

**Universidad del Valle de Guatemala**  
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



**El teorema de Borsuk Ulam**

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR  
**Ana Sofía Domínguez Cajas**  
PARA OPTAR AL GRADO  
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

GUATEMALA  
2018



## **El Teorema de Borsuk Ulam**

**Universidad del Valle de Guatemala**  
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

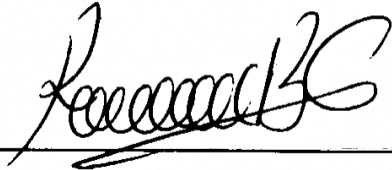


**El teorema de Borsuk Ulam**

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR  
**Ana Sofía Domínguez Cajas**  
PARA OPTAR AL GRADO  
DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

GUATEMALA  
2018


Vo.Bo.:



---

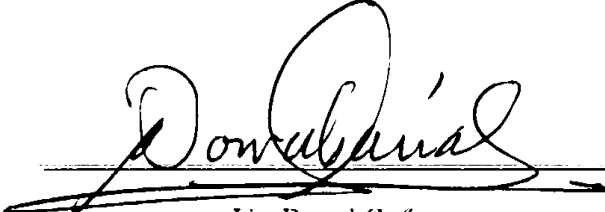
Lic. Ricardo Barrientos

Tribunal Examinador:



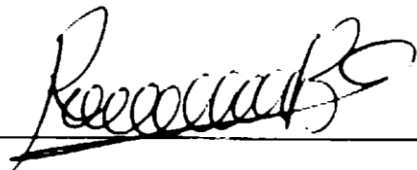
---

M.A. Nancy Zurita



---

Lic. Dorval Cañas



---

Lic. Ricardo Barrientos

Fecha de aprobación:

Guatemala, 22 de noviembre de 2018

# Prefacio

« *La matemática revela sus secretos solo a los que se le aproximan con amor puro y por su belleza propia* »

-Arquímedes

Mi primer acercamiento a las matemáticas fue, como muchos, en el colegio cuando uno aprende a sumar y a contar; sin embargo fue hasta que recibí clases en los entrenamientos para olimpiadas de matemáticas internacionales que me enamoré de esta ciencia. En esas clases aprendí a demostrar y a usar la creatividad (y cualquier herramienta que se pudiera) para resolver problemas. Lo que más me gusta de esta ciencia es que no es necesario que te enseñen las cosas para poder aprenderlo, la lógica nos permite deducir lo que no sabemos. Además toda la matemática es como un juego, nos dan los objetos y las reglas del juego, y a partir de allí uno puede construir lo que quiera. Como cuando uno juega legos, uno tiene las piezas y una infinidad de cosas por armar. Como en todas las cosas, uno siempre va a encontrar personas mejores o más creativas, pero eso no debe desalentar a nadie. Uno no siempre juega para ser el mejor, se juega por lo satisfactorio y la emoción que da el juego.

Lo difícil en la matemática es saber qué no se ha hecho. Es una ciencia tan antigua y tan estudiada que los niveles de abstracción y de dificultad pueden parecer abrumadores. Personalmente me desalenté cuando entré a la universidad y descubrí que la matemática actual parece ser demasiado avanzada, a tal punto que aprender algo de los años ochenta en la clase ya se siente como algo muy avanzado. La ciencia está tan estudiada que ya ni siquiera se puede saber todo sobre la matemática, se debe elegir una rama y enfocarse en eso, porque ya es tan amplio el conocimiento que no es posible abarcarlo todo.

Como una novata, me dio miedo perseguir el camino de la matemática pura y de la investigación al notar lo complicado y abstracto que podía volverse el camino. ¿Qué sucedió con contar manzanas, regalarlas y preguntarse cuántas quedan luego de hacerlo? De repente las donas son lo mismo que las tazas de café. Cuando escuché por primera vez sobre la topología mi miedo creció, pero cuando finalmente llegué a la clase todo cambió. Tuve la suerte de tener un muy buen catedrático que nos introdujo de la forma más natural (y menos dolorosa) a la topología. A pesar de que es muy abstracta, no me sentí tan perdida. Me gustó mucho y además tuve la dicha de echar un vistazo a la topología algebraica, que fue un salto mayor a la abstracción. Eso despertó un interés en mí. Quise incursionar más adentro de la topología y la topología algebraica. En esta búsqueda me topé con el Teorema de Borsuk Ulam (TBU).

El TBU me pareció una manera correcta de echar un vistazo a la topología algebraica y a la creatividad que permite la matemática pura. Lo que me gustó del teorema es que a pesar de que demostrarlo es complicado, es un teorema muy versátil y las aplicaciones son muy variadas y pueden ser muy entendibles y aplicables al mundo real o muy abstractas y muy dentro de la matemática pura. Es un teorema que parece sencillo, pero realmente no lo es.

# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>I. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>II. Caso especial del Teorema de Borsuk Ulam (TBU) cuando <math>N \leq 2</math></b>	<b>3</b>
A. Caso especial del Teorema de Borsuk Ulam donde $n=1$ . . . . .	4
B. Introducción a la topología algebraica . . . . .	4
C. El grupo fundamental del círculo . . . . .	11
D. El TBU . . . . .	16
<b>III. ENUNCIADOS EQUIVALENTES</b>	<b>21</b>
A. Enunciados . . . . .	21
B. Prueba de (a), (b), (c) y (d) . . . . .	23
C. Prueba de (e), (f) y (g) . . . . .	25
D. prueba de (h) . . . . .	26
E. Importancia del Teorema de Borsuk Ulam . . . . .	27
<b>IV. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BORSUK ULAM</b>	<b>29</b>
A. Teoría preliminar . . . . .	29
B. El lema de Tucker . . . . .	32
C. Equivalencia del lema de Tucker y el Teorema de Borsuk Ulam . . . . .	37
<b>V. APLICACIONES</b>	<b>39</b>
A. Aplicaciones en la matemática pura . . . . .	39
1. Generalización del Teorema de Borsuk Ulam . . . . .	39
2. El teorema del punto fijo de Brouwer . . . . .	41
3. La conjetura de Kneser . . . . .	41
B. Aplicaciones no teóricas . . . . .	44
1. El clima y la zona horaria . . . . .	44
2. El problema de los collares . . . . .	46

3.	Modelación de la estructura de conectividad antípoda en las comunidades neuronales . . . . .	48
4.	Una aplicación en la física del TBU . . . . .	49
<b>VI. CONCLUSIONES</b>		<b>51</b>
<b>VII. RECOMENDACIONES</b>		<b>53</b>
<b>VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>55</b>
<b>IX. ANEXOS</b>		<b>57</b>
A.	Pruebas complementarias . . . . .	57
B.	Glosario . . . . .	58
C.	El lema de Sperner . . . . .	62

# Índice de figuras

1.	TBU para $n = 2$ . . . . .	1
2.	Transformación de espacios topológicos a grupos. . . . .	6
3.	Homotopía entre las curvas $f$ y $g$ . . . . .	7
4.	Homotopía entre las curvas $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$ y $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$ . . . . .	10
5.	Homotopía entre $x_0 \circ \gamma$ y $\gamma$ . . . . .	10
6.	Homotopía entre $\gamma \circ \gamma'$ y $x_0$ . . . . .	11
7.	Caminos en $S^1$ . . . . .	12
8.	La recta $\mathbb{R}$ enrollada en $S^1$ . . . . .	13
9.	Diagrama de una elevación del camino $\alpha$ . . . . .	14
10.	Diagrama de prueba de teorema C.4. . . . .	15
11.	Representación gráfica de demostración de lema L.2. . . . .	17
12.	Ciclos de implicación del TBU y sus enunciados equivalentes . . . . .	27
13.	Representación de un grafo. . . . .	30
14.	simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3. . . . .	31
15.	Conjunto de simplejos que no forman un complejo simplicial en un cono. . . . .	32
16.	Triangulaciones del círculo. . . . .	32
17.	Representación visual de los primeros casos de $\boxtimes^n$ y $\diamond^n$ . . . . .	34
18.	Retracción de $B^n$ a $S^{n-1}$ . . . . .	41
19.	Ejemplos de grafos de Kneser. . . . .	42
20.	Mapa de las Islas Samoa. . . . .	45
21.	Zona horaria en una circunferencia. . . . .	45
22.	Repartición de un collar en el intervalo $[0, 1]$ . . . . .	47
23.	Transformación de simplejos a cubierta cerrada de esfera . . . . .	58



# Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar y probar el teorema de Borsuk-Ulam, de la topología algebraica, que dice que si existe una función continua que mapea a la esfera de dimensión  $n$  al espacio  $\mathbb{R}^n$ , entonces existe un punto  $x$  en la esfera que cumple que  $f(x) = f(-x)$ , es decir existe un punto en la esfera tal que él y su opuesto (diametralmente) tienen la misma imagen bajo la función  $f$ . El teorema tiene un enunciado sencillo de entender, pero su prueba no es sencilla. Para el caso donde  $n$  es uno, sí es fácil hacer la prueba, pero en dimensiones mayores se complica significativamente. En este trabajo se introduce el teorema de Borsuk-Ulam y se aprovecha la dificultad de su prueba para introducir al lector a la topología algebraica y a uno de los usos de la combinatoria para demostrar un resultado de la topología. Seguidamente se termina de presentar el teorema mostrando su versatilidad al ser enunciado de varias formas equivalentes, algunas de las cuales ni siquiera son parte de la topología algebraica. Finalmente se muestran algunas aplicaciones y consecuencias derivadas a partir del teorema de Borsuk-Ulam y algunas de sus variaciones. Algunas de las aplicaciones y consecuencias son artículos publicados recientemente y otras fueron presentados hace bastante tiempo. Con esto se puede ilustrar la utilidad del teorema que desde su publicación no ha parado de producir resultados.



# I INTRODUCCIÓN

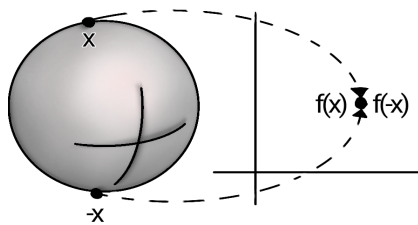
« El arte de hacer matemática consiste en encontrar ese caso especial que contiene todos los gérmenes de la generalidad »

- David Hilbert

Se hace una exposición del Teorema de Borsuk-Ulam (TBU) que pertenece a la topología algebraica. En el trabajo se utilizará la esfera n-dimensional o n-esfera, la cual se define como el espacio  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ . Similarmente, la bola n-dimensional o n-bola, que es la n-esfera y su interior, se define como el espacio  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ .

Dos puntos en una esfera  $S^n$  son antípodas si son diametralmente opuestos, es decir, la recta que une estos puntos contiene un diámetro de la esfera. En el caso en que la esfera está centrada en el origen, dos puntos  $x, y \in S^n$  son antípodas cuando  $x = -y$ . El TBU establece que si se tiene una función  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, entonces existe un punto  $x \in S^n$  tal que el mismo punto y su antípoda tienen la misma imagen bajo la función  $f$ , es decir  $f(x) = f(-x)$ .

Figura 1: TBU para  $n = 2$



Se asumirá que el lector tiene conocimientos básicos de teoría de conjuntos, conoce los fundamentos de las pruebas en matemática y sabe los conceptos más básicos de la topología y del álgebra. No se asume nada más sobre el conocimiento matemático del lector ya que el objetivo principal de este trabajo es mostrar el TBU y su importancia en la matemática, introduciendo al lector a la topología algebraica y a una parte de la combinatoria. Se demostrará el teorema usando topología algebraica para el caso  $n = 2$  (Figura 2) y con métodos combinatorios para el caso general. Además se presentarán versiones equivalentes que resultan útiles en la demostración del propio teorema o en aplicaciones del mismo. Se deducirá el Teorema de punto fijo de Brouwer como corolario del teorema y se presentarán otras implicaciones y aplicaciones del TBU.

Se inicia con la prueba del TBU para el caso  $n = 1$ . Esta solo usa conceptos de cálculo, por lo

que es muy accesible y además permite ver por qué el mismo teorema se complica en dimensiones más grandes. Más adelante se aprovechará que el TBU pertenece a la topología algebraica para introducirla. Existen demostraciones del TBU en topología algebraica, pero para entenderla se necesita conocimiento avanzado en la materia. Por estos motivos, las pruebas de topología algebraica del TBU no se incluyen en el trabajo, pero sí se presenta una de estas para el caso especial en donde  $n = 2$ . Esta prueba se presentará primero debido a que es más intuitiva y es de un nivel adecuado para un principiante en esta área que desea comenzar a explorar lo que es la topología algebraica. Se hace una introducción para entender qué es la topología algebraica y cómo funciona. Se introduce el concepto de caminos y homotopías, con esto se construye un grupo a partir de un espacio topológico. Esta relación entre grupos y espacios topológicos es la base de la topología algebraica. Luego se estudia el grupo fundamental del círculo, en donde surgen definiciones y propiedades que luego servirán para demostrar el TBU para  $n = 2$ .

Luego de ver la demostración del TBU para  $n = 2$ , se procede a enunciar diferentes versiones del teorema y a demostrar la equivalencia entre todas ellas. Después se utiliza una de estas versiones para hacer la prueba del teorema para cualquier  $n$ , en donde se utilizará una de las versiones demostradas en el capítulo anterior.

Luego, se introducen los conceptos y propiedades de combinatoria necesarios para demostrar el teorema. Luego se presenta el lema de Tucker, que es una versión discreta del TBU, se demuestra la equivalencia entre ambos y finalmente se prueba el lema de Tucker, quedando así demostrado el TBU.

Ya que el teorema ha sido demostrado y además se ha introducido al lector a dos ramas de la matemática en las cuales se puede hacer investigación y se ha mostrado la versatilidad del TBU, se procede a mostrar su utilidad. En el último capítulo se abarcan algunas aplicaciones del TBU, que aún recientemente sigue siendo utilizado para publicaciones. Este capítulo se divide en dos secciones, la primera tiene aplicaciones que son meramente teóricas y en la segunda se exponen aplicaciones que ya no son totalmente puras, con dos tipos de exposiciones, algunas son formales y otras son intuitivas. Las que se dan intuitivamente es porque solo se quiere dar al lector una idea del alcance del TBU sin incurrir a tener que introducir demasiados conceptos nuevos o un nuevo marco teórico; además, en otros casos, los conceptos son muy avanzados. De cualquier forma, los trabajos están citados y si el lector está interesado puede buscar el artículo original.

Debido a la utilización de dos ramas diferentes de la matemática y a que se introducen muchos términos nuevos, se ha incluido también un glosario con todos los conceptos introducidos durante el trabajo y con algunos conceptos anteriores que son necesarios para la lectura del documento. No obstante, si el lector no conoce algún término o propiedad que no se introduce en el trabajo, es recomendable buscar literatura más extensa sobre el concepto ya que el glosario funciona para recordar un concepto y no para introducirlo.

## II Caso especial del Teorema de Borsuk Ulam (TBU) cuando $N \leq 2$

*« El tipo de conocimiento que se obtiene solo por observaciones y que todavía no ha sido probado debe distinguirse cuidadosamente de la verdad [...] deberíamos usar ese descubrimiento como una oportunidad para investigar de forma más exacta las propiedades descubiertas y probarlas o desprobarlas; en ambos casos podemos descubrir algo útil »*

- Leonhard Euler

Uno de los principales objetivos de la matemática es el estudio de las relaciones entre objetos. Una de las relaciones más importantes es la de equivalencia. Dependiendo del campo de estudio, se define de forma distinta el “ser equivalentes”. Por ejemplo, en la aritmética dos objetos (números) son equivalentes si su valor es el mismo ( $2+5-3$  es equivalente a  $4$ ); en geometría, dos triángulos son “el mismo” si son congruentes; en topología, dos espacios son “equivalentes” si existe un homeomorfismo entre ellos. Cada campo de estudio en la matemática muy probablemente tendrá la definición de algún tipo de equivalencia.

En la topología existe un problema con la “equivalencia”, y es que para demostrar que dos espacios son homeomorfos hay que encontrar un homeomorfismo entre ellos, lo cual puede resultar difícil. Es aun más complicado demostrar que no son equivalentes, pues para hacerlo hay que mostrar que de todas las aplicaciones entre ambos espacios no existe ninguna que sea un homeomorfismo. En el caso de espacios finitos se puede trabajar de forma exhaustiva, pero con espacios infinitos hay que buscar otros métodos, como el método de trabajar con invariantes topológicos, que son propiedades que se preservan bajo homeomorfismo. Por ejemplo, la conexidad se preserva bajo homeomorfismos, entonces para demostrar que dos espacios no son homeomorfos se prueba que uno es conexo y el otro no; de esta forma no puede existir un homeomorfismo entre ambos espacios.

En la búsqueda de métodos para trabajar con la “equivalencia” de la topología nació la topología algebraica (Chamizo, 2004). La idea es transformar los espacios topológicos en grupos y convertir las relaciones entre espacios en relaciones entre grupos de tal forma que las funciones continuas se vuelvan homomorfismos. Con esto se puede utilizar la teoría del álgebra para demostrar propiedades en la topología.

## A. Caso especial del Teorema de Borsuk Ulam donde $n=1$

En el caso de  $n = 1$ , el TBU se puede demostrar fácilmente con herramientas básicas de cálculo. A continuación se presenta la demostración.

**Teorema A.1.** *Dada una función continua  $f : S^1 \mapsto \mathbb{R}$ , existe  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .*

**Demostración.** *Considere la siguiente función:  $g(x) := f(x) - f(-x)$ . Dado que  $f$  es continua,  $g$  es continua. Se consideran los dos casos, cuando  $g(x)$  es cero y cuando no.*

*Si  $g(x) = 0$  para algún  $x \in S^1$ , entonces  $f(x) - f(-x) = 0 \implies f(x) = f(-x)$  y el teorema quedaría demostrado.*

*Si  $g(x) \neq 0$ , entonces existe  $c \in S^1$  tal que  $g(c) \neq 0$  lo que implica que  $g(-c) = f(-c) - f(-(-c)) = f(-c) - f(c) = -(f(c) - f(-c)) = -g(c)$  y, por lo tanto,  $g(c)$  y  $g(-c)$  tienen signos diferentes. Por el teorema del valor medio, existe  $x \in S^1$  tal que  $g(x) = 0$ , entonces existe  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = f(-x)$ . Por lo cual el teorema, de nuevo, quedaría demostrado.*

*En cualquier caso, existe  $x \in S^1$  tal que  $f(x) = f(-x)$  ■*

Esta misma prueba no funcionará para  $n > 1$ , porque ya no se puede utilizar el teorema del valor intermedio. Ahora resulta más difícil encontrar una prueba. Para demostrar el caso general del teorema se utilizará la combinatoria, sin embargo en las siguientes secciones se demostrará el TBU para el caso  $n=2$ . Para esto se introducirá a la topología algebraica. Hay muchas demostraciones en esta rama de la matemática para el TBU en el caso general, pero son muy avanzadas. Por ejemplo se pueden encontrar demostraciones de topología algebraica en (Matousek, 2003) o en (Hatcher, 2001). El objetivo de incluir la demostración para  $n = 2$  es dar al lector una introducción a la topología algebraica.

## B. Introducción a la topología algebraica

Se comentó que para llegar a el mundo de la topología al álgebra se transformarán los espacios topológicos en grupos. Esto se hará a través del grupo fundamental, que a su vez, es lo que se conoce como un funtor. La teoría detrás del grupo fundamental es la de categorías. Una categoría es un conjunto de espacios y relaciones entre esos espacios, entonces el funtor es una aplicación que se da entre categorías, en donde a cada espacio de una categoría le asigna un espacio de la otra y a cada relación le asigna una relación.

**Definición B.1.** *Una categoría  $\mathcal{C}$  está conformada por:*

- *Una clase  $Ob(\mathcal{C})$  de objetos.*
- *Una clase de morfismos, mapeos o flechas entre los objetos  $hom(\mathcal{C})$ . Para cada par de objetos  $A, B \in Ob(\mathcal{C})$ , se denotan los morfismos entre  $A$  y  $B$  por el conjunto  $C(A, B)$ .*

- Para cada triada  $A, B, C \in \mathcal{C}$ , existe una operación binaria  $\circ : \text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \mapsto \text{hom}(A, C)$ .

Además cumple con los siguientes axiomas:

- (Asociatividad) Sean  $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  Si  $f : A \mapsto B$ ,  $g : B \mapsto C$  y  $h : C \mapsto D$ , entonces  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
- (identidad) Para cada Objeto  $A \in \mathcal{C}$ , existe  $1_A \in C(A, A)$  tal que para cada morfismo  $f \in C(A, B)$  se tiene que  $1_A \circ f = f$  y para cada morfismo  $g \in C(B, A)$  se cumple que  $g \circ 1_A = g$ .

Por lo tanto, el funtor es un mapeo entre categorías que asigna objetos a objetos y morfismos a morfismos.

**Definición B.2.** Sean  $A$  y  $B$  categorías, entonces un funtor  $F$  de  $A$  a  $B$  es un mapeo que cumple:

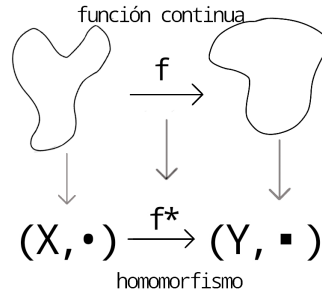
- Le asocia a cada objeto  $X \in \text{Ob}(A)$  un objeto  $F(X)$  en  $B$ .
- Para dos objetos  $X, Y \in A$ , le asigna a cada morfismo  $f \in C(X, Y)$  un morfismo  $F(f)$  en  $C(F(X), F(Y))$  tal que se cumplen las siguiente:
  - $F(1_X) = 1_{F(X)}$
  - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ , para cualquier  $g \in C(Y, Z)$   $Z \in \text{ob}(A)$ .

No se entrará en detalle, pero los espacios topológicos y los grupos formarán categorías y, entonces, el grupo fundamental será un funtor entre estas dos categorías. A continuación se introduce brevemente. Primero se definirán los objetos y luego los morfismos para ambas categorías.

El grupo fundamental debe tener las propiedades del espacio topológico al que está buscando representar. Por eso, para construirlo una de las primeras interrogantes que surge es: ¿Qué es lo importante en un espacio topológico? Entonces uno puede recordar una de las primeras nociones que se aprenden sobre la topología: “para la topología una dona es lo mismo que una taza”. Si uno pregunta por qué, entonces responden que la taza y la dona cada una tiene un hoyo y por eso son iguales. A veces en lugar de esa explicación se da la siguiente: una dona se puede “transformar suavemente” en una taza, si fuera de plastilina, no habría necesidad de romperla para convertirla en una taza. En la primera se puede notar que los hoyos son importantes y en la segunda se ve que las cosas que se “transforman suavemente” en otras son iguales topológicamente.

El grupo fundamental se compone de las curvas que se pueden hacer en un espacio topológico a partir de un punto. Se trabaja con las curvas que inician y terminan en el mismo punto. Si un espacio no tiene ningún hoyo, todas las curvas que inician en el mismo punto y terminan en el mismo punto son prácticamente iguales. Si hay un hoyo en el espacio topológico, entonces hay curvas que tienen al hoyo adentro y otras que no.

Figura 2: Transformación de espacios topológicos a grupos.



Lo anterior es una descripción intuitiva. A continuación se presentará la construcción formal del grupo fundamental. Pero antes se presentan unas notaciones y definiciones para los objetos con los que se estará trabajando. Una de las herramientas principales son las trayectorias en el espacio topológico. Para simplificar el trabajo se introduce la notación en la siguiente nota.

*Nota.* Sean  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$ , una trayectoria con  $\gamma(0) = x_0$  y  $\gamma(1) = x_1$ . Entonces  $p(\mathcal{X}; x_0; x_1)$  denota el conjunto de trayectorias en  $\mathcal{X}$  que inician en  $x_0$  y terminan en  $x_1$ . En el caso en que  $x_0 = x_1$ , entonces  $p(\mathcal{X}; x_0; x_1) = p(\mathcal{X}; x_0)$ . Estas últimas son las trayectorias cerradas que tienen a  $x_0$  como punto base.

Al trabajar con trayectorias es importante recordar la composición de trayectorias y las trayectorias inversas. La composición de dos trayectorias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es el camino que resulta al pasar primero por  $\gamma_1$  y seguidamente por  $\gamma_2$ . Por otro lado, el camino inverso es recorrer la misma trayectoria, pero en sentido contrario (comenzando por el punto final y terminando en el inicial). En el glosario (Anexo B) se incluye la definición formal de estos dos conceptos.

*Nota.* Se estará trabajando con las siguientes definiciones:

1. Un espacio topológico  $\mathcal{X}$  en el que se especifica un punto  $x_0$  se llama espacio puntuado y se denota  $(\mathcal{X}, x_0)$ .
2. Dados  $(\mathcal{X}, x_0)$  y  $(\mathcal{Y}, y_0)$  espacios topológicos puntuados,  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  se llama mapeo puntuado si  $f(x_0) = y_0$ .

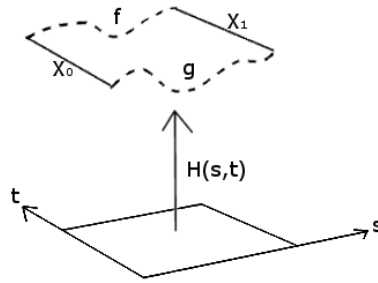
Ahora se introducirán las homotopías que son la manera formal de decir que una trayectoria se “transforma suavemente” en la otra. La definición de homotopía se forma a partir de la existencia de cierta función continua entre dos trayectorias. Esta función está definida en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  de tal forma que una arista del cuadrado tenga a una de las dos trayectorias y la arista opuesta tenga a la otra (Figura 3). Además, en las dos aristas restantes, se mantiene constante el punto de inicio (en una) y el punto final (en la otra). Esta relación se define de la manera siguiente:

**Definición B.3.** Sean  $f, g \in p(\mathcal{X}; x_0, x_1)$  dos trayectorias. Entonces  $f$  es homótopa a  $g$  (en símbolos  $f \simeq g$ ), si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$  tal que:

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & s = 0, 0 \leq t \leq 1 \\ x_1 & s = 1, 0 \leq t \leq 1 \\ f(s) & 0 \leq s \leq 1, t = 0 \\ g(s) & 0 \leq s \leq 1, t = 1 \end{cases}$$

En este caso a  $H$  se le denomina homotopía entre  $f$  y  $g$ .

Figura 3: Homotopía entre las curvas  $f$  y  $g$ .



El objetivo es convertir un espacio topológico en un grupo, de tal forma que el grupo guarde información sobre el espacio. La homotopía permite decir si dos trayectorias son “equivalentes”. Lo ideal sería que la homotopía fuera en realidad una relación de equivalencia ya que esto induciría una partición en las trayectorias. Continuando con el razonamiento anterior, esta partición justamente separaría a las curvas que contienen un hoyo de las que no lo contienen. Pero, para poder decir esto es necesario probar que la homotopía es, en efecto, una relación de equivalencia. No se procederá a hacer esta prueba, pero se argumenta por qué se cumple.

La relación es reflexiva, pues dada una trayectoria  $f(s)$ , entonces  $H(s, t) = f(s)$  es una homotopía que transforma a  $f$  en sí misma. Si la trayectoria es  $f$ , entonces  $H(s, t) = f(s)$  es una homotopía que implica que  $f$  es homótopa a sí misma. Para la simetría basta darse cuenta que si una trayectoria se puede transformar en otra, se puede regresar de la misma forma para volver a la trayectoria inicial. si  $H(s, t)$  es la homotopía entre  $f$  y  $g$ , entonces  $H'(s, t) = H(1 - s, t)$  será una homotopía entre  $g$  y  $f$ . Finalmente, para la transitividad, basta considerar la composición de dos homotopías y notar que esta también es una homotopía. Con estas tres condiciones se confirma que la homotopía es una relación de equivalencia, por lo cual induce una partición.

Ya con esto se tienen los candidatos para ser los elementos del grupo fundamental de un espacio topológico  $(\mathcal{X}, x_0)$ : las clases de equivalencia inducidas por la relación de homotopía en

las trayectorias de  $p(\mathcal{X}; x_0)$ . Sin embargo aún falta definir la operación en el grupo. Para esto se utiliza la concatenación.

**Definición B.4.** Dadas  $[\gamma_1]$  y  $[\gamma_2]$  dos clases de equivalencia respecto a la relación de homotopía en un espacio topológico puntuado, se define la operación entre clases como:  $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \circ \gamma_2]$ , donde  $\circ$  es la composición de trayectorias (ver anexo B).

Ahora sí, todo está listo para definir al grupo fundamental.

**Definición B.5.** Sea  $(\mathcal{X}, x_0)$  un espacio topológico puntuado. Entonces el conjunto de clases de equivalencia de trayectorias cerradas en  $P(\mathcal{X}; x_0)$ , con respecto a  $\simeq$ , junto con la operación entre clases es el Grupo Fundamental de  $\mathcal{X}$  en  $x_0$  y se denota por  $\prod_1(\mathcal{X}; x_0)$ .

Ahora bien, nótese que en la descripción intuitiva se mencionan solo las trayectorias que inician y terminan en un mismo punto y nunca se menciona qué punto o por qué solo este tipo de trayectorias se toma en cuenta. Se toman solo las curvas que inician y terminan en el mismo punto porque estas son las que describirán la existencia de hoyos en el espacio topológico y son las más sencillas para trabajar. Estas resultan convenientes para definir la operación en el grupo fundamental. Con respecto a por qué no se define qué punto se está utilizando, no se hace porque el grupo fundamental será el mismo independientemente del punto elegido. Esto se prueba en la siguiente nota.

*Nota.* Sean  $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$  y sea  $h \in p(\mathcal{X}; x_0, x_1)$ . Entonces el mapeo  $\beta_h : \pi_1(\mathcal{X}, x_1) \mapsto \pi_1(\mathcal{X}, x_0)$ , con regla de asignación  $\beta_h([f]) = [h \circ f \circ h^{-1}]$ , es un isomorfismo.

*Demostración.* Primero se probará que  $\beta_h$  está bien definido. Para esto basta notar que  $h \circ f \circ h^{-1}$  es un lazo anclado en  $x_0$  y bien definido.

Lo siguiente que hay que probar es que  $\beta_h$  es un homomorfismo. Sea  $[g] \in \pi_1(\mathcal{X}, x_1)$ , entonces  $\beta_h([f][g]) = \beta_h([f \circ g]) = [h \circ f \circ g \circ h^{-1}] = [h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ g \circ h^{-1}] = [h \circ f \circ h^{-1}][h \circ g \circ h^{-1}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$ .

Por último falta demostrar que  $\beta_h$  es biyectiva. Para esto se demostrará que tiene inverso. El candidato para inverso es  $\beta_{h^{-1}}$ . Vea que  $\beta_h\beta_{h^{-1}}([f]) = \beta_h([h^{-1} \circ f \circ h]) = [h \circ h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1}] = [f]$ . Similarmente  $\beta_{h^{-1}}\beta_h([f]) = \beta_{h^{-1}}([h \circ f \circ h^{-1}]) = [h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} \circ h] = [f]$ . ■

Ahora solamente falta probar que el grupo fundamental es, en efecto, un grupo. Para esto se prueban los cuatro axiomas de los grupos. La prueba que presento a continuación está basada en la prueba presentada en (Chamizo, 2004). En esta prueba hay que construir homotopías, que no en todos los casos son intuitivas. Cada una de las cuatro partes de esta demostración involucra una homotopía. Para ayudar a comprender cada una de estas, se incluyen figuras que ilustran la homotopía.

**Teorema B.1.** *Sea  $(\mathcal{X}, x_0)$  un espacio topológico puntuado, entonces  $\prod_1(\mathcal{X}; x_0)$ , con la operación entre clases, es un grupo.*

**Demostración.** *Para la demostración, sea  $(\mathcal{X}, x_0)$  un espacio topológico puntuado.*

1. *Primero hay que ver que la operación está bien definida y que se cumple la cerradura. Sean  $\gamma, \gamma', \delta, \delta' \in p(\mathcal{X}; x_0)$  tales que  $\gamma \simeq \gamma'$  y  $\delta \simeq \delta'$ . Para que la operación esté bien definida se tiene que cumplir que  $[\gamma][\delta] = [\gamma'][\delta']$ . Por definición esto es equivalente a que  $[\gamma \circ \delta] = [\gamma' \circ \delta']$ . Por lo tanto, para que la operación entre clases esté bien definida, basta probar que  $\gamma \circ \delta \simeq \gamma' \circ \delta'$ .*

*Sean  $H_1$  y  $H_2$  las homotopías entre  $\gamma$  y  $\gamma'$  y entre  $\delta$  y  $\delta'$ , respectivamente. Defínase  $H(s, t) = H_1(s, t) \circ H_2(s, t)$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Entonces  $H$  es continua (ya que  $H_1$  y  $H_2$  son continuas) y, además,  $H(s, 0) = H_1(s, 0) \circ H_2(s, 0) = \gamma \circ \delta$ ,  $H(s, 1) = H_1(s, 1) \circ H_2(s, 1) = \gamma' \circ \delta'$ ,  $H(0, t) = \delta(0) = x_0$  y  $H(1, t) = \gamma(1) = x_0$ . Por lo tanto  $H$  es homotopía y  $\gamma \circ \delta \simeq \gamma' \circ \delta'$ .*

2. *Ahora se probará la asociatividad, es decir  $[\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3]) = ([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3]$ , donde  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in p(\mathcal{X}; x_0)$ . Para esto basta probar que los lazos  $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$  y  $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$  son homótopos. Las reglas de asignación de cada uno de estos lazos se puede escribir explícitamente de la siguiente forma:*

$$\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4s - 2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \gamma_3(4s - 3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \gamma_2(4s - 2) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_3(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

*Para los lazos anteriores considere la siguiente función:*

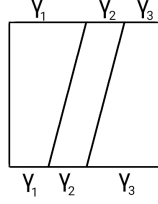
$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1((2s)t + (4s)(1-t)) & 0 \leq s \leq (\frac{t}{2} + \frac{1-t}{4}) \\ \gamma_2(4s - 2) & (\frac{t}{2} + \frac{1-t}{4}) \leq s \leq (\frac{3t}{4} + \frac{1-t}{2}) \\ \gamma_3((4s - 3)t + (2s - 1)(1-t)) & (\frac{3t}{4} + \frac{1-t}{2}) \leq s \leq 1 \end{cases}$$

*Note que la función anterior cumple la definición B.1, por lo cual los lazos son homótopos y entonces hay asociatividad.*

3. *Se continúa la prueba demostrando que existe un elemento identidad. Vea que el lazo constante  $x_0$  pertenece al conjunto de lazos anclados en  $x_0$ . Ahora considere un lazo cualquiera  $\gamma \in p(\mathcal{X}; x_0)$ , se probará que  $[\gamma][x_0] = [x_0][\gamma] = [\gamma]$ . Para esto hay que probar las siguientes dos:*

$$(1) \ x_0 \circ \gamma \simeq \gamma$$

Figura 4: Homotopía entre las curvas  $\gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3)$  y  $(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3$ .

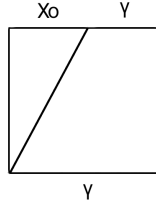


$$(II) \quad \gamma \circ x_0 \simeq \gamma$$

Para probar (I), considere la siguiente homotopía:

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \gamma\left(\frac{2s-t}{2-t}\right) & \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Figura 5: Homotopía entre  $x_0 \circ \gamma$  y  $\gamma$ .



Para probar (II), considere, similarmente, la siguiente homotopía:

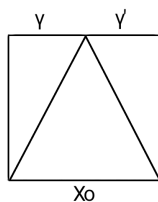
$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{2s}{2-t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{2-t}{2} \\ x_0 & \frac{2-t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

4. Finalmente sólo falta probar la existencia de los inversos. Es decir, para  $\gamma \in p(\mathcal{X}; x_0)$ , existe  $\gamma' \in p(\mathcal{X}; x_0)$  tal que  $[\gamma][\gamma'] = [x_0]$  y  $[\gamma'][\gamma] = [x_0]$ . Sea  $\gamma'$  el camino inverso (ver anexo B) de  $\gamma$  y considere la siguiente homotopía:

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma(2ts) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t(1-s)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $H(s, 0) = x_0$  y  $H(s, 1) = \gamma \circ \gamma'$ . Además en la intersección  $s = \frac{1}{2}$ , en ambas partes se vuelve  $\gamma(t)$ , por lo que es continua. Entonces  $\gamma \circ \gamma' \simeq x_0$ , lo que implica que  $[\gamma][\gamma'] = [x_0]$ , que prueba la primera de las ecuaciones que hay que probar. Para probar la otra ecuación

Figura 6: Homotopía entre  $\gamma \circ \gamma'$  y  $x_0$ .



considere:

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma(2t(1-s)) & 0 \leq s \leq (1 - \frac{t}{2}) \\ \gamma'(2ts) & (1 - \frac{t}{2}) \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $H(s, 0) = x_0$  y  $H(s, 1) = \gamma' \circ \gamma$ . Además en la intersección  $s = \frac{1}{2}$ , en ambas partes se vuelve  $\gamma(t)$ , por lo que es continua.

Por lo tanto se cumplen los cuatro axiomas de un grupo, entonces el grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo con la operación entre clases.

■

## C. El grupo fundamental del círculo

Este es un buen momento para recordar lo que se está construyendo. Se necesita un tipo de transformación que convierta a los espacios topológicos en grupos y a las funciones continuas en homomorfismos. La primera parte ya está completa. En términos de categorías, los objetos de la primera categoría son los espacios topológicos puntuados y los objetos de la segunda categorías son los grupos fundamentales. sin embargo, falta proponer los morfismos en ambas categorías. En la categoría de espacios topológicos se propone a las funciones continuas. Luego se define la siguiente transformación: Sea  $f$  una función continua entre los espacios topológicos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ , entonces el mapeo  $f_* : \pi_1(\mathcal{X}) \mapsto \pi_1(\mathcal{Y})$  entre los grupos fundamentales tal que para  $[\gamma] \in \pi_1(\mathcal{X})$  el mapeo se define por  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ . Vea que como  $\gamma$  es un lazo en  $\mathcal{X}$ , entonces  $f(\gamma)$  es un lazo en  $\mathcal{Y}$ . Estos serán los morfismos en la segunda categoría. Se demostrará que estos son homomorfismos.

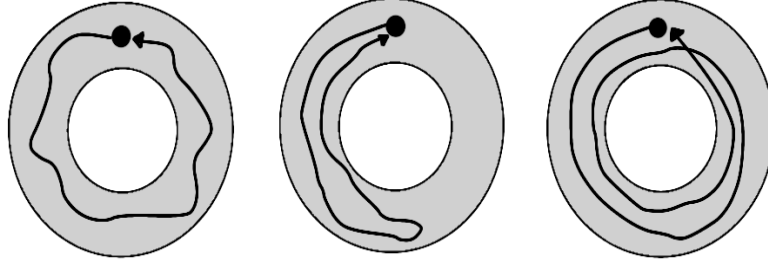
**Lema C.1.** Si  $f$  es una función continua, entonces  $f_*$  es un homomorfismo.

**Demostración.** Para probar esto nótese que  $f_*([\gamma_1][\gamma_2]) = f_*[\gamma_1 \circ \gamma_2] = [f(\gamma_1 \circ \gamma_2)] = [f(\gamma_1) \circ f(\gamma_2)] = [(f \circ \gamma_1) \circ (f \circ \gamma_2)] = [f \circ \gamma_1][f \circ \gamma_2] = f_*[\gamma_1]f_*[\gamma_2]$ . ■

Ahora que ya hemos definido lo que es el grupo fundamental aterrizaremos con un ejemplo. A continuación se calculará el grupo fundamental del círculo. De calcular esto salen los resultados necesarios para probar el TBU para  $n=2$ .

Considérese el espacio  $S^1$  y cómo se ven los caminos en este espacio. Si fuera una calle, un camino que inicia y termina en  $(1, 0)$  es cualquier recorrido que haga una persona sobre la calle (sin salirse), empezando en el punto indicado y terminando su recorrido allí mismo. Por ejemplo, en la Figura 7 se muestran tres caminos posibles. Otros tres caminos posibles es hacer exactamente el mismo recorrido, pero en dirección contraria.

Figura 7: Caminos en  $S^1$



Ahora bien, en la Figura 7 ningún camino se puede deformar en otro. Una razón intuitiva es que el primero da una vuelta y el tercero da dos vueltas. No parece ser posible “desenredar” las dos vueltas para que se convierta en una sola vuelta sin “romper” el camino original. Otra forma de ver estos caminos, es como un cilindro de altura infinita con una banda elástica. Si la banda da una vuelta al rededor del cilindro, no es posible hacer que de dos vueltas o sacarlo para que no dé ninguna. Solo se podría si se pudiera “pasar por el interior de la circunferencia” o rompiendo la banda, pero estamos en  $S^1$  y no en  $B^2$ , por lo cual solo se puede pasar por la circunferencia.

Entonces se intuye que los caminos pueden ser descritos por el número de vueltas que dan a la circunferencia y el resto de caminos debe ser homótopos a alguno de estos. Es decir, se plantea la siguiente hipótesis: El grupo fundamental del círculo es el grupo formado por todos los caminos de la forma

$$\alpha_n : [0, 1] \mapsto S^1$$

$$\alpha_n(t) = (\cos(2n\pi t), \text{sen}(2n\pi t))$$

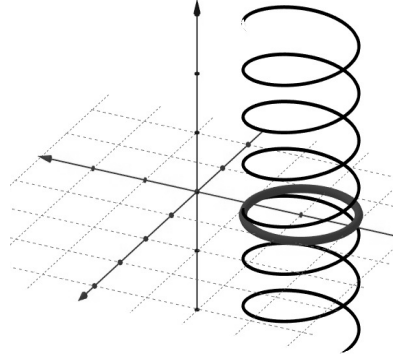
Nótese que  $\alpha_n(0) = \alpha_n(1) = (1, 0)$ . Además,  $n$  indica la cantidad de vueltas que da el camino al rededor de la circunferencia. Si  $n$  es negativo, entonces da las vueltas en dirección a favor de las manecillas del reloj.

Ahora se formalizará todo el razonamiento anterior. Vea que lo que se está haciendo es enrollar la recta en la circunferencia. Esto es posible ya que en intervalos muy pequeños, la recta se asemeja a  $S^1$ .

**Definición C.1.** Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos y sea  $p : E \rightarrow X$  continua y sobreyectiva. Se dice que  $p$  es una proyección recubridora y que  $E$  es un espacio recubridor de  $X$  si para todo  $x \in X$

existe un entorno  $U(x)$  con  $p^{-1}(U(x)) = \bigcup V_\alpha$ , donde los conjuntos  $V_\alpha$  son abiertos disjuntos en  $E$  tales que  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo.

Figura 8: La recta  $\mathbb{R}$  enrollada en  $S^1$



**Lema C.2.**  $\mathbb{R}$  es un espacio recubridor de  $S^1$  con proyección  $p : \mathbb{R} \mapsto S^1$ ,  $p(x) = (\cos(x), \sin(x))$

**Demostración.** Sea  $x = (1, 0) \in S^1$  (recuerde que el grupo fundamental es independientemente del punto elegido). Sea  $U = \{(x, y) \in S^1 | x > 0\}$ , entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} | \cos(x) > 0\} \\ &= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \\ &= \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} V_n, \end{aligned}$$

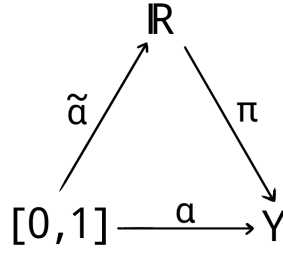
en donde  $V_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$  son abiertos en  $\mathbb{R}$ . Además  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo ya que al hacer un cambio de coordenadas a polares,  $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  y  $p|_{V_\alpha}$  es  $p|_{V_\alpha}(t) = t - 2\pi n$ . Por lo tanto  $\mathbb{R}$  es espacio recubridor de  $S^1$ . ■

Con este resultado se puede introducir la definición de lifting o elevación, que permite desenrollar los caminos en  $S^1$  y mandarlos a  $\mathbb{R}$ .

**Definición C.2.** Sea  $E$  un espacio recubridor de  $X$  y  $p$  su proyección recubridora. Dada una función  $F : E \mapsto X$ , se dice que  $\tilde{f}$  es una elevación de  $f$  si  $p(\tilde{f}(x)) = f(x)$ .

Las elevaciones definidas de esta manera tienen propiedades interesantes e importantes para nuestro trabajo. La primera es que la elevación de un camino  $\alpha$  en un espacio  $\mathcal{X}$  es única. También se cumple que las elevaciones de caminos homótopos son homótopos. Estos dos resultados se prueban en los dos lemas siguientes.

**Lema C.3.** Sean  $(E, e_0)$  un espacio recubridor de  $(\mathcal{X}, x_0)$  y  $p$  su proyección recubridora, de tal forma que  $p(e_0) = x_0$ , entonces todo camino  $\alpha$  en  $\mathcal{X}$  con  $\alpha(0) = x_0$  admite una única elevación  $\tilde{\alpha}$  que cumpla que  $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ .

Figura 9: Diagrama de una elevación del camino  $\alpha$ 

**Demostración.** La definición de  $p$  no hace necesario que la proyección tenga inversa por lo que no podemos simplemente decir  $\tilde{\alpha} = p^{-1} \circ \alpha$ , pero sí sabemos que en intervalos pequeños  $p$  es un homeomorfismo.

En la definición de  $p$  se definen los conjuntos  $U(x)$ , que conforman una cobertura de  $\mathcal{X}$ . Por lo tanto  $\alpha^{-1}(U(x))$  es un recubrimiento del intervalo  $[0, 1]$ . Dado que este es un conjunto compacto, existe una subcobertura finita. Entonces existe un número  $\ell$  que cumple que  $B(x, \ell) \subset \alpha^{-1}(U(x)) \forall x \in \mathcal{X}$ . Es decir, a cada vecindad  $\alpha^{-1}(U(x))$  le cabe una bola abierta de radio  $\ell$ . Entonces defínase  $N \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{1}{N} \leq \ell$ . Entonces cada intervalo  $[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , cumple que  $\alpha([\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}]) \subset U(x)$ .

Por definición  $p^{-1}(U(x))$  contiene un abierto  $\mathcal{W}_0$  que contiene a  $e_0$  tal que  $p|_{\mathcal{W}_0} : \mathcal{W}_0 \rightarrow U(x)$  es un homeomorfismo. Por lo tanto se puede definir

$$\tilde{\alpha}(t) = (p|_{\mathcal{W}_0})^{-1} \circ \alpha(t)$$

definida para  $t \in [0, \frac{1}{N}]$ .

De la misma forma, cada  $U(x)$  contiene un abierto  $\mathcal{W}_1$  tal que  $p|_{\mathcal{W}_1} : \mathcal{W}_1 \rightarrow U(x)$  es un homeomorfismo para  $t \in [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$ . Tras hacer esto  $N$  veces, se define una única elevación  $\tilde{\alpha}$ . ■

**Lema C.4.** Sean  $(E, e_0)$  un espacio recubridor de  $(\mathcal{X}, x_0)$  y  $p$  su proyección recubridora, de tal forma que  $p(e_0) = x_0$ , entonces cada homotopía de caminos  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{X}$  con  $F(0, 0) = x_0$  admite una única elevación  $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $\tilde{F}$  es una homotopía de caminos con  $\tilde{F}(0, 0) = e_0$ .

**Demostración.** La construcción de  $\tilde{F}$  es análoga a la que se hizo en la prueba anterior. Lo que falta es probar que, en efecto,  $\tilde{f}$  es una homotopía entre los caminos  $\tilde{F}(t, 0)$  y  $\tilde{F}(t, 1)$ . Para esto hay que probar que en  $t = 0$  y en  $t = 1$  la función es constante.

Sea  $A_i = \{\tilde{F}(i, s) | s \in [0, 1]\}$ , con  $i = 0, 1$ . Entonces  $P(A_i) = \{F(i, s) | s \in [0, 1]\}$ . Pero como  $F$  es una homotopía entre caminos, entonces cuando  $t = 0$  o  $t = 1$ ,  $F(t, s) = x_0$ , por lo cual  $P(A_i) = \{x_0\}$  es constante para  $i = 0, 1$ . Entonces  $A_i \subset p^{-1}(x_0)$ . Por otro lado, en la definición

de proyección, existen  $V_\alpha$  que hacen que  $p|_{V_\alpha}$  sea homomorfismo, por lo cual  $(p|_{V_\alpha})^{-1}(x)$  tiene un solo elemento. Entonces, como se tiene que

$$A_i = \bigcup_{\alpha} A_i \cap V_\alpha,$$

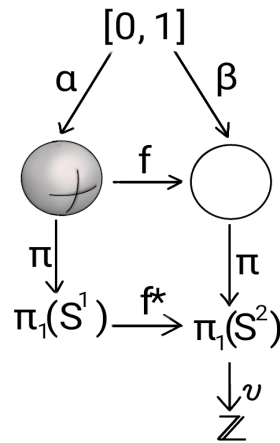
$A_i$  debe tener un solo elemento, ya que de otra forma, no sería conexo, pero  $[0, 1]$  sí es conexo y  $\tilde{F}$  es continua, por lo tanto  $A_i$  debe ser conexo y entonces ser constante. Por lo tanto  $\tilde{F}(0, s)$  y  $\tilde{F}(1, s)$  son constantes y  $\tilde{F}$  es una homotopía entre  $\tilde{F}(t, 0)$  y  $\tilde{F}(t, 1)$ . ■

**Teorema C.5.**  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ .

**Demostración.** Sea  $v([\alpha]) = \frac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi}$  para cada camino  $\alpha$  en  $S^1$ . Por el lema C.3., si dos caminos son homótopos, entonces sus elevaciones son homótopas. Como  $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = \alpha((1, 0))$  y  $p^{-1}((1, 0)) = 2\pi n$ , entonces  $\tilde{\alpha}(1) = 2\pi n$ . Por lo tanto  $v([\alpha]) = \frac{2\pi n}{2\pi} = n \in \mathbb{Z}$

Ahora se probará que  $v$  es un isomorfismo. Es decir, es biyectiva y homomorfismo.

Figura 10: Diagrama de prueba de teorema C.4.



- $v$  es sobreyectiva: Para ver que es sobreyectiva, basta notar que dado  $N \in \mathbb{Z}$ , tomando  $\alpha(t) = (\cos(2\pi Nt), \text{seno}(2\pi Nt))$ , se tiene que  $v([\alpha]) = \frac{\tilde{\alpha}(1)}{2\pi} = \frac{2\pi N}{2\pi} = N$ . Por lo tanto,  $v$  es sobreyectiva.
- $v$  es inyectiva: Si  $v([\alpha]) = v([\beta])$ , entonces  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  y  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ . Entonces definimos  $F(t, s) = p((1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t))$ , y esta es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Por lo tanto sus clases de equivalencia son iguales y  $v$  es inyectiva.

3.  $v$  es homomorfismo: Considere el camino

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tilde{\beta}(2t-1) + \tilde{\alpha}(1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

por el lema técnico (ver anexo), dado que  $\tilde{\alpha}(1)$  es un múltiplo de  $2\pi$ , entonces al aplicarle la proyección a  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} p \circ \gamma(t) &= \begin{cases} p \circ \tilde{\alpha}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ p \circ (\tilde{\beta}(2t-1) + \tilde{\alpha}(1)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta última es la definición de  $\alpha \circ \beta$ . Por lo tanto,  $p \circ \gamma = \alpha \circ \beta$ , lo que implica  $\gamma = \widetilde{\alpha \circ \beta}$ .

Entonces

$$v([\alpha][\beta]) = v([\alpha \circ \beta]) = \frac{\widetilde{\alpha \circ \beta}}{2\pi}(1) = \frac{\gamma}{2\pi}(1) = \frac{\tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)}{2\pi} = v([\alpha]) + v([\beta]).$$

Por lo tanto  $v$  es homomorfismo.

Entonces el grupo fundamental del círculo es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . ■

## D. EL TBU

Antes de proceder a probar el TBU se presenta un lema técnico que servirá para probar el lema D.2. el cual fácilmente implica el TBU. Este último contiene la mayor parte de la prueba.

**Lema D.1.** (Lema técnico uno) Si para todo mapeo continuo  $f : S^2 \mapsto S^1$  que cumple  $f((1,0,0)) = (1,0)$  no es posible que  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in S^2$ , entonces no es posible para ningún mapeo continuo de  $S^2$  a  $S^1$ .

**Demostración.** Se hará una prueba por contradicción. Para esto, suponga que no existe ningún mapeo continuo  $f : S^2 \mapsto S^1$  tal que  $f((1,0,0)) = (1,0)$  y  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  en  $S^2$ . Sea  $f' : S^2 \mapsto S^1$  una función continua tal que  $f'(1,0,0) = (x_1, x_2) \neq (1,0)$ , entonces considere la matriz de rotación:

$$\text{rot}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{seno}(\theta) \\ -\text{seno}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

en donde  $\theta$  es el ángulo de las coordenadas polares del punto  $(x_1, x_2)$ . Entonces la rotación está moviendo el punto un ángulo  $\theta$  a favor de las manecillas del reloj, por lo cual,  $\text{rot}(x_1, x_2) = (1,0)$ .

Entonces  $\text{rot} \circ f'((1,0,0)) = (1,0)$ .

Ahora defínase  $f := \text{rot} \circ f'$ . Dado que  $f'$  y  $\text{rot}$  son continuas,  $f$  es una función continua que cumple que  $f(1, 0, 0) = (1, 0)$ , entonces no puede cumplirse que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  en  $S^2$ .

Suponga que  $f'$  cumple que  $f'(-x) = -f'(x)$  para todo  $x$  en  $S^2$ . Entonces como  $\text{rot}$  es una transformación lineal,

$$f(x) = \text{rot} \circ f'(-x) = \text{rot}(f'(-x)) = \text{rot}(-f'(x)) = -\text{rot}(f'(x)) = -\text{rot} \circ f'(x) = -f(x), \forall x \in S^2.$$

Esto es una contradicción a lo que se acaba de deducir, por lo tanto para cualquier  $f : S^2 \mapsto S^1$  continua no se puede cumplir que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  en  $S^2$ . ■

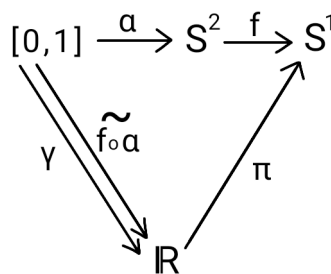
Ahora bien se presenta el lema que contiene la mayor parte de la prueba del TBU.

**Lema D.2.** No existe  $f : S^2 \mapsto S^1$  continua tal que  $f(-x) = -f(x), \forall x \in S^2$

**Demostración.** Se probará para los mapeos  $f : S^2 \mapsto S^1$  continuos tales que  $f((1, 0, 0)) = (1, 0)$ , sin embargo por el lema técnico 1, esto equivale a demostrarlo para cualquier mapeo continuo. En el diagrama II.10 se presenta un esquema que ayudará a comprender la prueba, ya que se estará cambiando mucho de espacios. La prueba consiste en lo siguiente:

Se procederá por contradicción, por lo que se asume la existencia de una función continua que cumple que  $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^2$ . Luego se considera el camino  $\alpha$  en  $S^2$  que recorre el ecuador. Seguidamente se construirá la elevación del camino en  $S^1$  dado por  $f \circ \alpha$  de dos formas distintas. En una de estas formas se utiliza el hecho de que  $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^2$  mientras que en la otra no. Esto dará lugar a una contradicción, en cuanto se evalúe  $\widetilde{f \circ \alpha}(1)$ , ya que de una forma se obtiene que es cero, mientras que de la otra forma se obtiene que es imposible que sea cero.

Figura 11: Representación gráfica de demostración de lema L.2.



I) Se comenzará probando que  $\widetilde{f \circ \alpha}(1) = 0$ : Dado que  $S^2$  es simplemente conexo, todos los caminos que comienzan y terminan en un mismo punto son homótopos. Entonces  $\pi_1(S^2, (1, 0, 0))$  es el grupo trivial. por lo cual  $[\alpha]$  es el elemento neutro en este grupo. Entonces  $f * ([\alpha])$  es el

elemento neutro en  $\pi_1(S^1, (1, 0))$ . Dado que este grupo es homomorfo al grupo de los enteros bajo el mapeo  $v$  definido en la demostración del teorema C.4, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v(f * ([\alpha])) = v([f \circ \alpha]) = \frac{\widetilde{f \circ \alpha}}{2\pi}(1) \\ &\implies \widetilde{f \circ \alpha}(1) = 0 \end{aligned}$$

II) Ahora se probará que  $\widetilde{f \circ \alpha}(1) \neq 0$ :

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^2$  el ecuador de  $S^2$  definido por  $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$ . Y se construirá un camino muy parecido en  $S^1$  para poder utilizarlo para construir la elevación de  $f \circ \alpha$ . Considere el camino en  $S^1$  dado por  $\beta(t) = f((\cos t, \sin t, 0))$  y sea  $\tilde{\beta}$  una elevación de  $\beta$  que cumple que  $\tilde{\beta}(0) = 0$

Primero se calculará la proyección de  $\tilde{\beta}(1)$ .

$$p \circ \tilde{\beta}(1) = \beta(1) = f((\cos(\pi), \sin(\pi), 0)) = f((-1, 0, 0)) = -f((1, 0, 0)) = -(1, 0) = (-1, 0)$$

Nótese que para la penúltima igualdad se utilizó la condición de que  $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^2$ . Ahora bien, recordando que  $p(x) = (\cos(x), \sin(x))$ , si  $p(t) = (-1, 0)$ , entonces  $t = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, como  $p \circ \tilde{\beta}(1) = (-1, 0)$ , se deduce que:

$$\tilde{\beta}(1) = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Ahora considere el siguiente camino en  $\mathbb{R}$  dado por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\beta}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tilde{\beta}(2t - 1) + \tilde{\beta}(1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Este camino resulta ser la elevación de  $f \circ \alpha$ . Para probar esto se le aplicará la proyección a  $\gamma$  y debería de resultar ser igual a  $f \circ \alpha$ .

$$p \circ \gamma(t) = \begin{cases} p \circ \tilde{\beta}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ p \circ (\tilde{\beta}(2t - 1) + \tilde{\beta}(1)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por el lema A.1. (ver anexos),  $p \circ (\tilde{\beta}(2t - 1) + \tilde{\beta}(1)) = -p \circ \tilde{\beta}(2t - 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} p \circ \gamma(t) &= \begin{cases} p \circ \tilde{\beta}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ -p \circ \tilde{\beta}(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \beta(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ -\beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} f((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ -f((\cos(2t-1)\pi, \sin(2t-1)\pi, 0)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f((\cos 2t\pi, \sin 2t\pi, 0)) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} f \circ \alpha(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ f \circ \alpha(t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\
&\implies p \circ \gamma = f \circ \alpha \\
&\implies \gamma = \widetilde{f \circ \alpha}
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la ecuación II.1, se puede afirmar que:

$$\widetilde{f \circ \alpha}(1) = \gamma(1) = \widetilde{\beta}(1) + \widetilde{\beta}(1) = 2\widetilde{\beta}(1) = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Este último no puede ser cero ya que es un impar. Por lo tanto existe una contradicción y queda probado el lema. ■

Con esto ya está todo listo para probar el caso  $n = 2$  del TBU.

**Teorema D.3.** Para cada mapeo continuo  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , existe un par de puntos antípodos  $x$  y  $-x$  en  $S^2$  tales que  $f(x) = f(-x)$

**Demostración.** Considere el mapeo continuo  $f : S^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  y defínase  $g : S^2 \mapsto S^1$  de la siguiente forma:

$$g(x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|}$$

Ahora note que

$$g(-x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = \frac{-(f(-x) - f(x))}{\|f(x) - f(-x)\|} = -\frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x)$$

por el lema anterior,  $g$  no puede ser continua, entonces existe un punto  $x \in S^2$  tal que  $g$  no sea continua en este punto. Esto solo sucederá cuando  $f(-x) = f(x)$ . Por lo tanto se cumple el teorema. ■



# III ENUNCIADOS EQUIVALENTES

*« No hay forma de asegurar de antemano qué matemática pura encontrará una aplicación después. Solo podemos dejar que el proceso de curiosidad y abstracción ocurra, dejar que los matemáticos lleven, obsesivamente, los resultados a los extremos lógicos, dejando la relevancia muy por detrás, y esperar a ver qué temas resultan ser extremadamente útiles. Si no, cuando el futuro llegue, no tendremos a la mano la pieza correcta de matemática aparentemente inútil »*

-Peter Rowlett

## A. Enunciados

Una de las propiedades que hacen del TBU útil es la cantidad de “disfraces” que tiene. Existen muchas versiones equivalentes del teorema, esto permite utilizarlo en variadas ocasiones. En el capítulo de introducción se mencionó una de estas, el lema de Tucker, la cual se utilizará para probar el TBU. Esta versión transporta el TBU al mundo de la combinatoria. El mismo Borsuk (1933) publicó tres versiones diferentes en el artículo original cuando presentó el teorema.

En el recuadro, las versiones (e) y (f) fueron probadas por Lusternik y Shnirel'man (1930), antes de que Borsuk publicara oficialmente su teorema. Esta es la primera prueba del TBU de la que se tiene registro. Actualmente estas versiones llevan el nombre de teorema de Lusternik-Schenirelmann-Borsuk (Teorema LSB).

Puede surgir la duda del por qué el teorema lleva el nombre de Ulam, si Borsuk presentó la prueba y Ulam no aparece como coautor. En realidad, el único indicio que se tiene de la involucración de Ulam es una nota al pie de página de Borsuk que dice que el teorema fue una conjetura de St. Ulam.

*« Dieser Satz wurde als Vermutung von St. Ulam aufgestellt »*

En el recuadro I se presentan nueve enunciados equivalentes y, en los capítulos siguientes, se darán las respectivas pruebas.

## Recuadro I: Versiones del TBU

- (a) (TBU) Para cada mapeo Continuo  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .
- (b) Para todo mapeo antípoda  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = 0$ .
- (c) No existe ningún mapeo antípoda  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$ .
- (d) No existe un mapeo continuo  $f : B^n \mapsto S^{n-1}$  que sea antípoda en la frontera.
- (e) Para cualquier cubierta abierta de la esfera  $S^n$  que contiene exactamente  $n + 1$  abiertos, existe por lo menos un abierto que contiene un par de puntos antípodas.
- (f) Para cualquier cubierta cerrada de la esfera  $S^n$  que contiene exactamente  $n + 1$  cerrados, existe por lo menos un cerrado que contiene un par de puntos antípodas.
- (g) Si  $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$  son subconjuntos de  $S^n$  tales que cada uno es abierto o cerrado y  $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = S^n$ , entonces existe  $i \in [1, n + 1]$  tal que contiene un par de puntos antípodas.
- (h) Para todo mapeo  $f : B^n \mapsto S^n$  continuo y antípoda en la frontera de  $B^n$ , existe  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = 0$ .
- (i) (Lema de Tucker) Sea  $T$  una triangulación simétrica antípoda de  $B^n$ . Sea  $\lambda : V(T) \mapsto \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$  una etiquetación de los vértices de  $T$  tales que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para cada vértice  $v$  en la frontera de  $B^n$ , entonces existe un 1-símplice tal que sus dos vértices tienen una etiqueta con el mismo valor, pero con signos diferentes.

En el capítulo V se incluye una versión más del TBU, pero no se incluye en esta sección por dos motivos: es una versión equivalente solamente para el caso  $n = 2$  y la prueba es complicada y utiliza herramientas de la topología algebraica que no se han introducido en este trabajo. En este capítulo tampoco se incluye la prueba del lema de Tucker ya que esta ya se incluirá como parte del capítulo IV.

Vale la pena mencionar lo que son un retracto y una retracción. Una función continua que va de un espacio topológico a un subespacio, en donde la restricción de la misma al subespacio es la función identidad es un retracto. Si existe esta función, entonces el subespacio se llama retracto del espacio. Entonces, de la versión (d) del teorema, se puede deducir el siguiente lema:

**Lema A.1.** *No existe ningún retracto de  $B^n$  a  $S^{n-1}$ .*

**Demostración.** *Se procederá por contradicción. Suponga que existe un retracto  $f$  de  $B^n$  a  $S^{n-1}$ . Entonces  $f$  es continua y además, en la frontera  $f(x) = x$ . Por lo que  $f(-x) = -x$  en  $S^{n-1}$ , entonces por (d), este mapeo no puede existir, lo que es una contradicción. ■*

## B. Prueba de (a), (b), (c) y (d)

En los primeros cuatro enunciados es fácil probar la equivalencia entre ellos. Se probará de la siguiente forma:

**Demostración.**

$$(a) \implies (b) \implies (c) \implies (d) \implies (a).$$

$$(a) \implies (b)$$

Sea  $f$  un mapeo antípoda  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , es decir  $f$  es continuo y para todo  $x \in S^n$ ,  $f(-x) = -f(x)$ . Por (a), existe  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) = -f(-x) \\ \implies f(-x) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que se cumple (b)

$$(b) \implies (c)$$

Nótese que  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , entonces un mapeo continuo  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$  es en realidad un mapeo continuo  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , entonces por (b) existe  $x$  tal que  $f(x) = 0$ , pero  $0 \notin S^{n-1}$  lo que es una contradicción, por lo cual no existe un mapeo continuo de  $S^n$  a  $S^{n-1}$ .

$$(c) \implies (d)$$

Para este paso primero se probará que el hemisferio de una  $n$ -esfera es homeomorfa a la bola  $n$ -dimensional. Recuerde que la idea básica de un homeomorfismo, es que la función “transforma suavemente” al espacio. Si tomamos el hemisferio norte de una circunferencia y la aplastamos, quedara algo como un intervalo. Si tomamos la parte de arriba de una esfera y la aplastamos quedara un círculo. En general se va a cumplir que si “aplastamos” el hemisferio de una  $n$ -esfera, se obtendrá una  $n$ -bola. Ya formalmente, sea  $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0\}$  el hemisferio norte de  $S^n$  y considere el mapeo  $\pi : H \mapsto B^n$  definido por  $\pi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Este mapeo es un homeomorfismo ya que:

- *Biyectiva:* Si  $\pi(x) = \pi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \pi(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) = \pi(y)$ , entonces  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \pi(y_1, y_2, \dots, y_n)$  lo que implica que  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ . Además, como están en una esfera,  $\sum_i x_i^2 = 1$  y  $\sum_i y_i^2 = 1$ , por lo cual,  $x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2} = y_{n+1}$ , este último paso es posible ya que en el hemisferio norte,  $x_{n+1}$  y  $y_{n+1}$  son positivos. Por lo tanto  $x = y$  y  $\pi$  es inyectivo.

Por otro lado, para cada  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ , entonces  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}) \in S^n$  y su imagen bajo  $\pi$  es  $x$ . Vea que el término dentro de la raíz es positivo por la definición de  $B^n$ . Por lo tanto  $\pi$  es sobreyectivo y entonces es biyectivo.

- *Bicontinua:  $\pi$  es continuo ya que es la proyección canónica. El mapeo inverso también es continuo y es fácil verlo en su forma:  $\pi^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2})$ .*

Ahora bien, para proceder por contradicción suponga que existe un mapeo continuo  $f : B^n \mapsto S^{n-1}$  antípoda en la frontera. Esto significa que existe un mapeo continuo entre el hemisferio de  $S^n$  y  $S^{n-1}$  continuo y antípoda en la frontera. Defínase la función  $g : S^n \mapsto S^{n-1}$  tal que para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n$  entonces

$$g(x) = \begin{cases} \pi \circ f(x) & x_{n+1} \geq 0 \\ g(-x) & x_{n+1} < 0 \end{cases}$$

Entonces existe un mapeo antípoda entre  $S^n$  y  $S^{n-1}$  lo cual es una contradicción por (c).

(d)  $\implies$  (a)

Suponga que existe una función  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$  continua tal que  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x \in S^n$ . Se demostrará que esto implica que existe un mapeo  $f' : B^n \mapsto S^{n-1}$  continuo y antípoda en la frontera, lo que contradiría (d).

Defínase  $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ . Como  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x \in S^n$ , entonces  $g$  es continua. Además  $g$  es antípoda ya que

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -\frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} = -g(x).$$

Ahora, sea  $f' : B^n \mapsto S^{n-1}$ , definida como  $f'(x) = g(\pi^{-1}(x))$ , donde  $\pi$  es el mapeo que se definió en la prueba de ((c)  $\implies$  (d)).

Ahora considere  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial B^n$ , como está en la frontera, entonces  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ , por lo cual  $\pi^{-1}(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ . Además si  $x$  está en la frontera, entonces  $-x$  también estará en la frontera. Por otro lado,  $g(\pi^{-1}(-x)) = g(-\pi^{-1}(x))$ . Entonces, en la frontera

$$f'(-x) = g(\pi^{-1}(-x)) = g(-\pi^{-1}(x)) = -g(\pi^{-1}(x)) = -f'(x).$$

Por lo tanto  $f'$  es un mapeo continuo y antípoda en la frontera, lo que contradice a (d).

Con esto se ha completado la prueba de que (a), (b), (c) y (d) son equivalentes. ■

## C. Prueba de (e), (f) y (g)

En conjunto los incisos (e), (f) y (g) son versiones del Teorema Lusternik-Shnirelman-Borsuk. La prueba de estos teoremas fue presentada en 1930, antes de que Borsuk presentara la suya en 1933, pero no se probó la equivalencia entre los teoremas hasta después de esta fecha. Por eso, la prueba más antigua conocida del TBU es la que presentaron Lusternik y Shnirelman, pero la primera aceptada es la de Borsuk.

**Demostración.** *El esquema de demostración para probar la equivalencia con el TBU es el siguiente:*

$$(a) \implies (f) \implies (g) \implies (e) \implies (f) \implies (c)$$

$$(a) \implies (f)$$

Sea  $\{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$  una cubierta cerrada de  $S^n$ . Se define el mapeo  $F : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$  tal que  $f(x) = (\text{dist}(x, F_1), \text{dist}(x, F_2), \dots, \text{dist}(x, F_n))$ . Por (a), entonces existe  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(-x)$ . Dado que los  $F$  forman una cubierta, existe  $F_i$  tal que  $x \in F_i$ , entonces  $\text{dist}(x, F_i) = 0$ . Si  $i \neq n+1$  y  $x \in F_i$ , la  $i$ -ésima coordenada de  $f(x)$  es cero, entonces la  $i$ -ésima coordenada de  $f(-x)$  también es cero. Por lo tanto,  $x, -x \in F_i$ , y si ninguna coordenada es cero, entonces necesariamente  $x, -x \in F_{n+1}$ . De cualquier forma, existe un  $F_i$  que contiene un par de puntos antípodas.

$$(f) \implies (g)$$

Dados  $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$  conjuntos cada uno abierto o cerrado tal que  $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = S^n$ . Para cada  $x \in S^n$ , si está contenido en un  $U_i$  cerrado, entonces sea  $K_x = U_i$ , si no existe  $i$  que cumpla eso, entonces considere el vecindario  $V_x$  tal que la cerradura de  $V_x$  está contenida en algún abierto de la cubierta que contiene a  $x$ . En este caso  $K_x = \tilde{V}_x$ . Entonces el conjunto de todos los  $K_x$  para cada  $x$  en la esfera son una cubierta cerrada. Dado que la esfera es compacta, existe una subcubierta finita de los  $K_x$  que cumplen que  $K_i \subseteq U_i$ . Por (f), existe un  $K_i$  que contiene un par de puntos antípodas, entonces existe un subconjunto  $U_i$  que contiene un par de puntos antípodas.

$$(g) \implies (e)$$

(e) es un caso especial de (g), cuando exactamente todos los  $U_i$  son abiertos, por lo que queda demostrado.

(e)  $\implies$  (f)

Dada una cubierta de cerrados  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ , suponga que no existen puntos antípodos en ningún conjunto  $F_i$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que la mayor distancia entre dos puntos en  $F_i$  es menor o igual a  $2 - \epsilon$ . Esto ya que la esfera tiene radio 1, y si hubiera un conjunto cuyos puntos más distantes estuvieran a 2 de distancia, entonces ese conjunto tiene puntos antípodos. Ahora considere el conjunto de abiertos  $U_i^\epsilon = \{x \in S^n \mid \text{dist}(x; F_i) < \frac{\epsilon}{2}\}$ , cada  $F_i$  está contenido en  $U_i$ , por lo tanto todos los  $U_i$  forman una cubierta abierta, por (e) existe un  $U_i$ , tal que contiene un par de puntos antípodos. Entonces, en  $U_i$ , la mayor distancia es 2. Pero por la definición de  $U_i$ , la mayor distancia que pueden tener dos puntos es menor a  $2 - \epsilon + 2\frac{\epsilon}{2} = 2$ . Lo cual es una contradicción. Por lo tanto tienen que existir un  $F_i$  que contenga un par de puntos antípodos.

(f)  $\implies$  (c)

Existe una cubierta cerrada  $\{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$  de  $S^{n-1}$  tal que no hay ningún par de puntos antípodos que estén en el mismo conjunto cerrado (ver anexo A). Ahora suponga que existe un mapeo antípoda  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$ , entonces  $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$  es una cubierta cerrada, entonces por (f), existe  $f^{-1}(F_i)$  que contiene un par de puntos antípodos  $x, -x$ , entonces  $f(x), f(-x) \in F_i$ , pero como  $f$  es antípoda, entonces  $f(-x) = -f(x)$ , entonces dos puntos antípodos están en  $F_i$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe ningún mapeo antípoda  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$ . ■

## D. prueba de (h)

**Demostración.** El esquema de demostración para probar la equivalencia con el TBU es el siguiente:

(d)  $\implies$  (h)  $\implies$  (c)

(d)  $\implies$  (h)

Suponga que tiene un mapeo continuo  $f : B^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , antípoda en la frontera. Si existe  $x \in B^n$  tal que  $f(x) = 0$ , entonces se cumple (h). Si no existe, entonces el mapeo  $f'(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$  es continuo y mapea a  $B^n$  en  $S^{n-1}$  y es antípoda en la frontera. Por (d), esto es una contradicción. entonces tiene que existir  $x \in B^n$  tal que  $f(x) = 0$ .

(h)  $\implies$  (c)

Suponga que existe  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$  continuo y antípoda. En la prueba de (c)  $\implies$  (d) en la sección A, se probó que el hemisferio norte de una esfera  $S^n$  es homeomorfo a  $B^n$ . Sea  $h$

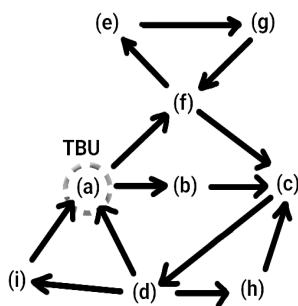
el homeomorfismo entre los dos espacios, también se probó que  $h$  es la identidad en la frontera de  $B^n$ . Entonces defínase  $f' : B^n \mapsto S^{n-1}$  tal que  $f'(x) = f(h(x))$ . Entonces, si  $x$  está en la frontera,  $f'(x) = f(h(x)) = f(x)$ , entonces  $f'$  es antípoda en la frontera. Además, como  $h$  y  $f$  son continuas, entonces  $f'$  es continua. Como  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , entonces por (h), existe  $x \in B^n$  tal que  $f'(x) = 0 \implies f(h(x)) = 0$ . Pero  $f$  mapea hacia  $S^{n-1}$  que no incluye el cero. Esto es una contradicción. Por lo tanto no puede existir  $f : S^n \mapsto S^{n-1}$  continuo y antípoda.

■

## E. Importancia del Teorema de Borsuk Ulam

En las secciones anteriores se demostraron versiones equivalentes del teorema de Borsuk Ulam. La versión (i), que es el lema de Tucker se demostrará en el capítulo IV. Para esta demostración se utiliza la versión (d) para demostrar el lema de Tucker y luego el lema implica la versión (a). En la Figura 12 se incluye el diagrama con todas las implicaciones que se demostraron y las que se demostrarán en el capítulo IV. Se puede observar que el teorema de Borsuk Ulam es uno de los principales ejes en el diagrama.

Figura 12: Ciclos de implicación del TBU y sus enunciados equivalentes





# IV DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BORSUK ULAM

« He tenido mis resultados desde hace tiempo: pero aun no sé cómo voy a llegar a ellos »

- Carl Friedrich Gauss

Para demostrar el TBU se probará la equivalencia con el lema de Tucker, el cual se demostrará utilizando herramientas de la combinatoria. En este caso no es necesario tener conocimiento previo sobre combinatoria, todos los términos y conceptos que se utilizarán en la prueba se introducen en la siguiente sección.

A manera ilustrativa se incluye un bosquejo de este capítulo. La primera parte es solamente una introducción y familiarización de la combinatoria. Seguidamente se enunciarán dos versiones del lema de Tucker. La primera es el enunciado original que fue probado por Tucker en 1945. La segunda es una forma equivalente del lema de Tucker que se utilizará para hacer la prueba del lema y para probar la equivalencia con el TBU.

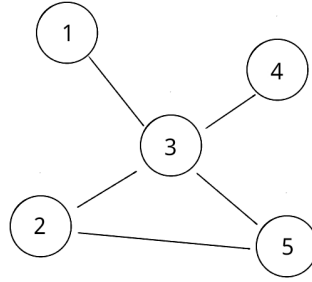
## A. Teoría preliminar

Uno de los objetos más utilizados en la combinatoria (y en matemática discreta) son los grafos. De hecho, sus aplicaciones son tan amplias y extensas que existe una rama de la matemática y de ciencias de la computación llamada teoría de grafos. Un grafo  $G$  es un par de conjuntos  $(V(G), A(G))$  no vacíos.  $V(G)$  es un conjunto de puntos, llamados vértices y  $A(G)$  es un conjunto de pares de vértices, llamados aristas. Las aristas pueden ser dirigidas o no. Si son dirigidas el orden del par de vértices es importante. Si el par de vértices  $(v_1, v_2)$  son una arista dirigida, se dice que la arista incide en el vértice  $v_2$ , si no es una arista dirigida, entonces incide en  $v_1$  y en  $v_2$ .

Parte de la utilidad de los grafos es que es muy fácil representarlos en la computadora porque la información de un grafo se puede guardar en listas o en matrices. El método que se utiliza para almacenar el grafo en la computadora varía dependiendo de las características del grafo o el algoritmo que se esté utilizando. Además se pueden representar de una forma en la que es fácil entender la información que guardan. Típicamente se representa mediante una serie de puntos conectados por líneas. En la Figura 13 se representa el grafo con vértices  $v = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y con aristas no dirigidas  $A = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (3, 4)\}$

Los grafos son muy importantes por lo que han sido estudiados ampliamente. En la teoría hay

Figura 13: Representación de un grafo.



muchas definiciones y propiedades sobre grafos. En esta introducción solamente se incluyen las propiedades que ayudarán a demostrar el lema de Tucker, no obstante, la teoría de grafos es una rama muy interesante de la matemática.

Una de las primeras definiciones en la teoría de grafos es el grado de un vértice. En un grafo no dirigido el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en ese vértice. Para el grado de un vértice  $v$  se adoptará la notación  $Gr(v)$ .<sup>1</sup> El grado de los vértices depende de la cantidad de aristas en el grafo, por eso cumple la propiedad que se presenta a continuación.

**Lema A.1.** En un grafo  $G$  no dirigido,  $\sum_{v \in V(G)} Gr(v) = 2|A(G)|$ .

**Demostración.** El grado de un vértice es la cantidad de aristas que inciden en el vértice, por lo cual, la suma de todos los grados de todos los vértices en el grafo será la cantidad de incidencias que ocurren en el grafo. Como el grafo no es dirigido, entonces cada arista incide en, exactamente, dos vértices, por lo tanto cada arista agrega dos incidencias a todo el grafo. Entonces la suma de todos los grados de todos los vértices es dos veces el número de aristas. Es decir,  $\sum_{v \in V(G)} Gr(v) = 2|A(G)|$ . ■

Se utilizará la combinatoria para simplificar los problemas topológicos. Se busca mantener las propiedades de la topología utilizando grafos, para hacer esto se utiliza la triangulación. Intuitivamente, una triangulación es cubrir la superficie del espacio topológico con triángulos. El problema está en que no siempre se trabajará en espacios de dimensión 2 donde es fácil cubrir el espacio con triángulos. Por eso se introduce la definición de triángulo en  $n$  dimensiones.

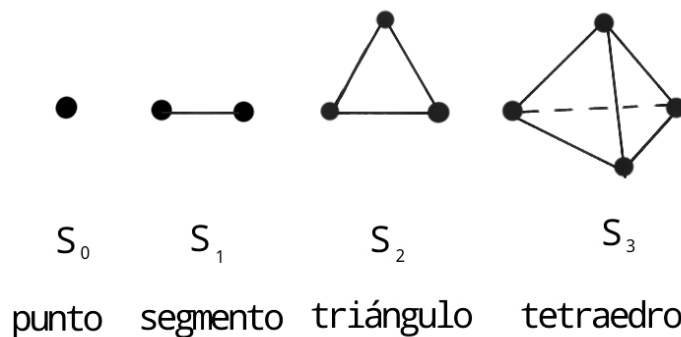
**Definición A.1.** Se dice que un conjunto de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son independientes de forma afín si el conjunto  $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$  es linealmente independiente.

<sup>1</sup>En otros casos se puede encontrar como  $grado(v)$ ,  $g(v)$ , o en inglés,  $d(v)$  o  $deg(v)$ .

**Definición A.2.** Dado un conjunto de puntos  $S$  en  $\mathbb{R}^n$ , un  $n$ -simplejo es el conjunto convexo más pequeño que contiene  $n + 1$  puntos independientes de forma afín. La dimensión del  $n$ -simplejo  $\sigma$  es  $\dim(\sigma) = n$ .

En los casos pequeños es posible visualizar un simplejo. En la Figura 14 se incluyen los primeros 4 simplejos. Estos serán los bloques que servirán para discretizar los espacios topológicos. Nótese que un  $n$ -simplejo contiene 0-simplejos (puntos), estos se llamarán vértices. También contiene 1-simplejos, 2-simplejos, ...,  $(n-1)$ -simplejos. Todos estos se llaman caras del simplejo. Por ejemplo, en un 3-simplejo (un tetraedro), las caras son: los cuatro vértices (los 0-simplejos), las seis aristas (los 1-simplejos) y las cuatro caras (2-simplejos).

Figura 14: simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3.



Ahora se definirá una triangulación. Una triangulación es una figura formada por bloques, en este caso los bloques son  $n$ -simplejos de tal forma que la figura formada es homeomorfa al espacio que se está triangulando. Por ejemplo, en el caso de un disco cerrado, una triangulación es un 2-simplejo, ya que el triángulo se puede transformar suavemente en un círculo. Además una triangulación es un conjunto de simplejos especial llamado complejo simplicial.

**Definición A.3.** Un conjunto de simplejos  $\mathcal{K}$  es un complejo simplicial si cumple:

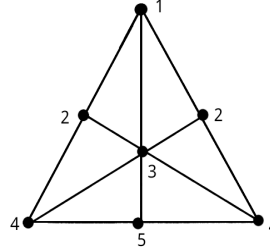
1. dado un simplejo  $\sigma \in \mathcal{K}$ , cualquier cara de  $\sigma$  también está contenida en  $\mathcal{K}$
2. La intersección de dos simplejos en  $\mathcal{K}$  es vacía o también es un simplejo contenido en  $\mathcal{K}$

**Definición A.4.** Una triangulación de un espacio topológico  $\mathcal{T}$  es un complejo simplicial  $T$  que cumple que  $T \cong \mathcal{T}$ .

Para comprender mejor esta definición, considere la triangulación de un sombrero de cumpleaños (un cono) presentada en la Figura 15. Los vértices con la misma etiqueta son el mismo vértice, por lo cual al unirse los vértices se forma un cono. Se observa que existen dos 3-simplejos

(triángulos) con las etiquetas 1,2,3; pero la intersección de esos dos 3-simplejos son dos aristas (la arista entre 1 y 2 y la arista entre 1 y 3), lo cual no es un simplejo, por lo tanto, no es un complejo simplicial. Por lo tanto no es una triangulación del sombrero de cumpleaños.

Figura 15: Conjunto de simplejos que no forman un complejo simplicial en un cono.

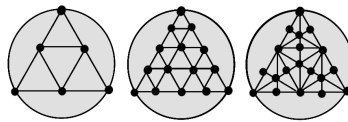


**Definición A.5.** Para una triangulación  $T$ , una función  $\lambda : V(T) \mapsto \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$  es una etiquetación de  $T$ .

Se dijo que un triángulo (i.e. un 2-simplejo), es una triangulación del círculo, sin embargo no es la única. En la Figura 16, se observan otras tres triangulaciones. En realidad son muy parecidas al triángulo, ya que todas, forman un triángulo. Lo único que cambia es la cantidad de simplejos que la conforman. Esto se llama refinamiento, es la misma triangulación, solo que tiene más n-simplejos.

**Definición A.6.** Dado un simplejo  $\sigma$ , se le llamará un refinamiento a un simplejo  $\tau$  que cumple que para cada cara  $\delta_1$  de  $\tau$ , existe una cara  $\delta_2$  de  $\sigma$  tal que  $\delta_1 \subset \delta_2$ .

Figura 16: Triangulaciones del círculo.



## B. El lema de Tucker

Debido a la similitud entre el teorema del punto fijo de Brouwer y el TBU, Tucker buscó la forma de utilizar el lema de Sperner (ver anexos), el cual se utiliza para demostrar el teorema del punto fijo de Brouwer, para probar el TBU. No pudo encontrar dicha prueba, pero creó su propio lema para lograrlo. Una forma de ver el lema de Tucker es como una versión discreta del TBU. En lugar de trabajar con  $S^n$  se trabaja con un simplejo con una triangulación homeomorfa a  $B^n$  y

se etiquetan los vértices de la triangulación con valores enteros entre  $-n$  y  $n$ . En esa triangulación siempre se podrá encontrar una arista cuyas etiquetas tienen el mismo valor, pero con signos diferentes.

**Teorema B.1.** (*Lema de Tucker*) Sean  $T$  una triangulación simétrica antípoda de  $B^n$  y  $\lambda : V(T) \mapsto \{1, -1, 2, -2, \dots, n, -n\}$  una etiquetación de los vértices de  $T$  tales que  $\lambda(-v) = -\lambda(v)$  para cada vértice  $v$  en la frontera de  $B^n$ , entonces existe un 1-simplejo (una arista) tal que sus dos vértices tienen una etiqueta con el mismo valor, pero con signos diferentes.

A continuación se presenta una prueba del lema de Tucker en la que se trabajará con un tipo especial de triangulaciones. Sin embargo, la prueba de que el lema de Tucker implica el TBU funciona aun cuando el lema de Tucker está probado solo para ese tipo de triangulaciones. Luego el TBU implica la versión completa del lema de Tucker, que fácilmente deduce el caso con triangulaciones especiales. El esquema es el siguiente:

*caso-especial*  $\implies$  *Teorema-de-Borsuk-Ulam*  $\implies$  *Lema-de-Tucker*  $\implies$  *caso-especial*.

Se definirán dos tipos de triangulaciones que se utilizarán durante la prueba, denotadas  $\boxtimes^n$  y  $\diamond^n$ . Estas triangulaciones se comportan de manera similar que  $B^n$  y  $S^n$ , en el sentido en que  $S^{n-1}$  está contenido en  $B^n$  y es su frontera. En el caso de las triangulaciones,  $\diamond^{n-1}$  está contenido en  $\boxtimes^n$  y si se quita el punto interior, resulta  $S^{n-1}$ .

**Definición B.1.** Se le llama  $\diamond^{n-1}$  al simplejo con vértices  $V(\diamond^{n-1}) = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  de tal forma que cualquier subconjunto  $F$  de vértices forma un simplejo si y solo si se cumple que cuando  $i \in F$  entonces  $-i \notin F$ .

**Definición B.2.** Se le llama  $\boxtimes^n$  al simplejo tal que cualquier simplejo  $\sigma \in \boxtimes^n$  cumple alguna de las siguientes:

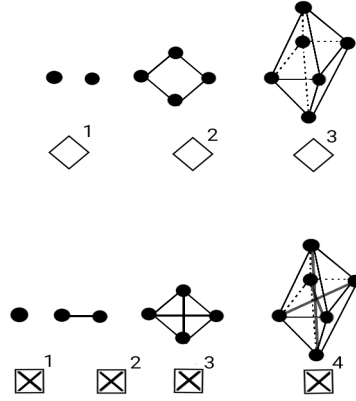
$$(I) \sigma \in \diamond^{n-1}$$

$$(II) \text{ Existe } \tau \in \diamond^{n-1} \text{ tal que } \sigma = \tau \cup \{0\}$$

Nótese que  $\diamond^n$  está formado al poner un vértice sobre cada uno de los ejes y unir cada vértice con todos los demás, excepto su opuesto. Además  $\boxtimes^n$  es  $\diamond^n$  pero se le agrega el vértice 0 y todos los demás vértices se unen a este último. En la Figura 17 se muestran los primeros tres casos de los  $\diamond^n$  y los primeros cuatro de los  $\boxtimes^n$ .

**Definición B.3.** Una triangulación especial  $T$  es un refinamiento de  $\boxtimes^n$  que es simétrico antípodalmente en la frontera.

La prueba que se incluye a continuación fue presentada por Freund y Todd (1981). Antes de esta prueba, solo se conocían pruebas por contradicción. En cambio la que ellos presentaron es una

Figura 17: Representación visual de los primeros casos de  $\boxtimes^n$  y  $\diamond^n$ .

prueba constructiva, la cual se basa en los trabajos previos de Van der Laan y Talman (1981) y Reiser (1981), según Van der Laan *et al* (2009).

**Demostración.** (*Lema de Tucker*) Sean  $\mathcal{T}$  una triangulación especial de  $B^n$  y  $\lambda : V(\mathcal{T}) \mapsto \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n\}$  una etiquetación de  $\tau$  que es antípoda en la frontera.

Lo primero que se hará en esta prueba es definir un tipo de simplejos especiales (estos se llamarán simplejos encontrables). Luego se construirá un grafo en el que cada vértice es un simplejo encontrable y dos vértices están relacionados si son antípodos o si se cumple otra condición que se definirá más detalladamente en la prueba. La suma de los grados de todos los vértices del grafo va a dar un número impar si suponemos que no hay ningún vértice en la triangulación que tenga etiquetas con signo diferente pero magnitud igual. Esto último es una contradicción por el lema A.1, y así habrá quedado demostrado el lema de Tucker.

Para comenzar, se nombrarán los simplejos de  $\mathcal{T}$  de dos maneras distintas. La primera se basa en la etiquetación  $\lambda$  y la segunda dependerá de la región del espacio en donde se encuentre contenido el simplejo. Nótese que debido a la definición de la triangulación especial, cualquier simplejo contenido en la misma estará contenido en una sola región del plano definida por los ejes coordenados. Esto es ya que al refinar  $\boxtimes^n$  solamente se están agregando vértices y aristas, por lo cual cada simplejo tiene aristas sobre los ejes o está contenido completamente en una sola región.

Sea  $\sigma \in \mathcal{T}$ , se definen:

$$(I) \lambda(\sigma) = \{\lambda(v) : v \in V(\mathcal{T})\}$$

$$(II) S(\sigma) = \{+i : x_i > 0, i = 0, 1, 2, \dots, n\} \cup \{-i : x_i < 0, i = 0, 1, 2, \dots, n\}, \text{ en este caso } x_i \text{ son los ejes coordenados donde se encuentran los vértices de } \sigma$$

La primera etiquetación es el conjunto de las etiquetas de los vértices que forman el simplejo. La segunda es el conjunto de los ejes en donde se encuentra contenido el simplejo.

Dadas estas definiciones, se llamará *encontrable* a un simplejo si la etiquetación del mismo tiene las coordenadas para encontrarlo, es decir, si  $S(\sigma) \in \lambda(\sigma)$ . A continuación se probará que un simplejo encontrable cumple que:

$$\dim\sigma = |S(\sigma)| \quad \text{o} \quad \dim\sigma = |S(\sigma)| - 1$$

Dado que  $\lambda$  le asigna un valor a cada vértice de  $\sigma$ , entonces  $|\lambda(\sigma)| \leq \dim(\sigma) + 1$  porque  $\sigma$  tiene  $\dim(\sigma) + 1$  vértices. Como  $\sigma$  es encontrable, entonces  $S(\sigma) \subset \lambda(\sigma) \implies |S(\sigma)| \leq |\lambda(\sigma)| \leq \dim(\sigma) + 1$ . Entonces,  $|S(\sigma)| - 1 \leq \dim(\sigma)$ .

Por otro lado,  $\sigma$  se encuentra en un espacio euclidiano de dimensión  $|S(\sigma)|$ , donde los ejes coordinados  $x_i$  están dados por los  $i$  que pertenecen a  $S(\sigma)$ , entonces  $\dim(\sigma) \leq |S(\sigma)|$ .

Con las dos desigualdades derivadas en los dos párrafos anteriores, es posible afirmar lo que se deseaba sobre la dimensión de un simplejo encontrable.

Ahora se construirá un grafo a partir de la triangulación especial cuyos vértices son los simplejos encontrables. En este grafo, dos simplejos  $\sigma$  y  $\tau$  estarán conectados entre sí, si se cumple una de las siguientes condiciones:

- $\sigma = -\tau$  (son antípodas) y pertenecen a la frontera.
- $\sigma$  es una cara de  $\tau$  de dimensión  $\dim\tau - 1$  que cumple que las etiquetas de los vértices de  $\tau$  son suficientes para que  $\tau$  sea encontrable.

La siguiente parte de esta prueba es un argumento de combinatoria. El resultado del procedimiento anterior será un grafo finito en el cual únicamente se encontrará un vértice con grado impar. Esto es imposible por el lema A.1, ya que la suma de todos los grados debe dar un número par. Esto generará la contradicción.

Primero véase que el simplejo  $\{0\}$  siempre es encontrable ya que  $S(\{0\}) = \emptyset$ . Además siempre tiene exactamente un vecino en el grafo. Su vecino va a ser el segmento formado por  $\{0\}$  y el vértice  $v$  más próximo sobre el eje en dirección  $\lambda(\{0\})$ . Pues el simplejo formado por el segmento entre  $v$  y  $\{0\}$  es encontrable por las etiquetas de  $\{0\}$ . Ya habiendo tratado el caso raro, considérense dos casos:

1.  $\dim(\sigma) = |S(\sigma)| - 1$
2.  $\dim(\sigma) = |S(\sigma)|$

En el primer caso, cualquier vecino  $\tau$  de  $\sigma$  cumple  $\sigma = -\tau$  (son antipodales en la frontera) o que  $\tau$  tiene a  $\sigma$  como faceta. Consideremos los siguientes dos casos:

(I) Si  $\sigma$  se encuentra en la frontera, entonces  $-\sigma$  es un vértice adyacente. Cualquier otro vértice adyacente tendrá a  $\sigma$  como una faceta y será encontrable por la etiquetación de  $\sigma$ . Esto quiere decir que  $\tau$  tiene  $|S(\sigma)| + 1$  vértices, pero está en un espacio euclidiano de dimensión  $|S(\sigma)|$ . Al hacer la intersección de este espacio con  $B^n$ , se obtiene una triangulación de  $\boxtimes^{|S(\sigma)|}$ , por lo cual un  $(|S(\sigma)| - 1)$ -simplejo es faceta de exactamente dos  $|S(\sigma)|$ -simplejos, cuando no está en la frontera y de uno cuando sí está. En cualquier caso,  $\sigma$  es faceta de exactamente un  $|S(\sigma)|$ -simplejo. Por lo tanto tiene exactamente dos vértices adyacentes y el grado del vértice  $\sigma$  es par.

(II) Si  $\sigma$  no se encuentra en la frontera, entonces sus vértices adyacentes serán los simplejos que tienen a  $\sigma$  como faceta y que son encontrables por su etiquetación. Por lo argumentado en el caso anterior,  $\sigma$  tendrá exactamente dos vértices adyacentes, entonces el grado de su vértice es par.

Ahora considérese el caso  $\dim(\sigma) = |S(\sigma)|$ . Nótese que ningún simplejo estará en la frontera. Aun así pueden ocurrir dos cosas: que en la etiquetación se repite un número o que hay una etiqueta que no aparece en  $S(\sigma)$ .

(I) Cuando una de las etiquetas se repite en los vértices del simplejo, entonces hay exactamente dos facetas que lo harán encontrable, y son los simplejos formados al quitar uno de los dos vértices con etiqueta repetida. Además no puede ser faceta de un simplejo del caso anterior. Por lo tanto el vértice tiene grado par.

(II) Si existe una etiqueta  $i \notin S(\sigma)$ , nótese que también  $-i \notin S(\sigma)$  porque si lo estuviera, entonces los vértices con etiqueta  $i$  y  $-i$  formarían un vértice con etiquetas opuestas. (Note que hasta este paso se está utilizando la hipótesis que derivará la contradicción). Ahora véase que uno de los vértices adyacentes a  $\sigma$  es la faceta que se forma al quitar el vértice con etiqueta  $i$ . Además  $\sigma$  es faceta de exactamente un simplejo  $\sigma'$ . El simplejo que se forma cuando  $S(\sigma') = \lambda(\sigma) = S(\sigma) \cup \{i\}$ . Comenzando en el interior de  $\sigma$ , se llega al interior de  $\sigma'$  si se mueve en dirección del eje  $x_{|i|}$  en dirección negativa cuando  $i < 0$  o positiva si  $i > 0$ . Nuevamente, en este caso,  $\sigma$  tiene exactamente dos vértices adyacentes, por lo que también es un vértice de grado par.

Por lo tanto todos los vértices en el grafo construido tienen grado par, excepto uno. Esto contradice el lema A.1. Por lo tanto tiene que existir un par de vértices adyacentes que tengan etiquetación con signo diferente.

■

## C. Equivalencia del lema de Tucker y el Teorema de Borsuk Ulam

Para probar la equivalencia del lema de Tucker con el TBU, es más sencillo reformular el lema de Tucker. Se reformulará utilizando a  $\diamond^{n-1}$  en lugar de  $B^n$ , y se utilizará un mapeo simplicial: es un mapeo entre simplejos de tal forma que cada simplejo lo envía a otro simplejo. Por ejemplo, la imagen de todo vértice es un vértice, y la imagen de todo segmento es un segmento.

**Teorema C.1.** *(reformulación del lema de Tucker) Sea  $T$  una triangulación de  $B^n$  simétricamente antípoda en la frontera. Entonces no existe ningún mapeo  $\lambda : V(T) \mapsto V(\diamond^{n-1})$  que sea simplicial de  $T$  hacia  $\diamond^{n-1}$  y que sea antípoda en la frontera a la vez.*

**Demostración.** *Note que el mapeo  $\lambda$  que se describe en el teorema B.1 se puede restringir a  $\diamond^{n-1}$ , ya que a cada punto se le asigna un número que se encuentra en la etiquetación de  $\diamond^{n-1}$ . Entonces por el lema de Tucker, existe un segmento  $\{v_1, v_2\}$  de vértices adyacentes tales que  $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$ . Si  $\lambda$ , además fuera simplicial, entonces el 1-simplejo  $\{v_1, v_2\}$  se mapearía en un 1-simplejo donde  $\lambda(v_1)$  y  $-\lambda(v_1)$  pertenecen a un simplejo, esto contradice la definición de  $\diamond^{n-1}$  (definición B.1). Por lo tanto el mapeo no puede ser simplicial, entonces se cumple la reformulación del lema de Tucker.*

*Ahora supóngase que  $\lambda$  se define como en el teorema B.1, y que no existe un 1-simplejo en el cual sus dos vértices tienen la misma etiqueta pero con signo diferente. Nuevamente se hace la restricción a  $\diamond^{n-1}$  que se hizo en el caso anterior. Entonces  $\lambda$  es un mapeo simplicial ya que cada 1-simplejo  $\{v_1, v_2\}$  lo va a mapear en un 1-simplejo, porque si lo mapea en un par de vértices que no son adyacentes en  $\diamond^{n-1}$ , entonces son opuestos y  $\lambda(v_1) = -\lambda(v_2)$  (definición B.1). Pero por la reformulación de Tucker,  $\lambda$  no puede ser un mapeo simplicial, por lo tanto hay una contradicción y tiene que existir un 1-simplejo en el cual sus dos vértices tienen la misma etiqueta pero con signo diferente. Por lo tanto se cumple el lema de Tucker.*

■

Con lo anterior demostrado, es más fácil proceder a demostrar la equivalencia entre el lema de Tucker y el TBU. La prueba es por contradicción en ambas direcciones. Se utilizó como guía la prueba presentada en (Matousek, 2003).

**Teorema C.2.** *El lema de Tucker es equivalente al TBU.*

**Demostración.** *(TBU  $\implies$  Tucker) La primera parte de esta demostración es inmediata derivando la reformulación del lema de Tucker de la versión (d) del TBU (ver recuadro capítulo III). Esta versión dice que no existe ningún mapeo continuo  $f : B^n \mapsto S^{n-1}$  que sea continuo en la frontera. Si existiera un mapeo simplicial de  $T$  hacia  $\diamond^{n-1}$  antípoda en la frontera, este se puede*

extender a un mapeo de  $B^n$  a  $S^{n-1}$  de forma canónica. Este mapeo sería continuo y antípoda en la frontera lo que contradice el TBU.

(Tucker  $\implies$  TBU) Esta parte de la demostración también será por contradicción. Se tomará una función entre  $B^n$  y  $S^{n-1}$  con el cual se construirán  $T$  y  $\lambda$  de tal forma que contradice el Teorema C.1.

Sea  $f : B^n \mapsto S^{n-1}$  un mapeo continuo antípoda en la frontera. Además considere una triangulación  $T$  de  $B^n$  antípoda en la frontera y con diámetro simplicial de, a lo sumo,  $\delta$ . Para construir  $\delta$  sea  $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ . Nótese que para cada  $y \in S^{n-1}$ , se tiene que  $\|y\|_\infty \geq \epsilon$ . Ya que  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ , por lo menos una componente de  $y$  tiene valor absoluto mayor o igual a  $\epsilon$ .

Ya que  $f$  es uniformemente continuo, y además existe un número  $\delta > 0$  tal que la distancia de dos puntos  $x, x' \in B^n$  no es mayor a  $\delta$ , entonces  $\|f(x) - f(x')\|_\infty < 2\epsilon$ . Este es el  $\delta$  que acota el diámetro de los simplejos de  $T$ .

Ahora se define  $\lambda : V(T) \mapsto \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$  de la siguiente manera:

$$\lambda(v) = \begin{cases} +k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} > 0 \\ -k(v) & \text{si } f(v)_{k(v)} < 0 \end{cases}$$

en donde  $k(v) = \min\{i : |f(v)_i| \geq \epsilon\}$ .

Ya que  $f$  es antípoda en la frontera de  $B^n$ , se tiene que para cada vértice  $v$  en la frontera se cumple que  $f(-v) = -f(v)$ . Aplicando el lema de Tucker (Teorema B.1), sabemos que existe un segmento  $vv'$  tal que  $\lambda(v) = \lambda(-v)$ . Sea  $i = \lambda(v) = \lambda(-v) > 0$ , entonces  $f(v)_i \geq \epsilon$  y  $f(v')_i \leq -\epsilon$ , por lo tanto  $\|f(x) - f(x')\|_\infty \geq 2\epsilon$ , una contradicción. ■

# V APLICACIONES

« La matemática aplicada siempre necesitará a la matemática pura como el oso hormiguero siempre necesitará a las hormigas »

- Paul Halmos

El TBU es muy versátil por lo que tiene muchas formas equivalentes de enunciarse. Esta misma versatilidad le permite tener muchas aplicaciones. En este capítulo se muestran dos tipos de aplicaciones: las puramente teóricas y las aplicadas. La primera sección incluye aplicaciones, corolarios y generalizaciones. La segunda incluye aplicaciones que no son demostradas exhaustivamente sino solo explicadas ya que los temas son de un nivel muy avanzado.

## A. Aplicaciones en la matemática pura

**1. Generalización del Teorema de Borsuk Ulam** Existen muchas generalizaciones del TBU, sino que existen muchas generalizaciones atendiendo varios puntos de vista. Por ejemplo, se puede pensar en generalizarlo más allá de la esfera a un espacio más general. Otra forma es no trabajar con puntos antípoda, sino con otra función en lugar de la función antípoda.

La forma usual de enunciar el TBU es la versión (a) en el recuadro en el capítulo III. Si expresamos el TBU de la siguiente forma:

**Teorema A.1.** (TBU reformulado) Si  $g : S^n \mapsto S^n$  es la función antípoda (i.e.  $g(x) = -x$ ), entonces para cada mapeo continuo  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$ , existe un punto  $x \in S^n$  tal que  $f(x) = f(g(x))$ .

Entonces se puede considerar generalizar  $g$ , donde solamente sea una función que cumple ciertas condiciones. También se puede pensar en generalizar el teorema para un conjunto que no sea una  $n$ -esfera.

Biasi *et al* (2005) dieron la siguiente generalización para  $n = 1$ :

**Teorema A.2.** Sean  $X$  un espacio compacto,  $f : X \mapsto \mathbb{R}$  y  $\phi : X \mapsto X$  mapeos continuos, entonces existe un punto  $x \in X$  tal que

$$f(x) = f(\phi(x))$$

**Demostración.** Dado que  $X$  es compacto y  $\phi$  es continua, entonces  $\phi(X)$  es compacto. Además como  $f$  también es continuo,  $f(\phi(X))$  es compacto, por lo cual alcanza un máximo y un mínimo. Es decir,

$$\exists a, b \in X \text{ tales que } f(\phi(X)) \subseteq [f(a), f(b)].$$

Por lo tanto, .

$$f(a) \leq f(\phi(a)) \text{ y } f(\phi(b)) \leq f(b).$$

Entonces se puede considerar la función  $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$  definida por  $\psi(x) = f(x) - f(\phi(x))$ . De las desigualdades anteriores se puede deducir:

$$\psi(b) = f(b) - f(\phi(b)) \leq 0 \leq f(a) - f(\phi(a)) = \psi(a)$$

Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe  $x \in X$  tal que  $0 = \psi(x) = f(x) - f(\phi(x))$ .

Por lo tanto

$$\exists x \in X \text{ tal que } f(x) = f(\phi(x))$$

■

Esta versión generaliza el espacio y la función antípoda, sin embargo, esta misma noción no se puede generalizar para  $n \geq 2$  ya que Pannwitz (1952) probó que no es posible. Otra generalización que se puede entender fácilmente es la siguiente, por Connet (1973):

**Teorema A.3.** Sean  $X$  un espacio topológico simplemente conexo y  $g : X \mapsto X$  un mapeo de periodo  $p \geq 1$ . Entonces, si  $f : X \mapsto \mathbb{R}^2$  es un mapeo cualquiera, existe  $x \in X$  que cumple que  $f(x) = f(p^i(x))$  para algún  $1 \leq i \leq p - 1$

En este caso, se suavizaron las condiciones sobre el espacio y las funciones  $f$  y  $g$ , pero se restringió la dimensión del espacio de contradominio, ya que solo se considera a  $\mathbb{R}^2$ , mientras que en el TBU las funciones van hacia  $\mathbb{R}^n$ .

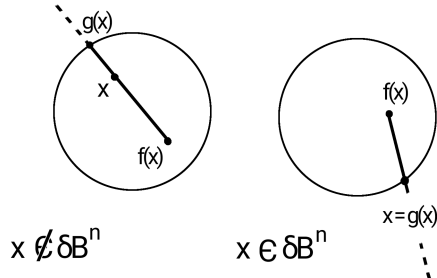
En las dos generalizaciones presentadas, solo se deduce un caso específico del TBU, y no el caso general. Esto permitió suavizar tanto las condiciones en los espacios. Sin embargo, hay generalizaciones para cualquier  $n$ , pero las condiciones sobre los espacios y las funciones son más fuertes y requieren conocimiento en teoría de la medida, topología, topología algebraica y otras ramas avanzadas. Para el lector interesado, puede referirse a (Volkov, 1980), (Kyner, 1956) o (Nakaoka, 1970).

Todavía se puede pensar en generalizar el TBU en otras formas, como por ejemplo, suavizar la condición de igualdad y hacer una desigualdad, donde se dé la igualdad cuando se cumplen las condiciones del TBU. Otra forma es cambiar el espacio en donde se mapea, es decir, generalizar el espacio  $\mathbb{R}^n$ , a algún otro. En resumen, existen muchas formas de generalizarlo. Este es un campo que siempre deja espacio abierto para los investigadores, ya que la extensión de un teorema requiere creatividad. Es también por este motivo que son necesarios muchos investigadores, ya que cada quien aportará puntos de vista diferentes.

**2. El teorema del punto fijo de Brouwer** Los teoremas de punto fijo son muy importantes en la matemática. Entre las muchas aplicaciones, una de las más importantes es la solución de ecuaciones diferenciales. Entre los teoremas de punto fijo se encuentra el de Brouwer, uno de los más conocidos y de los primeros en enunciarse y demostrarse. Este teorema es muy importante por sus múltiples aplicaciones, y, al igual que el TBU, tiene varios enunciados equivalentes. De hecho, tiene una variante en topología algebraica, una en combinatoria y una que usa coberturas del espacio. En el capítulo III, se presentaron variantes del TBU en cada una de estas áreas. Además, cada versión del teorema de punto fijo de Brouwer puede derivarse de la versión en el área correspondiente de Borsuk-Ulam. A continuación se presentan la versión de topología algebraica del teorema del punto fijo. La versión que se presenta es una de las más utilizadas.

**Teorema A.4.** (Teorema del punto fijo de Brouwer) Sea  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ , entonces para cualquier función continua  $F : B^n \mapsto B^n$ ,  $f$  tiene un punto fijo, esto es, existe  $x \in B^n$  tal que  $f(x) = x$ .

Figura 18: Retracción de  $B^n$  a  $S^{n-1}$ .



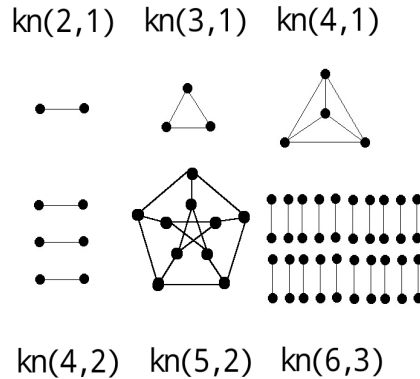
**Demostración.** Suponga que  $f : B^n \mapsto B^n$  es una función continua que no tiene ningún punto fijo (i.e.  $f(x) \neq x, \forall x \in B^n$ ). Como  $f(x)$  y  $x$  no son iguales, entonces existe una recta que pasa por ambos puntos. Defínase como  $g(x)$  el punto donde la recta que inicia en  $f(x)$  y pasa por  $x$  intersecta a  $S^{n-1}$  (Figura 18). Entonces  $g : B^n \mapsto S^{n-1}$ , además en la frontera  $g(x) = x$ , por lo cual  $g$  es una retracción, pero por el lema A.1 (ver recuadro capítulo III), este mapeo no puede existir. Por lo tanto tiene que existir un punto fijo. ■

**3. La conjetura de Kneser** Fue presentada en un artículo en 1955, Kneser consideró el problema de particionar el conjunto de todos los subconjuntos de  $k$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos de tal forma que los subconjuntos que pertenecen a una misma clase tienen intersección no vacía a pares. Kneser probó que es posible hacerlo con  $n - 2k + 2$  clases,

sin embargo solamente pudo conjeturar que esto no es posible con  $n - 2k + 1$  clases. El problema permaneció abierto por 23 años, hasta que en 1978 Lovász lo resolvió. Posteriormente se han dado más soluciones a este problema. A continuación se presentará una prueba que utiliza el TBU presentada por Joshua Greene (2002).

Primero se convertirá el problema a uno de grafos, por lo cual se presentan los grafos de Kneser. El grafo de Kneser  $Kn(n, k)$  es el grafo cuyos vértices son todos los subconjuntos de  $k$  elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  y en donde dos vértices están conectados si son disjuntos. Por ejemplo, en el grafo  $Kn(2, 1)$ , los vértices son los subconjuntos de  $k$  elementos del conjunto  $\{1, 2\}$ . Entonces los vértices son  $\{1\}$  y  $\{2\}$ , es decir, son solamente dos vértices, y además, como son disjuntos los dos conjuntos, los dos vértices están conectados (ver Figura 19). Otro ejemplo es el  $Kn(4, 2)$ , en este caso son los subconjuntos de dos elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Es decir, los vértices son los conjuntos:  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{2, 4\}$  y  $\{3, 4\}$ . Dado que el conjunto tiene cuatro elementos, cada subconjunto de dos elementos solamente será disjunto de exactamente un conjunto (su complemento). Entonces los seis conjuntos estarán conectados por pares (ver Figura 19).

Figura 19: Ejemplos de grafos de Kneser.



Ahora se introduce la coloración de un grafo: asignar a cada vértice un color. El número cromático de un grafo es la mínima cantidad de colores que se necesitan para colorear todos los vértices del grafo de tal forma que si dos vértices son adyacentes, entonces no tienen asignado el mismo color.

Vea que la coloración es una partición como la que busca la conjetura de Kneser, pues los conjuntos disjuntos no pueden tener el mismo color, es decir, no están en la misma clase. Por lo tanto probar la conjetura de Kneser es equivalente a probar que el número cromático de un grafo de Kneser es  $n - 2k + 2$ . Este es un muy buen ejemplo de como se puede simplificar un problema cuando se utilizan los grafos. Pensar en partición de un conjunto de subconjuntos de tal forma que en la misma clase no se tengan conjuntos disjuntos suena bastante complicado, pero un grafo de Kneser simplifica la información, pues la relación que nos interesa es la de disjuntos y fuera de eso

no importa la forma de cada subconjunto. En el grafo cada subconjunto se simplifica a ser solo un vértice. De esta forma incluso se puede visualizar.

A pesar de la simplificación del problema, la prueba no es sencilla. Sin embargo es muy ingeniosa la manera en que se utiliza el TBU. En esta prueba se puede ver lo flexible que es la matemática, pues no es fácil ver cómo sirve un teorema sobre  $n$ -esferas para resolver un problema de grafos.

**Teorema A.5.** (Lovász) *El número cromático de un grafo de Kneser es  $n - 2k + 2$ .*

**Demostración.** *Esta prueba se divide en dos partes, en la primera se prueba que existe una coloración del grafo de Kneser con  $n - 2k + 2$  colores. En la segunda parte se demuestra que esto no es posible con  $n - 2k + 1$  colores, por lo cual el mínimo es  $n - 2k + 2$  y este es el número cromático.*

- *Se construirá una coloración con  $n - 2k + 2$ . Considere la familia  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$  de subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tal que cada subconjunto  $A_i$  tiene por lo menos un elemento del conjunto  $\{1, 2, \dots, n - 2k\}$ . En esta familia, se le asignará al conjunto  $A_i$  el color  $\min(A_i)$ . Si dos conjuntos son disjuntos, entonces no van a tener el mismo mínimo, por lo que tendrán diferente color.*

*El resto de subconjuntos solo tendrá elementos del conjunto  $\{n - 2k + 1, n - 2k + 2, \dots, n\}$ . Este conjunto tiene  $2k$  elementos, por lo que un subconjunto de  $k$  elementos solo será disjunto con su complemento, entonces se puede separar la familia de subconjuntos de tal forma que si un conjunto está pintado de un color, su complemento esté pintado del otro color. De esta forma solo son necesarios dos colores para colorear el resto de los subconjuntos.*

*Con estas dos coloraciones se tiene una coloración para el grafo  $Kn(k, n)$  de  $n - 2k + 2$  colores.*

- *Esta segunda prueba se hará por contradicción. Considere los conjuntos  $Q = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  y  $P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . A cada punto de  $Q$  se le asignará un punto  $x_i$  en la  $(n - 2k + 1)$ -esfera, de tal forma que para cualquier  $(n - 2k)$ -esfera contenida en  $S^{n-2k+1}$  no contenga  $n - 2k + 2$  o más puntos de  $P$ . Vea que esto siempre es posible hacerse y, de hecho, lo más probable es que si se hace una asignación al azar, cumpla la condición que se está pidiendo. A esto se le llama una posición general del conjunto  $P$ .<sup>1</sup>*

*Sea  $H(x)$  una función que le asigna a cada punto de la  $2n - k + 1$ -esfera el hemisferio abierto centrado en  $x$ . La generalización del hemisferio centrado en  $x$  es la parte que contiene a  $x$  de las dos que se forman al pasar un plano por el origen que tiene un vector normal paralelo al vector que se forma entre el origen y  $x$ . El hemisferio es abierto, por lo que no incluye la  $(2n - k)$  esfera que se forma en la intersección del plano con la  $(2n - k + 1)$ -esfera.*

---

<sup>1</sup>Esto se suele utilizar en computación y en simulación, ya que es el caso que suele ocurrir. En muchos casos los algoritmos toman los casos especiales por separados, entonces se ejecutan comandos diferentes para la posición general de un conjunto de condiciones que para los casos especiales.

Ahora suponga que existe una coloración de  $Kn(k, n)$  con  $n - 2k + 1$  colores. Y defínanse los conjuntos  $U_i$  como los puntos  $x$  de la  $(n - 2k + 1)$ -esfera tales que  $H(x)$  contiene  $k$  puntos de  $P$ , de tal forma que el subconjunto de  $Q$  que representan tenga asignado el color  $i$ . Nótese que si  $k$  puntos de  $P$  pertenecen a  $H(x)$ , para algún  $x$  en la esfera; entonces tienen que pertenecer a algún  $U_i$ , porque de lo contrario, habría un vértice del grafo que no está coloreado.

Ahora nótese que cada uno de los  $U_i$  es abierto porque los hemisferios con los que se está construyendo y que sirven para delimitar son abiertos. Entonces el conjunto  $F = S^{n-2k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2k+1} U_i$  es cerrado. Además  $U_1, U_2, \dots, U_{n-2k+1}, F$  son una cobertura de  $S^{n-2k+1}$  compuesta solo de conjuntos abiertos y cerrados. Por la versión (g) del TBU (ver recuadro capítulo III), uno de los conjuntos de la cubierta contiene un par de puntos antípodos.  $F$  no puede contener puntos antípodos, porque para cada punto  $x \in F$ ,  $H(x)$  contiene, a lo sumo,  $k - 1$  puntos de  $P$  porque si tuviera  $k$ , entonces  $x$  tendría que pertenecer a algún  $U_i$ . Entonces, si  $x$  y  $-x$  son los antípodos en  $F$ , la unión de los hemisferios centrados en  $x$  y  $-x$  es toda la esfera sin la frontera de los hemisferios que es una  $n - 2k$ -esfera. Pero ya que en cada hemisferio hay menos de  $k$  puntos de  $P$ , entonces el resto están en la  $n - 2k$ -esfera; pero el resto son por lo menos  $n - 2(k - 1) = n - 2k + 2$ , lo cual contradice la posición general de  $P$ . Entonces los antípodos deben de pertenecer a alguno de los  $U_i$ , entonces  $H(x)$  y  $H(-x)$  contienen un subconjunto de  $Q$  de  $k$  elementos con coloración  $i$ . Pero Dado que  $H(x)$  y  $H(-x)$  son disjuntos, entonces los subconjuntos de  $Q$  también son disjuntos, pero tienen el mismo color. Esto es una contradicción.

■

## B. Aplicaciones no teóricas

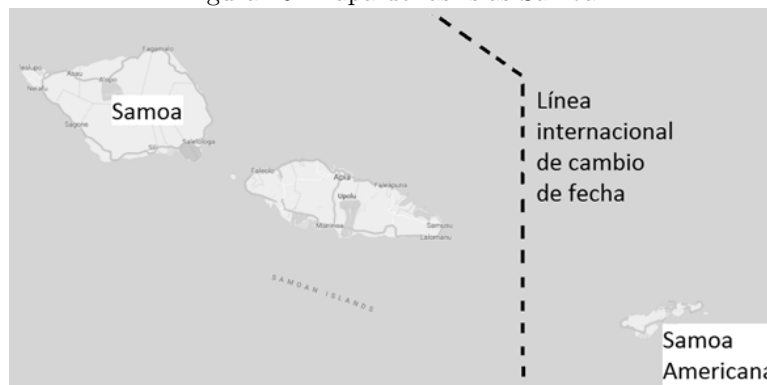
En rigor matemático, algunas de las aplicaciones en esta sección son complicadas, pero no es tan difícil entender las ideas básicas. El objetivo de esta sección es mostrar la cantidad de información que se puede obtener de un teorema que inicialmente puede hasta parecer trivial y que la matemática pura puede no tener aplicaciones inmediatas, pero que esta limitación es solo una apariencia momentánea. Las aplicaciones que surgen con el tiempo son inesperadas y el resultado de mucha creatividad; otras están esperando a que el resto de las ciencias se estudien más y en algún momento las necesiten y sean descubiertas.

En las primeras dos aplicaciones sí se presenta el trasfondo matemático, sin embargo para las últimas dos ya no, pues no son aplicaciones sencillas y además una de ellas requieren conocimiento sobre el funcionamiento del cerebro.

**1. El clima y la zona horaria** Existen un par de islas llamadas Samoa Americana y Samoa. Entre estas dos islas hay una distancia de 220 km. A pesar de estar a una distancia

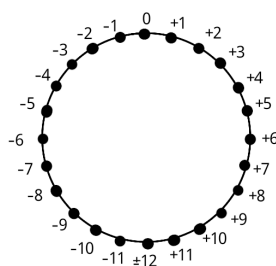
relativamente pequeña, la diferencia en zona horaria es de 24 horas. Esto sucede ya que las dos islas están en lados diferentes de la línea internacional de cambio de fecha.

Figura 20: Mapa de las Islas Samoa.



Ahora bien, se puede considerar el mapeo de la zona horaria como una circunferencia (Figura 21), y asignarle a cada zona horaria un punto de la circunferencia, es decir una función de  $S^1$  hacia  $\mathbb{R}$ . El TBU nos dice que no existe una función que le asigne a cada zona horaria una hora diferente y que sea continua, es decir, que áreas cercanas tengan hora parecida. Nótese que en este caso se está discretizando el TBU.

Figura 21: Zona horaria en una circunferencia.



Otra aplicación sencilla y muy popular para explicar el TBU es analizar la presión barométrica y la temperatura de cada punto en la tierra. Si se asume que estas dos son continuas sobre la tierra (lugares cercanos tienen temperaturas y presiones barométricas similares), entonces por el TBU, con  $n = 2$  existe un punto en la tierra diametralmente opuesto a otro con la misma temperatura y presión barométrica. Esto quiere decir que en todo momento es posible encontrar un lugar en la tierra que tiene las mismas condiciones que el mismo lugar al otro lado del mundo.

**2. El problema de los collares** es muy fácil de entender y la solución es muy interesante. Se presentará el problema con un cuento pequeño.

“Dos ladrones deciden robar un collar que se compone de  $n$  tipos de piedras preciosas. El collar es extremadamente difícil de cortar por lo que los ladrones quieren saber cual es el mínimo de cortes que necesitan para repartirse el botín. El collar es tan difícil de cortar que tienen que comprar cuchillos especiales, y aun esos cuchillos se quedan sin filo después de hacer un corte. Quieren comprar los cuchillos antes de hacer el robo, porque después estarán muy ocupados huyendo y no podrán parar a comprarlos. Como los cuchillos son caros quieren comprar la menor cantidad posible. Como el collar está hecho de tipos diferentes de piedras preciosas, cada una tiene un valor diferente. El secreto del éxito detrás de sus robos está en la confianza entre ellos. Para mantener esta confianza cada ladrón debe tener la misma cantidad de cada tipo de piedras.

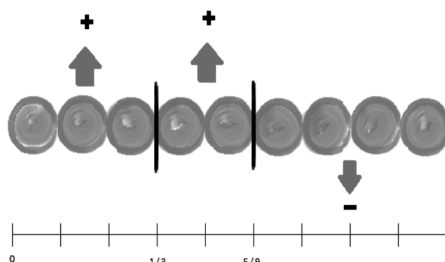
Uno de los ladrones es matemático en sus tiempos libres. Así que, cuando ve el problema al que se enfrentan él y su compañero, decide embarcarse en la búsqueda de la solución antes de que llegue el día del robo. Se encuentra al TBU, el cual le pareció interesante, pero, al inicio consideró que no podría ayudarlo a solucionar su problema. El día del robo se acercaba y no logró encontrar solución. Parecía un problema sencillo, pero el problema estaba a punto de derrotarlo.

Regresó a su guarida sintiéndose derrotado. Decidió rendirse y buscar algo más para entretenerse. En ese momento recordó el TBU y decidió que sería divertido estudiarlo. El ladrón encontró cosas muy divertidas con ese teorema, pero le frustró que es muy difícil de demostrar, cuando parece algo sencillo. Esto le recordó a su propio problema, y en ese momento todo tuvo sentido. El ladrón saca una hoja de papel, su lápiz y comienza a trabajar en su nueva idea. Cuando comienza a amanecer el ladrón corre al puente donde se encontraría con su compañero y le dice: -Necesitamos  $n$  cuchillos y no más!-”

Antes de continuar, se formalizará un poco la historia con las siguientes aclaraciones. El collar se asume que está abierto (o que se puede abrir), de esta forma se puede representar como un intervalo en  $\mathbb{R}$ , en donde cada punto del intervalo es parte del collar. En la Figura 22 se muestra la representación de un collar como un intervalo.

**Definición B.1.** Una  $m$ -repartición de un intervalo  $(a, b)$  es un par de conjuntos  $(C, R)$ , en donde  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , con  $x_i \in (a, b)$  y  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m, r_{m+1}\}$ , donde  $r_i \in \{1, -1\}$ .

Se le llama  $m$ -repartición ya que cada punto en el conjunto  $C$  se puede interpretar como un corte y cada intervalo entre los puntos es un “pedazo” del intervalo. A cada uno de los  $m + 1$  intervalos que definen los  $m$  cortes se le asigna el respectivo  $r_i$ , de tal forma que si  $r_i$  es menos uno, ese pedazo del collar se le reparte al primer ladrón; y si es uno, entonces se le da al otro ladrón.

Figura 22: Repartición de un collar en el intervalo  $[0, 1]$ .

Esta definición servirá para la solución del problema.

**Teorema B.1.** (*repartición de collares*)

*Dado un collar con  $n$  tipos de piedras, siempre es posible repartir las piedras en dos grupos de manera que cada grupo tiene la misma cantidad de cada tipo de piedra, haciendo  $n$  cortes al collar.*

**Demostración.** *Primero se definirá una partición del collar a partir de un punto en  $S^n$ . Sea  $x \in S^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ , entonces se sabe que  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$ . Se definen las unidades en este caso como el largo del collar, es decir, el collar mide 1. Entonces se puede representar al collar completo como el intervalo  $[0, 1]$ . Además si se hace el primer corte en  $c_1 = x_1^2$ , el segundo corte en  $c_2 = x_2^2 + x_1^2$ , el tercer corte en  $c_3 = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2$  y así sucesivamente hasta que se hace el  $n$ -ésimo corte en  $c_n = x_n^2 + x_{n-1}^2 + \dots + x_1^2$ , como se muestra en la Figura 22, entonces se tiene un conjunto de cortes  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ . Por otro lado, sea  $r_i = \text{sgn}(x_i)$ , entonces defínase el conjunto  $R = r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}$ . Ahora se tiene una  $n$ -repartición  $(C, R)$ . Con esto, cada punto de la  $n$ -esfera representa una partición del collar. Además cada  $n$ -repartición partición del collar (intervalo  $[0, 1]$ ) representa un punto en la esfera. Ahora que ya se tiene la  $n$ -esfera de la que habla el TBU, solamente falta hacer la función continua hacia  $\mathbb{R}^n$ .*

*Sea la función  $f : S^n \mapsto \mathbb{R}^n$  tal que a cada  $n$ -repartición se le asigna el vector  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  en donde  $y_i$  representa la cantidad de piedras del tipo  $i$  con las que se queda el primer ladrón. Es decir, el ladrón uno tendrá  $y_i$  piedras tipo  $i$ . Nótese que hacer un cambio pequeño en la partición solamente hace un cambio pequeño en la cantidad de piedras de cada tipo que recibe el primer ladrón. Por lo cual esta función es continua.*

*Por el TBU, existe un punto  $x$  en la  $n$ -esfera tal que  $f(x) = f(-x)$ . Esto significa que hay dos puntos diametralmente opuestos tales que en cualquiera de los dos, el ladrón uno recibe la misma cantidad de cada tipo de piedra. Ahora nótese lo que significa que dos puntos sean diametralmente opuestos en términos de  $n$ -reparticiones del collar. Esto quiere decir que el signo de cada componente es opuesto. El signo representa qué recibe el primer ladrón y qué recibe el segundo. Entonces al dar la vuelta a los signos se le está dando al ladrón dos lo que antes recibía el ladrón uno.*

Entonces  $f(x) = f(-x)$  quiere decir que el ladrón uno y el ladrón dos están recibiendo la misma cantidad de cada tipo de piedra.

Con esto queda demostrado que siempre se puede hacer la partición deseada con  $n$  cortes. Sin embargo aún falta probar que no se puede con  $n-1$  cortes. Para demostrar esto considere un collar de la siguiente forma: Tiene 4 piedras de cada tipo de piedra y tiene  $n$  piedras, además está ordenado de forma que primero van las cuatro piedras tipo 1, luego van las cuatro piedras tipo 2, luego van las cuatro piedras tipo 3 y así sucesivamente hasta que al final están las cuatro piedras tipo  $n$ . Por lo tanto, para partir este collar entre los dos ladrones, será necesario hacer por lo menos un corte entre cada grupo de cuatro piedras iguales, de otro modo, las cuatro piedras irán a un solo ladrón. Entonces, por lo menos hay que hacer  $n$  cortes y no es posible hacer la repartición con solamente  $n - 1$  cortes. ■

### 3. Modelación de la estructura de conectividad antípoda en las comunidades neuronales

En 2015, Karaman (2016) publicó su tesis para obtener el título de maestría en ciencias de la computación, más adelante esta misma tesis fue publicada con un artículo. Su tesis utiliza el TBU, la ley de Gauss y la proyección estereográfica de Riemman para hacer un programa que transforme los datos unidimensionales que se obtienen usando un electroencefalograma (EEG) y los convierte a datos tridimensionales y con esto comprueba la existencia de un tipo especial de conectividad entre comunidades de neuronas. El electroencefalograma utiliza electrodos para medir las corrientes eléctricas que se dan entre neuronas.

Los procesos en el cerebro se llevan a cabo a través de impulsos eléctricos. Estas corrientes eléctricas se miden y son las que muestran al actividad cerebral. Además existen teorías que agrupan grupos de neuronas como una comunidad, ya que todas hacen una actividad similar durante el funcionamiento del cerebro. Se ha estudiado que a pesar de que hay miles de millones de neuronas en el cerebro, hay un 20% de neuronas que transmiten un 70% de la información. A estas neuronas se les conoce como neuronas eje (*hub neurons* en inglés).

El funcionamiento del cerebro es sumamente complejo. Entre estas complejidades se ha observado que a veces, cuando se hace una intervención quirúrgica en el cerebro se afectan funcionalidades del cerebro que no están relacionadas con la región en la que se hizo la intervención. Esto lleva a pensar que existen conectividades entre comunidades de neuronas que están en diferentes partes del cerebro. Esto lleva a considerar la existencia de neuronas eje que estén en diferentes partes del cerebro, pero que están conectadas. A estas se les denominó neuronas eje antípoda (*antipodal hub neurons* en inglés).

Karaman *et al* (2016) establecen dos formas de producir información. La primera es inductiva y la segunda es deductiva. En la forma inductiva, se trabaja primero con experimentos y a partir de sus resultados se hacen generalizaciones que luego se convierten en teorías. Por otro lado,

la manera deductiva establece una teoría primero, entonces se hacen predicciones que luego son comprobadas con experimentos. Los autores plantean que en el caso del funcionamiento del cerebro es más correcto usar el pensamiento deductivo, ya que la relación entre el funcionamiento y la parte estructural del cerebro es muy complicada. Entonces hacer generalizaciones a partir de las observaciones que se hagan en los experimentos resulta más complicado que comprobar teorías utilizando experimentos. En esta línea de pensamiento, utilizan el TBU para establecer una teoría que luego será comprobada utilizando el encefalograma y algunas herramientas matemáticas.

EL trabajo de Karaman (2016) consiste en probar la existencia de las neuronas eje antípodos de forma deductiva. Es por esto que primero se hace la teoría. La herramienta principal para esto es el TBU, que demuestra la existencia de neuronas que tienen las mismas corrientes eléctricas en un par de puntos antípodos. Ya que el cerebro tiene la forma parecida a un hemisferio. De hecho, es muy parecido a una esfera. Los impulsos eléctricos en la superficie del cerebro actúan como una función continua sobre una esfera.

Con esto en mente, construyó el algoritmo de proyección, normalización y transformación (PNT), el cual transforma la información obtenida por los electrodos del encefalograma en una representación en 3-D de la información. El algoritmo consiste, a grandes rasgos, en: primero, transformar la señal utilizando la transformación de Hilbert, <sup>2</sup> luego se normaliza y finalmente se utiliza la proyección estereográfica para proyectar los datos a la tercera dimensión. Durante este procedimiento, los autores establecen que (por Borsuk-Ulam) existe un par de sensores cuya proyección en 3-D es igual con una precisión de 5 dígitos en la parte real e imaginaria.

Con este algoritmo es posible detectar las neuronas eje antípodos. Con esto se pueden identificar comunidades antípodos que tienen impulsos eléctricos iguales. Además, es un método muy sencillo de usar, ya que el electroencefalograma es una herramienta básica en el análisis del cerebro.

**4. Una aplicación en la física del TBU** Biasi *et al* (2005) buscaron otra forma de generalizar el TBU y encontraron un resultado interesante para  $n = 2$ . El enunciado utiliza conceptos de teoría de la medida, por lo que no lo enunciaré de manera completamente formal. El teorema A en (Biasi y Mattos, 2009) corresponde a la versión formal del teorema. En

---

<sup>2</sup>La transformación de Hilbert es un operador lineal que transforma la señal real a otra función real positiva. Es utilizado principalmente en procesamiento de señales. David Hilbert lo presentó en 1905, cuando publicó la solución a un problema que Riemann había propuesto en la época. Ahora se conoce como el problema Riemann-Hilbert. La transformada de Hilbert de  $u(t)$  está definida como:

$$H(u)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Lo anterior es la convolución de la función  $u(v)$  con  $\frac{1}{\pi}$ . Entre las propiedades de esta transformada está que al aplicarse dos veces devuelve su negativa (*i.e.*  $H(H(u(t))) = -u(t)$ ).

Lo importante de esta transformada es que el conjugado armónico de la función es su transformada de Hilbert. Entonces  $u + iv$ , en donde  $v$  es la transformada de Hilbert de  $u$ , es una función que cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann. Es una extensión al plano superior de los complejos. Esto es lo que utilizan en Karaman (2016), para el algoritmo que están construyendo, en donde transforman la señal de los electrodos al campo complejo y luego la regresan en tercera dimensión.

este caso solo se da una explicación intuitiva.

Considere un espacio  $A$  localmente conexo por caminos subconjunto de un espacio  $X$  que es Hausdorff. Dada una función  $\phi : A \mapsto A$  que cumple ciertas condiciones, para todo mapeo continuo  $f : X \mapsto \mathbb{R}^2$ , es posible encontrar un punto  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\phi(x))$  o encontrar un punto  $x \in A$  que cumple que  $f(\phi(x))$  está situado sobre el segmento de recta definido entre  $f(x)$  y  $f(\phi^2(x))$ . Note que cuando se establece  $X = S^2$ ,  $A = \mathbb{R}^2$  y  $\phi(x) = -x$  se da caso el caso del TBU donde  $n = 2$ .

En el caso en que  $A = X$ , Pannwitz (1952) probó que es imposible encontrar un punto  $x \in X$  tal que  $f(x) = f(\phi(x))$ , entonces se debe cumplir la segunda condición, que  $f(x)$ ,  $f(\phi(x))$  y  $f(\phi^2(x))$  son colineales.

De lo anterior se puede deducir la siguiente aplicación para la física. Considere las partículas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  que se mueven en  $\mathbb{R}^2$  con ecuaciones de posición

$$x(t), \phi(x(t)) \text{ y } \phi^2(x(t)),$$

respectivamente, entonces es posible encontrar un instante  $t_0$  en el cual las tres partículas están alineadas. Es más, se puede encontrar el momento en que están alineadas y, específicamente,  $P_2$  se encuentra en el medio.

# VI CONCLUSIONES

« *La matemática pura es de una manera muy distinta más útil que la aplicada. Porque lo que es útil sobretodo es la técnica, y la técnica matemática se enseña a través de la matemática pura.* »

-Godfrey Harold Hardy

El TBU provee numerosas aplicaciones y consecuencias. El enunciado del teorema es fácil de entender y el caso  $n = 1$  se puede demostrar solo con el teorema del valor intermedio, pero su demostración se complica significativamente para  $n > 1$ . Por estas características, el TBU se puede trabajar en áreas sencillas o en áreas más complicadas. Esto permitió hacer un trabajo que introduce ramas más complicadas de la matemática como la topología algebraica comenzando con conceptos básicos.

El teorema fue demostrado utilizando herramientas de cálculo para el caso  $n = 1$ , herramientas de topología algebraica para  $n = 2$  y, en general, se demostró utilizando combinatoria. Además se enunciaron nueve versiones del TBU en diferentes áreas como lo son la combinatoria y la topología algebraica. También se enuncian en términos de coberturas abiertas o cerradas. Con estas tres demostraciones y con todas las formas distintas de enunciarlo quedó mostrada la versatilidad del TBU.

Se incluyeron aplicaciones e implicaciones del teorema. En la matemática pura se demostró el teorema del punto fijo de Brouwer, el cual es de suma importancia en la teoría matemática, sobretodo para las ecuaciones diferenciales; se presentó una generalización del teorema, mostrando así que aún queda espacio para seguir trabajando en el TBU; y también se presentó la conjetura de Kneser, en esta se ve una forma muy interesante de utilizar el teorema. En aplicaciones que no son directamente para matemática pura se mostró el problema de los collares, que es parte de lo que se llama división justa; se presentó una aplicación que contribuye al entendimiento de las redes neuronales a través de la conversión de datos en dos dimensiones que provienen del electroencefalograma a datos en tres dimensiones; y por último se utilizó una generalización del TBU para encontrar tres partículas que se tienen que alinear si cumplen con ciertas condiciones en sus ecuaciones de posición. Con estas aplicaciones se comienza a entender la importancia del TBU para la matemática.



## VII RECOMENDACIONES

*« De él aprendí sobre los trucos y métodos de la topología que son verdaderamente geométricos, más visuales y casi “palpables” »*

-Stanislaw Ulam (sobre Karol Borsuk)

La matemática pura necesita investigadores. Aun queda mucho por ser estudiado. En este trabajo se presentó solamente un teorema, que fue probado hace 85 años, y aún siguen publicándose artículos con aplicaciones, pruebas o generalizaciones nuevas. La matemática es una de las ciencias más antiguas, por lo que puede parecer que ya ha sido demasiado estudiada, pero aún hay espacio para más. Se abren espacios mientras se estudia esta ciencia, como ocurre con el TBU, que su descubrimiento lleva a más espacio para investigar.

Lo verdaderamente difícil es especializarse y encontrar en qué especializarse. En esta cuestión lo más recomendable es “probar” las diferentes ramas, y continuar en donde se despierte la curiosidad. También es bueno buscar un área en donde alguien esté interesado y esté haciendo estudios, ya que siempre es más fácil trabajar cuando se tiene con quién compartir las soluciones o dudas y con quien hablar sobre los problemas o las dificultades y que aporte con un punto de vista diferente.

Es bueno tomar en cuenta que una decisión no es permanente, puede ser que en este momento la rama que más le llama la atención a una persona sea diferente a la que le llamará la atención dentro de unos años. En estos casos hay que ir a donde lleve la curiosidad que es la fuente e insumo para la investigación.



# VIII REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Biasi, C. y Mattos, D. 2005. *A Non-Standard Version of the Borsuk-Ulam Theorem*. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics 53(1):111-119.
- Biasi, C.; Mattos, D. y Dos Santos, E. 2009. *Applications of the Non-standard Version of the Borsuk-Ulam Theorem*. JP Journal of Geometry and Topology [India] 9(3):273-284.
- Borsuk, Karol. 1933. *Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre*. Fund Math [Alemania] (20): 177-190
- Chamizo, F. 2004. *Topología*, segunda ed., Universidad Autónoma de Madrid, 2004.
- Cisneros, José; Hinojosa, Gabriela y Robles, Carlos. 2000. *El teorema de Borsuk-Ulam* Universidad autónoma de México.
- Connett, J. 1973. *A Generalization of the Borsuk-Ulam Theorem* Journal of the London Mathematical Society s2-7(1): 64–66,
- Freund, R. y Todd, M. 1981. *A Constructive Proof of Tucker's Combinatorial Lemma*. Journal of Combinatorial Theory A30: 321-325.
- Hatcher, Allen. 2001. *Algebraic Topology* Universidad de Cornell. Obtenido de <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>
- Karaman, Bayazit. 2015. *Modeling the Antipodal Connectivity Structure of Neural Communities (Tesis de maestría)*. College of Engineering and Information Technology, Arkansas Estados Unidos.
- Karaman, Bayazit; Demirer, R Murat; Bayrak, Coskun y Mert Su, M. 2016. *Modeling the Antipodal Connectivity Structure of Neural Communities*. AIMS Neuroscience (3):163-180. 10.3934/Neuroscience.2016.2.163.
- Kyner, W. 1956. *A Generalization of the Borsuk Ulam Theorem* American Mathematical Society 7(6):1117-1119.
- Landau, W. 2009. *The Fundamental Group*. Universidad de Chicago.

- Lyusternik, L.; Shnirel'man, L. 1930. *Topological methods in variational problems*, Issledovatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O.M.G.U. [Moscu]
- Matousek, J. 2003. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Berlin: Springer Verlag . 214 págs.
- Nakaoka, Minoru. 1970. *Generalizations of Borsuk-Ulam theorem*. Osaka J. Math. 7(2), 423-441.
- Pannwitz, Erika. 1952 Eine freie Abbildung der n-dimensionalen Sphäre in die Ebene, Mathematische Nachrichten [Alemania]7(3):183 - 185.
- Prescott, Timothy. 2002. *Extensions of the Borsuk-Ulam theorem (Tesis de licenciatura)* Harvey Mudd University, Claremont, Estados Unidos.
- Reiser, Peter. 1981 *A modified integer labeling for complementarity algorithms*. Mathematics of Operations Research 6:129-139.
- Van der Laan, Gerard y Talman, Dolf. 1981. *class of simplicial restart fixed point algorithms without an extra dimension*, Mathematical Programming, 20:33-48.
- Van der Laan, Gerard, Talman, Dolf y Yang, Zhen-Hang. 2009. *Combinatorial Integer Labeling Theorems on Finite Sets with Applications*.
- Volokikov, A. 1980. *A generalization of the Borsuk Ulam Theorem* Mathematics of the USSR-Sbornik 36(2):195:202.

# IX ANEXOS

## A. Pruebas complementarias

En el capítulo dos se utiliza un lema técnico cuya prueba es un argumento trigonométrico, por esto no se incluye en el texto principal. Este lema técnico está redactado de una forma complicada para simplificar las pruebas en las que se utiliza. Realmente el lema técnico es simplemente una propiedad en trigonometría y no tiene nada que ver con elevaciones o caminos.

**Lema A.1.** (lema técnico) Sean  $p(x) = (\cos(x), \text{sen}(x))$ ,  $\beta$  un camino en  $S^1$  y  $\tilde{\beta}$  una elevación de  $\beta$  con  $\tilde{\beta}(1) = N\pi, N \in \mathbb{Z}$ . Entonces si  $N$  es par  $p \circ (x + \tilde{\beta}(1)) = p(x)$  y si  $N$  es impar  $p \circ (x + \tilde{\beta}(1)) = -p(x)$ .

**Demostración.** Ya que  $\tilde{\beta}(1) = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , entonces lo que se quiere probar es que si  $p(x) = (\cos(x), \text{sen}(x))$ , entonces  $p(x + N\pi) = p(x)$  para  $N$  entero. Esto es fácil de probar:

$$\begin{aligned} p(x + N\pi) &= ((\cos(x + N\pi), \text{sen}(x + N\pi))) \\ &= (\cos(x)\cos(N\pi) - \text{sen}(x)\text{sen}(N\pi), \text{sen}(x)\cos(N\pi) - \text{sen}(N\pi)\cos(x)) \\ &= (\cos(x)\cos(N\pi), \text{sen}(x)\cos(N\pi)) \end{aligned}$$

Entonces, si  $N$  es par:

$$p(x + N\pi) = (\cos(x), \text{sen}(x)) = p(x).$$

y si  $N$  es impar:

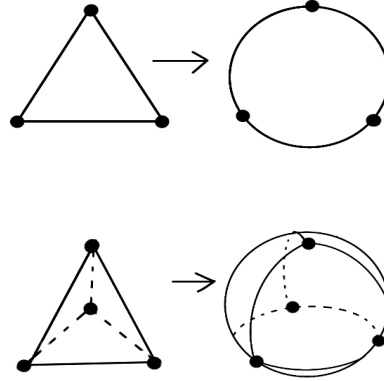
$$p(x + N\pi) = (-\cos(x), -\text{sen}(x)) = -(\cos(x), \text{sen}(x)) = -p(x). \blacksquare$$

En el capítulo III se dejó incompleta la prueba de  $(f) \implies (c)$ , porque no se tenía la herramienta necesaria para completarla. Hasta el capítulo IV se introduce la combinatoria necesaria para este resultado. El enunciado se demostrará en este apartado.

**Lema A.2.** Existe una cubierta cerrada  $\{F_1, F_2, \dots, F_{n+1}\}$  de  $S^{n-1}$  tal que no hay ningún par de puntos antípodos que estén en el mismo conjunto cerrado.

**Demostración.** Considere el  $n$ -simplejo que contiene al 0 en su interior. Este tiene  $n + 1$  caras (simplejos de dimensión  $n - 1$ ). Ahora considere la función  $f : \mathbb{R}^n \mapsto S^{n-1}$ , tal que  $f(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ . La imagen bajo  $f$  de cada una de las caras del  $n$ -simplejo devuelve un cerrado en  $S^{n-1}$ . Intuitivamente se puede ver como inflar un tetraedro hasta que quede esférico o deformar un triángulo hasta que quede una circunferencia (Figura 23). Entonces se forma una cubierta de  $S^{n-1}$  compuesta de  $n + 1$  cerrados. ■

Figura 23: Transformación de simplejos a cubierta cerrada de esfera



## B. Glosario

- **antípoda en la frontera.**

Un mapeo  $F : X \mapsto Y$  es antípoda en la frontera si es continuo y se cumple que  $f(-x) = -f(x)$ , para todo  $x \in \partial X$ .

- **Arista (grafo).**

Ver definición de Grafo.

- **Bicontinua (función).**

Una función  $f$  es bicontinua si es continua y su inversa también es continua.

- **Bola n-dimensional** La bola n-dimensional o n-bola se define como el espacio  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

- **Camino**

Un camino en un espacio  $\mathcal{X}$  es un mapeo continuo  $\alpha : [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$ . A  $f(0)$  se le llama punto inicial y  $f(1)$  es el punto final.

- **Camino inverso**

Dado un camino  $\alpha : [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$ , el camino inverso de  $\alpha$  es el mapeo  $\alpha' : [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$  definido por:  $\alpha'(t) = \alpha(1 - t)$ . Note que el punto inicial de  $\alpha'$  es el punto final de  $\alpha$  y el punto final es el inicial de  $\alpha$ .

- **Cara (de un n-simplejo)**

Cualquier subconjunto  $S'$  de vértices de un  $n$ -simplejo  $S$  que forma un simplejo es una cara de  $S$ .

- **Compacto**

Un espacio topológico  $\mathcal{X}$  es compacto si para toda colección de abiertos  $\{U_i\}$  tales que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathcal{X}$ , existe una subcolección finita  $\{U_{i_r}\}$  tal que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_{i_r} = \mathcal{X}$ .

- **Complejo simplicial**

Un conjunto de simplejos  $\mathcal{K}$  es un complejo simplicial si cumple:

1. dado un simplejo  $\sigma \in \mathcal{K}$ , cualquier cara de  $\sigma$  también está contenida en  $\mathcal{K}$
2. La intersección de dos simplejos en  $\mathcal{K}$  es vacía o también es un simplejo contenido en  $\mathcal{K}$

- **Composición de caminos (trayectorias)**

Dados dos caminos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , se define la composición por el mapeo  $\alpha_1 \circ \alpha_2 : [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$  definido por:

$$\alpha_1 \circ \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- **Conexo (Simplemente conexo)**

Un espacio  $\mathcal{X}$  es simplemente conexo si es conexo por caminos y, además, cada camino en  $\mathcal{X}$  es homótopo a un punto (camino constante).

- **Diámetro (de una triangulación)**

El diámetro de un simplejo  $S$  es  $diam(S) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in S\}$ .

- **Dimensión (de un simplejo)**

Ver definición de simplejo.

- **Elevación**

Sea  $E$  un espacio recubridor de  $X$  y  $p$  su proyección recubridora. Dada una función  $f : A \mapsto X$ , se dice que  $\tilde{f}$  es una elevación de  $f$  si  $p(\tilde{f}(x)) = f(x)$ .

- **Esfera n-dimensional** La esfera n-dimensional o n-esfera se define como el espacio  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

- **Espacio conexo por caminos**

Un espacio  $\mathcal{X}$  es conexo por caminos si para cualesquiera  $a, b \in \mathcal{X}$  existe un camino en  $\mathcal{X}$  que inicia en  $a$  y termina en  $b$ .

- **Espacio Hausdorff**

Un espacio topológico  $\mathcal{X}$  es de Hausdorff si para cualesquiera par de puntos  $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ , existen  $U_1$  y  $U_2$  abiertos tales que  $x_1$  y  $x_2$  pertenecen a  $U_1$  y  $U_2$  respectivamente y además la intersección de  $U_1$  y  $U_2$  es vacía.

- **Espacio recubridor**

Ver proyección recubridora.

- **Faceta (de un  $n$ -simplejo)**

Una faceta de un simplejo es una cara que forma un  $n - 1$ -simplejo.

- **Función puntuada**

Dados dos espacios topológicos puntuados  $(\mathcal{X}, x_0)$  y  $(\mathcal{Y}, y_0)$  un mapeo puntuado es un mapeo  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .

- **Grado (de un vértice en un grafo)**

En un grafo no dirigido, el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en el vértice.

- **Grafo**

Un grafo  $G$  es un conjunto de puntos  $V(G)$  (vértices) y un conjunto de pares de vértices  $A(G)$  (aristas). Un grafo se puede representar visualmente como un conjunto de puntos conectados por segmentos, donde cada segmento representa cada uno de los pares en  $A(G)$ .

- **Grafo de Kneser**

Un grafo de Kneser  $Kn(k, n)$  es tal que los vértices son los subconjuntos de cardinalidad  $k$  del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  en donde dos vértices están conectados si y solo si los subconjuntos que representan son disjuntos.

- **Homeomorfismo**

Dados dos espacios topológicos  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ , una función  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  es un homeomorfismo si es sobreyectiva y bicontinua. En este caso se dice que  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$  son homeomorfos.

- **Homomorfismo**

Un homomorfismo  $h$  entre dos grupos  $(X, \odot)$ ,  $(Y, \times)$  es un mapeo que preserva la operación, es decir,  $h(x_1 \odot x_2) = h(x_1) \times h(x_2)$ , para todo  $x_1, x_2 \in (X, \odot)$ . En este caso se dice que  $(X, \odot)$  y  $(Y, \times)$  son homomorfos.

- **Homotopía**

Sean  $f, g \in p(\mathcal{X}; x_0, x_1)$  dos trayectorias. Entonces  $f$  homótopa a  $g$  (en símbolos  $f \simeq g$ ), si existe una función continua  $H : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathcal{X}$  tal que:

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & s = 0, 0 \leq t \leq 1 \\ x_1 & s = 1, 0 \leq t \leq 1 \\ f(s) & 0 \leq s \leq 1, t = 0 \\ g(s) & 0 \leq s \leq 1, t = 1 \end{cases}$$

En este caso a  $H$  se le denomina homotopía entre  $f$  y  $g$ .

- **Isomorfismo**

Un isomorfismo  $h$  entre dos grupos  $(X, \odot)$ ,  $(Y, \times)$  es un mapeo biyectivo que es homomorfismo. En este caso se dice que  $(X, \odot)$  y  $(Y, \times)$  son isomorfos.

- **mapeo puntuado**

Dados dos espacios topológicos puntuados  $(\mathcal{X}, x_0)$  y  $(\mathcal{Y}, y_0)$ , un mapeo  $f : \mathcal{X}, x_0 \mapsto (\mathcal{Y}, y_0)$  es un mapeo puntuado si  $f(x_0) = y_0$ .

- **mapeo simplicial**

Un mapeo entre dos triangulaciones  $f : T_1 \mapsto T_2$  es simplicial si a cada simplejo de  $T_1$  le asigna un simplejo en  $T_2$ .

- **Norma infinito**

La norma infinito de un vector  $x$  con componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , denotada  $\|x\|_\infty$ , es el máximo de los valores absolutos de sus componentes.  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$ .

- **Número cromático**

El número cromático de un grafo es la mínima cantidad de colores que se necesitan para asignar un color a todos los vértices del grafo de tal forma que si dos vértices son adyacentes, entonces no tienen asignado el mismo color.

- **Proyección recubridora**

Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos y sea  $p : E \rightarrow X$  continua y sobreyectiva. Se dice que  $p$  es una proyección recubridora y que  $E$  es un espacio recubridor de  $X$  si para todo  $x \in X$  existe un entorno  $U(x)$  con  $p^{-1}(U(x)) = \bigcup V_\alpha$ , donde los conjuntos  $V_\alpha$  son abiertos disjuntos en  $E$  tales que  $p|_{V_\alpha}$  es un homeomorfismo.

- **Refinamiento**

Dado un simplejo  $\sigma$ , se le llamará un refinamiento a un simplejo  $\tau$  que cumple que para cada  $\delta_1 \in \tau$ , existe  $\delta_2 \in \sigma$  tal que  $\delta_1 \subset \delta_2$ .

- **Retracción**

Dado un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $A$ , el mapeo  $f : X \mapsto A$  es una retracción de  $X$  en  $A$  si  $f$  es continua y su imagen bajo la restricción a  $A$  es la identidad, es decir  $f(a) = a, \forall a \in A$ . En caso de que existe esta función, se dice que  $A$  es un retracto de  $X$ .

- **Retracto**

Ver retracción.

- **simétricamente antípoda en la frontera**

Ver antípoda en la frontera.

- **n-simplejo**

Dado un conjunto de puntos  $S$ , un  $n$ -simplejo es el conjunto convexo más pequeño que contiene  $n + 1$  puntos independientes de forma afín. La dimensión del  $n$ -simplejo  $\sigma$  es  $\dim(\sigma) = n$ .

- **Trayectoria**

Una trayectoria es un camino. Ver camino.

- **vértice (grafo)**

Ver definición de Grafo.

## C. El lema de Sperner

Primero se definirán dos términos, los cuales sirven para enunciar el lema de Sperner.

**Definición C.1.** *Dado un complejo simplicial, se dice que un  $n$ -simplejo está totalmente etiquetado si todos sus vértices tienen etiquetas distintas, y sus etiquetas están en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ .*

**Definición C.2.** *Un etiquetado de un complejo simplicial es de Sperner si ningún vértice tiene 0 de etiqueta y las etiquetas están en el conjunto  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ .*

**Lema C.1. (Lema de Sperner)** *Sea  $\lambda : V(G) \mapsto \{1, 2, \dots, n, n+1\}$  un etiquetado de Sperner del complejo simplicial  $K$ . Entonces existe al menos un  $n$ -simplejo totalmente etiquetado en  $K$ . Además, el número de  $n$ -simplejos totalmente etiquetados es impar.*