A.

o 2.3 TEOREMAS BASICOS.

lema G1 Dado  $(X, \tau)$  ET-A ent  $\{\phi, X\} \subseteq \tau$ .

dem.

Por demostrar  $\phi \in \tau \wedge X \in \tau$ .

-Probamos que  $\cup \phi = \phi$ . Para ello:  $\phi \subseteq \{\phi\} \Rightarrow \cup \phi \subseteq \cup \{\phi\} = \phi$   
 y además  $\phi \subseteq \cup \phi$ , de donde  $\cup \phi = \phi$ .

-Ahora  $\cap \phi = X$ . Primero  $\phi \subseteq \{X\} \Rightarrow \cap \phi \supseteq \cap \{X\} = X$  ,y considerando a X universal stq  $\cap \phi \subseteq X$ , de donde  $\cap \phi = X$ .

-Dado  $\phi \subseteq \tau \wedge |\phi| = 0 < \chi_0$  stq por lo anterior y A1,  
 A2:  $\cup \phi = \phi \in \tau \wedge \cap \phi = X \in \tau$ .

□ QED!

teo F Dado  $(X, \tau)$  ET-A y sea  $\mathcal{F} = \mathcal{CT}$  ent

F0.  $\mathcal{F} \in \mathcal{PPX} \equiv 2^{PX}$ .

F1.  $\forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \cap \mathcal{H} \in \mathcal{F}$ ,

F2.  $\forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F} \wedge |\mathcal{H}| < \chi_0 \Rightarrow \cup \mathcal{H} \in \mathcal{F}$ .

Conversamente , sea  $\mathcal{F}$  tq  $\mathcal{F}0, \mathcal{F}1, \mathcal{F}2$  ent si  $\mathcal{F} = \mathcal{C}\mathcal{T}$  stq  $(X, \mathcal{T})$  es ET-A.  
Llamamos a  $\mathcal{F}$  una familia de cerrados, así el teo F establece que una ET-A es totalmente equivalente a  $(X, \mathcal{F})$  con  $\mathcal{F}$  una familia de cerrados  
dem

$A0 \leftrightarrow \mathcal{F}0$  [ $\Rightarrow$ ] Dado  $A0$  i.e.  $\mathcal{T} \in \mathcal{P}\mathcal{P}X$  tenemos que  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}X$   
de donde  $\mathcal{F} = \mathcal{C}\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}X$  en vista de que  $\mathcal{C}_x \in \mathcal{P}X^{PX}$  , por lo  
tanto  $\mathcal{F} \in \mathcal{P}\mathcal{P}X$  ( $\mathcal{F}0$ ).

[ $\Leftarrow$ ] Dado  $\mathcal{F}0$  obtenemos  $A0$  de igual que la conversa  
pues  $\mathcal{C}_x$  es biyección.  $\square$

$A1 \leftrightarrow \mathcal{F}1$   $\Rightarrow$  Sea  $\mathcal{H}$  arbitraria tq  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$  , entonces  $\mathcal{U} = \mathcal{C}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$  es  
también arbitraria. Por demostrar :  $\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{F}$ .

-Por la ley de D'Morgan tenemos que  $\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{T}$  nos lleva a  $\mathcal{C}\bigcup \mathcal{H} \in \mathcal{C}\mathcal{T}$   
 , así  $\bigcap \mathcal{C}\mathcal{H} \in \mathcal{C}\mathcal{T}$  i.e.  $\bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{F}$ .

[ $\Leftarrow$ ] La prueba es identica cambiando adecuadamente y usan  
do la ley de complementos para la intersección.  $\square$

$A2 \leftrightarrow \mathcal{F}2$  Agregue a la prueba de  $A1 \leftrightarrow \mathcal{F}1$  la condición  $|\mathcal{H}| < \chi_0$  (que es  
equivalente a  $|\mathcal{U}| < \chi_0$  pues  $|\mathcal{H}| = |\mathcal{C}\mathcal{H}|$ .) y obtendrá la prueba deseada,  
cambiando por dualidad.  $\square$   $\square$  QED!

corolario  $\widehat{\mathcal{C}}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}}(\mathcal{P}X) \subseteq \mathcal{C}\mathcal{T} :: (*).$

dem

-Por demostrar  $\forall E: \mathcal{C}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}} E \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ .

-Por definición de  $\mathcal{C}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}}$  , dado  $B$  arbitrario stq :

$$\mathcal{C}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}} B = \bigcap \bigcap \{ \bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T} \} = \bigcap \mathcal{H}, \text{ con } \mathcal{H} = \bigcap \{ \bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T} \}.$$

-Pero  $\mathcal{H} = \bigcap \{ \bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T} \} \subseteq \mathcal{C}\mathcal{T}$  , de donde por teo F  $\bigcap \mathcal{H} \in \mathcal{C}\mathcal{T}$  i.e.  $\mathcal{C}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}} B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$   
 $\square$  QED!

Nota: Nos referiremos de ahora en adelante a el corolario anterior me-  
diante el simbolo (\*).

teo  $\mathcal{U}\mathcal{C}\mathcal{L}$   $\mathcal{F}$  es cerrado ssi  $\mathcal{C}_{(x, \tau)}^{\mathcal{C}} \mathcal{F} = \mathcal{F}$ , i.e.  $\mathcal{T}$  puede ser reconstruida por

$\mathcal{C}l_{(X,U)}$  mediante:  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{cl} = \mathcal{C}\mathcal{T}_1 \cap \{\mathcal{C}l_{(X,U)}, I_{PX}\}$

dem Por demostrar  $\mathcal{C}\mathcal{T} = \pi_1 \cap \{\mathcal{C}l_{(X,U)}, I_{PX}\}$ .

[ $\subseteq$ ] Dado  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}$  por demostrar  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}_{cl}$  i.e.  $\mathcal{C}l_{(X,U)}F = F$ .

-  $\mathcal{C}l_{(X,U)}F \subseteq F$ . Sabemos que  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ , además  $F \in \bar{P}_x F$ , Así tenemos que

$\cap \{\bar{P}_x F, \mathcal{C}\mathcal{T}\} \supseteq \{F\}$ , de donde  $\cap \cap \{\bar{P}_x F, \mathcal{C}\mathcal{T}\} \subseteq \cap \{F\} = F$  i.e.  $\mathcal{C}l_{(X,U)}F \subseteq F$ .

-  $F \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}F$ . Primero notar que  $\bar{P}_x F \supseteq \cap \{\bar{P}_x F, \mathcal{C}\mathcal{T}\}$ , de esto

$\cap \bar{P}_x F \subseteq \cap \cap \{\bar{P}_x F, \mathcal{C}\mathcal{T}\}$ , pero  $\cap \bar{P}_x F = F \therefore F \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}F$ .  $\square$

[ $\supseteq$ ] Dado  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}_{cl}$  por demostrar  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ .

Sea  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}_{cl}$  i.e.  $\mathcal{C}l_{(X,U)}F = F$ . Por (\*)  $\mathcal{C}l_{(X,U)}F \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ , así pues  $F \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ .  $\square$

lema G2  $\forall B, E : B \subseteq E \subseteq X \Rightarrow \mathcal{C}l_{(X,U)}B \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}E$ .

dem

$B \subseteq E \subseteq X \Rightarrow \bar{P}_x B \supseteq \bar{P}_x E \Rightarrow \cap \{\bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T}\} \supseteq \cap \{\bar{P}_x E, \mathcal{C}\mathcal{T}\}$

esto nos lleva a  $\cap \cap \{\bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T}\} \subseteq \cap \cap \{\bar{P}_x E, \mathcal{C}\mathcal{T}\}$  i.e.  $\mathcal{C}l_{(X,U)}B \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}E$ .  $\square$  QED!

teo AC Dado  $(X, U)$  ET-A, y sea  $\mathcal{C}l_{(X,U)} : PX \rightarrow PX$  asociado, ent :

- $\mathcal{C}l_{(X,U)}\phi = \phi \wedge I \leq \mathcal{C}l_{(X,U)}$ .
- $\forall B, E : \mathcal{C}l_{(X,U)} \cup \{B, E\} = \cup \hat{\mathcal{C}l}_{(X,U)} \{B, E\}$ .
- $\mathcal{C}l_{(X,U)}^2 \leq \mathcal{C}l_{(X,U)}$ .

Llamamos a  $\mathcal{C}l_{(X,U)}$  el operador de cerradura inducido en  $(X, U)$ .

dem

1.- Por el lema G1  $X \in \mathcal{T}$ , i.e.  $\phi \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ , de donde por el teo TC

stq  $\mathcal{C}l_{(X,U)}\phi = \phi$   $\square$

-Notar que  $I_{PX} \leq \mathcal{C}l_{(X,U)}$  ssi  $\forall B \in PX : B \subseteq \mathcal{C}l B$ . Así pues basta ver que

$\mathcal{C}l_{(X,U)}B = \cap \cap \{\bar{P}_x B, \mathcal{C}\mathcal{T}\} \supseteq \cap \cap \{\bar{P}_x B\} = \cap \bar{P}_x B = B \therefore I_{PX} \leq \mathcal{C}l_{(X,U)}$ .  $\square$

2. [ $\subseteq$ ] Dado  $\{B, E\} \in P PX$  por demostrar  $\mathcal{C}l_{(X,U)} \cup \{B, E\} \subseteq \cup \hat{\mathcal{C}l}_{(X,U)} \{B, E\}$ .

-Por 1.  $B \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}B \wedge E \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}E$ , de donde  $\cup \{B, E\} \subseteq \cup \{\mathcal{C}l_{(X,U)}B, \mathcal{C}l_{(X,U)}E\}$

, finalmente por el lema G2  $\mathcal{C}l_{(X,U)}[\cup \{B, E\}] \subseteq \mathcal{C}l_{(X,U)}[\cup \{\mathcal{C}l_{(X,U)}B, \mathcal{C}l_{(X,U)}E\}]$  :: (1)

-Por otro lado en el corolario (\*) hemos mostrado que para cualquier  $H : \mathcal{C}l_{(X,U)}H \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ , así  $\hat{\mathcal{C}l}_{(X,U)}(PX) \subseteq \mathcal{C}\mathcal{T}$  ent  $\hat{\mathcal{C}l}_{(X,U)}\{B, E\} \subseteq \mathcal{C}\mathcal{T}$

i.e.  $\{C_x \mathcal{C}_{(x,T)}^3, C_x \mathcal{C}_{(x,T)}^E\} \subseteq \mathcal{T}$  de donde por A1  $\cap \{C_x \mathcal{C}_{(x,U)}^B, C_x \mathcal{C}_{(x,U)}^E\} \in \mathcal{T}$

i.e.  $C \cap \{C_x \mathcal{C}_{(x,T)}^B, C_x \mathcal{C}_{(x,T)}^E\} = \cup \{\mathcal{C}_{(x,U)}^B, \mathcal{C}_{(x,U)}^E\} \in \mathcal{CT}$ .

-Por lo anterior y el teo  $\mathcal{U}\mathcal{C}$ :  $\mathcal{C}_{(x,T)} \cup \hat{\mathcal{C}}_{(x,T)}\{B,E\} = \cup \hat{\mathcal{C}}_{(x,U)}\{B,E\} :: (2)$

-Usando (2) en (1) stq:  $\mathcal{C}_{(x,T)} \cup \{B,E\} \subseteq \cup \hat{\mathcal{C}}_{(x,U)}\{B,E\}$ .  $\square$

[ $\supseteq$ ] Dado  $\{B,E\} \in \mathcal{PPX}$  por demostrar  $\cup \hat{\mathcal{C}}_{(x,U)}\{B,E\} \subseteq \mathcal{C}_{(x,T)} \cup \{B,E\}$ .

-Para empezar  $B \subseteq \cup \{B,E\} \wedge E \subseteq \cup \{B,E\}$ , de donde por el lema G2

stq  $\mathcal{C}_{(x,T)}^B \subseteq \mathcal{C}_{(x,U)} \cup \{B,E\} \wedge \mathcal{C}_{(x,T)}^E \subseteq \mathcal{C}_{(x,U)} \cup \{B,E\}$  y de esto aplicando  $\cup$ :

$\cup \{\mathcal{C}_{(x,T)}^B, \mathcal{C}_{(x,T)}^E\} \subseteq \cup \{\mathcal{C}_{(x,U)} \cup \{B,E\}\}$  i.e.  $\cup \hat{\mathcal{C}}_{(x,U)}\{B,E\} \subseteq \mathcal{C}_{(x,T)} \cup \{B,E\}$ .  $\square$

3. Notar que  $\mathcal{C}_{(x,T)}^2 \leq \mathcal{C}_{(x,T)}$  ssi  $\forall B: \mathcal{C}_{(x,T)}^2 B \subseteq \mathcal{C}_{(x,T)} B$ . Así pues basta

ver que  $\mathcal{C}_{(x,T)}^2 B = \mathcal{C}_{(x,T)}[\mathcal{C}_{(x,T)}^2 B]$  y con ello puesto que  $\mathcal{C}_{(x,T)}^2 B \in \mathcal{CT}$  por ( $\ast$ )

stq por el teo  $\mathcal{U}\mathcal{C}$ :  $\mathcal{C}_{(x,T)}^2 B = \mathcal{C}_{(x,T)} B$ , que es una proposición más

fuerte que la que se quería demostrar.

$\square$  QED!

corolario Una reconstrucción equivalente a la dada en el teo  $\mathcal{U}\mathcal{C}$ , puede darse para  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}\mathcal{L}}$ , considerando:  $\mathcal{T}'_{\mathcal{C}\mathcal{L}} = (\mathcal{C}_{(x,T)} \circ C_x \cap I_x)^{-1}(\{\emptyset\})$ .

dem

La prueba está dada por  $\text{obs}(\mathcal{T})$  F2, por medio de la cual en una ET-C la expresión antes escrita es equivalente a la dada en teo  $\mathcal{U}\mathcal{C}$ .

El teo AC nos dice que toda ET-A define una ET-C sobre  $X$ , a saber  $(X, \mathcal{C}_{(x,T)})$ .

$\square$  QED!

teo  $\mathcal{U}\Sigma$   $G$  es abierto ssi  $G$  es vecindad de cada uno de sus puntos, o en otras palabras  $\mathcal{T}$  puede ser reconstruida por  $\hat{\Sigma}_{(x,T)}$  mediante:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Sigma = \{G \in \mathcal{P}X \mid G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,T)}(G)\}$$

dem Por demostrar  $G \in \mathcal{T}$  ssi  $G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,T)}(G)$ .

[ $\subseteq$ ] Dado  $G \in \mathcal{T}$  por demostrar  $G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,T)}(G)$ .

-Notar que  $G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,T)}(G)$  ssi  $\forall y: y \in G \Rightarrow \exists \bar{G}_y \bar{G}_y \in \cap \{\mathcal{T}, \mathcal{P}G, \bar{P}_x\{x\}\}$ .

-Ahora bien, sea  $G \in \mathcal{T}$ , y sea  $x \in G$  ent  $\exists \bar{G} = G, \bar{G} \in \cap \{\mathcal{T}, \mathcal{P}G, \bar{P}_x\{x\}\}$ .

[ $\supseteq$ ] Dado  $G \in \mathcal{T}_\Sigma$  por demostrar  $G \in \mathcal{T}$ .

-Sea  $G$  tq  $\forall x: x \in G \Rightarrow \exists \bar{G}_x \bar{G}_x \in \cap \{\mathcal{T}, \mathcal{P}G, \bar{P}_x\{x\}\}$  ent podemos concluir

que  $\exists \{\bar{G}_x | x \in G\}$ ,  $x \in \bar{G}_x \in \cap \{\tau, \rho G\} \subseteq \tau$  de donde por A1 obtenemos  
 $U \{\bar{G}_x | x \in G\} = \mathcal{G} \in \tau \quad ::(1)$

-Probaremos ahora que  $G = \mathcal{G}$ , con lo cual según (1) queda probado lo que queremos demostrar.

• Que  $G \subseteq \mathcal{G}$  cae del hecho de que  $\forall x: x \in \bar{G}_x$  i.e.  $\forall x: \{x\} \subseteq \bar{G}_x$   
 de donde  $G = U \{\{x\} | x \in G\} \subseteq U \{\bar{G}_x | x \in G\} = \mathcal{G}$ .

•  $\mathcal{G} \subseteq G$ , se ve observando que  $\forall x: \bar{G}_x \in \cap \{\tau, \rho G\} \subseteq \rho G$  i.e.  $\forall x: \bar{G}_x \subseteq G$   
 de donde  $\mathcal{G} = U \{\bar{G}_x | x \in G\} \subseteq U \{G\} = G$  □ QED!

Nota: Obsérvese que  $\forall x \in X: \Sigma_{(x, \tau)}(x) \neq \emptyset$ , pues por teo  $\tau \Sigma$  stq  
 dado  $X \in \tau$  ent  $X \in \cap \hat{\Sigma}_{(x, \tau)}(X)$  i.e.  $\forall x \in X: X \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ .

teo AV Dado  $(X, \tau)$  ET-A y sea  $\Sigma_{(x, \tau)}: X \rightarrow \mathcal{P}PX$  asociado ent  $\forall x \in X$  stq

1.  $\Sigma_{(x, \tau)}(x) \subseteq \bar{P}_x \{x\}$ .

2.  $\forall N: N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x) \Rightarrow \bar{P}_x N \subseteq \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ .

3.  $\forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \Sigma_{(x, \tau)}(x) \wedge |\mathcal{H}| < \chi_0 \Rightarrow \cap \mathcal{H} \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ .

4.  $\forall N: N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x) \Rightarrow \exists N^*: N^* \in \cap \{\Sigma_{(x, \tau)}(x), \mathcal{P}N\} \wedge N \in \cap \hat{\Sigma}_{(x, \tau)}(N^*)$ .

Llamamos a  $\Sigma_{(x, \tau)}$  el sistema de vecindades inducido en  $(X, \tau)$ .

Nota: La proposición 4 garantiza en términos de vecindades la existencia de un abierto contenido en cada vecindad de cualquier punto.

dem

1. Primero note que  $\Sigma_{(x, \tau)}(x) \subseteq \bar{P}_x \{x\}$  ssi  $\forall N: N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x) \Rightarrow N \in \bar{P}_x \{x\}$ .

Así sea  $N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$  por demostrar  $x \in N$ . Por definición de  $\Sigma_{(x, \tau)}$ ,  
 $N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$  ssi  $\exists G, G \in \cap \{\tau, \mathcal{P}N, \bar{P}_x \{x\}\}$  i.e.  $\exists G \in \tau, x \in G \subseteq N \subseteq X$ ,  
 de donde  $x \in N$ . □

2. Por demostrar  $\forall N: N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x) \Rightarrow [\forall U: U \supseteq N \Rightarrow U \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)]$ .

Sea pues  $N$  tq  $N \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$  i.e.  $\exists G \in \tau, x \in G \subseteq N \in \mathcal{P}X$ , y sea  
 ahora  $U$  tq  $N \subseteq U$  ent  $\exists \bar{G} = G \in \tau, x \in \bar{G} \subseteq N \subseteq X$  i.e.  $U \in \Sigma_{(x, \tau)}(x)$ . □

3. Sea  $\mathcal{H}$  tq  $\mathcal{H} \subseteq \Sigma_{(x, \tau)}(x) \wedge |\mathcal{H}| < \chi_0$ , podemos garantizar que:

$\exists I: H = \{N_i \mid i \in I\} \wedge |I| < \aleph_0 \wedge [\forall i \in I \exists G_i \in \tau, x \in G_i \subseteq N_i \subseteq X]$   
 de esto y por A2  $\exists G = \bigcap \{G_i \mid i \in I\} \in \tau, x \in G \subseteq \bigcap \{N_i \mid i \in I\} = \bigcap H \in X$   
 i.e.  $\bigcap H \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$ .  $\square$

4. Aca buscamos probar que:  $\forall x: x \in X \Rightarrow [\forall N: N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) \Rightarrow [\exists N^* \subseteq N \wedge N^* \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) \wedge (\forall y \in N^*: N \in \Sigma_{(x,\tau)}(y))]]$

Sean pues  $x \in X, N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$  arbitrarios y tómesese  $N^* = \bigcup \{ \tau, PN \}$ .

Probaremos ahora que  $N^*$  satisface cada una de las condiciones marcadas con  $(\odot)$  en la proposición anterior.

-Observe que  $\bigcap \{ \tau, PN \} \subseteq \tau$  de donde por A1  $\bigcup \{ PN, \tau \} = N^* \in \tau \quad \therefore (1)$

-Ahora bien, dado  $N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$  tenemos que  $\exists G \subseteq G \in \bigcap \{ \tau, PN \} \wedge x \in G$   
 i.e.  $x \in N^* = \bigcup \{ \tau, PN \} \quad \therefore (2)$

-De (1), (2) y el teo  $\tau\Sigma$  stq  $N^* \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$ .  $\odot$

-Que  $N^* \subseteq N$  cae inmediatamente del hecho de que  $\bigcap \{ \tau, PN \} \subseteq PN$ , de donde obtenemos  $N^* = \bigcup \{ \tau, PN \} \subseteq \bigcup PN = N$ .  $\odot$

-Para finalizar, sea ahora  $y \in N^*$  arbitrario, entonces note que  $\exists G = N^* \in \tau, y \in G \subseteq N \subseteq X$  i.e.  $\exists G \in \bigcap \{ \tau, PN, \bar{P}_x \setminus \{y\} \} \therefore N \in \Sigma_{(x,\tau)}(y)$ .  $\odot$   
 $\square$  QED!

corolario Una reconstrucción para  $\tau_X$  equivalente a la dada en el teo  $\tau\Sigma$  puede darse considerando:  $\tau'_X = \{ G \in PX \mid \forall x \in G: \exists N \in \bigcap \{ \Sigma_{(x,\tau)}(x), PG \} \}$ .

dem

La prueba está dada por  $\text{obs}(\tau)$  N2, por medio de la cual en una ET-V el conjunto anterior es igual al utilizado en teo  $\tau\Sigma$ .

Por otro lado, el teo AV afirma que cualquier ET-A induce una ET-V sobre X, y ésta viene dada por  $(X, \Sigma_{(x,\tau)})$  tal como se definió en def G2, con lo que podemos perfectamente emplear la prueba antes mencionada.

$\square$  QED!

teo AB Dado  $(X, \tau)$  ET-A y sea  $\partial_{(x,\tau)}: PX \rightarrow PX$  asociado ent:

1.  $\partial_{(x,\tau)} \phi = \phi \wedge \partial_{(x,\tau)} \leq C_x$ .
2.  $\forall B, E: \partial_{(x,\tau)} \cup \{B, E\} = \bigcup \{ \bigcap \{ \partial_{(x,\tau)} B, C_x E \}, \bigcap \{ \partial_{(x,\tau)} E, C_x B \} \}$ .

teo  $\mathcal{T} \partial$   $G$  es abierto ssi  $\partial G^c = \emptyset$ , i.e.  $\mathcal{T}$  puede ser  
 reconstruida por  $\partial_{(x, \tau)}$  mediante:  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\partial = \underbrace{C(\hat{\partial}^{-1}(\{\emptyset\}))}_{C\hat{\partial}^{-1}\{\emptyset}}$

dem

• [C] Sea  $G$  abierto por demostrar  $\partial_{(x, \tau)} G^c = \emptyset = \partial_{(x, \tau)} C_x G$ .

- $G \in \mathcal{T}$  de donde  $C_x G \in \mathcal{CT} :: (1)$
- $C_x G \subseteq C_x G$  i.e.  $C_x G \in PC_x G :: (2)$  que unido a (1) nos lleva a  $C_x G \in \cap \{PC_x G, \mathcal{CT}\}$  que es  $G \in \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} :: (3)$
- De (3)  $G = \cup \{G\} \subseteq \cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\}$  se desprende que:  $\cup \{C_x G, G\} \subseteq \cup \{C_x G, \cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\}\}$
- i.e.  $\emptyset \supseteq C_x \cup \{C_x G, \cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\}\} = \partial_{(x, \tau)} C_x G \quad \square$

• [E] Tomemos  $G \in C\hat{\partial}_{(x, \tau)}^{-1}(\{\emptyset\})$  por demostrar  $G \in \mathcal{T}$

- Si  $G \in C\hat{\partial}_{(x, \tau)}^{-1}(\{\emptyset\})$  ent  $\partial_{(x, \tau)} C_x G = \emptyset$
- Usando la def G2 stq  $\partial_{(x, \tau)} C_x G = C_x \cup \{C_x G, \cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\}\} = \emptyset$

de donde  $\cup \{C_x G, \cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\}\} = X$  i.e.

$\cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} \supseteq C_x C_x G = G :: (1)$

- Por otro lado  $\cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} \subseteq PC_x G$  y de esto stq

$\cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} \subseteq \cup PC_x G = G :: (2)$

- De (1) y (2):  $\cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} = G :: (3)$

- Ahora bien  $\cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{T}$  de donde por A1 stq

$\cup \cap \{PC_x[C_x G], \mathcal{T}\} \in \mathcal{T}$  y por (3) obtenemos finalmente  $G \in \mathcal{T} \quad \square$  QED!

Nota: Podriamos haber probado primero el teorema 2.4.6. parte 1., de donde usando el teo  $\mathcal{T} \subset$  obtendriamos la demostración del teo  $\mathcal{T} \partial$ .

$$3. \partial_{(x,\tau)}^2 \leq I_x$$

Llamamos a  $\partial_{(x,\tau)}$  el operador de adherencia inducido en  $(X,\tau)$ .

dem

1. A Por demostrar

-Notar que  $\mathcal{P}C_x\phi = \mathcal{P}X$ , y por A0 stq  $\tau \subseteq \mathcal{P}X$ , de donde  $U \cap \{\mathcal{P}C_x\phi, \tau\} = U \cap \{\mathcal{P}X, \tau\} = U\tau = X$ , dado que por el lema G1  $\{X\} \subseteq \tau$ .

-Así pues  $C_x \cup \{\phi, U \cap \{\mathcal{P}C_x\phi, \tau\}\} = C_x \cup \{\phi, X\} = \phi \therefore \partial_{(x,\tau)}\phi = \phi. \square$

B Por demostrar:  $\forall B \in \mathcal{P}X : \partial_{(x,\tau)}B \subseteq C_x B.$

-En la obs( $\partial$ ) G2 se demostró que  $\partial_{(x,\tau)}B = \{x \in C_x B \mid q(x)\}$  para una determinada proposición  $q(x)$  que ahí se especificó. De esto, dado  $Q = \{x \in X \mid q(x)\}$  tenemos que  $\partial_{(x,\tau)}B = \cap \{C_x B, Q\}$  de donde obtenemos  $\partial_{(x,\tau)}B \subseteq C_x B$ , para un conjunto  $B$  cualquiera.  $\square$

2. En esta prueba hacemos uso del álgebra usual para conjuntos, y como se vuelve un poco pesada damos justificación de algunos pasos al final de la prueba. Las literales se refieren a la propiedad empleada para obtener la igualdad subsiguiente.

$$\begin{aligned} \text{(def G2)} \quad \partial_{(x,\tau)} \cup \{B, E\} &= C_x \cup \{ \cup \{B, E\}, U \cap \{ \mathcal{P}C_x \cup \{B, E\}, \tau \} \} \\ \text{(a)} \rightarrow &= \cap \{ C_x \cup \{B, E\}, C_x \cup \cap \{ \mathcal{P}C_x \cup \{B, E\}, \tau \} \} \\ \text{(a)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \mathcal{P}C_x \cup \{B, E\}, \tau \} \} \\ \text{(b)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ C \mathcal{P}C_x (\cup \{B, E\}), C\tau \} \} \\ \text{(c)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x (\cup \{B, E\}), C\tau \} \} \\ \text{(c)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, \bar{\mathcal{P}}_x E \}, C\tau \} \} \\ \text{(d)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \} \\ \text{(unión)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap [ \cup \{ \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, C\tau \}, \{ \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \} ] \} \\ \text{(f)} \rightarrow &= \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cup \{ \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, C\tau \}, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \} \} \\ \text{(e)} \rightarrow &= \cup \{ \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, C\tau \} \}, \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x E \}, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \} \} \\ \text{(d)} \rightarrow &= \cup \{ \cap \{ C_x B, C_x E, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, C\tau \} \}, \cap \{ C_x B, C_x E, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \} \} \\ \text{(d)} \rightarrow &= \cup \{ \cap \{ \cap \{ C_x B, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x B, C\tau \} \}, C_x E \}, \cap \{ \cap \{ C_x E, \cap \cap \{ \bar{\mathcal{P}}_x E, C\tau \} \}, C_x B \} \} \\ \text{(c)} \rightarrow &= \cup \{ \cap \{ \cap \{ C_x B, \cap \cap \{ C \mathcal{P}C_x B, C\tau \} \}, C_x E \}, \cap \{ \cap \{ C_x E, \cap \cap \{ C \mathcal{P}C_x E, C\tau \} \}, C_x B \} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \dashv &= \cup \{ \cap \{ \cap \{ C_x B, \cap C \cap \{ P C_x B, T \} \}, C_x E \}, \cap \{ \cap \{ C_x E, \cap C \cap \{ P C_x E, T \} \}, C_x B \} \} \\
 (a) \dashv &= \cup \{ \cap \{ \cap \{ C_x B, C_x \cup \cap \{ P C_x B, T \} \}, C_x E \}, \cap \{ \cap \{ C_x E, C_x \cup \cap \{ P C_x E, T \} \}, C_x B \} \} \\
 (a) \dashv &= \cup \{ \cap \{ C_x \cup \{ B, \cup \cap \{ P C_x B, T \} \}, C_x E \}, \cap \{ C_x \cup \{ E, \cup \cap \{ P C_x E, T \} \}, C_x B \} \} \\
 (\text{def G2}) \dashv &= \cup \{ \cap \{ \partial_{(x,t)} B, C_x E \}, \cap \{ \partial_{(x,t)} E, C_x B \} \}.
 \end{aligned}$$

□QED!

- Justificaciones Sea  $C: PX \rightarrow PX :: CB = C_x B = \{x \in X \mid x \notin B\}$  ent
  - (a) 1a. Ley de D'Morgan  $\forall H \in P PX: C_x U H = \cap C H, C_x \cap H = U C H$   
 i.e.  $C U H = \cap \hat{C} H \wedge C \cap H = U \hat{C} H.$
  - (b) 2a. Ley de Complementos  $\forall H \in P P P X$  stq  
 $\hat{C} \cap H = \cap \hat{\hat{C}} H \wedge \hat{C} U H = U \hat{\hat{C}} H.$
  - (c) Propiedades del operador  $\bar{P}_x. \forall B, E \in PX$  stq  $\bar{P}_x B = C P C_x B,$   
 $\bar{P}_x \cup \{B, E\} = \cap \{ \bar{P}_x B, \bar{P}_x E \}$  en vista de que  $P \cap \{B, E\} = \cap \{ P B, P E \}.$
  - (d) Asociatividad para la intersección y la unión  $\forall A, B, C \in PX:$   
 $\cap \{ \cap \{ A, B \}, C \} = \cap \{ A, B, C \} \wedge U \{ U \{ A, B \}, C \} = U \{ A, B, C \},$
  - (e) Distributividades  $\forall A, B, C \in PX$  stq:  
 $\cap \{ A, U \{ B, C \} \} = U \{ \cap \{ A, B \}, \cap \{ A, C \} \} [\cap],$  y similarmente en dual.
  - (f)  $\forall H, U \in P P P X: \cap \cap U \{ H, U \} = U \{ \cap \cap H, \cap \cap U \}.$

Nota Esta demostración puede realizarse de otras maneras aceptables para el desarrollo del capítulo, pero la intención de exponer esta forma es la de mostrar cómo utilizando tan solo las definiciones y aspectos y propiedades de teoría de conjuntos pueden obtenerse los resultados deseados. Es claro que la complejidad mostrada en esta prueba, innecesaria por cierto, se debe a lo básico (primitivo) del lenguaje empleado. Es pues, mas bien, una ilustración de una manera de proceder.

3. Por demostrar  $\forall B \in PX: \partial_{(x,t)}^2 B = \partial_{(x,t)} [ \partial_{(x,t)} B ] \subseteq B.$   
 -Notar que  $\partial_{(x,t)} B = C_x \cup \{ B, \cup \cap \{ P C_x B, T \} \} = \cap \{ C_x B, C_x \cup \cap \{ P C_x B, T \} \}$   
 pero  $C_x \cup \cap \{ P C_x B, T \} = \cap C \cap \{ P C_x B, T \} = \cap \cap \{ C P C_x B, C T \},$   
 y tomando en cuenta que  $C P C_x B = \bar{P}_x B$  obtenemos  $C_x \cup \cap \{ P C_x B, T \} = C_{(x,t)} B$   
 de donde  $\partial_{(x,t)} B = \cap \{ C_{(x,t)} B, C_x B \}, \forall B. \quad ::(1)$

-Por otro lado  $U\{B, C_{(x,t)}^l B\} = U\{B, \cap\{C_{(x,t)}^l B, C_x B\}\}$  de donde usando teo AC 1. y el anterior (1), obtenemos :

$$C_{(x,t)}^l B = U\{B, \partial_{(x,t)} B\} \quad \text{:: (2)}$$

-Por (\*) en el corolario del teo F:  $\forall B: C_{(x,t)}^l B \in CT$ , así por el teo  $\mathcal{U}$  stq  $\partial_{(x,t)} C_{(x,t)}^l B = \phi$ . (3)

-Examinamos ahora la expresión anterior, de la cual usando (2) obtenemos  $\partial_{(x,t)} C_{(x,t)}^l B = \partial_{(x,t)} U\{B, \partial_{(x,t)} B\}$ . Ahora bien utilizando lo ya demostrado acá en 2., la igualdad anterior se convierte en:  
 $\partial_{(x,t)} C_{(x,t)}^l B = U\{\cap\{\partial_{(x,t)} B, C_x \partial_{(x,t)} B\}, \cap\{\partial_{(x,t)} [\partial_{(x,t)} B], C_x B\}\}$   
 $= U\{\phi, \cap\{\partial_{(x,t)}^2 B, C_x B\}\} = \cap\{\partial_{(x,t)}^2 B, C_x B\}$ , y substituyendo esto en (3) nos lleva a  $\cap\{\partial_{(x,t)} [\partial_{(x,t)} B], C_x B\} = \phi$  i.e.  $\partial_{(x,t)}^2 B \subseteq B$ . □ QED!

corolario Una reconstrucción para  $\mathcal{T}_2$ , equivalente a la dada en el teo  $\mathcal{U}$  puede darse considerando la variante  $\mathcal{T}'_2 = (\partial_{(x,t)} \circ C_x \cap I_x)^{\wedge}(\{\phi\})$ .

dem

La prueba está dada por obs( $\mathcal{T}$ )  $\beta 2$ , por medio de la cual en una ET-B el conjunto anterior es igual al empleado en teo  $\mathcal{U}$ . El teo AB nos dice, por otro lado, que toda ET-A induce sobre X una ET-B, a saber  $(X, \partial_{(x,t)})$ , con lo cual está completa la prueba. □ QED!

o 2.4 OTROS TEOREMAS.

teorema 2.4.1  $x$  es un punto exterior de B ssi  $x$  es punto interior de  $C_x B$ .

dem Por demostrar:  $x \in C_x C_{(x,t)}^l B$  ssi  $C_x B \in \Sigma_{(x,t)}(x)$

[ $\Rightarrow$ ] Sea  $x \notin \cap\{\bar{P}_x B, CT\}$  i.e.  $\exists F \in \cap\{\bar{P}_x B, CT\}$ ,  $x \notin F$  o bien  $\exists F: x \in C_x F \wedge C_x F \in \cap\{C_{\bar{P}_x} B, CCT\}$ , pero  $C_{\bar{P}_x} B = PC_x B$  y llamando  $C_x F = G$  tenemos que  $\exists G: x \in G \wedge G \in \cap\{PC_x B, T\}$  lo que viene a ser:  $\exists G: G \in \cap\{T, PC_x B, \bar{P}_x(x)\}$  i.e.  $C_x B \in \Sigma_{(x,t)}(x)$ . □

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $x \in X$  tq  $\exists G: G \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \rho_x B, \bar{p}_x \{x\}\}$   
 i.e.  $\exists G: x \in G \wedge G \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \rho_x B\} = \mathcal{C} \cap \{\tau, \bar{p}_x B\}$  de donde  
 renombrando  $C_x G = F$  stq  $\exists F \ni x \in C_x F \wedge F \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \bar{p}_x B\}$   
 i.e.  $x \notin \mathcal{C} \cap \{\bar{p}_x B, \tau\} \therefore x \in C_x \mathcal{C}_{(x, \tau)} B. \square$   
 $\square$  QED!

teorema 2.4.2  $x$  es punto de borde de  $H$  ssi  $x$  es punto de adherencia de  $C_x H$ .

dem  
 Por demostrar  $x \in H \wedge H \notin \Sigma_{(x, \tau)}(x)$  ssi  $x \in \partial_{(x, \tau)} C_x H$ , y demostramos la equivalencia directamente. Sean  $\{x, H\} \in \mathcal{P}PX$  ent stq  
 $x \in H \wedge H \notin \Sigma_{(x, \tau)}(x)$  es equivalente, usando el teorema 2.4.1, a  $x \in H \wedge x \notin C_x \mathcal{C}_{(x, \tau)} C_x H$ , así pues  $x$  es punto de borde de  $H$  ssi  $x \in H \wedge x \in \mathcal{C} \cap \{\bar{p}_x C_x H, \tau\}$  ssi  $x \in \mathcal{C} \cap \{H, \mathcal{C} \cap \{\bar{p}_x C_x H, \tau\}\}$  ssi  $x \in \mathcal{C} \cap \{C_x H, \mathcal{C} \cap \{\bar{p}_x C_x H, \tau\}\}$  ssi  $x \in C_x \cup \{C_x H, \cup \{\rho_x C_x [C_x H], \tau\}\}$   
 i.e.  $x$  es punto de borde de  $B$  ssi  $x \in \partial_{(x, \tau)} C_x H.$   
 $\square$  QED!

teorema 2.4.3  $x$  es punto de clausura de  $B$  ssi  $x$  es punto de  $B$  ó punto límite de  $B$ .

dem  
 [ $\Rightarrow$ ] Sea  $x$  punto de clausura de  $B$  i.e.  $x \in \mathcal{C}_{(x, \tau)} B$  ent  $x \in B \vee x \notin B$   
 Si  $x \in B$  demostramos el consecuente del condicional. Sea entonces  $x \in \mathcal{C}_{(x, \tau)} B \wedge x \in B$ , por demostrar que  $x$  es punto límite de  $B$ .  
 -Así pues dado  $G \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \bar{p}_x \{x\}\} \therefore (1)$ , debemos probar que se verifique que  $\mathcal{C} \cap \{G, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$ .  
 -Supongamos entonces que  $\mathcal{C} \cap \{G, B, C_x \{x\}\} = \emptyset \therefore (2)$ .  
 -Por hipótesis tenemos que  $x \in C_x B$  de donde  $C_x \{x\} \supseteq B$ , con esto stq  $\mathcal{C} \cap \{G, B, C_x \{x\}\} = \mathcal{C} \cap \{G, \mathcal{C} \cap \{B, C_x \{x\}\}\} = \mathcal{C} \cap \{G, B\} = \emptyset$  i.e.  $B \subseteq C_x G \therefore (3)$   
 -Renombrando  $C_x G = \bar{F}$  stq por (1) y (3)  $\exists \bar{F}: \bar{F} \in \mathcal{C} \cap \{\tau, \bar{p}_x B\} \ni x \notin \bar{F}$ , pero esto contradice la hipótesis de que  $x \in \mathcal{C}_{(x, \tau)} B$  de donde

asumiendo la hipótesis y (1) deducimos  $\neg(2)$ , i.e.  $x$  es punto límite de  $B$ .  $\square$

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $x \in \{y \in X \mid y \in B \vee y \text{ es p.lim. de } B\}$  por demostrar que  $x \in \mathcal{C}_{(x,\tau)} B$ .  
Si  $x \in B$  stq por teo AC 1.  $x \in \mathcal{C}_{(x,\tau)} B$ .

-Sea pues  $x \in B$  y  $x$  punto límite de  $B$ , o en otras palabras

$$\forall G \in \mathcal{T} \cap \{\tau, \bar{p}_x(x)\} : \cap \{G, \cap \{B, C_x(x)\}\} = \cap \{G, B\} \neq \emptyset$$

i.e.  $\forall G : x \in G \in \mathcal{T} \Rightarrow \cap \{G, B\} \neq \emptyset \quad ::(1)$

-Supongamos  $F$  arbitrario tq  $F \in \mathcal{T} \cap \{\tau, \bar{p}_x B\} \quad ::(2)$ , por demostrar que  $x \in F$ .

-En efecto, si  $x \notin F \quad ::(3)$  stq por (2)  $\exists \bar{G} = C_x F, x \in \bar{G} \in \mathcal{T} \wedge \bar{G} \in \mathcal{C}_{\bar{p}_x} B$

i.e.  $\exists \bar{G} : x \in \bar{G} \in \mathcal{T} \wedge \bar{G} \subseteq C_x B \Leftrightarrow \cap \{G, B\} \neq \emptyset \rightarrow \neg(1)$ . De esto

dada la hipótesis, (1) y (2), concluimos  $\neg(3)$  i.e.  $x \in \mathcal{C}_{(x,\tau)} B$ .  $\square$  QED!

teorema 2.4.4 Dado  $(X, \tau)$  una ET-A stq  $\forall B \in \mathcal{P}X :$

1.  $\mathcal{C}_{(x,\tau)} B = \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}$
2.  $\mathcal{C}_{(x,\tau)} B = (\partial_{(x,\tau)} \cup I_x) B$ .

dem

1. [ $\Rightarrow$ ] Sea  $x \in \mathcal{C} B$  por demostrar  $\forall N : N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) \Rightarrow \cap \{N, B\} \neq \emptyset$ .

-Sea pues  $N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$  y supongamos  $\cap \{N, B\} = \emptyset \quad ::(1)$  i.e.

$N \subseteq C_x B$  de donde por teo AV 2. obtenemos  $C_x B \in \Sigma_{(x,\tau)}(x)$ .

-Pero esto es por teo 2.4.1 equivalente a  $x$  es punto exterior de  $B$  i.e.  $x \in \mathcal{C}_{(x,\tau)} B$  contrario a nuestra hipótesis de donde concluimos  $\neg(1)$  i.e.  $\forall N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset$ .  $\square$

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $x \in X$  tq  $\forall N : N \in \Sigma_{(x,\tau)}(x) \Rightarrow \cap \{N, B\} \neq \emptyset \quad ::(1)$

Sea  $F \in \mathcal{P}X$  arbitrario tq  $F \in \mathcal{T} \cap \{\tau, \bar{p}_x B\} \quad ::(2)$  por demostrar que  $x \in F$ . (así  $x \in \mathcal{C}_{(x,\tau)}(x)$ ).

-Supongamos entonces que  $x \notin F$  y  $F$  según (2) i.e.  $x \in C_x F \in \mathcal{T} \wedge F \supseteq \bar{B}$

de donde  $C_x F \in \mathcal{T} \cap \{\tau, \bar{p}_x B, \bar{p}_x(x)\}$  que es lo mismo que

$$C_x B \in \Sigma_{(x,\tau)}(x).$$

-De lo anterior y por (1) obtenemos  $\cap \{C_x B, B\} \neq \emptyset$  ( $\uparrow$ ), con lo que podemos concluir que asumiendo (1) y (2) stq  $x \in F$ , i.e.  $x \in C_x B$ .  
 2. Esto fue probado en teo AB 3. y aparece como ::(2).  $\square$  QED!

teorema 2.4.5 Dado  $(X, \mathcal{U})$  una ET-A stq

1.  $\sum_{(x, \tau)} (x) = C \mathcal{C}l_{(x, \tau)}^{-1} (PC_x \{x\})$ .
2.  $\sum_{(x, \tau)} (x) = C (\partial_{(x, \tau)} \cup I_x)^{-1} (PC_x \{x\})$ .

dem

1. Por demostrar  $C \sum_{(x, \tau)} (x) = \mathcal{C}l_{(x, \tau)}^{-1} (PC_x \{x\})$ . Ahora bien, esto es lo mismo que:  $H \in C \sum_{(x, \tau)} (x)$  ssi  $\mathcal{C}l_{(x, \tau)} H \in PC_x \{x\}$

i.e.  $C_x H \in \sum_{(x, \tau)} (x)$  ssi  $\mathcal{C}l_{(x, \tau)} H \subseteq C_x \{x\}$

i.e.  $C_x H \in \sum_{(x, \tau)} (x)$  ssi  $x \in C_x \mathcal{C}l_{(x, \tau)} H$ , que es exactamente lo que afirma el teorema 2.4.1.  $\square$

2. Nuevamente por teo AB 3. (2) sabemos que  $\mathcal{C}l_{(x, \tau)} = \partial_{(x, \tau)} \cup I_x$  de donde con 1. obtenemos el resultado.  $\square$  QED!

teorema 2.4.6 Dado  $(X, \mathcal{U})$  una ET-A stq  $\forall B \in PX$ :

1.  $\partial_{(x, \tau)} B = (\mathcal{C}l_{(x, \tau)} - I_x) B$ .
2.  $\partial_{(x, \tau)} B = \{x \in C_x B \mid \forall N \in \sum_{(x, \tau)} (x) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}$ .

dem

Notar que 1. y la parte 1<sup>a</sup> del teorema 2.4.4 implican 2. Así, basta probar 1. Pero en teo AB 3. ::(1) se probó, dado B arbitrario, que  $\partial_{(x, \tau)} B = \cap \{C_x B, \mathcal{C}l_{(x, \tau)} B\} = (\mathcal{C}l_{(x, \tau)} - I_x) B$ .  $\square$  QED!

• 2.5 RETICULOS

def G5 Dado  $X$  un conjunto,  $>$  es una relación de orden parcial para ssi :

- OP.0  $> \in PX^2$  (De hecho anotamos  $x > y$  ssi  $y < x$  ssi  $(x, y) \in >$ .)
- OP.1  $\forall x : x \in X \Rightarrow x > x$  ( $I_x \subseteq >$ )
- OP.2  $\forall x \forall y : x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$  ( $\cap \{>, <\} \subseteq I_x$ )

[OP1, OP2 se resumen en:  $\cap \{>, <\} = I_x :: \overline{OP1}$ ]

OP.3  $\forall x \forall y \forall z : x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$  ( $> \circ > \subseteq > :: \overline{OP2}$ )

def G6  $(X, >)$  es un conjunto parcialmente ordenado, u orden parcial (OP)

ssi  $>$  es una relación de orden parcial para  $X$ . Además:

$$\dot{=} \forall B \in \mathcal{P}X : S_{(x, >)} B =_{df.} \{y \in X \mid \forall x : x \in B \Rightarrow y > x\}$$

$$I_{(x, >)} B =_{df.} \{y \in X \mid \forall x : x \in B \Rightarrow y < x\}$$

$\dot{=} a$  es un mayorante o cotasuperior (minorante o cota inferior) de  $B$  en  $(X, >)$  ssi  $a \in S_{(x, >)} B$  ( $a \in I_{(x, >)} B$ ).

$\dot{=} a$  es un máximo (mínimo) de  $B$  en  $(X, >)$  ssi  $a \in \cap \{B, S_{(x, >)} B\}$  ( $a \in \cap \{B, I_{(x, >)} B\}$ ).

$\dot{=} a$  es un supremo (ínfimo) de  $B$  en  $(X, >)$  ssi  $a$  es un mínimo de  $S_{(x, >)} B$  (máximo de  $I_{(x, >)} B$ ).

postulado 2.5.1 Dado  $(X, >)$  OP, dado  $B \in \mathcal{P}X$ , si existe un máximo (o bien, un mínimo, supremo, ínfimo) de  $B$ , entonces éste es único. Utilizemos la notación  $\max_{(x, >)} B$  ( $\min_{(x, >)} B$ ,  $\sup_{(x, >)} B = \sqcup B$ ,  $\inf_{(x, >)} B = \sqcap B$  respectivamente).

def G7  $(X, >)$  es un retículo ssi  $(X, >)$  es OP y se cumple la siguiente

proposición:  $\forall B : B \subseteq X \wedge |B| < \aleph_0 \Rightarrow \exists (\bar{a}, \underline{a}) = (\sqcup B, \sqcap B)$  (L)

Observación: Dado  $(X, >)$  un retículo podemos definir  $\{\hat{\cup}, \hat{\cap}\} \subseteq X^{X^2}$  como operaciones binarias tq  $\hat{\cup}(a, b) = a \hat{\cup} b = \sqcup \{a, b\} \wedge \hat{\cap}(a, b) = a \hat{\cap} b = \sqcap \{a, b\}$ . Estas operaciones binarias cumplen con: R1 asociatividad, R2 conmutatividad y R3 absorción i.e.  $\forall (a, b) \in X^2 : a \hat{\cap} (a \hat{\cup} b) = a = a \hat{\cup} (a \hat{\cap} b)$ .  
Conversamente dado  $X$  un conjunto con  $\{\hat{\cup}, \hat{\cap}\} \subseteq X^{X^2}$  cumpliendo R1, R2, R3 con  $a > b$  ssi  $a \hat{\cap} b = b$  (N) define a  $(X, >)$  un retículo. Así pues dado  $(X, >)$  OP con la propiedad L, tenemos una estructura de orden equivalente a  $(X, \hat{\cup}, \hat{\cap})$  cumpliendo R1, R2, R3 con  $\hat{\cup}, \hat{\cap}$  definidas como en la def G6 y  $>$  mediante (N).

def G8 Dado  $(X, >)$  un retículo ent

∴  $(X, >)$  es un retículo de conjuntos ssi  $\exists \mathcal{U}: X \in \text{PPU}$  y  $>$  es la relación  $\supseteq$  tomada como subconjunto de  $\mathcal{U}^2$ .

∴  $(X, >)$  es un retículo propio de conjuntos ssi  $(X, >)$  es un retículo de conjuntos y tenemos que:  $\forall (A, B) \in X^2: A \hat{\cup} B = U\{A, B\} \wedge A \hat{\cap} B = \cap\{A, B\}$ .

∴  $(X, >)$  es distributivo ssi  $\forall (A, B, C) \in X^3: A \hat{\cup} (B \hat{\cap} C) = (A \hat{\cup} B) \hat{\cap} (A \hat{\cup} C)$ .

∴  $(X, >)$  es completo ssi  $\forall T \subseteq X \exists (\bar{a}, \underline{a}) = (\sqcup T, \cap T)$ .

postulado 2.5.2 Dado  $(X, >)$  un retículo, existe  $(R, \supseteq)$  retículo de conjuntos tq  $(R, \supseteq)$  es equivalente como estructura ordenada a  $(X, >)$  (i.e.  $(R, \supseteq)$  es homomorfica en el orden -como retículo- a  $(X, >)$ ).

Observación: Además de lo establecido en el postulado anterior tenemos que si  $(X, >)$  es distributivo entonces  $(R, \supseteq)$  es retículo propio de conjuntos, de donde la colección de retículos distributivos es incrustada y representada por la colección de retículos propios de conjuntos (que lastimosamente constituyen una clase propia, pues todo retículo propio es así mismo distributivo en vista de la distributividad usual del álgebra de conjuntos.).

teo R1 Dada  $(X, \tau)$  ET-A ent  $(\tau, \supseteq)$  es un retículo propio de conjuntos completo.

dem

-Que  $(\tau, \supseteq)$  es OP es inmediato. Para ver que es un retículo necesitamos probar (L). Tomamos entonces familias de conjuntos finitas  $\mathcal{H} \subseteq \tau$ , ent notar que por A1 y A2 stq  $\cup \mathcal{H} \in \tau$ ,  $\cap \mathcal{H} \in \tau$  de donde  $\exists (\bar{a}, \underline{a}) \in \tau^2$ ,  $\bar{a} = \cup \mathcal{H} = \cup \mathcal{H} \wedge \underline{a} = \cap \mathcal{H} = \cap \mathcal{H}$ , pues como el orden viene dado por  $\supseteq$  stq  $\cup \mathcal{H} \in S_{(\tau, \supseteq)} \mathcal{H}$  y si  $\mathcal{J} \in S_{(\tau, \supseteq)} \mathcal{H}$  stq  $\cup \mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$  i.e.  $\min_{(\tau, \supseteq)} S_{(\tau, \supseteq)} \mathcal{H} = \cup \mathcal{H} = \cup \mathcal{H}$  (y de manera similar se procede para  $\cap$ ).

-Que es un retículo de conjuntos es evidente desde que  $\mathcal{T} \in \mathcal{P}PX$ , y para ver que es propio reparamos nuevamente en el párrafo anterior por medio del cual supremos e ínfimos de conjuntos finitos, no solo existen en  $\mathcal{T}$ , sino que coinciden con la unión e intersección conjuntista respectivamente.

-Para probar la completitud, el axioma A1 nos libra de la primera parte, pues por los argumentos anteriores debemos tomar  $\sqcup \Gamma = \cup \Gamma$ , para una familia  $\Gamma$  arbitraria. Para ver la segunda referente a la intersección arbitraria nos apoyamos en un resultado de teoría de orden y retículos que dice que si en un OP dado, cada subconjunto no vacío que tiene un mayorante tiene un supremo, entonces cada subconjunto no vacío que tiene un menorante tiene un ínfimo. En nuestro caso la cota inferior para una familia arbitraria  $\Gamma$  en  $(\mathcal{T}, \supseteq)$  viene dada por  $\cap \Gamma$ . Para una mayor claridad puede el lector leer la prueba de la afirmación que hemos mencionado y que a continuación transcribimos.

□ QED!

proposición Dado  $(X, >)$  OP tq  $\forall H \in \mathcal{P}X : H \neq \emptyset \wedge \bigcup_{(x,y)} H \neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup_{(x,y)} H \in X$   
 ent stq  $\forall K \in \mathcal{P}X : K \neq \emptyset \wedge \bigcap_{(x,y)} K \neq \emptyset \Rightarrow \exists \inf_{(x,y)} K \in X$

dem

-Sea  $H \in \mathcal{P}X$  tq  $H \neq \emptyset \wedge \bigcap_{(x,y)} H \neq \emptyset \quad \text{::(1)},$  ent  
 $\exists b : b \in X \wedge b \in \bigcap_{(x,y)} H$ . Además  $\bigcup_{(x,y)} \bigcap_{(x,y)} H \neq \emptyset \quad \text{::(2)}$  desde que por def G6  $\bar{b} \in \bigcap_{(x,y)} H$  ssi  $\forall h : h \in H \Rightarrow \bar{b} < h$ , i.e. dados  $\bar{b} \in \bigcap_{(x,y)} H$  y  $h \in H$  arbitrarios stq  $\bar{b} < h$ , o en otras palabras  $\forall h : h \in H \Rightarrow (\forall \bar{b} : \bar{b} \in \bigcap_{(x,y)} H \Rightarrow h > \bar{b}) \therefore \forall h : h \in H \Rightarrow h \in \bigcup_{(x,y)} \bigcap_{(x,y)} H$ .

-Por (1) y (2)  $\bigcap_{(x,y)} H$  satisface las condiciones de la hipótesis de donde  $\exists b^* = \bigcup_{(x,y)} \bigcap_{(x,y)} H$ ; demostraremos que  $b^* = \bigcap H$ .

-Primero  $b^* \in \bigcap_{(x,y)} H$ , pues de lo contrario  $\exists h \in H, h \neq b^* \wedge h \not> b^*$  i.e.  $\exists h \in H \ni h \in \bigcup_{(x,y)} \bigcap_{(x,y)} H \wedge h \not> \bigcup_{(x,y)} \bigcap_{(x,y)} H$  ( $\uparrow$  def G6  $\sqcup$ ).

-Que no puede existir una cota inferior de  $H$  mayor que  $b^*$  sigue de la definición de  $b^*$  como  $\sqcup_{(x,y)} H$ , de donde concluimos que  $b^* = \max_{(x,y)} \inf_{(x,y)} H$  i.e.  $\exists b^* = \inf_{(x,y)} H$ .  $\square$  QED!

Observación : Notar que  $(\tau, \supseteq)$  es un retículo propio donde  $\sqcup$  coincide con  $\cup$ , pero  $\sqcap$  no viene dado en general por  $\cap$  sino es tan solo para familias finitas. Esto justifica a los retículos como estructura algebraica.

lema Dado  $\Theta_x = \{\tau \in \mathcal{P}PX \mid (x, \tau) \text{ es E.T.A}\}$  ent  $\forall \Gamma: \Gamma \subseteq \Theta_x \Rightarrow \cap \Gamma \in \Theta_x$ .

dem

-Que  $\cap \Gamma \in \mathcal{P}PX$  dado  $\Gamma \subseteq \Theta_x$  es obvio, pues  $\Theta_x \in \mathcal{P}PX$ , así A0 se da.

-Para A1, supongamos  $H \subseteq \cap \Gamma$  arbitraria, ent  $\forall \tau \in \Gamma: \cap \Gamma \subseteq \tau$  nos lleva a  $\forall \tau \in \Gamma$  stq  $H \subseteq \tau$  de donde utilizando la hipótesis y  $\Gamma \subseteq \Theta_x$  stq  $\forall \tau \in \Gamma: \cup H \in \tau$  i.e.  $\cup H \in \cap \Gamma$ .

-Para A2, procedemos de manera similar al párrafo anterior pero con  $|H| < \aleph_0$ , así dado  $H$  tq  $H \subseteq \cap \Gamma \subseteq \tau$  con  $\tau \in \Gamma$  stq  $\forall \tau \in \Gamma: \cap H \in \tau$  i.e.  $\cap H \in \cap \Gamma$ .  $\square$  QED!

teo R2 Dado  $\Theta_x$  tal como se definió en el lema ent  $(\Theta_x, \supseteq)$  es un retículo de conjuntos completo.

dem

Notar que  $\Theta_x \in \mathcal{P}PU$  con  $U = PX$ , además de que  $\supseteq$  es una relación de orden parcial en  $\Theta_x$ . Así pues  $(\Theta_x, \supseteq)$  es un retículo de conjuntos si probamos que satisface la propiedad (L) de supremos e ínfimos finitos. Al probar la completitud, probamos (L), así que sea  $\Gamma \subseteq \Theta_x$ , como  $\cap \Gamma \in \Theta_x$  stq  $\cap \Gamma = \cap \Gamma \in \Theta_x$ . Esto anterior es claro debido a que en todo retículo de conjuntos, si existe  $\cap \Gamma$  ent  $\cap \Gamma \subseteq \cap \Gamma$ . Así que para toda subfamilia de  $\Theta_x$

existe un ínfimo. Considerando la relación de orden parcial inversa ( $\subseteq$ ) y la "proposición" posterior al teo R1, concluimos que también existe un supremo, y que en este caso viene dado por  $\sqcup \Gamma = \bigcap \{ \tau \in \theta_x \mid \cup \Gamma \subseteq \tau \}$  i.e.  $\sqcup \Gamma = \bigcap \{ \bar{p}_u \cup \Gamma, \theta_x \} = \prod S_{(\theta_x, \geq)} \Gamma$  dado que  $S_{(\theta_x, \geq)} = \bigcap \{ \bar{p}_u \cup \Gamma, \theta_x \}$ .  $\square$  QED!

Observación:  $(\theta_x, \geq)$  es tal que  $\prod$  coincide con  $\bigcap$  para familias arbitrarias, pero  $(\theta_x, \geq)$  es un retículo de conjuntos tal que ni siquiera los supremos finitos son necesariamente iguales con los elementos producidos por  $\cup$ .

## 2.6 BASES Y SUBBASES.

def G9 Dado  $(X, >)$  un retículo,  $B$  es una base para  $(X, >)$  ssi  $B \in PX$ , y stq  $\forall x \in X \exists B_x : B_x \subseteq B \wedge x = \sqcup B_x$ .  
Construimos  $b(X, >) = \{ B \in PX \mid B \text{ es una base para } (X, >) \}$ .

teo 2.6.1 Sea  $(X, \tau)$  ET-A ent  $\mathcal{B}$  es una base para el retículo  $(\tau, \geq)$  ssi  $\mathcal{B} \subseteq \tau \wedge \forall G \in \tau : \forall x \in G \exists B(G, x) \in \mathcal{B}_G \quad x \in B(G, x) \subseteq G$ . (o)

dem Esto es solo una adaptación de la def G9 a  $(\tau, \geq)$ . Veamos  $\mathcal{B}$  es una base para  $(\tau, \geq)$  ssi  $\mathcal{B} \in P\tau \wedge \forall x \in \tau \exists B_x \ni B_x \subseteq \mathcal{B} \wedge x = \sqcup B_x$   
i.e.  $\mathcal{B} \subseteq \tau \wedge \forall G \in \tau \exists \mathcal{B}_G \ni \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B} \wedge G = \cup \mathcal{B}_G :: (1)$

-Ahora bien, sea  $\mathcal{B}$  una base de  $(\tau, \geq)$  ent  $\exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}$  tq  $G = \cup \mathcal{B}_G$   
i.e.  $\forall G \in \tau \forall x \in G \exists B(G, x) \in \mathcal{B}_G \ni x \in B(G, x) \subseteq G$ . (o)  $\square$

-Por otro lado sea  $\mathcal{B}$  satisfaciendo la proposición del teorema, (o)  
i.e.  $\forall G \in \tau \forall x \in G : \exists B(G, x) \in \mathcal{B}_G \ni x \in B(G, x) \subseteq G$ , de donde si consideramos  $\mathcal{B}_G = \{ B(G, x) \in PX \mid \forall x \in G : x \in B(G, x) \subseteq G \}$  (asi  $\mathcal{B} = \cup \{ \mathcal{B}_G \mid G \in \tau \}$ )  
stq  $\forall G \in \tau \exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}_G \quad G = \cup \mathcal{B}_G$ , y ent  $\mathcal{B}$  es una base según (1).  $\square$  QED!

Observación: Nos referimos a una base para  $(\tau, \geq)$  como una base para  $\tau$ , en vista de que tal estructura es un retículo de conjuntos (propio y

completo) de donde se sobreentiende que la relación de orden parcial es la contención usual de conjuntos restringida a  $\mathcal{U}$ .

def G10 Una familia  $\mathcal{B} \in \mathcal{P}PX$  es una familia básica de conjuntos ssi  $(X, \tau)$  es ET-A, donde  $X = \cup \mathcal{B}$  y  $\tau = \hat{\cup} \mathcal{P}\mathcal{B}$  (Aca  $\hat{\cup} K = \{U_h \mid h \in K\} = K'$ , y llamamos a  $K'$  el generado de  $K$  escribiendo  $K' = [K]$ ). Así  $\tau = [\mathcal{B}]$ .)

teorema 2.6.2 Una familia  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}X$  es una familia básica de conjuntos ssi  $\forall B_1, \forall B_2: \{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \exists K \subseteq \mathcal{B}, \cap \{B_1, B_2\} = \cup K$ .

dem

[ $\Leftarrow$ ] Sea  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}X$  tq cumple la proposición del teorema, por demostrar  $[\mathcal{B}]$  es una topología sobre  $\cup \mathcal{B}$ .

-Para A0, tome  $X = \cup \mathcal{B}$  así  $\forall G \in [\mathcal{B}] \exists K \subseteq \mathcal{B}, G = \cup K \subseteq X$ , i.e.  $[\mathcal{B}] \in \mathcal{P}PX$ .

-Para probar que  $[\mathcal{B}]$  es cerrado para las uniones, sea  $\mathcal{H} \subseteq \hat{\cup} \mathcal{P}\mathcal{B} = [\mathcal{B}]$  arbitraria ent  $\forall H \in \mathcal{H} \exists K_H \subseteq \mathcal{B}, H = \cup K_H \in [\mathcal{B}]$ , que podemos reescribir así  $\cup \mathcal{H} = \cup \{\cup K_H \mid H \in \mathcal{H}\} = \cup \{K_H \mid H \in \mathcal{H}\} = \cup K$  con  $K \subseteq \mathcal{B}$  i.e.  $\cup \mathcal{H} \in \hat{\cup} \mathcal{P}\mathcal{B}$ .

De hecho, esto se debe a que  $[\mathcal{B}]$  se construyó a partir de uniones, así será cerrado por la misma construcción (¡para eso se hizo así!)

-Sea ahora  $\mathcal{H} \subseteq \hat{\cup} \mathcal{P}\mathcal{B}$  con  $|\mathcal{H}| < \aleph_0$ . Tomamos  $\mathcal{H} = \{H_i \mid i \in I \wedge |I| < \aleph_0\}$  de donde  $\forall i \in I \exists K_i \subseteq \mathcal{B}, H_i = \cup K_i$ . Ahora consideremos  $\forall i \in I:$

$$K_i = \{J_j^i \mid j \in I_i\} \text{ ent stq } \cap \mathcal{H} = \cap \{\cup K_i \mid i \in I\} = \cap \{\cup \{J_j^i \mid j \in I_i\} \mid i \in I\}$$

$= \cup \{\cap \{J_j^i \mid i \in I\} \mid j \in \cup I_i\}$  Ahora bien, por hipótesis e inducción sobre el número de conjuntos para la intersección finita stq dado  $J_j^i \in \mathcal{B}$  para cualesquier  $i \in I, j \in I_i$  ent  $\forall j \in \cup \{I_i \mid i \in I\}: \cap \{J_j^i \mid i \in I\} = L_j \in \mathcal{B}$

De esto  $\cap \mathcal{H} = \cup \{L_j \mid j \in \cup \{I_i \mid i \in I\}\} = \cup \mathcal{L}$  i.e.  $\cap \mathcal{H} \in \hat{\cup} \mathcal{P}\mathcal{B}$ .

dado  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}$  □ QED!

Nota: Este teorema puede modificarse cambiando la proposición de equivalencia presentada, por la siguiente:  $\forall B_1, \forall B_2: B_1 \in \mathcal{B} \wedge B_2 \in \mathcal{B}$  stq  $\forall x: x \in \cap \{B_1, B_2\} \Rightarrow \exists B_x: B_x \in \mathcal{B} \wedge x \in B_x \subseteq \cap \{B_1, B_2\}$ .

Ademas, una condición suficiente para que  $\mathcal{B}$  sea una familia básica es:  $\forall B_1, \forall B_2: \{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \cap\{B_1, B_2\} \in \mathcal{B}$ . La prueba de estas dos afirmaciones es ya sencilla utilizando las demostraciones de los teoremas 2.6.1, 2.6.2

teorema 2.6.3 Dada  $\mathcal{B}$  una familia básica ent ésta es base para la topología generada y viceversa para toda base de topología. Más exactamente :

- 1. Si  $\mathcal{B}$  es una familia básica y sea  $\tau = [\mathcal{B}]$  ent  $\mathcal{B} \in b(\tau)$ .
- 2. Dado  $\mathcal{B} \in b(\tau)$  ent  $\mathcal{B}$  es una familia básica con  $\tau = [\mathcal{B}]$ .

• dem (teorema 2.6.2  $[\Rightarrow]$  :)

Sea  $\mathcal{B}$  una familia básica de conjuntos con  $\tau = [\mathcal{B}]$  , ent por A2  $\forall \mathcal{H} \subseteq \tau : |\mathcal{H}| < \aleph_0 \Rightarrow \cap \mathcal{H} \in [\mathcal{B}]$  y en particular con  $|\mathcal{H}| = 2$  obtenemos  $\forall B_1, \forall B_2: \{B_1, B_2\} \subseteq [\mathcal{B}] \Rightarrow \cap\{B_1, B_2\} \in [\mathcal{B}]$ , de donde concluimos  $\forall B_1, \forall B_2: \{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{B} \Rightarrow \exists K \subseteq \mathcal{B}, \cap\{B_1, B_2\} = \cup K$ ; que es el teorema.  $\square$

dem-

1. Sea  $\mathcal{B}$  tq  $[\mathcal{B}]$  es topología, por demostrar que  $\mathcal{B} \in b(\tau)$ . Pero que  $\mathcal{B} \in b(\tau)$  es por def G9 :  $\forall G \in [\mathcal{B}]: \exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}, G = \cup \mathcal{B}_G$  , que es exactamente la definición de  $[\mathcal{B}]$  como  $\hat{\cup} \mathcal{B}$ .

2. Ahora partimos de  $\mathcal{B} \in b(\tau)$  i.e.  $\forall G \in \tau \exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}, G = \cup \mathcal{B}_G$  de donde  $\tau \subseteq [\mathcal{B}]$  . Ahora bien  $\mathcal{B} \in b(\tau)$  y por def G9  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  , de donde sta  $[\mathcal{B}] \subseteq [\tau]$  (que podría demostrarse como lema aparte, pero no amerita pues la prueba sigue el lineamiento conocido para areas elementales), y como  $\tau$  satisface A1, es cerrado bajo la unión de donde  $[\tau] = \tau$  y por lo tanto  $[\mathcal{B}] \subseteq \tau$  .  $\square$  QED!

Observación : El asunto de las bases para una determinada estructura matemática es general, y puede ya observarse en areas como álgebra lineal y otras. En terminos generales lo que se busca es un subconjunto del espacio que lo "genere" en totalidad mediante algún criterio y se desea de preferencia que dicho conjunto no sea redundante i.e. que sea minimal.

En álgebra estos generadores mínimos producen una propiedad característica en las bases que clasifican de cierta forma a diversos tipos de espacio. Así una base se encuentra en la intersección de los conjuntos generadores con los conjuntos independientes (i.e. los que han sido minimizados de manera que no existen elementos en él que puedan ser producidos por sus compañeros)

Ahora bien, en nuestra definición de base para una topología (en general de un retículo ) la minimización no se llevo a cabo, pues se pidió únicamente que un subconjunto de  $\mathcal{T}$  "generara" a la misma. Esto se debe a que la minimización no es sencilla y la independencia ( con relación a la unión en este caso ) no trae nuevas propiedades a la base más que la independencia misma.

Despues de toda esta introducción al concepto general de base para una estructura matamática, podrá preguntarse el sentido del teorema 2.6.3 en el cual se establece una equivalencia del todo aparentemente obvia ya. Lo que sucede es que se introdujo el concepto de base cuando tenemos dado un espacio topológico (o un retículo) y es éste el camino usualmente empleado ; sin embargo, tambien se habló del concepto de familia básica (topologicamente) en vista que el generado de un conjunto cualquiera no es necesariamente una topología, pues se genera a travesde uniones únicamente. La atención está centrada en la familia  $\mathcal{B}$  como punto de partida y no en cómo debe ser  $\mathcal{B}$  para poder ser base de  $\mathcal{T}$  . Es por esto que se pide una condición extra que viene dada por el teorema 2.6.2.

Por otro lado, si el generado de una familia se da por intersecciones finitas y uniones arbitrarias entonces no es necesario el concepto de familia básica, pues todo generado sería topología. Esto se da para lo que llamamos subbases y se establece, en el teorema 2.6.5. Para finalizar, la base no es por lo general única (de lo contrario, dada una ET-A, más que base sería una estructura equivalente a la original.), y de ello que la colección de bases sea una clase de equivalencia con  $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$  ssi  $\mathcal{B}_1$  y  $\mathcal{B}_2$  generan la misma estructura. Esta clase tiene algún criterio, que en

nuestro caso viene dado por el teorema 2.6.4.

def G11 Dado  $\{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{P}X$  ent  $B_1$  es equivalente a  $B_2$  ssi  $\exists \tau: (x, \tau) \in T_A \wedge \{B_1, B_2\} \in \mathcal{B}$   
[  $B = b(\tau)$  ]

teorema 2.6.4 Dados  $B_1, B_2$  básicas ent  $[B_1] \subseteq [B_2]$  ssi  
 $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall x \in B_1, \exists B_2 \in \mathcal{B}_2, x \in B_2 \subseteq B_1 \quad \therefore (H)$

dem

[ $\Rightarrow$ ] Como  $B_1 \subseteq [B_1] \subseteq [B_2]$  stq dado  $B_1 \in \mathcal{B}_1$  ent  $\exists B \subseteq B_2, B_1 = \cup B$   
i.e.  $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 : B_1 \in [B_2] \wedge \forall x \in B_1, \exists B_2 \in \mathcal{B}_2, x \in B_2 \subseteq B_1. \square$

[ $\Leftarrow$ ] Sea ahora  $B_1, B_2$  básicas tq (H) ent dado  $B_1 \in [B_1]$  i.e. dado  
 $B_1 = \cup B$ , con  $B \subseteq \mathcal{B}_1$  stq  $\exists B' \subseteq \mathcal{B}_2$  tq  $B' = \{B_2(b_i, x) \in \mathcal{P}X \mid x \in B_2(b_i, x) \subseteq B_1\}$   
con  $B_2(b_i, x)$  garantizados por la propiedad (H), de donde  
obtenemos  $B_1 = \cup B'$  i.e.  $B_1 \in [B_2]. \square$   
 $\square$  QED!

Nota : A la proposición (H) se le conoce con el nombre de criterio Hausdorff, pues él lo empleo para establecer la equivalencia de dos bases de vecindades en un punto cualquiera del espacio. Ya veremos adelante la relación con el teorema expuesto. Parafraseado dice : "vecindades más chicas construyen topologías más grandes".

corolario  $B_1$  es equivalente a  $B_2$  ssi se da (H) y la proposición (H) permutando 1 con 2.

dem.

Tomando la def G11 y el teorema 2.6.4 la prueba es trivial.  $\square$

def G12 Una familia  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}X$  es una familia subbásica ssi  $\langle \mathcal{C} \rangle$  es una familia de conjuntos básica, con  $\langle \mathcal{C} \rangle = \{ \cap K \mid K \subseteq \mathcal{C} \wedge |K| < \aleph_0 \}$ .

teorema 2.6.5 Toda  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}X$  es una familia subbásica.

dem

Al efecto, debemos probar que  $[\langle \phi \rangle]$  es una topología para  $U\phi$ .

-Para establecer A0 notar que de  $\phi \in \mathcal{P}P X$  stq  $\{K | K \in \mathcal{P}\phi \wedge |K| < \chi_0\} \in \mathcal{P}P X$ , de donde  $[\langle \phi \rangle] = \{U K | K \subseteq \phi \wedge |K| < \chi_0\} \in \mathcal{P}P X$ .

-Sean ahora  $\{B_1, B_2\} \subseteq \langle \phi \rangle$  stq  $\exists K_1, K_2 : (\forall i \in \{1, 2\} : K_i \subseteq \phi \wedge B_i = \bigcap K_i) \wedge |K_1 \cup K_2| < \chi_0$  de donde obtenemos que  $\bigcap \{B_1, B_2\} = \bigcap \{\bigcap K_1, \bigcap K_2\} = \bigcap U\{K_1, K_2\} \in \langle \phi \rangle$  en vista de  $U\{K_1, K_2\} \subseteq \phi$ .

-Así  $\forall B_1, B_2 : \{B_1, B_2\} \subseteq \langle \phi \rangle \Rightarrow \bigcap \{B_1, B_2\} \in \langle \phi \rangle$  y esto es suficiente para tener la condición del teorema 2.6.2. Por lo tanto  $\langle \phi \rangle$  es una base para  $U\langle \phi \rangle = U\phi$ .

□ QED!

def G13 Dado  $(X, \tau)$  una ET-A,  $\phi$  es una subbase para  $\tau$  ssi  $\tau = [\langle \phi \rangle]$ .

Nota : Como se menciona ya, el procedimiento para construir espacios topológicos debería ser considerando, a partir de  $\phi \in \mathcal{P}P X$ , al generado de la misma como  $[\langle \phi \rangle]$ , que es la topología mínima que contiene a la familia inicial i.e.  $[\langle \phi \rangle] = \bigcap \{ \theta_x, \bar{P}_{\mathcal{P}X} \phi \}$ . No siempre las subbases son fáciles de describir a pesar de ser más maleables que las bases en cuanto a homeomorfismos, pero una de las razones para la preferencia de las bases tal como aca se han definido es la conexión entre sistemas de vecindades y los elementos de una base que contienen a un punto específico del espacio.

def G14 Dados  $(X, \tau)$  ET-A,  $x \in X$  y  $B \in b(\tau)$  ent definimos a  $\bigcap \{B, \bar{P}_x \{x\}\}$  como una base local (subbase local si  $B$  es subbase) en  $x$ .

2

## CAPÍTULO 3

OPERADOR DE CERRADURA  
DE KURATOWSKI.

### 5.1 INTRODUCCION

El operador de cerradura como concepto primario para definir una estructura espacial, junto con sistema de axiomas, fue utilizado por primera vez por Casimier Kuratowski en su tesis de 1920. Su posición central con respecto al punto de partida para el estudio de la topología fue determinada por Alexandroff y Hopf (Topologie I, Springer-Verlag; Berlín) quienes le asignaron el nombre "topological spaces", un nombre que fue usado previamente por Hausdorff para el sistema que introdujo en 1914. Esos son los llamados espacios Hausdorff tal como se mostraron en 1.2. El nombre "espacio topológico" fue también utilizado por Fréchet y su escuela para denotar un conjunto  $X$ , para el cual en cada subconjunto, un conjunto derivado es definido. Esta visión corresponde a la presentada en la misma sección en donde se utilizó un sistema de vecindades equivalente.

Irónicamente, Kuratowski después modificó sus axiomas originales. Los sistemas, resultado de tal modificación (los cuales forman la base en su tratado sobre topología), son más especiales que lo que ahora llamamos espacios topológicos y que encontramos en la literatura bajo el nombre de espacios- $T_1$ .

La estructura topológica tal como se introduce en este capítulo puede ser generalizada a conjuntos parcialmente ordenados  $(P, >)$ . Esto sucede debido a que el operador de cerradura puede ser definido utilizando únicamente una relación de orden (la inclusión de conjuntos en nuestro caso). Así pues sea  $c: P \longrightarrow P$ , podemos llamarla una función de cerradura sobre  $(P, >)$  o p.s.s. si:

$$OC_1 \quad \exists l: l = \min_{(c, >)} P \Rightarrow c(l) = l \wedge I_l < c.$$

$$OC_2 \quad \forall x \forall y: c(x \sqcup y) = c(x) \sqcup c(y).$$

$$OC_3 \quad c^2 < c.$$

Esta generalización es debida a Monteiro y Ribeiro en 1942 (L'opération de fermeture et ses invariants) y es formalizada por McKinsey y Tarski (1944, "The algebra of topology"). También esto fue sistemáticamente estudiado por Nöbeling (1954, "Grundlagen der analytischen Topologie ; Berlin).

Otra posible generalización proviene de estudios hechos también por Monteiro y Ribeiro en la misma publicación antes mencionada. Primero observar que los conjuntos cerrados son los elementos fijos de la función de cerradura. Esto impresiona, que un operador sea determinado unicamente por sus puntos fijos. Mirándolo más de cerca, C1 y C3 nos llevan al corolario (\*), así como que dado  $B$ ,  $ClB$  debe ser uno de los puntos fijos conteniendo a  $B$ . Finalmente la monotoneidad, consecuencia de C2, nos lleva a que  $ClB$  es el más pequeño que cumple con tal condición. Uno puede así pensar al operador de cerradura como una función paso cuyos posibles valores son una determinada subfamilia de  $PX$ , que llamamos conjuntos cerrados. También los autores en 1942 estudiaron la pregunta de bajo qué condiciones una función de cerradura sobre un OP dado, según las condiciones dadas anteriormente, es determinada por sus elementos fijos.

También en este capítulo se introduce el derivador de conjuntos que aunque íntimamente relacionado con la cerradura obtiene su verdadera trascendencia en los espacios de vecindades más generales posibles. Esto nos permite exponer un ejemplo en el que podemos ver como "nuestros" espacios topológicos no son tan generales como podríamos suponer. El conjunto  $C_1$  de todas las funciones límites de secuencias de funciones continuas bajo convergencia puntual, junto con  $C_2$  el conjunto de todas las funciones límites de sucesiones de elementos de  $C_1$  bajo convergencia puntual nos lo proporcionan.

En efecto, el conjunto  $C_2$  de todas las funciones límites de sucesiones de elementos de  $C_1$  bajo convergencia puntual no es contenido en  $C$  (las funciones continuas sobre un espacio dado). Así, definiendo la clausura de todo subconjunto de  $C$  como el conjunto de las funciones límites bajo convergencia puntual de todas las posibles sucesiones en el conjunto, obtenemos un operador (topológico según las ideas anotadas en 1.1) de cuasicerradura que falla al satisfacer  $\neg C3$ . La prueba está dada por Baire.

Para finalizar Riesz dió una axiomática para el operador de derivadas sobre conjuntos independiente de la visión presentada por Fréchet. Los axiomas fueron: Dado  $X$  un conjunto, dada  $d \in PX^{PX}$ :

$$R1 \quad \forall x: x \in X \Rightarrow d\{x\} = \phi.$$

$$R2 \quad \forall A, B \in PX: dU\{A, B\} = U\hat{d}\{A, B\}.$$

$$R3 \quad d^2 \leq d.$$

Para esta estructura se dan los teoremas DC, CA y AD, con el retorno  $dCU$ . Sin embargo, la permutación no es válida y la secuencia ADC no puede llevarse a cabo en base a las definiciones aquí establecidas. Con esto concluimos que no todos nuestros espacios topológicos pueden ser obtenidos de derivadores satisfaciendo R3.

### • 3.2 Estructuras Topológicas $(X, Cl)$

def F1 Dado  $X$  un conjunto,  $Cl$  es un operador de cerradura sobre  $X$  ssi:

- C0.  $Cl \in \mathcal{P}X^{PX}$ .
- C1.  $Cl \emptyset = \emptyset \wedge I_x \leq Cl$ .
- C2.  $\forall B \forall E : Cl \cup \{B, E\} = U \hat{Cl} \{B, E\}$ .
- C3.  $Cl^2 \leq Cl$ .

Nota: C2 afirma que  $Cl$  es un homomorfismo para  $U$  (y así para el orden inducido como se prueba en el lema F2); C1 nos dice que es no decreciente y en C3  $Cl$  es una proyección.

def F2  $(X, Cl)$  es una estructura  $C$ -topológica (ET-C) ssi  $Cl$  es un operador de cerradura sobre  $X$ . Además:

- 1.  $\tau_{(X, Cl)} =_{df.} C\pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\}$
- 2.  $\forall x \in X : \Sigma_{(X, Cl)}(x) =_{df.} C Cl^{-1}(P_{C_x}\{x\})$ .
- 3.  $\partial_{(X, Cl)} =_{df.} Cl - I_x$

Observación: Podemos considerar una variante en la def F2 dando otra expresión para  $\tau_{(X, Cl)}$ . Demostramos a continuación la equivalencia entre ambas modalidades, asumiendo para  $(X, Cl)$  una ET-C.

abs (T) F2 Dada  $(X, Cl)$  una ET-C, ent  $\tau_{(X, Cl)} = (Cl \circ C_x \cap I_x)^{-1}(\{\emptyset\})$

dem

[ $\subseteq$ ] Dado  $G \in \tau_{(X, Cl)}$  por demostrar  $G \in (Cl \circ C_x \cap I_x)^{-1}(\{\emptyset\})$

Ahora  $G \in \tau_{(X, Cl)} = C\pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\}$  ie  $C_x G \in \pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\}$

i.e.  $Cl C_x G = C_x G$  de donde podemos concluir como particular  
 $\cap \{Cl(C_x G), G\} = \cap \{C_x G, G\} = \emptyset$  i.e.  $(Cl \cdot C_x \cap I_x)(G) = \emptyset$   
 $\therefore G \in (Cl \cdot C_x \cap I_x)^{\wedge}(\{\emptyset\}) \square$

[ $\supseteq$ ] Tome ahora  $G \in (Cl \cdot C_x \cap I_x)^{\wedge}(\{\emptyset\})$  por demostrar  $G \in \mathcal{T}_{(X, Cl)}$   
 - Sea  $G$  según la hipótesis  $stq (Cl \cdot C_x \cap I_x)(G) \in \{\emptyset\}$  ent  
 $\cap \{Cl(C_x G), G\} = \emptyset$  de donde  $stq Cl(C_x G) \subseteq C_x G \therefore (1)$   
 - Por otro lado, según  $Cl, I_x \leq Cl$  ent  $I_x(C_x G) \subseteq Cl(C_x G)$   
 i.e.  $C_x G \subseteq Cl(C_x G) \therefore (2)$   
 - De (1) y (2)  $stq Cl(C_x G) = C_x G$  ent  $(C_x G, C_x G) \in \cap \{Cl, I_{px}\}$   
 $\therefore G \in C_{\pi_1} \cap \{Cl, I_{px}\} = \mathcal{T}_{(X, Cl)} \square \quad \square QED!$

def F3 Dado  $(X, Cl)$  una ET-C ent definimos:

- $\dot{\vdash}$   $G$  es C-abierto en  $(X, Cl)$  ssi  $G \in \mathcal{T}_{(X, Cl)}$ .
- $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto de clausura de  $B$  en  $(X, Cl)$  ssi  $x \in Cl B$ .
- $\dot{\vdash}$   $N$  es C-vecindad de  $x$  en  $(X, Cl)$  ssi  $N \in \Sigma_{(X, Cl)}(x)$ .
- $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto de adherencia de  $B$  en  $(X, Cl)$  ssi  $x \in \partial_{(X, Cl)} B$

Nota: En el resto del capítulo suponemos a  $(X, Cl)$  una ET-C y omitimos la frase "en  $(X, Cl)$ ", salvo cuando sea necesario ó útil especificar.

- def F4
- $\dot{\vdash}$   $F$  es C-cerrado ssi  $Cl F = F$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto exterior de  $B$  ssi  $x \in C_x Cl B$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto interior de  $B$  ssi  $B \in \Sigma_{(X, Cl)}(x)$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto libre de  $B$  ssi  $B \notin \Sigma_{(X, Cl)}(x)$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto borde de  $B$  ssi  $x \in B \wedge x$  es C-punto libre de  $B$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es C-punto frontera de  $B$  ssi  $x \in \partial_{(X, Cl)} B \wedge x \in \partial_{(X, Cl)} C_x B$ .

Nota: Omitiremos de ahora en adelante el prefijo C para los conceptos antes definidos, necesario si somos rigurosos puesto que éstos están basados, en última instancia en una ET-C.

### 3.3 Teoremas Básicos

lema F1 Dada  $(X, \mathcal{C})$  ET-C ent  $F$  es C-cerrado ssi  $C_X F$  es C-abierto

dem

La prueba es inmediata consecuencia de las definiciones. Sea  $F$  C-cerrado ent por def F4:  $CLF = F$  de donde

$$(F, F) = (F, CLF) \in \cap \{CL, I_{PX}\} \text{ i.e. } F \in \pi_4 \cap \{CL, I_{PX}\}.$$

De esto  $C_X F \in C\pi_4 \cap \{CL, I_{PX}\}$  que es por las def F3, def F2  $C_X F$  es C-abierto. La secuencia es invertible.  $\square$  QED!

lema F2  $CL$  preserva el orden i.e.  $\forall B \forall E: B \subseteq E \subseteq X \Rightarrow CLB \subseteq CLE$ .

dem

Es una consecuencia de C2, aunque no es equivalente. Sean para ello  $B, E$  subconjuntos de  $X$  arbitrarios. Ent

$$B \subseteq E \Leftrightarrow U\{B, E\} = E \Rightarrow CL U\{B, E\} = CLE$$

de donde  $U\hat{C}\{B, E\} = U\{CLB, CLE\} = CLE$  i.e.  $CLB \subseteq CLE$ .  $\square$  QED!

teo CLT  $CL$  es un operador que asigna a cada conjunto la intersección de todos los cerrados que lo contienen, i.e.  $CL$  puede ser reconstruida

por  $\mathcal{T}_{(X, \mathcal{C})}$  mediante:  $\forall B \in \mathcal{P}X: CLB = C_{\mathcal{C}} B = \bigcap \{\bar{P}_X B, C_{\mathcal{C}}\}$

dem

[ $\subseteq$ ] Dado  $B \in \mathcal{P}X$ , por demostrar  $CLB \subseteq C_{\mathcal{C}} B$

- Sea  $F \in \cap \{\bar{P}_X B, C_{\mathcal{C}}\}$  ent  $F \supseteq B \wedge F \in C_{\mathcal{C}}$  de donde

$C_X F$  es C-abierto y por lo tanto  $F \supseteq B \wedge CLF = F$  :: (1).

- Ahora bien, usando el lema F2 en  $F \supseteq B$  stq  $CLF \supseteq CLB$ , pero por el resultado de (1), se tiene:  $F \supseteq CLB$
- En (4), se escribe:  $\forall F: F \in \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \}$  stq  $CLB \subseteq F$   
ent  $\cap \{ CLB \} \subseteq \cap \{ F: F \in \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \} \}$  i.e.  $CLB \subseteq CL_x B \square$

[ $\supseteq$ ] Dado  $B \in \mathcal{P}X$  por demostrar  $\cap \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \} \subseteq CLB$

- Primero, nótese que  $CLB \in \bar{P}_x B$  :: (1) dado que por C1  $\forall B: B \subseteq CLB$  [:: (1)]
- Por otro lado, por C1:  $CL(CL B) \supseteq CLB$ , y de C3  $CL(CL B) = CL^2 B \subseteq CLB$  por lo que tenemos  $CL(CL B) = CLB$   
i.e.  $CLB$  es cerrado, o bien  $\forall B: CLB \in C_{x\alpha}$  :: (2)
- De (1) y (2)  $CLB \in \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \}$  i.e.  $\{ CLB \} \subseteq \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \}$   
ent  $\cap \{ CLB \} \supseteq \cap \cap \{ \bar{P}_x B, C_{x\alpha} \}$  i.e.  $CLB \supseteq CL_x B \square$  QED!

(\*)

Lema F3 Dado  $(X, CL)$  ET-C, y sea  $C_{x\alpha}$  la familia de cerrados del espacio. Ent

- $\forall B: B \subseteq C_{x\alpha} \Rightarrow \cap B \in C_{x\alpha}$
- $\forall B: B \subseteq C_{x\alpha} \wedge |B| < \aleph_0 \Rightarrow \cup B \in C_{x\alpha}$

dem Recordar  $C_{x\alpha} = \pi_1 \cap \{ CL, I_{P_x} \}$

1. Dado  $B \subseteq C_{x\alpha}$  ent  $\forall F \in B: CLF = F$ , por demostrar que

$CL(\cap B) = \cap B$ .

[ $\subseteq$ ] Tenemos que  $\forall F: F \in B \Rightarrow \cap B \subseteq F$  de donde usando el lema F2:  $CL(\cap B) \subseteq CLF$ , con  $F \in B$ . Pero, por hipótesis

$CLF = F$  de donde  $CL(\cap B) \subseteq F \therefore CL(\cap B) \subseteq \cap \{ F: F \in B \}$

i.e.  $CL(\cap B) \subseteq \cap B \square$

[ $\supseteq$ ] Por dem:  $\cap B \subseteq CL(\cap B) \square$  Esto es por C1 aplicado al conjunto  $\cap B$ .

(52.)

2. Note que en la definición F1, el axioma C2 se convierte  
 a :  $cl UB = U \hat{cl} B$ , para  $|B| < \aleph_0$  de donde  $cl U \equiv U \hat{cl}$  sobre  $B$   
 con  $|B| < \aleph_0$ , ent  $\forall F \in B: cl F = F$  se tiene  $\hat{cl} B = B$   
 y usando la expresión de C2 antes mencionada stq  
 $cl(UB) = UB$  i.e.  $UB \in CT_{cl}$   $\square$   
 $\square$  QED

corolario  $cl B$  es el cerrado más chico que contiene a  $B$ .

dem  
 En teo  $cl T$  se probó que es la intersección de cerrados que  
 contienen al conjunto, pero por el lema F3, esta intersección es un  
 cerrado también y de hecho el más pequeño que contiene al conjunto  
 en cuestión. Es decir: dado  $B \in PX$ :

$\cap \{ \bar{P}_x B, CT_{cl} \} \subseteq CT_{cl}$ , de donde por lema F3 stq  
 $\cap \cap \{ \bar{P}_x B, CT_{cl} \} = cl B \in CT_{cl}$  para  $B$  arbitrario.  $\square$  QED.

\* corolario  $\hat{cl}(PX) = CT_{cl}$

dem.  
 La prueba fue hecha en el segundo párrafo de  $[2]$  en la demostración  
 del teo  $cl T$ .

teo CA Dado  $(X, cl) \in T-C$ , y sea  $\tau_{cl}$  asociada, ent:

1.  $\forall H: H \subseteq \tau_{cl} \Rightarrow \cup H \in \tau_{cl}$
2.  $\forall H: H \subseteq \tau_{cl} \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cap H \in \tau_{cl}$

llamamos a  $\tau_{(X, cl)}$  la topología inducida en  $(X, cl)$ .

dem  
 1. Sea  $H \subseteq \tau_{cl}$ , obtenemos ent  $\cup H \subseteq CT_{(X, cl)}$  y por el lema F3  
 stq  $\cap H \in CT_{(X, cl)}$  y usando D'Morgan obtenemos  $C \cap H \in \tau_{(X, cl)}$

$$= UCH = UH \in \mathcal{T}_{(x,u)} \square$$

2. Considerese que  $|H| < \aleph_0$  tq  $CH = C_x UH \in \mathcal{CT}$  (tesis)

para que por el lema F3,  $CH \subseteq \mathcal{CT}_{(x,u)}$  explica:  $UCH \in \mathcal{CT} \square$   
 $\square$  QED!

corolario Una reconstrucción equivalente a la dada en el teo  $\mathcal{CT}$  puede darse para  $\mathcal{CL}_T$ , considerando:  $\forall B \in \mathcal{P}X: \mathcal{CL}_T B = \{x \in X \mid \forall G \in \mathcal{N}\{\tau_{(x,u)}, \bar{P}_x\}: \cap\{G, B\} = \emptyset\}$

dem

La prueba está dada por  $\text{obs}(\mathcal{CL}) \text{ GZ}$ , por medio de la cual en una ET-A el conjunto anterior es igual al dado en teo  $\mathcal{CT}$ .

Por otro lado, el teo CA dice que  $(X, \mathcal{T}_{(x,u)})$  es una ET-A definida a partir de una  $(X, \mathcal{CL})$  ET-C.

teo  $\mathcal{CL}_\Sigma$

$x$  es un punto de clausura de  $B$  ssi toda vecindad de  $x$  intersecta a  $B$ , i.e.  $\mathcal{CL}$  puede ser reconstruida por:  $\Sigma_{(x,u)}$  mediante:  
 $\forall B \in \mathcal{P}X: \mathcal{CL}B = \mathcal{CL}_\Sigma B = \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma_{(x,u)}(x): \cap\{N, B\} \neq \emptyset\}$

dem

[ $\subseteq$ ] Sea  $x \in \mathcal{CL}B$  por demostrar  $x \in \mathcal{CL}_\Sigma B$ .

- Note  $x \in \mathcal{CL}_\Sigma B$  es equivalente a  $\forall N: N \in \Sigma_{(x,u)}(x) \Rightarrow \cap\{N, B\} \neq \emptyset$

i.e.  $\forall N: x \in C_x \mathcal{CL} C_x N \Rightarrow \cap\{N, B\} \neq \emptyset$ .

- Sea pues  $N$  tq  $x \in C_x \mathcal{CL} C_x N$  :: (1), supóngase  $\cap\{N, B\} = \emptyset$  :: (2)

- De (2)  $B \subseteq C_x N$ , pero por el lema F2:  $\mathcal{CL}B \subseteq \mathcal{CL} C_x N$

y por hipótesis  $x \in \mathcal{CL}B$  de donde  $x \in \mathcal{CL} C_x N$  ( $\downarrow$ ) [contradice a (1)]

- De esto la argumentación dada nos lleva a  $\neg(2)$  i.e.  $\cap\{N, B\} \neq \emptyset$ .  $\square$

[ $\supseteq$ ] Sea  $x \in \mathcal{CL}_\Sigma B$  ent por demostrar  $x \in \mathcal{CL}B$

- Supongamos:  $\forall N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset$  con  $x \in X, x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x N$  tq  $\cap \{N, B\} \neq \emptyset$ . Procedemos por contradicción:  
 - Sean  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x B$  (hip). ent  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x \mathcal{C}_x B$   
 i.e.  $\mathcal{C}_x B \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$  y además  $\cap \{B, \mathcal{C}_x B\} = \emptyset$  lo cual contradice las hipótesis, de donde, stq.  $x \in \mathcal{C}_x B$ .  $\square$   
 $\square QED!$

teo CV Dado  $(X, \mathcal{C}_x)$  EF-Cl y sea  $\Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)} : X \rightarrow \mathcal{P}X$  inducido, ent  $\forall x \in X$  stq

1.  $\Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \subseteq \bar{P}_x\{x\}$
  2.  $\forall N : N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \Rightarrow \bar{P}_x N \subseteq \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$
  3.  $\forall H : H \subseteq \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \wedge |H| < \chi_0 \Rightarrow \cap H \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$
  4.  $\forall N : N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \Rightarrow \exists N^* : N^* \in \cap \{\Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x), \mathcal{P}N\} \wedge N \in \cap \hat{\Sigma}_{(x, \mathcal{C}_x)}(N^*)$
- Llamamos a  $\hat{\Sigma}_{(x, \mathcal{C}_x)}$  el sistema de vecindades inducido en  $(X, \mathcal{C}_x)$ .

Nota: Debe observarse que  $\forall x \in X : \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \neq \emptyset$ , pues por Cl;  $\mathcal{C}_x \emptyset = \emptyset$   
 i.e.  $\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x X = X$  de ahí que  $X \in \cap \hat{\Sigma}_{(x, \mathcal{C}_x)}(X) \subseteq \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x), \forall x \in X$ .

dem.

1. Sea  $N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$  i.e.  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x N$  que es  $x \notin \mathcal{C}_x N$   
 - Por demostrar  $N \in \bar{P}_x\{x\}$  i.e.  $x \in N$ . Procedemos por contradicción.  
 - Supongamos  $x \notin N$  i.e.  $x \in \mathcal{C}_x N$  de donde por lema F2  $x \in \mathcal{C}_x N$  ( $\downarrow 1$ ) de donde es fácil:  $x \in N$   $\square$
2. Sea  $N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$ , por demostrar  $\forall U : N \subseteq U \Rightarrow U \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$   
 - Por def F2  $N \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x) \Leftrightarrow N \in \mathcal{C}_x \hat{\mathcal{C}}_x(\mathcal{P}_x\{x\})$  i.e.  $\mathcal{C}_x N \in \mathcal{P}_x\{x\}$   
 $\mathcal{C}_x N \subseteq \mathcal{C}_x\{x\}$  de donde:  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x N$ , que es lo mismo que hemos venido utilizando.  
 - Sea pues  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x N$  y  $N \subseteq U$  ent  $\mathcal{C}_x N \supseteq \mathcal{C}_x U$   
 de donde  $\mathcal{C}_x N \supseteq \mathcal{C}_x U$  y  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x N \subseteq \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x U$   
 nos lleva a  $x \in \mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_x U$  i.e.  $U \in \Sigma_{(x, \mathcal{C}_x)}(x)$ .  $\square$

3.  $\forall H: H \subseteq \Sigma_{(x,cl)}(x) \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cap H \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$   
 - Así,  $\forall N \in H: x \in C_x \cup C_x N \wedge |H| < \aleph_0 \therefore$   
 $x \in \cap \{C_x \cup C_x N : N \in H\} = \cap C \{C_x \cup C_x N : N \in H\} \quad (1)$   
 - Por De Morgan, (1) se convierte en  $x \in C \cup \{C_x N : N \in H\}$   
 i.e.  $x \in C_x \cup \hat{C} \{C_x N : N \in H\} = C_x \cup \hat{C} C H \quad (2)$   
 - Usando el hecho que  $|H| < \aleph_0$  stj  
 $x \in C_x \cup C(C \cup C H)$  y nuevamente por complementación stj  
 $x \in C_x \cup C_x (C \cap H)$  i.e.  $\cap H \in \Sigma_{(x,cl)}(x) \quad \square$

4. Sea  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$  i.e.  $x \in C_x \cup C_x N$  ent  
 proponemos  $N^* = C_x \cup C_x N$ .  
 - Vemos que  $N^* \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$ , dado que  
 $C_x \cup C_x [C_x \cup C_x N] = C_x \cup C_x^2 \cup C_x N = C_x \cup C_x N$ , en virtud  
 de C1 y C3, de donde  $x \in N^* \quad \odot$   
 - Vemos que  $N^* \in PN$ , pues de  $C_x N \subseteq C_x \cup C_x N$  por C1  
 obtenemos  $N^* = C_x \cup C_x N \subseteq C_x \cup C_x N = N \quad \odot$   
 - Para  $N \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,cl)}(N^*)$ , tome  $x \in N^*$  arbitrario  
 por demostrar  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$   
 Sabemos  $x \in N^*$  i.e.  $x \in C_x \cup C_x N$  que es equivalente a  
 $N \in \Sigma_{(x,cl)}(x) \quad \square \text{---} (*) \quad \square \text{ QED!}$   
 Nota:  $\Sigma_{(x,cl)}(x) = C \hat{C} (P C_x(x))$   
 (\*) ssi  $N \in \Sigma(x) \Leftrightarrow x \in C_x \cup C_x N$

teo Cl $\partial$   $x$  es un punto de clausura ssi es un punto de adherencia ó  
 es un punto del conjunto, i.e.  $Cl_x$  puede ser reconstruida por  $\partial_{(x,cl)}$   
 mediante:  $Cl_x = \partial_{(x,cl)} \cup I_x = Cl_x$ .

dem  
 Esta demostración la haremos directamente usando el  
 álgebra  $(PX^{PX}, \cup, \cap, \underline{C})$  de operadores sobre  $PX$ , i.e.

$PX$  es una estructura de Algebra de Boole, en donde operadores a  $X$ , pueden establecer la veracidad del teorema. Así;

$$\begin{aligned}
Cl_2 &= \partial_{(X,Cl)} \cup I_{PX} = (Cl - I_{PX}) \cup I_{PX} = (Cl \cap \underline{C} I_{PX}) \cup I_{PX} \\
&= (Cl \cap C_x I_x) \cup I_{PX} = (Cl \cap C_x I) \cup I_x \\
&= (Cl \cup I_{PX}) \cap (Cl \cup I_{PX}) = (Cl \cup I_{PX}) \cap \underline{\perp} = (Cl \cup I_{PX}) \\
\end{aligned}$$

donde  $\underline{\perp}(\phi) = X, \forall B \in PX$ . Ahora bien, por C1 stq

$$I_x \leq Cl \Leftrightarrow Cl \cup I_x = Cl \text{ de donde } Cl_2 = Cl \quad \square \text{ QED!}$$

teo CB Dado  $(X, Cl)$  ET-C y sea  $\partial_{(X,Cl)} : PX \rightarrow PX$  asociada, ent

1.  $\partial_{(X,Cl)} \phi = \phi \wedge \partial_{(X,Cl)} \leq C_x$ .
2.  $\forall B \forall E : \partial_{(X,Cl)} U\{B, E\} = U\{\cap\{\partial_{(X,Cl)} B, C_x E\}, \cap\{\partial_{(X,Cl)} E, C_x B\}\}$ .
3.  $\partial_{(X,Cl)}^2 \leq I_{PX}$ .

dem

$$1. \partial_{(X,Cl)} \phi = (Cl - I_{PX}) \phi = \cap\{Cl \phi, C_x \phi\} = \phi \text{ dado que}$$

por C1:  $Cl \phi = \phi \quad \square$

- Tomese  $B \in PX$  ent  $\partial_{(X,Cl)} B = \cap\{Cl B, C_x B\} \subseteq C_x B$

como  $B$  es arbitrario stq  $\partial_{(X,Cl)} \leq I_{PX}^c$  i.e.  $\partial_{(X,Cl)} \leq C_x$

$$2. \text{ Sean } B, E \in PX \text{ ent por def F2 stq: } \partial_{(X,Cl)} U\{B, E\} =$$

$$= (Cl - I_{PX}) U\{B, E\} = \cap\{Cl U\{B, E\}, C_x (U\{B, E\})\}, \text{ por C2}$$

$$= \cap\{U\{Cl B, Cl E\}, \cap\{C_x B, C_x E\}\} = U\{\cap\{Cl B, C_x B, Cl E\}, \cap\{Cl E, C_x E, Cl B\}\}$$

$$= U\{\cap\{\cap\{Cl B, C_x B\}, Cl E\}, \cap\{\cap\{Cl E, C_x E\}, Cl B\}\}$$

$$= U\{\cap\{(Cl - I_{PX}) B, Cl E\}, \cap\{(Cl - I_{PX}) E, Cl B\}\}$$

$$= U\{\cap\{\partial_{(X,Cl)} B, C_x E\}, \cap\{\partial_{(X,Cl)} E, C_x B\}\} \quad \square$$

3. Por demostrar que  $\forall B \in PX: \partial_{(x,u)}^2 B \subseteq B$ .

$$\partial_{(x,u)}^2 B = (Cl - I_{PX})^2 B = (Cl - I_{PX}) \cap \{ClB, C_x B\}$$

=  $\cap \{Cl(\cap \{ClB, C_x B\}), \cap \{ClB, C_x B\}\}$  pero esta expresi3n difiilmente nos conducira a la respuesta. (?)

Por otro lado C3 afirma que:  $Cl^2 \leq Cl$ , que usando el teo Cl2 puede expresarse asi: Dado  $X: \forall B \in PX: stq$

$$(\partial_{(x,u)} \cup I_X)^2 B \subseteq (\partial_{(x,u)} \cup I_{PX})B. \text{ Pero la primera expresi3n}$$

puede reescribirse  $(\partial_{(x,u)} \cup I_{PX}) \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}$  y usando la parte 2. de ac3:

$$= \cup \{\partial_{(x,u)} \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}, \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}\}$$

$$= \cup \{\cup \{\cap \{\partial_{(x,u)}^2 B, C_x B\}, \cap \{\partial_{(x,u)} B, C_x \partial_{(x,u)} B\}\}, \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}\}$$

$$= \cup \{\cap \{\partial_{(x,u)}^2 B, C_x B\}, \partial_{(x,u)} B, B\} \subseteq \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}$$

$$\Rightarrow \cap \{\partial_{(x,u)}^2 B, C_x B\} \subseteq \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}$$

$$\text{de esto } \cup \{B, \cap \{\partial_{(x,u)}^2 B, C_x B\}\} \subseteq \cup \{B, \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}\}$$

$$\text{i.e. } \cap \{\cup \{B, \partial_{(x,u)}^2 B\}, \cup \{C_x B, B\}\} \subseteq \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}$$

$$\text{por lo tanto } \partial_{(x,u)}^2 B \subseteq \cup \{B, \partial_{(x,u)}^2 B\} \subseteq \partial_{(x,u)} B \cup B$$

$$\text{Asi: } \partial_{(x,u)}^2 B \subseteq \cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}. \text{ Como por (1): } \partial_{(x,u)} \leq C_x$$

obtenemos  $\partial_{(x,u)}^2 B \subseteq C_x \partial_{(x,u)} B$ . Intersectando lado a lado ambos

$$\text{resultados } stq \cap \{\partial_{(x,u)}^2 B\} \subseteq \cap \{\cup \{\partial_{(x,u)} B, B\}, C_x \partial_{(x,u)} B\}$$

$$\text{i.e. } \partial_{(x,u)}^2 B \subseteq \cup \{\cap \{\partial_{(x,u)} B, C_x \partial_{(x,u)} B\}, \cap \{B, C_x \partial_{(x,u)} B\}\}$$

$$\text{Asi } \partial_{(x,u)}^2 B \subseteq \cap \{B, C_x \partial_{(x,u)} B\} \subseteq B. \square$$

Podr3n notarse que:  $\cap \{B, C_x \partial_{(x,u)} B\} = B$ , en vista de que

$$\partial B \subseteq C_x B \text{ ssi } \cap \{B, C_x \partial B\} \supseteq \cap \{B\} = B \quad \square \text{ QED!}$$

### 3.4 Otros teoremas

teorema 3.4.1  $x$  es un punto interior de  $B$  ssi  $x$  es punto exterior de  $C_x B$ .

dem

Por demostrar  $B \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$  ssi  $x \notin Cl C_x B$ .

Por def F2  $B \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$  es  $x \in C_x Cl C_x B$  de donde  $x \notin Cl C_x B$ .  $\square$

La converso es igual de obvia.  $\square$  QED!

teorema 3.4.2  $x$  es punto de borde de  $B$  ssi  $x$  es punto de adherencia de  $C_x B$ .

dem.

Por demostrar  $x \in B \wedge B \notin \Sigma_{(x,cl)}(x)$  ssi  $x \in \partial_{(x,cl)} C_x B$

Utilizando nuevamente def F2 stq lo anterior es:

$x \in B \wedge \sim [x \in C_x Cl C_x B]$  ssi  $x \in (Cl - I_{P_x}) C_x B$

i.e.  $x \in B \wedge x \notin C_x Cl C_x B$  ssi  $x \in \cap \{Cl C_x B, I_{P_x} C_x B\}$

i.e.  $x \in B \wedge x \in Cl C_x B$  ssi  $x \in Cl C_x B \wedge x \in B$

lo cual es evidente.  $\square$  QED!

teorema 3.4.3 Dado  $(x,cl)$  una ET-C stq

1.  $\tau_{(x,cl)} = \{G \in PX \mid G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,cl)}(G)\}$

2.  $\tau_{(x,cl)} = C \hat{\partial}^{-1}(\{\emptyset\})$

dem.

© 1. [ $\subseteq$ ] Sea  $G \in \tau_{(x,cl)}$  i.e.  $G \in C \pi_1 \cap \{Cl, I_{P_x}\}$  por  $\tau_{(x,cl)}$  def F2 (1),

por demostrar  $\forall x: x \in G \Rightarrow G \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$

Asi pues sea  $G$  tq  $Cl C_x G = C_x G$ , con  $x \in G$  ( $C_x G$  es cerrado)

Pero esto significa que:  $x \in G = C_x \text{Cl} C_x G$   
 $G \in \Sigma_{(x,cl)}(x), \forall x \in G$  ssi  $G \in \cap \{U \in PX \mid U \in \Sigma(x), \forall x \in U\}$   
 i.e.  $\cap \hat{\Sigma}_{(x,cl)}(x) \square$

[ $\Rightarrow$ ] Dada  $G \in \cap \hat{\Sigma}_{(x,cl)}(G)$ , por demostrar  $G \in \tau_{(x,cl)}$   
 $\forall x: x \in G \Rightarrow G \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$  i.e.  $\forall x \in G: x \in C_x \text{Cl} C_x G$   
 de donde obtenemos:  $\{x\} \subseteq C_x \text{Cl} C_x G \therefore U\{x: x \in G\} = G \subseteq C_x \text{Cl} C_x G$   
 $C_x G \supseteq \text{Cl} C_x G \therefore (1)$   
 Por CI stq  $\text{Cl} C_x G \supseteq C_x G \therefore (2)$   
 De (1) y (2) obtenemos:  $\text{Cl} C_x G = C_x G$  i.e.  $C_x G \in \pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\}$   
 $\therefore G \in C \pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\} = \tau_{(x,cl)} \square$   $\square$  QED!

o 2. Por demostrar:  $C \tau_{(x,cl)} = \hat{\partial}_{(x,cl)}^{-1}(\{\emptyset\})$

[ $\subseteq$ ] Sea  $F \in C \tau_{(x,cl)}$  i.e.  $Cl F = F$  de donde se puede  
 obtener que  $\partial_{(x,cl)} F = (Cl - I_{PX}) F = \cap \{Cl F, F^c\} = \cap \{F, C_x F\} = \emptyset \square$   
 [ $\supseteq$ ] Dado  $F$  tq  $\partial_{(x,cl)} F = \emptyset$  de donde por el teo Cl  $\partial$  stq  
 $Cl F = (\partial_{(x,cl)} \cup I_{PX}) F = U \{\partial_{(x,cl)} F, F\} = U \{\emptyset, F\} = F$   
 y por lo tanto  $(F, F) \in \cap \{Cl, I_{PX}\}$  i.e.  $F \in \pi_1 \cap \{Cl, I_{PX}\} = C \tau_{(x,cl)}$   
 $\square$  QED!

teorema 3.44 Dado  $(x,cl)$  una ET-C ent stq  $\forall x \in X$ :

1.  $\Sigma_{(x,cl)}(x) = \{N \in PX \mid \exists G \in \cap \{\tau_{(x,cl)}, PN, \bar{P}_x\{x\}\}\}$
2.  $\Sigma_{(x,cl)}(x) = C(\partial_{(x,cl)} \cup I_{PX})^{\hat{}} P C_x \{x\}$

dem.

1. Dado  $x \in X$ , por demostrar  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$  ssi  $\exists G \in \cap \{\tau_{(x,cl)}, PN, \bar{P}_x\{x\}\}$

[ $\subseteq$ ] Sea  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(x)$ , proponemos  $G = C_x \text{Cl} C_x N$ .

- En efecto, por hipótesis  $x \in C_x \text{Cl} C_x N = G$  i.e.  $\{x\} \subseteq G$   
 de donde tenemos  $G \in \bar{P}_x\{x\} \circ$

- Por otro lado  $\text{Cl} C_x N \supseteq C_x N$  de donde  $C_x \text{Cl} C_x N \subseteq C_x C_x N = N$   
 i.e.  $G \in PN \circ$

[2] Por demostrar:  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{G} \cap \{\tau, pX, pN, \bar{p}_x\{x\}\}$  (59)  
 Para esto, nótese que  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) = \text{cl}(\text{cl}^*(pC_x\{x\}))$  ssi  $x \in C_x \text{cl} C_x N$ .  
 de donde bastará tomar  $G = C_x \text{cl} C_x N \ni x$   $\square$

2. Supongase ahora que dado  $x \in X, N \in X$  tales que:

-  $G \in \mathcal{G} \cap \{\tau_{(x,cl)}, pN, \bar{p}_x\{x\}\}$ , por demostrar  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(X)$

- Primero note que  $x \in G$  y  $\text{cl} C_x G = C_x G$  dado que  $G \in \tau_{(x,cl)}$   
 de donde  $G \in \Sigma_{(x,cl)}(X)$ : (1) [Hecho obtenido (4), por el teo 3.4.3]

- Por otro lado,  $G \in pN$  i.e.  $G \subseteq N$ : (2)

- Ahora usando (1) y (2) y el teo CVZ. obtenemos  $N \in \Sigma_{(x,cl)}(X)$   $\square$

$\square$  QED!

teorema 3.4.5 Dado  $(X, cl)$  una ET-C ent

1.  $\forall B \in pX: \partial_{(x,cl)} B = C_x \cup \{B, \cup \{pC_x B, \tau_{(x,cl)}\}\}$

2.  $\forall B \in pX: \partial_{(x,cl)} B = \{x \in C_x B : \forall N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}$

dem

1. Primero note que:  $C_x \cup \{B, \cup \{pC_x B, \tau_{(x,cl)}\}\}$  es, por

complementos:  $\cap \{C_x B, \cap \{pC_x B, \tau_{(x,cl)}\}\}$ , usando D'Morgan,

$$= \cap \{C_x B, \cap \{C_x pC_x B, C_x \tau_{(x,cl)}\}\} = \cap \{C_x B, \cap \{\bar{p}_x B, C_x \tau_{(x,cl)}\}\}$$

$$= \cap \{C_x B, C_x \bar{p}_x B\} = (C_x - I_x) B, \text{ pero por teo clT } \forall B: C_x \bar{p}_x B = C_x B$$

$$\text{Así pues, } C_x \cup \{B, \cup \{pC_x B, \tau_{(x,cl)}\}\} = (C_x - I_x) B \stackrel{\text{df F2}}{=} \partial_{(x,cl)} B \quad \square$$

2. De manera similar a (1), note que por teo clΣ sby  $\forall B \in pX:$

$$C_x B = C_x \Sigma B = \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) : \cap \{N, B\} = \emptyset\}$$

$$\text{Por lo tanto: } \partial_{(x,cl)} B = (C_x - I_{pX}) B = \cap \{C_x B, C_x B\}$$

$$= \cap \{C_x B, C_x B\} = \cap \{C_x B, \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}\}$$

$$= \{x \in C_x B \mid \forall N \in \Sigma_{(x,cl)}(X) : \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}. \text{ Así } \cap \{C_x B, C_x B\} = \partial B. \quad \square$$

$\square$  QED!

### o 3.5 Derivador

60

def F5 Dado  $X$  un conjunto,  $d$  es un operador de derivados (ó derivador) sobre  $X$  ssi:

D0.  $d \in \mathcal{P}X^{PX}$ .

D1.  $d\emptyset = \emptyset$ .

D2.  $\forall A \forall B : dU\{A, B\} = U \hat{d}\{A, B\}$ .

D3.  $d^2 \leq I_{PX} \circ d$ .

D4.  $\forall x \forall B : x \in dB \Rightarrow x \in d \cap \{B, C_x\{x\}\}$ .  $[B_x = B \setminus \{x\} : x \in dB \Rightarrow x \in B_x]$

Nota: El extraño axioma D4 no es requerido para construir con  $d$  un espacio topológico, sino que, para que este espacio construido nos lleve a  $d$  nuevamente.

def F6  $(X, d)$  es una estructura D-topológica ssi  $d$  es un derivador sobre  $X$ .

Además definimos  $Cl_d = I_{PX} \circ d$ . Abreviamos con  $(X, d)$  una ET-D.

def F7 Dada  $(X, \tau)$  ET-A ent definimos:  $\forall B \in PX$ :

$$d_\tau B = \{x \in X \mid x \text{ es } A\text{-punto límite de } B \text{ en } (X, \tau)\}$$

donde utilizamos la def G4.

Nota: es frecuente utilizar para  $d_\tau B$  la notación  $B'$  [que evoca la notación empleada para la derivada de una función  $f : f'$ ].

teo AD Dado  $(X, \tau)$  ETA y sea  $d_\tau : PX \rightarrow PX$  asociado, definido según def F7, ent  $(X, d_\tau)$  es ET-D.

dem.

Recordemos:  $x \in d_\tau B$  ssi  $x$  es A-punto límite de  $B$ , i.e.

$$\forall G : G \in \tau \setminus \{x\} \Rightarrow \cap \{G, B, C_x\{x\}\} \neq \emptyset$$

Que  $d_\tau \in PX^{PX}$  es por definición de  $d_\tau$  (en vista  $x \in d_\tau B$  con  $B \in X$ ).

1.  $d_\tau \emptyset = \emptyset$  Sea  $x \in d_\tau \emptyset$  ent  $\forall G \in \tau \setminus \{x\}$  stq

$$\cap \{G, \emptyset, C_x\{x\}\} \neq \emptyset \text{ pero } \cap \{G, \emptyset, C_x\{x\}\} = \emptyset \quad (\uparrow) \text{ i.e. } d_\tau \emptyset = \emptyset$$

Vacuidad:  $x \in d_\tau \emptyset$  ssi  $x$  es A-punto (límite de  $\emptyset$  [ $d(x)$ ] con:  
 $\sim d(x) :: \sim [\forall N \in \tau, \cap \{N, \emptyset, C_x\} \neq \emptyset] :: \exists N = \emptyset \in \tau : \forall x \in N \Rightarrow \cap \{ \underset{N}{\emptyset}, \underset{B}{\emptyset}, C_x\} = \emptyset$   
 a  $\forall x : \sim d(x)$  i.e.  $d_\tau \emptyset = \emptyset$ .  $\square$

2. Para probar esto, probamos que:  $A \subseteq B \Rightarrow d_\tau A \subseteq d_\tau B$ .

[ $\Rightarrow$ ] Sean  $A \subseteq B$  y  $x \in d_\tau A$  i.e.  $\forall G : x \in G \in \tau \Rightarrow \cap \{G, A, C_x\} \neq \emptyset$   
 pero entonces:  $\cap \{G, B, C_x\} \neq \emptyset$  [De lo contrario tendríamos una  
 contradicción], con lo que  $x \in d_\tau B$ . Así,  $d_\tau A \subseteq d_\tau B$ . ( $\checkmark$ )  
 - De lo anterior, dados  $A, B$  arbitrarios, como  $A \subseteq U\{A, B\}$   
 stq  $d_\tau A \subseteq d_\tau U\{A, B\} \wedge d_\tau B \subseteq d_\tau U\{A, B\}$ , con lo que stq.  
 $U d_\tau \{A, B\} \subseteq d_\tau U\{A, B\}$ .

[ $\Leftarrow$ ] - Para la converso, probamos:  $C_x \cup \{d_\tau A, d_\tau B\} \subseteq C_x \hat{d}_\tau U\{A, B\}$   
 - Sea  $x \notin U\{d_\tau A, d_\tau B\}$  ent  $x \in C_x d_\tau A \wedge x \in C_x d_\tau B$ ,  
 de donde  $\exists \{G, H\} \subseteq \cap \{\tau, \bar{P}_x\} \ni \cap \{G, A, C_x\} = \cap \{H, B, C_x\} = \emptyset$   
 ent dado  $G^* = \cap \{G, H\} \in \cap \{PG, PH\}$  tenemos:

$$\cap \{G^*, A, C_x\} = \cap \{G^*, B, C_x\} = \cap \{G^*, U\{A, B\}, C_x\} = \emptyset \circ$$

Por A2:  $G^* \in \tau$ , además de  $G^* \ni \{x\}$  obtenemos que:

$$\exists G^* \in \cap \{\tau, \bar{P}_x\} \ni \cap \{G^*, U\{A, B\}, C_x\} = \emptyset \text{ i.e.}$$

$$x \in C_x \hat{d}_\tau U\{A, B\} \square.$$

3. Probamos en el teo. 2.4.3 que  $Cl_{(x, \tau)} B = U\{d_\tau B, B\}$

así como con el número 3 parte del teo AC tenemos que

$$Cl_{(x, \tau)}^2 = Cl_{(x, \tau)}$$

De esto, considérese  $B \subseteq X$  cualquiera,

$$\text{ent } Cl_{(x, \tau)}^2 B = Cl_{(x, \tau)} [Cl_{(x, \tau)} B] = (I_{P_x} \cup d_\tau) [(I_{P_x} \cup d_\tau) B]$$

$$= (I_{P_x} \cup d_\tau) (B \cup d_\tau B) = (B \cup d_\tau B) \cup d_\tau (B \cup d_\tau B).$$

Ahora, esto da la parte 3 de este teorema: stq

$$Cl_{(x,\tau)}^2 B = U \{ U \{ B, d_\tau B \}, U \{ d_\tau B, d_\tau^2 B \} \} = Cl_{(x,\tau)} B$$

$$\text{i.e. } U \{ B, d_\tau B, d_\tau^2 B \} = U \{ U \{ B, d_\tau B \}, d_\tau^2 B \} = U \{ B, d_\tau B \}$$

$$\therefore d_\tau^2 B \subseteq U \{ B, d_\tau B \} \text{ i.e. } d_\tau^2 \leq I_{PX} \cup d_\tau \quad \square$$

4. Esto es una consecuencia inmediata de la definici3n de punto l3mite en  $(X, \tau)$ . Veamos, sea  $x \in X$  arbitrario.

Sea  $x \in d_\tau B$  i.e.  $\forall G \in \mathcal{N} \{ \tau, \bar{p}_x \{ \tau \} \}; G \cap \{ B, C_x \{ \tau \} \} \neq \emptyset$ ,

de donde:  $\forall G \in \mathcal{N} \{ \tau, \bar{p}_x \{ \tau \} \}; G \cap \{ B, C_x \{ \tau \} \} \neq \emptyset$

i.e.  $x \in d_\tau \{ B, C_x \{ \tau \} \} \quad \square \quad \square \text{ QED!}$

teo DC Dado  $(X, d)$  ET-D y sea  $Cl_d: PX \rightarrow PX$  asociado, definido seg3n def F6 ent  $(X, Cl_d)$  es ET-C.

dem.

1. - Primero, por c3mputo directo:  $Cl_d \emptyset = (I_{PX} \cup d) \emptyset = U \{ I_{PX} \emptyset, d \emptyset \} = d \emptyset = \emptyset$  en vista de D1.

- Por otro lado:  $I \leq Cl_d$  ssi  $I_{PX} \cup Cl_d = Cl_d$ . Pero por definici3n

(def F6) stq  $I_{PX} \cup Cl_d = I_{PX} \cup (I_{PX} \cup d) = (I_{PX} \cup I_{PX}) \cup d = I_{PX} \cup d = Cl_d \quad \square$

2. Para probar que se verifica C2, usamos D2:  $\forall B \forall E:$

$$Cl_d U \{ B, E \} = (I_{PX} \cup d) U \{ B, E \} = U \{ I_{PX} U \{ B, E \}, \hat{d} U \{ B, E \} \}$$

$$= U \{ U \{ B, E \}, U \{ dB, dE \} \} = U \{ B, E, dB, dE \}$$

$$= U \{ U \{ B, dB \}, U \{ E, dE \} \} = U \{ (I_{PX} \cup d) B, (I_{PX} \cup d) E \}$$

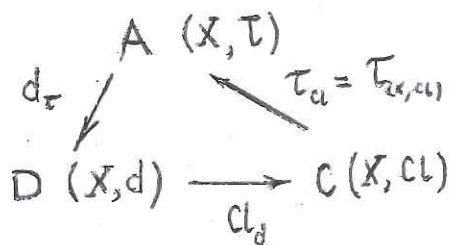
$$= U \{ Cl_d B, Cl_d E \} = U \hat{Cl}_d \{ B, E \}. \quad \square$$

3. Por demostrar:  $Cl_d^2 \leq Cl_d$ . Basta probar:  $Cl_d^2 = Cl_d$ .

Usando álgebra de operadores booleanos (sobre el retículo en  $PX$ ) stg:

$$\begin{aligned}
 Cl_d^2 &= Cl_d(I_{PX} \cup d) = (I_{PX} \cup d)(I_{PX} \cup d), \text{ y por asociación: } (63) \\
 &= I_{PX}(I_{PX} \cup d) \cup d(I_{PX} \cup d) = I_{PX}^2 \cup I_{PX} \cup d \cup d^2 \\
 &= I_{PX} \cup d \cup d^2, \text{ pero por D3: } d^2 \leq I_{PX} \cup d \\
 \text{i.e. } (I_{PX} \cup d) \cup d^2 &= I_{PX} \cup d = Cl_d. \quad \square \\
 &\quad \square QED!
 \end{aligned}$$

Observación: Es de hacer notar que los teoremas anteriores teo AD, teo DC unidos al teo CA expuesto anteriormente construyen una triple estructura conectada por ciertas transformaciones y que tratamos de mostrar mediante la siguiente figura:



Ahora bien, los teoremas antes mencionados sólo nos permiten ir de un vértice a otro, pero no nos garantizan que tal triángulo se "cierre", i.e. que partiendo de cualquier lado, retornemos a la misma estructura. A continuación las pruebas. (Note que sólo 3 permutaciones pares de ADC son posibles).

teo TdCl Dado  $(X, \tau_0) \in \mathcal{E}T\text{-}A$  ent escribiendo:  $d\langle \tau \rangle = d_\tau$ ,  $cl\langle d \rangle = Cl_d$  y  $\tau\langle cl \rangle = \tau_{cl} = \tau_{(x, cl)}$  para la figura de la observación anterior, stg  $\tau\langle cl\langle d\langle \tau_0 \rangle \rangle \rangle = \tau_0$ .

.dem

En el teo TCl se demostró que  $\tau\langle cl\langle \tau_0 \rangle \rangle = \tau_0$ , de donde basta probar que  $cl\langle d\langle \tau_0 \rangle \rangle = cl\langle \tau_0 \rangle$ . i.e. que el

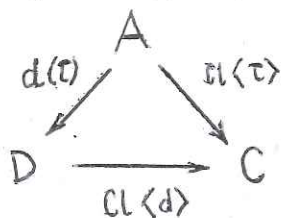


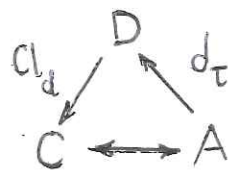
diagrama adjunto permuta, así:  
 Por demostrar que  $\forall B \in PX$   
 $cl\langle d\langle \tau_0 \rangle \rangle(B) = Cl_{(x, \tau)} B$

Por definición de punta de acumulación en la  $A$ -estructura  $(X, \tau_0)$  (4),  
 se tiene que un punto de clausura, deberá ser punto límite si  $x \notin A$ ,  
 $\therefore$  deseado resultado.  $\square$  QED!

teo dCLT Dada  $(X, d_0)$  ET-D ent  $d\langle \tau\langle CL\langle d_0 \rangle \rangle \rangle = d_0$

dem

Para empezar, nótese que  
 emplearemos la equivalencia total  
 y en vista del teo AC, teo CA y



teo TCL y teo CLT, entre  $(X, \tau)$  y  $(X, CL)$ . Así pues,

por demostrar  $d_\tau = d_0$  con  $\tau = \tau_{(X, CL)}$  y  $CL = Iud_0$ .

[ $\subseteq$ ] Por demostrar  $\forall B \in PX: d_\tau B \subseteq d_0 B$ .

- Sea  $B \subseteq X$ , considérese  $A = \bigcap \{B, C_x\{x\}\}$ . Así stq con  $d_\tau B = B'$ :

$\forall x: x \in B' \Rightarrow x \in A'$  pero  $x \notin A$ .  $\therefore$  (1) [Por teo AD 4.]

- Nótese que  $U\{A, dA\}$  es  $A$ -cerrado desde que es

$C$ -cerrado por ser  $U\{A, dA\} = CL_d A = CL_d(CL_d A)$ , i.e.  $(Iud)A \in CT_d$   $\therefore$  (2)

$\odot$  Por demostrar  $x \in B$  nos lleva a  $x \in U\{A, dA\}$ .

- Sea  $G = C_x U\{A, dA\}$  ent por (2)  $G \in \tau$

y  $G = \bigcap \{C_x A, C_x dA\}$  así  $\bigcap \{G, A\} \subseteq \bigcap \{C_x A, A\} = \emptyset \therefore$  (3)

- Ahora bien, supongamos  $x \in G \therefore$  (4) ent  $G \in \bigcap \{\tau, \bar{P}\{x\}\}$

con  $\bigcap \{G, A, C_x\{x\}\} = \emptyset$  ( $\uparrow$  1) por  $x \notin A'$  (Así se establece 4.)

- De lo anterior, anotando (1), (2) y (3), podemos usar (4): stq.

$x \notin G$  así  $x \in C_x G = U\{A, dA\} \therefore$  (5)

- De (1) y (3):  $x \in \bigcap \{C_x A, U\{A, dA\}\} = \bigcap \{dA, C_x A\} \subseteq dA$

• En virtud del axioma D4

Se ha establecido esto:  $\forall B: x \in B' \Rightarrow x \in d \cap \{B, C_x\{x\}\} \quad \text{:: (6)}$  65.

- Ahora bien, usando D2 stq  $\forall E, H: H \subseteq E \Rightarrow dH \subseteq dE$   
 pues  $H \subseteq E \Leftrightarrow U\{H, E\} = E \Rightarrow U\{dH, dE\} = dE$  i.e.  $dH \subseteq dE$

- Tenemos, usando lo anterior, que dado:  $\cap\{B, C_x\{x\}\} \subseteq B$   
 stq  $x \in d \cap \{B, C_x\{x\}\} \Rightarrow x \in dB \quad \text{:: (7)}$

- Reuniendo (6) y (7) obtenemos lo deseado.  $\square$

[2] Por demostrar  $\forall B \in PX: C_x d_{\tau} B \subseteq C_x d_0 B$

- Sea  $x \notin B' = d_{\tau} B$  i.e.  $\exists G \in \cap\{\tau, \bar{P}_x\{x\}\}$ ,

$\cap\{G, B, C_x\{x\}\} = \emptyset$  i.e.  $\cap\{B, C_x\{x\}\} \subseteq C_x G \quad \text{:: (1)}$

- Sea  $C_x G = F$  ent  $G \in \tau \Rightarrow F \in C\tau$ , así

$Cl_{(x, \tau)} F = Cl_d F = (I_{PX} U d) F = F = U\{F, dF\} \quad \text{:: (2)}$

- Reuniendo (1) y (2) obtenemos:

$\cap\{B, C_x\{x\}\} \subseteq U\{F, dF\}$  de donde, usando el hecho que  
 $d$  preserva  $\subseteq$ , y a D2 stq:  $d \cap\{B, C_x\{x\}\} \subseteq dU\{F, dF\}$   
 así:  $d \cap\{B, C_x\{x\}\} \subseteq U\{dF, d^2 F\} \subseteq U\{F, dF\} = F \quad \text{:: (3)}$

- Ahora bien, en el inicio tomamos  $x \in G = C_x F$ ,

reescribiendo (3) stq:  $C_x F \subseteq C_x d \cap\{B, C_x\{x\}\} \wedge x \in C_x F$

de donde  $x \in C_x d \cap\{B, C_x\{x\}\} \quad \text{:: (4)}$

- Usando D4 (es la primera vez que se usa) en (4)

dado que  $x \in dB' \Rightarrow x \in d \cap\{B, C_x\{x\}\}$  ent

$x \in C_x d \cap\{B, C_x\{x\}\} \Rightarrow x \in dB \quad \square \quad \square$  QED!

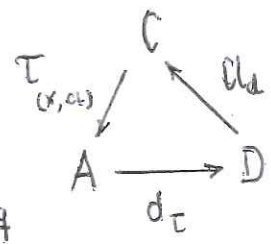
teo  $Cl\tau d$

Dado  $(X, Cl)$  ET-C ent  $Cl\langle d\langle \tau\langle Cl \cdot \rangle \rangle \rangle = Cl$

dem

Sea  $(X, \tau_{(X, \tau)})$  la ET-A inducida (cond. asociada) y la  $(X, \mathcal{C}_0)$  dada, de forma que  $d_{\tau} B = B'$ ; pero, por el teo 2.4.3, stq:

$$CLB = \mathcal{C}_{(X, \tau)} B = U\{B, B'\}$$



Ahora bien, por el teo CLT tq

$$CL\langle \tau \langle \mathcal{C}_0 \rangle \rangle = \mathcal{C}_0, \text{ así: } \mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{(X, \tau)}, \text{ de donde concluimos}$$

$$\text{que: } \mathcal{C}_0 = I_{PX} \cup d \text{ i.e. } CL\langle d \langle \tau \langle \mathcal{C}_0 \rangle \rangle \rangle = \mathcal{C}_0. \square \text{ QED!}$$

Nota: Una prueba alternativa puede darse para el teo CLTd usando el teo CA para después, por medio del teo TdCl ya mostrado, y el teo AC, cerrar el ciclo punteado.

def F8 Dado  $(X, \tau)$  ET-A ent  $\forall B \in PX$ :

$$\hat{d}_{\tau} B = \{x \in X \mid x \text{ es un A-punto límite } \omega \text{ de } B \text{ en } (X, \tau)\}$$

$$\tilde{d}_{\tau} B = \{x \in X \mid x \text{ es un A-punto condensación de } B \text{ en } (X, \tau)\}$$

Aquí:  $x$  es un A-punto límite  $\omega$  de  $B$  en  $(X, \tau)$  ssi

$$\forall G: G \in \mathcal{N}\{\tau, \bar{P}_x\{x\}\} \Rightarrow |\cap\{G, B\}| = \aleph_0$$

$x$  es un A-punto condensación de  $B$  en  $(X, \tau)$  ssi

$$\forall G: G \in \mathcal{N}\{\tau, \bar{P}_x\{x\}\} \Rightarrow |\cap\{G, B\}| > \aleph_0$$

Además definimos:

$$\hat{C}_{(X, \tau)} B =_{df} U\{B, \hat{d}_{(X, \tau)} B\} \quad \tilde{C}_{(X, \tau)} B =_{df} U\{B, \tilde{d}_{(X, \tau)} B\}$$

postulado 3.5.1 Dada  $(X, \tau)$  ET-A ent  $(X, \hat{C}_{(X, \tau)})$  y  $(X, \tilde{C}_{(X, \tau)})$  son ET-C y dado  $\hat{\tau} = \tau_{\hat{C}} = \tau \langle \hat{C} \langle \tau \rangle \rangle$  así como  $\tilde{\tau} = \tau_{\tilde{C}} = \tau \langle \tilde{C} \langle \tau \rangle \rangle$

$$\text{stq } \tau \subseteq \hat{\tau} \subseteq \tilde{\tau}.$$

Nota: Es importante observar que una estructura topológica puede generarse de múltiples formas, y no sólo las equivalentes a los aquí presentados, que

permiten establecer una estructura espacial. Todas las estructuras -CL- (67.)  
 estándar, generalmente cumplen con:  $\tau \langle \text{Cl}(\langle \tau_0 \rangle) \rangle \supseteq \tau_0$  y el caso del operador  
 de cerradura sobre  $X$  con una leve, pero bastante importante modificación  
 a la establecida en el teorema 2.4.3. Así pues no sólo importan los  
 juegos de axiomas  $A, B, C, D, V$  u otros, sino también sus interconexiones.

Observación: Puede probarse que según def F3 dada  $(X, \tau)$  ent todos def.

$$X_w = \{H \in PX \mid |H| = \aleph_0\}, \quad X_\infty = \{H \in PX \mid |H| > \aleph_0\}, \quad X_0 = \{H \in PX \mid |H| < \aleph_0\}$$

stq  $X_0 \subseteq \hat{C}\hat{\tau}$ ,  $X_w \subseteq \hat{C}\tilde{\tau}$ . Decimos que  $\tilde{\tau}$  es  $\tau_1$ . Además, dado  $G \in \tilde{\tau}$

$\forall H: [H \in X_0 \Rightarrow \cap \{G, G, H\} \in \hat{\tau}] \wedge [H \in X_w \Rightarrow \cap \{G, G, H\} \in \tilde{\tau}]$ . Es interesante  
 cuando todos los conjuntos en  $\hat{\tau}$ ,  $\tilde{\tau}$  son obtenidos de esta manera.

# CAPÍTULO 4

ESTRUCTURAS TOPOLÓGICAS INTRODUCIDAS

MEDIANTE SISTEMAS DE VECINDADES .

#### 4.1 INTRODUCCIÓN

El apareamiento del concepto de vecindad es capital en la historia de la Topología. Éste permitió construir sobre un basamento intuitivo un edificio de abstracciones que ayudó a establecer lo que ahora conocemos como espacios topológicos.

Hilbert (1903, "Über die Grundlagen der Geometrie") y Weyl (1913, "Die Idee der Riemannschen Fläche") usaron sistemas de vecindades para definir superficies, a las que siguieron Hausdorff (1914) y Root (1914, "Iterated limits in general analysis") para definir espacios más generales en términos de vecindades. Gran avance fue hecho por Tietze (1923, "Beiträge Zur allgemeinen Topologie I") quien fue el primero en extender el uso del sistema completo de vecindades, aunque hay indicaciones de ello en Riesz (1906), Root (1914) y el mismo Tietze (1919, "Über stetige Kurven Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven") pero usando el concepto solo para facilitar el manejo de conexidad local.

En la última sección se habla sobre el operador de derivados más general, al que llamamos diferencial, para distinguirlo del utilizado en 3.5. Este está en estrecha relación con los  $V$ -espacios de Fréchet (1918) que contienen a todas las estructuras topológicas y que se obtienen de no restringir en nada al sistema de vecindades. Es quizá el concepto de punto límite el más viejo en Topología y para precisarlo necesito la noción de vecindad. Los  $V$ -espacios violan muchos resultados que se dan en las estructuras topológicas, entre ellos: que las vecindades contienen abiertos, que un conjunto abierto contiene una vecindad para cada uno de sus puntos, que la unión de derivados es el derivado de la unión. Sin embargo muchos resultados sorprendentes para tal generalidad pueden obtenerse en  $V$ -espacios, para ello ver por ejemplo Sierpinski

(1952, "Introduction to General Topology"; Toronto).

Para finalizar, es quizá el conjunto de axiomas V el más difícil de escoger en vista de las muchas modalidades (ver para ello 4.5) que pueden utilizarse, y de lo vago de la noción de vecindad demasiado voluble para considerarse un punto de partida sobradamente sólido. Por otro lado debe notarse que de las axiomáticas propuestas, esta es la menos simple. Parece ser que la utilidad de la vecindad, además de histórica, está en los resultados y tratamientos locales, como también para poder hablar de espacios más generales con nociones de puntos límites menos específicas. Los resultados aquí propuestos y la axiomática (con excepción de 4.6) fueron establecidos por Bourbaki en 1940.

## 4.2 Estructuras Topológicas $(X, \Sigma)$

def N1 Dado  $X$  un conjunto,  $\Sigma$  es un sistema de vecindades en  $X$  ssi

$$V0. \Sigma \in \mathcal{P}\mathcal{P}X^x \text{ y } \forall x \in X \text{ stq}$$

$$V1. \Sigma(x) \subseteq \overline{\mathcal{P}}_x[x].$$

$$V2. \forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}_x N \subseteq \Sigma(x).$$

$$V3. \forall H: H \subseteq \Sigma(x) \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \bigcap H \in \Sigma(x).$$

$$V4. \forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \exists N^* \in \bigcap \{\Sigma(x), \mathcal{P}N\}, N \in \bigcap \hat{\Sigma}(N^*).$$

def N2  $(X, \Sigma)$  es una estructura  $V$ -topológica ssi  $\Sigma$  es un sistema de vecindades en  $X$ . Además definimos:

$$\cdot 1 \quad \tau_{(X, \Sigma)} =_{df} \{G \in \mathcal{P}X \mid G \in \bigcap \hat{\Sigma}(G)\}$$

$$\cdot 2 \quad \forall B \in \mathcal{P}X: \text{Cl}_{(X, \Sigma)} B =_{df} \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma(x): \bigcap \{N, B\} \neq \emptyset\}$$

$$\cdot 3 \quad \forall B \in \mathcal{P}X: \partial_{(X, \Sigma)} B =_{df} \{x \in X \mid \forall N \in \Sigma(x): \bigcap \{N, B\} \neq \emptyset\}$$

Observación Podemos considerar una variante en la def N2 dando otra expresión para  $\tau_{(X, \Sigma)}$ . Demostramos a continuación la equivalencia entre ambas modalidades,

asumiendo para  $(X, \Sigma)$  una ET-V.

obs (E) N2 Dado  $(X, \Sigma)$  una ET-V ent  $\tau_{(X, \Sigma)} = \{G \in \mathcal{P}X \mid \forall x \in G \exists N \in \bigcap \{\Sigma(x), \mathcal{P}G\}\}$

← dem ①

def N3 Dada  $(X, \Sigma)$  una ET-V ent<sup>o</sup> definimos:

–  $G$  es  $V$ -abierto en  $(X, \Sigma)$  ssi  $G \in \tau_{(X, \Sigma)}$ .

–  $x$  es  $V$ -punto de clausura de  $B$  en  $(X, \Sigma)$  ssi  $x \in \text{Cl}_{(X, \Sigma)} B$ .

–  $N$  es  $V$ -vecindad de  $x$  en  $(X, \Sigma)$  ssi  $N \in \Sigma(x)$ .

–  $x$  es  $V$ -punto de adherencia de  $B$  en  $(X, \Sigma)$  ssi  $x \in \partial_{(X, \Sigma)} B$ .

Nota: En el resto del capítulo suponemos a  $(X, \Sigma)$  una ET-V y omitimos la frase "en  $(X, \Sigma)$ ", salvo cuando sea necesario ó útil especificar. (71.)

- def N4
- $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto interior de  $B$  ssi  $B \in \Sigma(x)$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto libre de  $B$  ssi  $B \notin \Sigma(x)$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto de borde de  $B$  ssi  $x \in B \wedge x$  es V-punto libre de  $B$ .
  - $\dot{\vdash}$   $F$  es V-cerrado ssi  $F \in \text{CT}_{(X, \Sigma)}$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto exterior de  $B$  ssi  $x \in C_x \text{Cl}_{(X, \Sigma)} B$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto frontera de  $B$  ssi  $x \in \partial_{(X, \Sigma)} B \vee x \in \partial_{(X, \Sigma)} C_x B$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto límite de  $B$  ssi  $\forall N \in \Sigma(x) : \cap \{N, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$ .
  - $\dot{\vdash}$   $x$  es V-punto aislado de  $B$  ssi  $x \in B \wedge x$  no es punto límite de  $B$ .

Nota: Omitiremos de ahora en adelante el prefijo V para los conceptos antes definidos, necesario si somos rigurosos puesto que están basados, en última instancia, en una ET-V

• Observación: Con la definición anterior de punto límite podemos considerar  $\mathcal{D}_\Sigma$ , el derivador en una ET-V. Podríamos probar, análogamente a como se hizo en 3.5, un ciclo de teoremas VDC (realmente sólo faltaría el teo VD) y un retorno  $\Sigma \text{dCl}$ . Nos conformamos demostrando la equivalencia entre la definición de punto límite dada en def G4 con la dada anteriormente. Así, cerramos el ciclo VADC que nos lleva a VDC dada la simetría en VA.

obs (d) N4 - ① En una ET-A  $(X, \mathcal{T})$  stq  $x$  es A-punto límite de  $B$  en  $(X, \mathcal{T})$   
ssi  $\forall N \in \Sigma_{(X, \mathcal{T})}(x) : \cap \{N, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$ .

- ② En una ET-V  $(X, \Sigma)$  stq  $x$  es un V-punto límite de  $B$  en  $(X, \Sigma)$   
ssi  $\forall G \in \cap \{\mathcal{T}_{(X, \Sigma)}, \bar{P} \{x\}\} : \cap \{G, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$ .

← dem ②

### • 4.3 Teoremas Básicos

lema N1  $\forall x : x \in X \Rightarrow \Sigma(x) \neq \emptyset$ . ← dem. ③

teo  $\Sigma\tau$  Para cada vecindad de  $x$  existe un abierto que contiene a  $x$  y contenida en la vecindad i.e.  $\Sigma$  puede ser reconstruida por  $\tau_{(x,\Sigma)}$  mediante:  $\forall x \in X: \Sigma(x) = \{N \in \mathcal{P}X \mid \exists G \in \tau \cap \{\tau, P, N, \bar{P}\}\}$

← dem ④

teo VA Dado  $(X, \Sigma)$  ET-V, y sea  $\tau_{(x,\Sigma)}$  la familia de abiertos asociada, ent

$$1. \forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \tau_{(x,\Sigma)} \Rightarrow \cup \mathcal{H} \in \tau_{(x,\Sigma)}$$

$$2. \forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \tau_{(x,\Sigma)} \wedge |\mathcal{H}| < \aleph_0 \Rightarrow \cap \mathcal{H} \in \tau_{(x,\Sigma)}$$

← dem ⑤

teo  $\Sigma cl$   $x$  es un punto interior de  $B$  ssi no es punto exterior de  $C_x B$  i.e.  $\Sigma$  puede ser reconstruida por  $cl_{(x,\Sigma)}$  mediante:

$$\forall x \in X: \Sigma(x) = C \hat{cl}_{(x,\Sigma)}^{-1} PC_x \{x\}$$

← dem ⑥

teo VC Dado  $(X, \Sigma)$  ET-V, y sea  $cl_{(x,\Sigma)}$  asociado, ent

$$1. cl_{(x,\Sigma)} \phi = \phi \wedge I_{p_x} \leq cl_{(x,\Sigma)}$$

$$2. cl_{(x,\Sigma)} \cup \{B, E\} = \cup \hat{cl}_{(x,\Sigma)} \{B, E\}; \forall B \forall E$$

$$3. cl_{(x,\Sigma)}^2 \leq cl_{(x,\Sigma)}$$

← dem ⑦

teo  $\Sigma \partial$   $N$  no es vecindad de  $x$  ssi  $x$  no está en  $N$  ó está en el adherido del complemento de  $N$ , i.e.  $\Sigma$  es reconstruido por  $\partial_{(x,\Sigma)}$  mediante:  $\forall x \in X: \Sigma(x) = C (\partial_{(x,\Sigma)} \cup I_{p_x})^{-1} PC_x \{x\}$

← dem. (8)

(73)

Nota: Puede observarse que el teorema  $\Sigma \partial$  establece que para ser vecindad de un punto, basta contenerlo y que este punto no esté adherido al complemento.

teo VB Dado  $(X, \Sigma)$  ET-V y sea  $\partial_{(X, \Sigma)} : \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$  asociado ent

1.  $\partial_{(X, \Sigma)} \phi = \phi \quad \wedge \quad \partial_{(X, \Sigma)} \leq C_X$

2.  $\forall B \forall E : \partial_{(X, \Sigma)} \cup \{B, E\} = \cup \{ \cap \{ \partial_{(X, \Sigma)} B, C_X E \}, \cap \{ \partial_{(X, \Sigma)} E, C_X B \} \}$

3.  $\partial_{(X, \Sigma)}^2 \leq I_{\mathcal{P}X}$

← dem (9)

#### 4.4 Otros teoremas

teorema 4.4.1  $x$  es punto de adherencia de  $B$  ssi  $x$  es punto de borde de  $C_X B$ .

← dem (10)

teorema 4.4.2  $x$  es punto de clausura de  $B$  ssi  $x \in B$  ó es punto límite de  $B$ .

← dem (11)

teorema 4.4.3 Dado  $(X, \Sigma)$  una ET-V stq

1.  $\tau_{(X, \Sigma)} = C\pi_1 \cap \{C\lambda_{(X, \Sigma)}, I_{\mathcal{P}X}\}$ .

2.  $\tau_{(X, \Sigma)} = C\hat{\partial}_{(X, \Sigma)}^{-1}(\{\emptyset\})$ .

← dem (12)

teorema 4.4.4 Dado  $(X, \Sigma)$  una ET-V ent  $\forall B \in \mathcal{P}X$  stq

1.  $Cl_{(X, \Sigma)} B = \cap \{ \bar{P}_x B, C\tau_{(X, \Sigma)} \}$ .

2.  $Cl_{(X, \Sigma)} = I_{\mathcal{P}X} \cup \partial_{(X, \Sigma)}$

← dem (13)

observación el teorema 4.4.4, inciso segundo, puede ser vinculado con (74) el teorema 4.4.2, estableciendo que todo punto adherido a un conjunto es punto límite, pero no conversamente, i.e. afirmamos que los puntos de un conjunto  $B$  se dividen en los puntos aislados de  $B$  y los puntos límites de  $B$  (que no están adheridos a él).

corolario: Dado  $(X, \Sigma)$  ET-V y dado  $d_{\Sigma} B = \{x \in X \mid x \text{ es punto límite de } B\}$

$$\text{ent } \partial_{(X, \Sigma)} \leq d_{\Sigma}$$

← dem (14)

Nota: De igual manera podemos demostrar  $\partial_{(X, \Sigma)} \leq d_{\Sigma}$  usando obs (d) N4.

teorema 4.4.5 Dada  $(X, \Sigma)$  ET-V ent  $\forall B \in \mathcal{P}X$  stq

$$1. \partial_{(X, \Sigma)} B = C_X \cup \{B, \cup \{p \in C_X, \tau\}\}$$

$$2. \partial_{(X, \Sigma)} B = \cap \{cl_{(X, \Sigma)} B, C_X B\} \text{ i.e. } \partial_{(X, \Sigma)} = cl_{(X, \Sigma)} - I_{\mathcal{P}X} = d_{\Sigma} - I_{\mathcal{P}X}$$

← dem (15)

Nuestra idea es presentar aquí otras colecciones de axiomas que nos introduzcan de otra manera al sistema completo de vecindades que hemos establecido por medio de los axiomas V, o bien colecciones de axiomas que nos conduzcan a otro tipo de espacio. A continuación las proposiciones y sus variantes

- v0.  $\Sigma \in \mathcal{P}P X^X$ .  $\forall x \in X \text{ stq:}$
- v1.  $\Sigma(x) \subseteq \bar{P}_x\{x\}$ .
- v2.  $\forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \bar{P}_x N \subseteq \Sigma(x)$ .
- v2(1).  $\forall I: i \in I \Rightarrow [\forall x_i \in X \forall N_i: N_i \subseteq \Sigma(x_i) \Rightarrow \cup \cup \{N_i | i \in I\} \in \Sigma(x_i)]$ .
- v3.  $\forall H: H \subseteq \Sigma(x) \wedge |H| < \chi_0 \Rightarrow \cap H \in \Sigma(x)$ .
- v3(1).  $\forall H: H \subseteq \Sigma(x) \wedge |H| < \chi_0 \Rightarrow \exists N \in \cap \{\Sigma(x), \mathcal{P} \cap H\}$ .
- v4.  $\forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \exists N^* \in \cap \{\Sigma(x), \mathcal{P} N\}, N \in \hat{\Sigma}(N^*)$ .
- v4(1).  $\forall y: \cap \{\Sigma(x), \bar{P}_x\{y\}\} \subseteq \Sigma(y)$ .
- v4(2).  $\forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \forall y \in N \exists N_y \in \cap \{\Sigma(y), \mathcal{P} N\}$ .
- v4(3).  $\forall N: N \in \Sigma(x) \Rightarrow \exists N^* \in \Sigma(x), [\forall y: y \in N^* \Rightarrow \exists W \in \cap \{\Sigma(y), \mathcal{P} N\}]$ .
- v5.  $\forall x \forall y \in X: x \neq y \Rightarrow \exists (N, U), N \in \Sigma(x), U \in \Sigma(y) \wedge \cap \{N, U\} = \phi$ .

Definimos a  $(X, \Sigma)$  un sistema de vecindades (completo) como aquel satisfaciendo V1-V4 (aparte de V0). Ahora bien, es de hacer notar que V3(1) es una condición más débil que V3, pero junto con V2 obtenemos la equivalencia. Así, otra posibilidad es V1, V2, V3(1) y V4.

Otras implicaciones que se dan en las condiciones anteriores son V2 implica V2(1) (que es más débil, por lo mismo); además, V4(2) y V2 implican V4(1), así como V4(1) implica V4. Por otro lado, V4 y V2 implican V4(2). Es de esto que otro sistema equivalente viene dado por los axiomas V1, V2, V3, V4(2). Nótese que para todas estas equivalencias el axioma V2 es vital.

Por otro lado, si cambiamos el axioma V2 al V2(1) y V4 a V4(1)

obtenemos un sistema de vecindades más reducido cumpliendo con  $V1, V2(1), V3, V4(1)$  de manera que  $\Sigma(x)$  viene a ser la colección de abiertos que contienen a  $x$  (i.e.  $\cap \{\tau, \bar{p}_x(x)\}$ ). Además  $V1, V3(1)$  y  $V4(2)$  hacen del sistema una base local para la topología tal como se definió en def G14.

def N5 Un filtro  $\bar{F}$  sobre  $X$  es una familia no vacía tq

$$F0. \bar{F} \in \text{PPX}.$$

$$F1. \forall F: F \in \bar{F} \Rightarrow \bar{p}_x F \subseteq \bar{F}.$$

$$F2. \forall \mathcal{H}: \mathcal{H} \subseteq \bar{F} \wedge |\mathcal{H}| < \aleph_0 \Rightarrow \bigcap \mathcal{H} \in \bar{F}.$$

Además,  $\mathcal{B} \subseteq \bar{F}$  es una base de filtros para  $\bar{F}$  ssi cada elemento de  $\bar{F}$  contiene como subconjunto a algún elemento de  $\mathcal{B}$ , i.e.  $\bar{F} = \{F \in \text{PX} \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subseteq F\} = \bigcup \{\bar{p}_x(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$

Así pues, como ejemplo, dado  $A \in \text{PX}$  stq  $\bar{F} = \bar{p}_x A$  es un filtro con  $\mathcal{B} = \{A\}$  una base para el mismo. De hecho es un filtro libre (i.e. si  $A \neq \emptyset: \bigcap \bar{F} \neq \emptyset$ ). Ahora bien, esto viene a que  $\forall x \in X: \Sigma(x)$  es un filtro, en vista de  $V0, V2, V3$  que nos proporcionan las condiciones suficientes.

def N6 Llamamos a  $W \in \text{PPX}$  una base para algún sistema de vecindades  $\Sigma$  ssi  $W(x)$  es una base de filtros para el filtro  $\Sigma(x)$ .

Por comodidad llamamos a  $W(x)$  una base de vecindades en  $x$  (un abuso de lenguaje, por cierto). Es de hacer notar ahora, que un sistema satisfaciendo  $V1, V3(1), V4(3)$  es una base de vecindades en  $x$  para el sistema  $\Sigma$  generado por la misma, así como también que toda base de vecindades  $W$  los satisface en cada punto. Para completar proponemos a continuación la conexión de la que se habló en la nota subsiguiente a la def G13, y se acepta sin demostración en vista de que escapa de los objetivos del trabajo.

postulado 4.5.1 Dada  $(X, \tau)$  una ET-A, y sea  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  con  $W(x) = \bigcap \{\bar{p}_x(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$  ent  $\mathcal{B}$  es una base para  $\tau$  ssi  $W$  es una base para  $\Sigma_{(x, \tau)}$ .

Nota: La proposición anterior afirma que la única diferencia entre una base local en  $\mathcal{X}$  y una base de vecindades en  $\mathcal{X}$ , es que la segunda no necesita consistir de abiertos, de manera que el generado de cada base (local) es la familia de vecindades abiertas o no necesariamente abiertas de  $\mathcal{X}$  respectivamente.

El objetivo de transcribir V5 es que, según se menciona en 1.2, un sistema de vecindades satisfaciendo V1, V3(1), V4(2), V5 es un espacio Hausdorff. Allí apareció la colección como axiomas H.

Los sistemas de vecindades considerados como concepto primario para la definición de estructura topológica, tienen la desventaja de tener una forma muy intrincada (al menos en comparación con las otras vías acá expuestas), y esto se debe a que un sistema de vecindades es una función de  $X$  a  $\mathcal{P}P X$ . Una pregunta brota rápidamente: ¿podría la subfamilia de  $\mathcal{P}X$  dada por  $\mathcal{N} = \bigcup \widehat{\Sigma}(X) = \bigcup \{\Sigma(x) \mid x \in X\}$ , haber sido usada igualmente bien? Este sería el caso ssi uno podría extraer de  $\mathcal{N}$  las familias individuales  $\Sigma(x)$  y así poder reconstruir  $\Sigma$ . Si uno trata con la familia de vecindades abiertas (i.e. aquel sistema construido a partir de V1, V2(1), V3, V4(1).) esto es siempre factible y la regla de selección es simple:  $\Sigma(x)$  es la colección de todos los elementos en  $\mathcal{N}$  tq  $x$  está en ellos i.e.  $\Sigma(x) = \bigcap \{N, \bar{p}_x\{x\}\}$ . Claro, aquí  $\mathcal{N} = \mathcal{T}$ . Si por otro lado uno trata con un sistema de vecindades satisfaciendo V1, V3(1), V4(2) entonces la regla para la extracción de  $\Sigma(x)$  es la misma que la anterior y  $\mathcal{N}$  es una base para la topología  $\mathcal{T}$  (i.e.  $\Sigma(x)$  es una base local en  $\mathcal{X}$ ). Sin embargo, en general esto no es posible. Basta dar como contraejemplo el siguiente: sea  $\Sigma^*(x) = \{A \in \mathcal{P}\mathbb{R} \mid [x, x+\epsilon] \subseteq A, \epsilon > 0\}$ ; entonces la estructura dada por  $\Sigma^*$  y la estructura usual en  $\mathbb{R}$  ( $\Sigma_0$ ) no son la misma, a pesar de tener  $\mathcal{N}_0 = \bigcup \widehat{\Sigma}_0(\mathbb{R}) = \bigcup \widehat{\Sigma}^*(\mathbb{R}) = \mathcal{N}^*$ .

Después de haber fracasado con la familia  $\mathcal{N}$ , alguien podría pensar si  $\Gamma = \widehat{\Sigma}(X) = \{\Sigma(x) \mid x \in X\}$ , determina a  $\Sigma$  unívoca-

mente. Después de todo  $\Gamma$  contiene más información que  $\mathcal{N} = \cup \Gamma$ .  
 Con  $\Gamma$  dado, nosotros sabemos que cada  $u \in \Gamma$  es una  $\Sigma(x)$ , de donde la pregunta es ¿qué  $x \in X$  (necesariamente único) hace a  $u = \Sigma(x)$ ?  
 Es este caso, la selección es siempre posible según la siguiente regla:  $\Sigma(x)$  es el más grande  $u \in \Gamma$  satisfaciendo que  $x \in N$  para cada  $N \in \mathcal{U}$ , i.e.  $\Sigma(x) = \cup \{u \in \Gamma \mid x \in \cap u\}$ .

Con todo lo hablado podrá concluirse que a pesar de ser los sistemas de vecindades de fácil acceso intuitivo para la obtención de resultados, no es un concepto muy preciso y no es quizá la mejor manera de iniciarse en estructuras topológicas. Sólo nótese que la expresión "vecindad de un punto  $x$ " es usado en la literatura en por lo menos cinco sentidos diferentes:

- a) para denotar conjuntos usados para definir un  $V$ -espacio
- b) para denotar un conjunto abierto conteniendo a  $x$
- c) para denotar cualquier conjunto conteniendo a un abierto que contiene a  $x$ .
- d) para denotar un elemento de una base local en  $x$
- e) para denotar una vecindad básica, esto es, un elemento de una familia que genera al filtro de conjuntos definidos por (c).

La interpretación (c) es la que acá hemos usado y tiene una larga historia. Fué por vez primera mencionada por Root (1914) y sugerida de nuevo por Tietze (1919, 1923). Encontró aceptación general sólo hasta que Bourbaki (1940) la empleó en su tratado. Precisamente una de las razones para la escojencia por Bourbaki es indudablemente su conexión con filtros ya mencionada.

## 4.6 V-espacios

79.

def N7 Dado  $X$  un conjunto,  $\Phi$  es un sistema de  $V$ -vecindades para  $X$  ssi:

$$\Phi 0. \quad \Phi \in \mathcal{P}P X^X$$

$$\Phi 1. \quad \forall x: x \in X \Rightarrow \Phi(x) \neq \emptyset.$$

Nota: Obsérvese que no se pide que  $x \in \Phi(x)$ , aunque podría agregarse como axioma extra sin afectar los principales resultados de la sección. Obsérvese que  $\forall 3$  implica  $\Phi 1$ .

def N8  $(X, \Phi)$  es un  $V$ -espacio (VE) ssi  $\Phi$  es un sistema de  $V$ -vecindades para  $X$ . Además:

$$\cdot 1 \quad V \text{ es } \Phi\text{-vecindad de } x \text{ en } (X, \Phi) \text{ ssi } V \in \Phi(x)$$

$$\cdot 2 \quad x \text{ es } \Phi\text{-punto límite de } B \text{ en } (X, \Phi) \text{ ssi } \forall V \in \Phi(x): \cap \{V, B, C_x\{x\}\} \neq \emptyset$$

def N9 Dado  $(X, \Phi)$  un VE ent definimos:

$$\div \forall B \in \mathcal{P}X: D_{(X, \Phi)} B = \{x \in X \mid x \text{ es } \Phi\text{-punto límite de } B \text{ en } (X, \Phi)\}$$

$$\div F \text{ es } \Phi\text{-cerrado ssi } D_{(X, \Phi)} F \subseteq F$$

$$\div \bar{F}_\Phi = \{F \in \mathcal{P}X \mid F \text{ es } \Phi\text{-cerrado}\}$$

$$\div \forall B \in \mathcal{P}X: CL_{(X, \Phi)} B = \bigcap \{ \bar{P}_x B, \bar{F}_\Phi \}$$

Nota: Es de hacer ver que aca  $D_{(X, \Phi)}^2 \leq I_{\mathcal{P}X} \cup D_{(X, \Phi)}$ , no se da necesariamente, así como tampoco  $CL_{(X, \Phi)} = I_{(X, \Phi)} \cup D_{(X, \Phi)}$ .

teo  $\Phi D$  Dado  $(X, \Phi)$  EV ent

$$1. \quad D_{(X, \Phi)} \emptyset = \emptyset.$$

$$2. \quad \forall B \forall E: B \subseteq E \Rightarrow D_{(X, \Phi)} B \subseteq D_{(X, \Phi)} E.$$

$$3. \quad \forall x: x \in D_{(X, \Phi)} B \Rightarrow x \in D_{(X, \Phi)} \cap \{B, C_x\{x\}\}$$

Además  $\Phi$  puede ser reconstruido por  $D_{(X, \Phi)}$  mediante  $\forall x \in X: \Phi(x) = \widehat{C D_{(X, \Phi)}^{-1} \mathcal{P}C_x\{x\}}$ .

dem.

1. Supongase que  $D_{(X, \Phi)} \emptyset \neq \emptyset$  ent  $\exists x \in D_{(X, \Phi)}$  i.e.  $\forall V \in \Phi(x): \cap \{V, \emptyset, C_x\{x\}\} \neq \emptyset$  pero  $\cap \{V, \emptyset, C_x\{x\}\} = \emptyset$  ( $\uparrow$ )  $\therefore D_{(X, \Phi)} \emptyset = \emptyset \quad \square$

2. Sean  $B, E \in \mathcal{P}X$  tq  $B \subseteq E$ , por demostrar  $D_{(x, \Phi)} B \subseteq D_{(x, \Phi)} E$ .

Ahora bien sea  $x \in D_{(x, \Phi)} B$ , buscamos  $x \in D_{(x, \Phi)} E$ . Pero  $x \in D_{(x, \Phi)} B$

i.e.  $\forall V \in \Phi(x) : \cap \{V, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  pero  $\cap \{V, B, C_x \{x\}\} \subseteq \cap \{V, E, C_x \{x\}\}$

por causa de la hipótesis, así que  $\cap \{V, E, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  sería una contradicción

de donde concluimos:  $\forall V \in \Phi(x) : \cap \{V, E, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  i.e.  $x \in D_{(x, \Phi)} E$ .  $\square$

3. Ahora sea  $x$  tq.  $x \in D_{(x, \Phi)} B$  i.e.  $\forall V \in \Phi(x) : \cap \{V, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$

así stq  $\cap \{V, \cap \{B, C_x \{x\}\}\} = \cap \{V, \cap \{B, C_x \{x\}\}, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  i.e.  $x \in D \cap \{B, C_x \{x\}\}$

$\square$  QED!

Para demostrar la segunda parte debe notarse que  $\Phi(x) = \widehat{CD}_{(x, \Phi)}^{-1} \mathcal{P}C_x \{x\}$  es equivalente a  $V \in \Phi(x)$  ssi  $x \in C_x D_{(x, \Phi)} C_x V$

( $\Rightarrow$ ) Sea pues  $V \in \Phi(x)$  por demostrar  $x \in D_{(x, \Phi)} C_x V$ .

- Supongase  $x \in D_{(x, \Phi)} C_x V$  :: (1) de donde  $\forall V' \in \Phi(x) : \cap \{V', C_x V, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$

- Pero  $V \in \Phi(x)$  por hipótesis  $\therefore \cap \{V, C_x V, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  :: (2)

- Ahora bien  $\cap \{V, C_x V, C_x \{x\}\} \subseteq \cap \{V, C_x V\} = \emptyset$  ( $\uparrow$  2), de donde asumiendo la hipótesis concluimos  $\neg$ (1):  $x \in C_x D_{(x, \Phi)} C_x V$ .  $\square$

( $\Leftarrow$ ) La converso es similar  $x \in D_{(x, \Phi)} C_x V$  nos lleva a  $V \in \Phi(x)$ .

-  $x \in D_{(x, \Phi)} C_x V \Rightarrow \exists V' \in \Phi(x) \ni \cap \{V', C_x V, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$  :: (1)

- Ahora bien, suponga  $\cap \{V', C_x V\} \neq \emptyset$  i.e.  $\exists y : y \in V' \wedge y \in C_x V$  :: (2)

- De (2) y (1) concluimos  $y \in V', y \in C_x V, y \in C_x \{x\} \therefore y = x$ . ( $\rightarrow \Leftarrow$ )

Nota: errata; la segunda parte de este teo  $\Phi D$  no se da; es de hacer notar que esto rompe el lineamiento estructural que se ha venido dando en este escrito: ¡ojos!, muy importante!

def N10 Dado  $X$  un conjunto ent  $D$  es un diferencial de conjuntos sobre  $X$  ssi

D0.  $D \in \mathcal{P}X^{\mathcal{P}X}$ .

D1.  $D\emptyset = \emptyset$ .

D2.  $\forall B \forall E : B \subseteq E \Rightarrow DB \subseteq DE$ .

D3.  $\forall x \forall B : x \in DB \Rightarrow x \in D \cap \{B, C_x \{x\}\}$ .

Nota el teo  $\Phi D$  establece que en todo  $V \in \Phi$ , el operador  $D_{(x, \Phi)}$  es un diferencial de conjuntos sobre  $X$ . La converso también se da, en el siguiente teorema.

teo  $D\Phi$  Dado  $(X, D_0)$  tq  $D_0$  es un diferencial de conjuntos sobre  $X$  ent.  $\exists \Phi : \Phi : X \rightarrow \mathcal{P}X$  tq  $(X, \Phi)$  es VE. Además  $D_{(x, \Phi)} = D_0$ .

dem

Construimos  $\Phi$  de la siguiente manera:  $\forall x \in X: \Phi(x) = \{H \in \mathcal{P}X \mid x \in C_x D_0 C_x H\}$   
Así  $\Phi \in \mathcal{P}\mathcal{P}X^x$  está bien definido. Falta probar que  $\Phi(x) \neq \emptyset, \forall x$ .

Para ello vea que  $\forall x \in X: \Phi(x) \supseteq \{X\}$  (i.e.  $X \in \bigcap \hat{\Phi}(x)$ )

De hecho sea  $H = X$  ent  $C_x H = \emptyset$  y por D1:  $D_0 C_x H = D\emptyset = \emptyset$   
de donde  $\forall x: x \in C_x D_0 C_x H = X$  i.e.  $\forall x: X \in \Phi(x)$ .  $\square$

Probamos ahora  $D_{(\alpha, \Phi)} = D_0$  por doble contención:

[ $\Leftarrow$ ] Por demostrar  $\forall B \in \mathcal{P}X: D_{(\alpha, \Phi)} B \subseteq D_0 B$ .

- Así sea  $x \in D_{(\alpha, \Phi)} B$  i.e.  $\forall V \in \Phi(x): \bigcap \{V, B, C_x \{x\}\} \neq \emptyset$ .  $\therefore (1)$
- $C_x B \notin \Phi(x)$  dado que  $\bigcap \{C_x B, B, C_x \{x\}\} = \emptyset$  ( $\uparrow 1$ )  $\therefore \neg C_x B \in \Phi(x)$   $\therefore (2)$
- (2) establece que  $\neg (x \in C_x D_0 C_x [C_x B])$  i.e.  $x \notin C_x D_0 B \therefore x \in D_0 B$ .  $\square$

[ $\Rightarrow$ ] Dado  $B \subseteq X$  por demostrar  $D_0 B \subseteq D_{(\alpha, \Phi)} B$ .

- Procedamos por contrapositiva; sea  $x \notin D_{(\alpha, \Phi)} B$ , probaremos  $x \notin D_0 B$ .
- En efecto  $x \notin D_{(\alpha, \Phi)} B \Rightarrow \exists V \in \Phi(x): \bigcap \{V, B, C_x \{x\}\} = \emptyset$   $\therefore (1)$
- De (1) stq  $\exists V \in \Phi(x) \ni \bigcap \{B, C_x \{x\}\} \subseteq C_x V$ , de donde usando D2 stq  $D_0 \bigcap \{B, C_x \{x\}\} \subseteq D_0 C_x V$   $\therefore (2)$
- Usando (1)  $\forall V \in \Phi(x)$  i.e.  $x \notin D_0 C_x V$  con lo que de (2)  $x \notin D_0 \bigcap \{B, C_x \{x\}\}$  pero por D3 esto nos lleva a  $x \notin D_0 B$ .  $\square$

$\square$  QED!

Ejemplo 4.6.1 Como curiosidad damos a continuación un contraejemplo a las propiedades mencionadas en la nota de la def N9. Sea  $X = \{a, b, c\}$  y sean  $\Phi, \Phi^*, \Psi \in \mathcal{P}\mathcal{P}X^x$

así:

$\Phi(a) = \{V_a\}$	$\forall x: \Phi^*(x) = X$	con $V_a = \{a, c\}$
$\Phi(b) = \{V_b\}$	$\Psi(a) = \Psi(b) = \{\emptyset\}$	$V_b = \{b, a\}$
$\Phi(c) = \{V_c\}$	$\Psi(c) = \{\{a\}, \{b\}\}$	$V_c = \{c, b\}$

Ent stq  $D_\Phi \{a\} = \{b\}, D_\Phi \{b\} = \{c\}, D_\Phi \{c\} = \{a\}, D_{\Phi^*} \{x\} = C_x \{x\} \forall x \in X$

- Note que  $\bar{F}_\Phi = \bar{F}_{\Phi^*} = \{\emptyset, X\}$  y que  $\{a\}, \{b\}$  son  $\Psi$  cerrados, pero no lo es  $\{a, b\}$ .  
En  $\Phi$ , los diferenciales no son cerrados y además  $D^2 B \notin \bigcup \{B, DB\}$ . También da ejemplos donde  $CLB \neq \bigcup \{B, DB\}$ .  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son sistemas topológicos no equivalentes con  $\bar{F}_\Phi = \bar{F}_{\Phi^*}$ .  $\square$

## CAPÍTULO 5

ESTRUCTURAS DETERMINADAS POR UN  
OPERADOR DE ADHERENCIA.

## 5.1 INTRODUCCIÓN

Las estructuras topológicas tienen como objetivo, según se platicó, establecer una adecuada definición de continuidad para así poder tener una más exacta información de las propiedades invariantes del espacio. Ahora bien, la noción de continuidad es intuitivamente la siguiente: un mapeo  $f$  es continuo en algún punto  $x$  si cualquier punto  $y$  "cerca" a  $x$  es mapeada en otro  $f(y)$  "cerca" a  $f(x)$ . Es claro que esta noción, para ser precisada formalmente necesita de una definición clara y concisa del concepto "cercanía". Esto creó los diversos sistemas topológicos con lo cual nos encontramos en la encrucijada de escoger uno como el más fundamental. Esto se llevó a cabo de forma muy natural. El criterio de cercanía debía ser así mismo invariante bajo la continuidad. Así llegamos a las vecindades abiertas y a la función de cerradura de Kuratowski. Ambas modalidades aceptables desde su funcionalidad pero objetables desde un punto de vista: contienen un exceso de información (aunque no de estructura).

Un camino que no cae en este problema, y que por otro lado conserva la idea intuitiva de la finalidad topológica, es seguido determinando los puntos cercanos a un conjunto y que no están en él. Todos estos puntos serán obviamente puntos límites. Llamamos a estos puntos, puntos de adherencia del conjunto en cuestión.

Así pues, llamamos adherencia de un conjunto a la colección de puntos del complemento "adheridos" (o muy cercanos) al mismo. En todo espacio pseudo-métrico, un punto está adherido a un conjunto si no está en él y su distancia al mismo es cero. Una relación de proximidad induce un operador de adherencia que hace que la estructura topológica defina una  $p$ -topología sobre el espacio

Sin embargo la conversa no es cierta, de donde "estar próxima a" es una relación menos general que "estar adherido con".

Un operador sobre  $PX$ , es de adherencia si produce partes ajenas que cumplen la reglas B2 y B3, de <sup>donde</sup> parece ser que estos axiomas definen la noción de "estar adherido a". Es claro que la conexión más cercana es la cerradura con la doble relación:

$\partial = Cl - I_{PX}$ ,  $Cl = I_{PX} \cup \partial$ . Los axiomas B son debidos al autor.

En la última sección se da sin demostración una serie de operadores que garantizan una estructura topológica sobre  $X$ , los cuales resultan convenientes según diversos casos específicos. Es de hacer notar que la axiomática para el operador de la frontera ( $F_r = \partial \cup \delta$ ) no es fácil de encontrar, a diferencia de su variante aquí expuesta.

### o 5.2 Estructuras Topológicas $(X, \partial)$

def  $\beta 1$  Dado  $X$  un conjunto,  $\partial$  es un operador de adherencia sobre  $X$

ssi  $B0. \partial \in \mathcal{P}X^{\mathcal{P}X}$

$B1. \partial \phi = \phi \wedge \partial \leq C_x$

$B2. \partial U\{B, E\} = U\{\cap\{\partial B, C_x E\}, \cap\{\partial E, C_x B\}\} : \forall B, E$

$B3. \partial^2 \leq I_{\mathcal{P}X}$

def  $\beta 2$   $(X, \partial)$  es una estructura B-topológica (ET-B) ssi  $\partial$  es un operador de cerradura sobre  $X$ . Además:

1  $\tau_{(X, \partial)} = \text{df. } C\hat{\partial}(\{\phi\})$

2  $Cl_{(X, \partial)} = \text{df. } \partial \cup I_{\mathcal{P}X}$

3  $\forall x \in X: \Sigma_{(X, \partial)}(x) = C(\partial \cup I_{\mathcal{P}X})^{\wedge} \mathcal{P}C_x\{x\}$

Observación: Nuevamente podemos considerar  $\tau_{(X, \partial)}$  de una manera alternativa. Demostremos tal variante.

obs  $(\tau)\beta 2$  Dado  $(X, \partial)$  una ET-B ent  $\tau_{(X, \partial)} = (\partial \circ C_x \cap I_x)^{\wedge}(\{\phi\})$ .

dem (16)

def  $\beta 3$  Dada  $(X, \partial)$  una ET-B ent definimos:

$\vdash G$  es B-abierto en  $(X, \partial)$  ssi  $G \in \tau_{(X, \partial)}$

$\vdash x$  es B-punto de clausura de  $B'$  en  $(X, \partial)$  ssi  $x \in Cl_{(X, \partial)} B'$

$\vdash N$  es B-vecindad de  $x$  en  $(X, \partial)$  ssi  $N \in \Sigma_{(X, \partial)}(x)$

$\vdash x$  es B-punto de adherencia de  $B$  en  $(X, \partial)$  ssi  $x \in \partial B$

Nota: En el resto del capítulo suponemos a  $(X, \partial)$  una ET-B y omitimos la frase "en  $(X, \partial)$ ", salvo cuando sea necesario para evitar confusiones.

- def β4  $\dot{\vdash} x$  es B-punto frontera ssi  $A \ni x: x \in \partial A \vee x \in \partial A^c$
- $\dot{\vdash} F$  es B-cerrado ssi  $F \in \mathcal{CT}_{(X,\mathcal{D})}$
- $\dot{\vdash} x$  es B-punto exterior ssi  $x \in C_x \partial A \wedge x \notin A$
- $\dot{\vdash} x$  es B-punto interior de  $A$  ssi  $A \in \Sigma_{(x,\mathcal{D})}(x)$
- $\dot{\vdash} x$  es B-punto libre de  $A$  ssi  $A \notin \Sigma_{(x,\mathcal{D})}(x)$
- $\dot{\vdash} x$  es B-punto borde de  $A$  ssi  $x \in A \wedge x$  es B-punto libre de  $A$ .
- $\dot{\vdash} x$  es B-punto límite de  $A$  ssi  $x$  es punto límite según  $\Sigma_{(x,\beta)}^*$  (\*)

(\*) Se probará después que en efecto  $\Sigma_{(x,\beta)}^*$  es un sistema de vecindades.

Nota: Omitiremos de ahora en adelante el prefijo B para los conceptos antes definidos, necesario si somos rigurosos puesto que todos ellos refieren a una ET-B.

### o 5.3 Teoremas Básicos

teo  $\partial \mathcal{T}$  Podemos reconstruir  $\partial$  a partir de  $\mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})}$  usando  $\forall B \in \mathcal{P}X$  la siguiente relación:

$$\partial B = C_x \cup \{B, \cup \{ \mathcal{P}C_x B, \mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})} \} \}.$$

← dem (17)

lema β1 Dado  $(X,\mathcal{D})$  ET-B y sea  $F = \hat{\partial}^{-1} \phi$ , ent

1.  $\forall H: H \subseteq F \Rightarrow \cap H \in F.$
2.  $\forall H: H \subseteq F \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cup H \in F.$

← dem (18)

teo BA Dado  $(X,\mathcal{D})$  ET-B y sea  $\mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})}$  según def β1, ent

1.  $\forall B: B \subseteq \mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})} \Rightarrow \cup B \in \mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})}.$
2.  $\forall H: H \subseteq \mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})} \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cap H \in \mathcal{T}_{(x,\mathcal{D})}.$

← dem (19)

corolario: Una reconstrucción alternativa para  $\partial$  en teo  $\partial \mathcal{T}$  es:  $\partial B = \{x \in C_x B \mid \forall G \in \mathcal{N}_{(x,\mathcal{D})} \{ \bar{P}_x \{G\} \}; G \cap B \neq \emptyset \}$

teo  $\partial Cl$   $x$  es punto de adherencia de  $B$  ssi  $x$  es punto de clausura y  $x \notin B$ , i.e.  $\partial$  puede reconstruirse con  $Cl_{(x,\mathcal{D})}$  así:  $\forall B \in \mathcal{P}X: \partial B = Cl_{(x,\mathcal{D})} B - B \quad [ \partial = Cl_{(x,\mathcal{D})} - I_{\mathcal{P}X} ]$

← dem (20)

teo BC Dada  $(X, \mathcal{O})$  ET-B y sea  $Cl_{(X, \mathcal{O})} = \partial \cup I_{PX}$  asociado, ent

1.  $Cl_{(X, \mathcal{O})} \phi = \phi \wedge I_x \subseteq Cl_{(X, \mathcal{O})}$
2.  $\forall B \forall E: Cl_{(X, \mathcal{O})} \cup \{A, B\} = \cup \hat{Cl}_{(X, \mathcal{O})} \{A, B\}$
3.  $Cl_{(X, \mathcal{O})}^2 \subseteq Cl_{(X, \mathcal{O})}$

← dem (21)

teo  $\partial \Sigma$  Cualquier vecindad de un punto  $x$  intersecciona a un conjunto  $B$  entonces  $x$  es punto de adherencia de  $B$  si  $x \notin B$ , i.e.  $\partial$  puede reconstruirse

de  $\Sigma_{(X, \mathcal{O})}$  por:  $\forall B \in PX: \partial B = \{x \in C_x B \mid \forall N \in \Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x): \cap \{N, B\} \neq \emptyset\}$

← dem (22)

teo BV Dada  $(X, \mathcal{O})$  ET-B y sea  $\Sigma_{(X, \mathcal{O})}: X \rightarrow PPX$  asociado, ent  $\forall x \in X:$

1.  $\Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x) \subseteq \bar{P}_x \{x\}$
2.  $\forall N: N \in \Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x) \Rightarrow \bar{P}_x N \subseteq \Sigma(x); \forall x \in X$
3.  $\forall H: H \subseteq \Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x) \wedge |H| < \aleph_0 \Rightarrow \cap H \in \Sigma(x)$
4.  $\forall N: N \in \Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x) \Rightarrow \exists N^* \in \cap \{\Sigma_{(X, \mathcal{O})}(x), \bar{P}_x N\}, N \in \cap \hat{\Sigma}_{(X, \mathcal{O})}(N^*)$

← dem (23)

## 5.4 Otros teoremas

teorema 5.4.1  $x$  es punto exterior de  $B$  ssi  $x$  es punto interior de  $C_x B$ .

← dem (24)

teorema 5.4.2  $x$  es punto de borde de  $B$  ssi  $x$  es punto adherido de  $C_x B$ .

← dem (25)

teorema 5.4.3  $x$  es punto de clausura de  $B$  ssi  $x$  es punto límite de  $B \cdot \forall x \in B$ .

← dem (26)

teorema 5.4.4 Dada  $(X, \mathcal{O})$  ET-B ent:

$$\tau_{(X, \mathcal{O})} = C\pi_1 \cap \{Cl_{(X, \mathcal{O})}, I_{PX}\}$$

$$\tau_{(X, \mathcal{O})} = \{G \in PX \mid G \in \cap \hat{\Sigma}_{(X, \mathcal{O})}(G)\} \quad \leftarrow \text{dem (27)}$$

lema Fr : Dada una ET-B  $(X, \partial)$  stq.  $Fr(A) = \partial A \cup \delta A \wedge (\partial \cdot Fr)(A) = \emptyset$   
 $\leftarrow$  dem (28) consecuencia de la definición  $\beta 4.Fr$ , y  $Fr A$  es cerrado [v] (27)

teorema 5.4.5  
 Dada  $(X, \partial)$  ET-B:

1.  $Cl_{(X, \partial)} B = \bigcap \{ \bar{P}_x B, Cl_{(X, \partial)} \}$

2.  $Cl_{(X, \partial)} B = \{ x \in X \mid \forall N \in \Sigma_{(X, \partial)}(x) : N \cap B \neq \emptyset \} \leftarrow$  dem (29)

teorema 5.4.6 Dada  $(X, \partial)$  ET-B ent  $\forall x \in X$  stq:

1.  $\Sigma_{(X, \partial)}(x) = \{ N \in PX \mid \exists G \in \mathcal{N} \cap \{ \tau, PN, \bar{P}_x \{x\} \} \}$ .

2.  $\Sigma_{(X, \partial)}(x) = C \hat{U}^{-1} P C_x \{x\}$ .

$\leftarrow$  dem (30)

teorema 5.4.7 Dada  $(X, \partial)$  ET-B y dado  $d: PX \rightarrow PX$

tg  $dB = \{ y \in X \mid y \text{ es punto límite de } B \}$  ent

stq.  $\partial \leq d$   
 $\leftarrow$  dem (31)

• Observación: al margen de la existencia de otros muchos operadores, unos de los cuales aparecen elaborados y presentados en la próxima sección 5.5, una de las posibles aplicaciones de la axiomática  $B$  presentada en este Capítulo dedicado al operador  $\partial$  de Adherencia, es el posible desarrollo de una lógica trivaluada a partir del Sistema Booleano estándar, bivaluado, agregado ó extendido por medio de la estructura espacial, sea por familias de abiertos, sistemas de vecindades ó mediante el uso de un operador, como  $\partial$  ó equivalente, que es la visión que el autor recomienda para estas finalidades de la Lógica. \_\_\_\_\_

### 5.5 Otros operadores

Def p5 Dado  $X$  un conjunto, ent  $Int$  es un operador de interior ssi:

I0.  $Int \in \mathcal{P}X^{\mathcal{P}X}$ ,  $\forall B \in \mathcal{P}X$  stq:

I1.  $Int X = X$ ,  $Int \leq I_{\mathcal{P}X}$ .

I2.  $\forall E \in \mathcal{P}X: Int \cap \{B, E\} = \cap \widehat{Int} \{B, E\}$ .

I3.  $Int \leq Int^2$ .

teorema 5.5.1 Dada una estructura topológica sobre  $X$  ent  $Int = C_x \circ Cl \circ C_x$  es un operador de interior para  $X$ , donde  $Cl$  es el operador de cerradura asociado a la estructura dada.

dem.

Por hipótesis  $Cl$  satisface los axiomas  $C1, C2, C3$ . Estos corresponden exactamente a lo que se desea demostrar, y se hace evidente utilizando un poco de álgebra para los complementos. Veamos

I0. Es claro por  $C0$  y cerradura en la composición  $(\circ)$   $\square$

I1.  $Int X = C_x(Cl \circ C_x)(X) = C_x(Cl \emptyset) = C_x \emptyset = X$  donde se uso la primera parte de  $C1$ . Además dado  $I_{\mathcal{P}X} \leq Cl$  ent  $I_{\mathcal{P}X} \circ C_x \leq Cl \circ C_x$

dado que  $C_x$  es biyección de donde  $C_x \circ I_{\mathcal{P}X} \circ C_x = I_{\mathcal{P}X} \geq C_x \circ Cl \circ C_x = Int. \square$

I2. Por  $C2$ , dados  $\bar{B}, \bar{E} \in \mathcal{P}X: Cl \cup \{\bar{B}, \bar{E}\} = \cup \{Cl \bar{B}, Cl \bar{E}\}$

Tomando  $\bar{B} = C_x B, \bar{E} = C_x E$  stq  $Cl \cup \{C_x B, C_x E\} = \cup \{Cl C_x B, Cl C_x E\}$

Por complementación:  $C_x \cup \{Cl C_x B, Cl C_x E\} = C_x Cl \cup \{\bar{B}, \bar{E}\}$

Usando D'Morgan:  $\cap C \{Cl C_x B, Cl C_x E\} = C_x Cl C_x \cap \{B, E\}$

i.e.  $Int \cap \{B, E\} = \cap \{C_x Cl C_x B, C_x Cl C_x E\} = \cap \widehat{Int} \{B, E\} \square$

I3. Finalmente  $Int^2 = (C_x \circ Cl \circ C_x)^2 = C_x \circ Cl \circ C_x \circ C_x \circ Cl \circ C_x = C_x \circ Cl^2 \circ C_x$

pero por  $C3$   $Cl^2 \leq Cl$  y por  $C1$   $I_{\mathcal{P}X} \circ Cl \leq Cl \circ Cl = Cl^2$  de donde obtenemos  $Cl^2 = Cl$ . Así:  $Int^2 = C_x \circ Cl^2 \circ C_x = C_x \circ Cl \circ C_x = Int$ .

De esto implicamos  $Int \leq Int^2$ .  $\square$  QED!

teorema 5.5.2 Dado  $Int$  un operador de interior para  $X$ , ent dado  $Cl = C_x \circ Int \circ C_x$  stq  $(X, Cl)$  es ET-C.

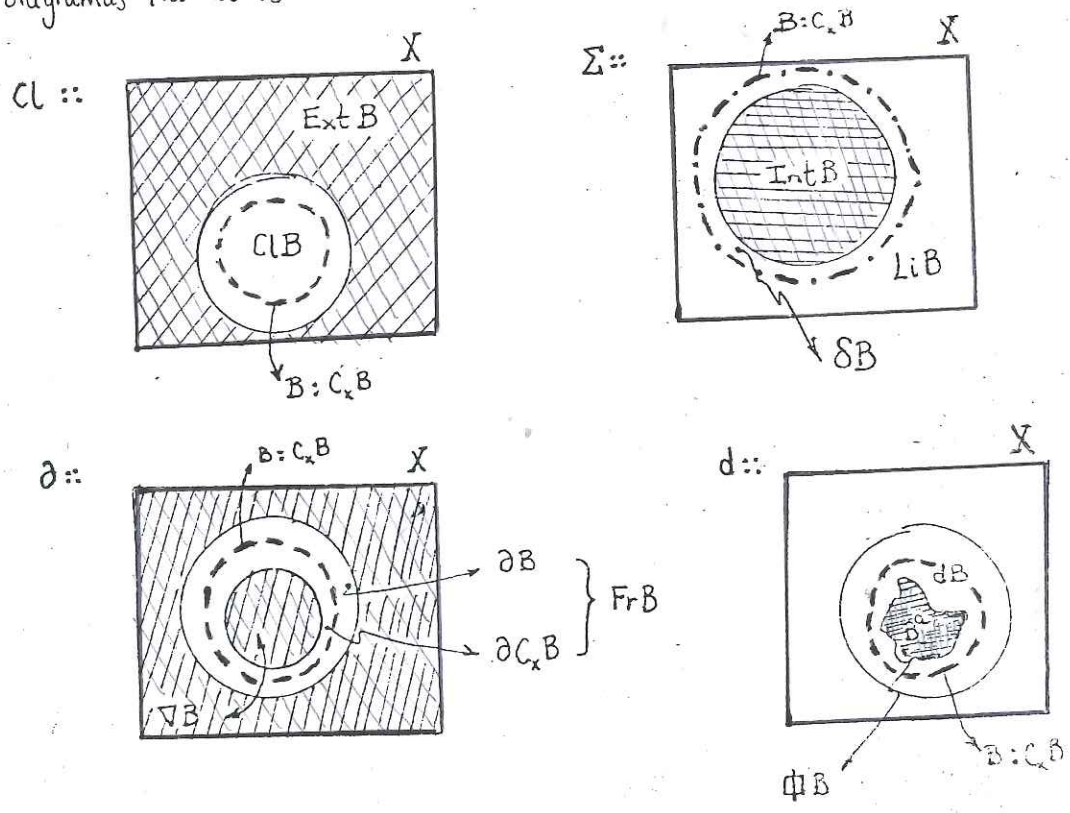
dem

La prueba es análoga a dem 5.5.1 la cual de hecho es reversible (en todos sus pasos)  $\square$  QED!

def β6 Dada una estructura topológica sobre  $X$ , ent definimos los siguientes operadores basados en la def 4 de cada capítulo.  $\forall B \in PX$ : def::

- $\text{cl} B = \{x \in X \mid x \text{ es punto de clausura de } B\} = \bar{B}$ , la cerradura de  $B$ .
- $\text{Ext } B = \{x \in X \mid x \text{ es punto exterior de } B\} = B^e = B_0$ , el exterior de  $B$ .
- $\text{Int } B = \{x \in X \mid x \text{ es punto interior de } B\} = B^o = B^i$ , el interior de  $B$ .
- $\text{Li } B = \{x \in X \mid x \text{ es punto libre de } B\} = B^l = \underline{B}$ , la parte libre de  $B$ .
- $\delta B = \{x \in X \mid x \text{ es punto de borde de } B\}$ , el borde de  $B$ .
- $\partial B = \{x \in X \mid x \text{ es punto de adherencia de } B\}$ , el adherido (o adherencia) de  $B$ .
- $\text{Fr } B = \{x \in X \mid x \text{ es punto frontera de } B\} = B^b$ , la frontera de  $B$ .
- $\nabla B = \{x \in X \mid x \text{ no es punto frontera de } B\}$ , la parte definida por  $B$ .
- $d B = \{x \in X \mid x \text{ es punto límite de } B\} = B'$ , el derivado (o diferencial) de  $B$ .
- $\Phi B = \{x \in X \mid x \text{ es punto aislado de } B\} = B^a$ , el aislado por  $B$ .

• Observación: Debe notarse que existe una relación intrínseca entre los operadores antes definidos, de hecho los dos primeros son definidos en terminos de  $\text{cl}$  (i.e. usando éste como concepto primitivo), los tres siguientes por  $\Sigma$ , los otros tres por  $\partial$  y los dos últimos utilizando  $d$  como punto de partida (o bien vecindades -abiertas o no- según se estableció). A continuación un juego de diagramas ilustrativos de las asignaciones de cada operador: Sea  $X$  tq  $B \in PX$ :



teorema 5.5.3 Dada una estructura topológica sobre  $X$  ent :

- 1  $Int = Ext \cdot C_x \quad \wedge \quad Ext = Int \cdot C_x$
- 2  $\delta = \partial \cdot C_x \quad \wedge \quad \partial = \delta \cdot C_x$
- 3  $Cl = I_{px} \cup d$

- dem, -

Esto fue probado en la sección 4 de cada capítulo, en los primeros tres teoremas, o bien antes.  $\square$  QED!

Nota: Todos los operadores dados en def  $\beta 6$  definen una estructura topológica (con excepción del último  $\Phi$ , que se dio sólo a manera de contraejemplo). Todos son bien comportados, (en el sentido que la estructura que definen puede conectarse directamente con cualquiera de las cuatro aquí presentadas y regresar adecuadamente partiendo de cualquiera de las dos en cuestión.), a excepción del penúltimo -el diferencial  $d$ - que requiere de una triple estructura -tal como se expuso en 3.5-. Podrían darse axiomas adecuadas para cada uno de ellos, pero esto resulta tedioso y no siempre sencillo (el caso de  $\nabla B$  ó  $\Phi B$ ). Nos contentaremos con definirlos todos en términos de  $\partial$  y retornarlos al mismo sistema, para hacerle honor al capítulo, dedicado a  $\partial$ .

def  $\beta 7$  Dada  $(X, \partial)$  una ET-B ent  $\forall B \in PX: IB = B$  nos lleva a definir:

$$Fr = \partial \cup \partial \cdot C_x$$

$$\nabla = C_x \cdot \partial \cap C_x \cdot \partial \cdot C_x$$

$$Cl = I \cup \partial$$

$$Ext = C_x \cdot (I \cup \partial)$$

$$Int = I - \partial \cdot C_x$$

$$Li = C_x \cup \partial \cdot C_x$$

$$\delta = \partial \cdot C_x$$

Nota:  $d$  no puede construirse en vista que  $\Phi$  no lo permite. Si  $\Phi$  pudiera escribirse como  $\Phi = \alpha(\partial)$  ent  $d$  pudiera describirse por:  $d = I \cup \partial - \alpha(\partial)$ .

teorema 5.5.4 La def  $\beta 7$  es una buena definición, en el sentido que es compatible con esos operadores tal como se definieron en las estructuras topológicas anteriores.

dem  
Que  $\alpha$  es tal como se definió en def  $\beta 7$  se probó en cada capítulo, en teo  $\alpha d$ , teo  $\partial Cl$  o bien en "Otros teoremas". Ext es por definición

$C_x \circ Cl$  de donde cae el resultado. Por otro lado se estableció en teo 5.5.3 que  $Int = Ext \circ C_x = C_x \circ (I \cup \partial) \circ C_x = C_x \circ (C_x \cup \partial \circ C_x) = C_x^2 \circ I \cap C_x \circ \partial \circ C_x = I - \partial \circ C_x$ . Así, dado que  $Li = C_x \circ Int$  stq  $Li = C_x \circ (I \cap C_x \circ \partial \circ C_x) = C_x \cup \partial \circ C_x$ . Además, en teorema 5.5.3 parte 2 se demostró:  $\delta = \partial \circ C_x$ . Fr es así por definición. Para finalizar:  $\nabla = C_x \circ Fr = C_x \circ (\partial \cup \partial \circ C_x) = C_x \circ \partial \cap C_x \circ \partial \circ C_x$ .

□ QED!

teorema 5.5.5 Dado  $(X, \partial)$  una ET-B (o bien una estructura topológica cualquiera sobre X), y sean los operadores definidos en  $\beta 7$  (o bien los mismos asociados a la estructura en cuestión.) ent  $\partial$  es reconstruido por (o bien definido siendo un operador de adheridos):

$\partial = Cl - I$	$\partial = \delta \circ C_x$
$\partial = C_x \circ Ext - I$	$\partial = Fr - I$
$\partial = C_x \circ Int \circ C_x - I$	$\partial = C_x \circ \nabla - I$
$\partial = Li \circ C_x - I$	$\partial = d - I$

- dem. -

Demostremos para una ET-B; en las otras estructuras la mayor parte se ha demostrado ya en los teoremas secundarios.

- $Cl - I = (I \cup \partial) - I = (I - I) \cup (\partial - I) = \partial$ , en vista  $\partial \leq C_x$ .
- La segunda cae por definición de Ext.
- Para Int usamos el teorema 5.5.3 de donde  $C_x \circ Int \circ C_x$ .
- Nuevamente por definición de Li
- Es obvio:  $\delta \circ C_x = (\partial \circ C_x) \circ C_x = \partial$
- Tómese  $Fr = \partial \cup \partial \circ C_x$  ent  $Fr - I = Fr \cap C_x = (\partial \cup \partial \circ C_x) \cap C_x = (\partial \cap C_x) \cup (\partial \circ C_x \cap C_x)$ , ahora bien  $\partial \leq C_x \therefore \partial \cap C_x = \partial$ , además por lo mismo  $\partial \circ C_x \leq C_x \circ C_x = I$ , de donde  $\partial \circ C_x - I = \partial \circ C_x \cap C_x = Nul_X$
- Así  $Fr - I = \partial \cup Nul = \partial$ .
- Caer por def  $\beta 7$ :  $\nabla = C_x \circ Fr$
- Usando 3° del teorema 5.5.3 stq  $Cl = d \cup I$  de donde  $\partial = Cl - I = d - I$ .

□ QED!

## BIBLIOGRAFÍA

- **Halmos, Paul R.** 1960. *Naive Set Theory*  
1ª ed. Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 109 págs.
- **Herstein, Irving N.** 1984. *Abstract Algebra*  
1ª ed., Macmillan Publishing Company, págs. 235
- **Hu, Sze-Tsen** 1966. *Introduction to General Topology*  
2ª ed. University of California, Holden-Day, Inc., págs. 377
- **Iribarren, Ignacio L.** 1973. *Topología de espacios métricos*  
3ª ed. Editorial Limusa-Wiley, 253 págs.
- **Lipschutz, Seymour** 1970. *Topología General*  
1ª ed. Serie Schaum, McGraw-Hill, Inc., págs. 205
- **Munkress, J. R.** 1975. *Topology, a First Course*  
1ª ed., Prentice-Hall, Ed., págs. 288
- **Pinter, Charles C.** 1971. *Set Theory*  
2ª ed. Addison-Wesley Series in Mathematics, 177 págs.
- **Thron, Wolfgang J.** 1966. *Topological Structures.*  
1ª ed., Holt, Rinehart and Winston Publishing, 240 págs.
- **Willard, Stephen.** 1968. *General Topology*  
2ª ed. University of Alberta, Addison-Wesley Publishing, 369 págs.

