

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



CAOS Y TEORÍAS CONFORMES

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR
JOSÉ PABLO LINARES FERNÁNDEZ
PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO
DE LICENCIADO EN FÍSICA

GUATEMALA
2016

CAOS Y TEORÍAS CONFORMES

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



CAOS Y TEORÍAS CONFORMES

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR
JOSÉ PABLO LINARES FERNÁNDEZ
PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO
DE LICENCIADO EN FÍSICA

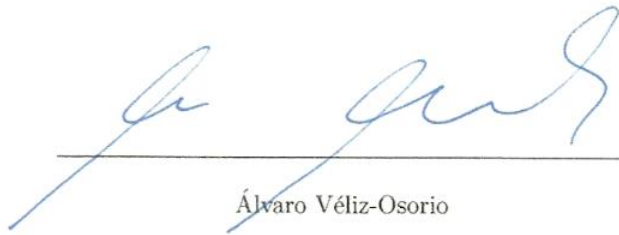
GUATEMALA
2016

Vo.Bo..



Alvaro Véliz-Osorio

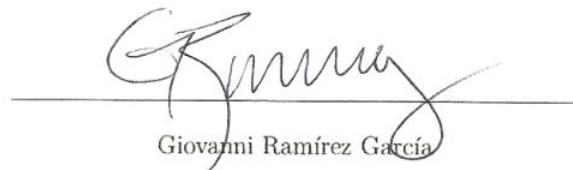
Tribunal Examinador:



Alvaro Véliz-Osorio



Zaida Urrutia



Giovanni Ramírez García

Fecha de aprobación: Guatemala, 9 de diciembre de 2016

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requisitos para optar al grado Académico de Licenciado en Física, de la Universidad del Valle de Guatemala. El interés de elaborar este trabajo de graduación surgió de mi interés de especializarme en materia condensada en un futuro próximo.

Es extremadamente necesario agradecer en primer lugar a mi asesor de tesis Álvaro Véliz-Osorio por el tiempo que me brindó para ayudarme a realizar este trabajo y por proponerme temas para este trabajo que se están estudiando hoy en día. En segundo lugar agradezco a mis padres Bernardo y Claudia por darme la oportunidad de estudiar en la UVG así como apoyarme económicamente durante mis estudios de pregrado. También agradezco a Carol Castillo por darme la estabilidad emocional necesaria para mantener un rendimiento académico razonablemente estable durante los momentos más difíciles que tuve que afrontar durante estos 4 años incluyendo el período de elaboración de esta tesis. También debo agradecer a mis compañeros de promoción por el apoyo en mi estudio de la física y por ser una de las razones por las que *subí mi nivel*. Por último agradezco a todos mis catedráticos (de cursos afines a mi carrera) en la Universidad por enseñarme cosas interesantes, con mención especial a Alan Reyes por ser quien me hizo sentarme a estudiar en serio por primera vez luego de un mal resultado en un examen de matemática discreta y a Zaida Urrutia por su trabajo dirigiendo el departamento de física, lo cual sé que no es tarea fácil.

Por último, este trabajo servirá de base para realizar los mismos cálculos pero, para otros modelos minimales, como por ejemplo el modelo de Ising tricrítico. Por esto último también debo agradecer a mi asesor por darme la idea y los recursos necesarios para que sea probable que pueda publicar eso en un futuro.

Índice de contenido

Lista de figuras	ix
Resumen	xi
1 Introducción	1
2 Funciones de partición	3
2.1 Ensembles	3
2.1.1 Ensamble microcanónico	3
2.1.2 Ensamble canónico	4
2.2 Ejemplo: Oscilador armónico clásico y cuántico	5
2.3 Modelo de Einstein	7
3 Modelo de Ising	9
3.1 Modelo de Ising en 1 dimensión	10
3.2 Modelo de Ising en dos dimensiones	13
4 Teoría de campos conformes	17
4.1 Teoría de campos conformes en dos dimensiones	19
4.2 Función de dos puntos a temperatura finita	23
4.3 El modelo de Ising en dos dimensiones de nuevo	23
5 OTOCs y caos	25
5.1 Caos cuántico	25
5.2 OTOC	26
6 Conclusión	29
7 Bibliografía	31
8 Anexos	33
8.1 Matrices de transición	33
8.2 Tensores	34
8.3 Álgebra y esquema de prueba de isomorfismo álgebra conforme-SO(d+1,1)	35

Lista de figuras

2.1	(Shankar, 1980) Comparación de un experimento con la teoría de Einstein para el calor específico en el caso del diamante (θ_E se elige como $1320K$).	8
3.1	(Huang, 1987) Topología del modelo de Ising en una dimensión	11
3.2	La cuadrícula de la izquierda muestra la consecuencia de la ecuación 3.30 y la cuadrícula de la derecha las consecuencias de 3.31	14
3.3	(Witthauer y Dieterle, 2007) Simulaciones de cantidades termodinámicas de un sólido. a) es la energía por sitio, b) la magnetización por sitio, c) el calor específico y d) la susceptibilidad magnética.	15
5.1	Gráfica en el plano complejo de la ecuación 4.47 utilizando la ecuaciones 5.8-5.13 donde el camino rojo es para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_4$, el azul para $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_4$ y el verde para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_4 < \epsilon_2$	26
5.2	Gráfica en el plano complejo de la ecuación conjugada 4.47 utilizando los conjugados en las ecuaciones 5.8-5.13 donde el camino rojo es para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_4$, el azul para $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_4$ y el verde para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_4 < \epsilon_2$	27

Resumen

Uno de los modelos estadísticos más estudiados es el modelo de Ising. Este modelo no presenta transiciones de fase en el caso uno-dimensional, pero sí para el caso dos-dimensional. En particular, este modelo puede ser descrito durante una transición de fase utilizando teorías de campos conformes en dos dimensiones. Una propiedad interesante para investigar es el caos cuántico durante las transiciones de fase. Utilizando OTOCs, se determinó que el espín es cuánticamente caótico.

1 Introducción

El objetivo de este trabajo es comprender la estructura de sistemas cuánticos en bajas dimensiones (específicamente el modelo de Ising) y estudiar medidas de caos. El modelo de Ising es uno de los modelos estadísticos más estudiados, se puede decir que es uno de los *clásicos*. Éste consiste en partículas organizadas sobre una red con espines $+1$ ó -1 . Este modelo fue concebido originalmente por Ernst Ising en 1 dimensión, pero fue rápidamente abandonado porque no presentaba transiciones de fase. Mucho tiempo después Lars Onsager resolvería el modelo en 2 dimensiones y con esto probar que en ese espacio si existen transiciones de fase. De todos los modelos mínimos que se estudian, éste es el más simple.

En modelos estadísticos como el de Ising, se quiere estudiar lo que sucede en los cambios de fase. Sin embargo, el estudio teórico de estos fenómenos físicos puede resultar complicado debido a que se estudian utilizando teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés). Sin embargo, se puede estudiar algunas propiedades de estos fenómenos sin saber QFT. Este atajo se logra utilizando teorías de campos conformes (CFT por sus siglas en inglés) para calcular funciones de 2, 3 y 4 puntos en dos dimensiones. Una CFT es aquella donde un campo es invariante ante transformaciones conformes, las cuales son aquellas que preservan ángulos.

Por otro lado, uno de los fenómenos físicos más conocidos es el efecto mariposa, el cual se refiere a que un leve cambio en las condiciones iniciales presenta un cambio significativo en el sistema al cabo de *mucho* tiempo. Cuando un sistema cumple con esto se dice que es caótico. Este comportamiento es completamente determinístico, pero parece aleatorio debido a que es físicamente imposible medir exactas las condiciones iniciales de un sistema y esas pequeñas variaciones que estarían dentro de la incertidumbre de los instrumentos desataría diferencias aparentemente aleatorias. De esto sigue pasar del régimen clásico al régimen cuántico. Cuando hacemos esto el caos es medido por

$$F_{ij}^\beta = -\langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]^2 \rangle_\beta.$$

Al expandir el conmutador, $F_{ij}^{\beta 1}$ está en función de funciones de 4 puntos. Este problema puede ser complicado si se ataca desde QFT, pero si se trata de resolver con CFT resulta relativamente simple.

¹La notación tensorial está explicada en el apéndice B.

Un problema que se encuentra cuando se trata de incorporar CFTs para resolver el problema de caos cuántico es que el primer tiempo que se identifica tiene características euclidianas, las cuales no corresponden al tiempo físico; esto se debe a que originalmente una CFT se trabaja en un espacio euclidiano, cuya métrica no corresponde a la de Minkowski. Por esto se hace una continuación analítica

$$t \rightarrow t^E - it^L,$$

donde E se refiere a euclidiano y L a lorentziano. Esta es la última herramienta que se necesita para determinar caos en el modelo de Ising.

Esta tesis es en parte una monografía de los temas mencionados anteriormente y la presentación de una forma simple de calcular caos para modelos minimales. El segundo capítulo es un breve resumen de los conceptos básicos de mecánica estadística con algunos ejemplos resueltos. El tercer capítulo es una descripción del modelo de Ising en 1 dimensión (con su solución) y 2 dimensiones (ya resuelto). El cuarto capítulo es una descripción de lo más básico de CFT con énfasis en dos dimensiones y la aplicación al modelo de Ising para obtener funciones de 2 y 4 puntos. Por último, el quinto capítulo trata sobre la definición de caos cuántico; OTOC (*Out of Time Order Correlator*), lo cual permite calcular el comportamiento de las funciones de 4 puntos del modelo de Ising y así finalmente concluir en cual primario de ese modelo existe caos.

2 Funciones de partición

La mecánica estadística surge debido a la necesidad de trabajar con muchas partículas, del orden de 10^{23} . Por ejemplo, dado un sistema cuántico, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (2.1)$$

En mecánica cuántica buscamos resolver esta ecuación. Pero debido a que tenemos $\sim 10^{23}$ grados de libertad, esta sería una tarea casi imposible, incluso con poder computacional para los eigenestados; los cuales se denominan *microestados*. Sin embargo, la forma de los eigenestados del sistema no nos interesa, sino el comportamiento que observaríamos macroscópicamente; es decir los *macroestados* (Tong, 2012).

La mecánica estadística parte de un supuesto fundamental:

Para un sistema aislado en equilibrio, todos los microestados accesibles son igual de probables.

2.1 Ensembles

Para un macroestado dado, si se le midiera en un tiempo inicial, se vería un microestado cualquiera. Pero al medir después de un tiempo, es probable que se vea otro microestado. Al medir varias veces se debería haber visto muchos microestados diferentes (dado que el sistema no sea trivial o *casi trivial*). Esperamos entonces que este sistema mantenga sus características macroscópicas promedio, a pesar que de sus microestados esté en constante fluctuación (Pathria y Beale, 2011).

Definición 2.1. Un *ensemble* es un sistema que mantiene constante sus características macroscópicas promedio a pesar de que sus microestados esté en constante fluctuación.

Como un sistema aislado es muy raro en la naturaleza, nos interesaría saber qué sucede con sistemas que puedan intercambiar energía (ensamble canónico) y materia (ensamble gran canónico). Sin embargo, es necesario estudiar el primer tipo de sistema porque cumple con el supuesto fundamental directamente. De la caracterización de este sistema (ensamble microcanónico) se definirá la temperatura termodinámica que será lo que una a esta teoría con teorías macroscópicas.

2.1.1. Ensamble microcanónico

Definición 2.2. Un *ensamble microcanónico* es un sistema cuya energía y número de partículas están fijas.

Dada esta definición y el supuesto fundamental, la probabilidad p de que un sistema se encuentre en un estado $|n\rangle$ es la misma para cualquiera, es decir:

$$p(n) = \frac{1}{\Omega(E)}, \quad (2.2)$$

donde $\Omega(E)$ es el número de microestados posibles con energía E .

Definición 2.3. Dada $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J * K^{-1}$ la *constante de Boltzmann*, la *entropía microcanónica* S está dada por:

$$S(E) = k_B \ln[\Omega(E)]. \quad (2.3)$$

Definición 2.4. La *temperatura termodinámica* T se define como:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}. \quad (2.4)$$

Esta última definición se debe a que se maximiza la entropía de dos sistemas que no interactúan entre ellos cuando:

$$\frac{\partial S_1}{\partial E} = \frac{\partial S_2}{\partial E} \Leftrightarrow T_1 = T_2, \quad (2.5)$$

es decir, que dada la segunda ley de la termodinámica, el sistema siempre aumentará su entropía por lo que al llegar al máximo debería estar en equilibrio. Que ambas temperaturas sean iguales tiene correspondencia con el equilibrio térmico que se observa macroscópicamente (Tong, 2012).

Definición 2.5. La *capacidad calorífica* C se define como:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T}. \quad (2.6)$$

Esto es importante porque es una cantidad macroscópica medible.

2.1.2. Ensamble canónico Ya habiendo caracterizado el ensamble más elemental, nos movemos ahora a caracterizar uno que pueda tener variaciones en la energía. Esto lo hacemos porque muchos sistemas en la naturaleza se pueden modelar cumpliendo esta característica. Para hacer esta caracterización, hacemos las definiciones siguientes.

Definición 2.6. Un *reservorio* es un sistema con energía muy grande en comparación a otro sistema.

Definición 2.7. Un *ensamble canónico* es un sistema cuyo número de partículas es constante en contacto con un reservorio, el cual le permite tener fluctuaciones de energía.

Para este sistema, la probabilidad de que esté en un estado $|n\rangle$ con energía E_n es:

$$p(n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \quad ; \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \quad (2.7)$$

Definición 2.8. La *función de partición canónica* Z se define como la siguiente sumatoria sobre todos los estados posibles:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (2.8)$$

Una propiedad de la función de partición es que dados dos sistemas que no interactúan entre sí, al ponerlos en contacto la nueva función de partición es la multiplicación de las anteriores. Por lo que dados m sistemas que no interactúan entre sí, la función de partición del sistema que surge al unirlos es:

$$Z_m = \prod_{n=1}^m Z_n. \quad (2.9)$$

La función de partición es de gran importancia ya que caracteriza la probabilidad de estados. Esto significa que podemos encontrar valores esperados de cantidades como la energía o la temperatura si conocemos Z (Tong, 2012). Como ejemplos se pueden mencionar las siguientes relaciones:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (2.10)$$

$$\Delta E^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \quad (2.11)$$

2.2 Ejemplo: Oscilador armónico clásico y cuántico

Una de las modelaciones más comunes en física es la de un oscilador armónico, el cual viene de hacer una expansión de Taylor a algún potencial cualquiera cerca del equilibrio. Como se mencionó antes, encontrar la función de partición permite encontrar valores esperados, por lo que será lo primero que se calculará.

Empezamos con un oscilador clásico, para éste tenemos que la sumatoria sobre todos los estados se vuelve una integral en el estado de fase:

$$\sum_n \rightarrow \int \int dx dp, \quad (2.12)$$

además sabemos que la energía está dada por:

$$E_n \rightarrow E(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (2.13)$$

entonces la función de partición es:

$$Z_{cl} = \int \int dx dp \exp \left[-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \right] = \left[\int dp e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \right] \left[\int dx e^{-\frac{\beta m\omega^2 x^2}{2}} \right]. \quad (2.14)$$

Estas integrales son campanas de Gauss. Entonces tenemos el siguiente resultado:

$$Z_{cl} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}} = \frac{2\pi}{\beta\omega}. \quad (2.15)$$

Usando este resultado obtenemos la energía promedio con la ecuación 2.10:

$$\langle E_{cl} \rangle = \frac{1}{\beta} = k_B T. \quad (2.16)$$

Hacemos lo mismo pero para un oscilador cuántico. Para éste, los niveles de energía están dados por:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.17)$$

Por lo que la función de partición es:

$$Z_{qu} = \sum_n e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}. \quad (2.18)$$

Reconocemos una serie geométrica, la cual converge porque $e^{-\beta\hbar\omega} < 1 \quad \forall \beta > 0$, lo cual tiene sentido porque no se está lidiando con temperaturas negativas ni temperatura cero. Entonces se tiene:

$$Z_{qu} = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} (1 - e^{-\beta\hbar\omega})^{-1}. \quad (2.19)$$

Al igual que en el oscilador clásico, se obtiene la energía promedio con la ecuación 1.10:

$$\langle E_{qu} \rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right]. \quad (2.20)$$

Ahora nos gustaría encontrar una correspondencia entre la teoría cuántica y la teoría clásica en el límite termodinámico. Para T grandes β es pequeña, entonces se expande el término exponencial de la ecuación 2.19:

$$e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega = 1 + \frac{1}{T} \frac{\hbar\omega}{k_B}. \quad (2.21)$$

La última igualdad significa que la aproximación vale si $T \gg \frac{\hbar\omega}{k_B}$. Entonces, recordando que beta es pequeño, la ecuación 2.19 se vuelve:

$$\langle E_n \rangle = \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega} \right] \approx \hbar\omega \frac{1}{\beta\hbar\omega} = \frac{1}{\beta} = k_B T. \quad (2.22)$$

Lo que demuestra la correlación entre la mecánica cuántica con la mecánica clásica.

2.3 Modelo de Einstein

Una cantidad termodinámica macroscópica que es común de medir por sus diversas aplicaciones es la capacidad calorífica (definición 2.5). Sin embargo, en física del estado sólido, cuando se le medía a bajas temperaturas se obtenían resultados que se desviaban de la teoría clásica (Shankar, 1980). A continuación se presenta el cálculo de la capacidad calorífica para un cristal con N_0 átomos. Para pequeñas oscilaciones, esto es equivalente a $3N_0$ osciladores desacoplados.

Sabemos que para dos sistemas que no interactúan entre ellos, las funciones de partición se multiplican. Entonces la función de partición será Z^{3N_0} y para obtener la energía promedio tenemos $\langle E \rangle = -3N_0 \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$. Entonces para un cristal tratado como sistema clásico se tiene:

$$C_{cl}(T) = \frac{1}{N_0} \frac{\partial}{\partial T} (3N_0 k_B T) = 3k_B. \quad (2.23)$$

Suponiendo que todos los átomos del cristal vibran a la misma frecuencia ω por simplicidad, se obtiene:

$$C_{qu}(T) = \frac{1}{N_0} \frac{\partial}{\partial T} 3N_0 \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right) = 3\hbar\omega \frac{\hbar\omega}{k_B T^2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1 \right)^2}. \quad (2.24)$$

Definiendo la temperatura de Einstein como:

$$\theta_E = \frac{\hbar\omega}{k_B}. \quad (2.25)$$

Con esto lo anterior se vuelve:

$$C_{qu}(T) = 3k_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{\left(e^{\theta_E/T} - 1 \right)^2}. \quad (2.26)$$

Se procede a verificar lo que sucede cuando $T \gg \theta_E$, hacemos la expansión de Taylor para el término exponencial del denominador hasta el segundo término y para el que está en el numerador solo hasta el primero:

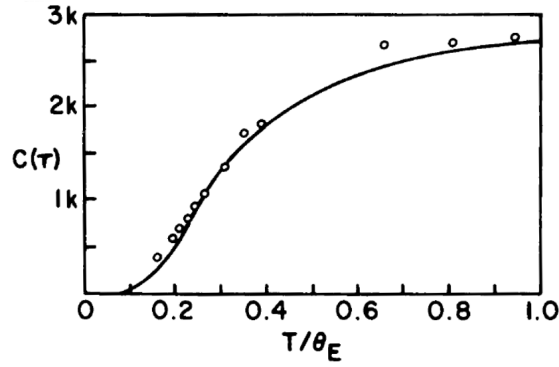
$$C_{qu}(T) = 3k_B \left(\frac{\theta_E}{T} \right)^2 \frac{1}{\left(\theta_E/T \right)^2} = 3k_B. \quad (2.27)$$

Ahora lo hacemos para $T \ll \theta_E$, dándonos cuenta que $e^{\theta_E/T} \gg 1$:

$$C_{qu}(T) = 3k_B \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\theta_E/T}}{e^{2\theta_E/T}} = 3k_B \left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\theta_E/T}. \quad (2.28)$$

Este modelo tiene correspondencia con la física experimental, como se puede apreciar en la Figura 2.1. Esto fue una de las pruebas de que la cuantización es importante en la física.

Figura 2.1: (Shankar, 1980) Comparación de un experimento con la teoría de Einstein para el calor específico en el caso del diamante (θ_E se elige como 1320K).



3 Modelo de Ising

Uno de los modelos estadísticos más famosos es el modelo de Ising, el cual ha sido estudiado extensamente. En una y dos dimensiones fue resuelto analíticamente, el caso tridimensional es estudiado actualmente (El-Showk *et al.*, 2012).

Este modelo se puede aplicar a uno de los fenómenos más interesantes de la física del estado sólido: el ferromagnetismo. Éste consiste en que una fracción de los átomos de materiales como hierro o níquel se polaricen en la misma dirección en respuesta a un campo magnético externo, lo cual da como resultado un campo magnético propio del material. La particularidad de esto es que al quitar el campo magnético externo, una fracción de los átomos polarizados se mantendrá en ese estado debido a que por efectos cuánticos, un átomo prefiere tener la misma orientación que sus vecinos. Sin embargo esto sucede a temperaturas menores al *punto de Curie* (también se le conoce como *temperatura de Curie*), éste valor varía de material en material. Cuando el material se encuentra arriba de este punto se vuelve paramagnético (Reitz *et al.*, 1981). Como no hay un cambio gradual de un estado a otro sino sucede espontáneamente, éste es una transición de fase.

El modelo de Ising consiste en un arreglo de N puntos fijos llamados *sitios de la red* que forman una red n -dimensional periódica. Cada sitio de la red tiene un espín σ asociado cuyo valor puede ser $+1$ o -1 . Para una red con N sitios, el número de configuraciones diferentes de espines es 2^N (DiFrancesco *et al.*, 1997).

Una cantidad termodinámica de interés es la magnetización M , que corresponde al valor esperado de un espín. Por invarianza en traslaciones, esto sería lo mismo para cualquier espín, por lo que se tiene:

$$M = \langle \sigma_j \rangle = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}, \quad (3.1)$$

donde h es la magnetización que aporta un spin y F es la energía libre y está dada por

$$F = -T \ln Z. \quad (3.2)$$

También es de interés la susceptibilidad magnética χ , que indica como responde el campo magnético a un campo externo muy pequeño:

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0}. \quad (3.3)$$

Otra cantidad que es de interés es la *función de correlación de pares* $\Gamma(i)$:

$$\Gamma(i-j) = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle, \quad (3.4)$$

la cual es una medida de la dependencia estadística mutua de los espines σ_i y σ_j . Esto es convenientemente la función de dos puntos, la cual será muy importante más adelante cuando se esté tratando de determinar caos cuántico.

3.1 Modelo de Ising en 1 dimensión

En una dimensión con N sitios se impone la siguiente condición de periodicidad:

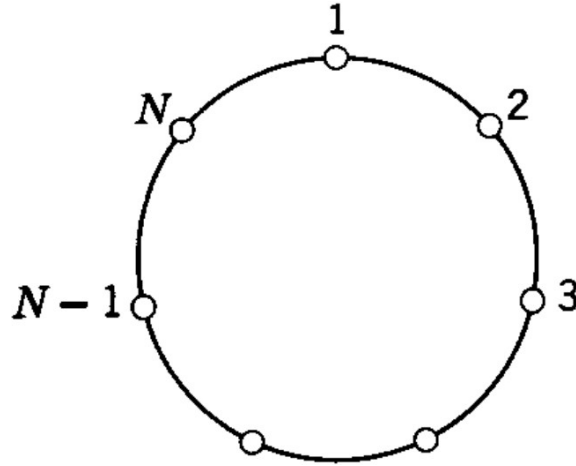
$$\sigma_{i+N} = \sigma_i, \quad (3.5)$$

la energía de una configuración $[\sigma]$ está dada por:

$$E[\sigma] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \quad (3.6)$$

donde $\langle ij \rangle$ indica una suma sobre los pares de sitios de red más cercanos. El primer término representa la interacción de pares de espines vecinos a través de acoplamiento ferromagnético ($J > 0$) o antiferromagnético ($J < 0$). El segundo representa la interacción con un campo magnético externo h (DiFrancesco *et al.*, 1997).

Figura 3.1: (Huang, 1987) Topología del modelo de Ising en una dimensión



Ahora se procede a resolver este modelo mediante funciones de partición.¹ Similarmente al problema del oscilador, Z permitirá calcular valores esperados de cantidades macroscópicas. Procedemos a calcular esta función con el método de matrices de transferencia (véase apéndice A). También suponemos que la cadena tiene la condición de frontera periódica $N + 1 \equiv 1$. De las ecuaciones 2.8 y 3.5, definiendo $K = \beta J$ y $H = \beta h$ y sumando sobre sobre todas las posibles configuraciones, y como $\sigma_i = \pm 1$ entonces se obtiene:

$$Z_N(K, H) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} e^{K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + H \sum_i \sigma_i} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} e^{K \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + H \sum_i \sigma_i}. \quad (3.7)$$

Además la energía se puede reescribir como:

$$E = -J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{1}{2} h \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1}). \quad (3.8)$$

También se puede reescribir la función de partición como:

$$e^{-\beta E} = e^{-\beta(-J \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1} - \frac{1}{2} h \sum_i (\sigma_i + \sigma_{i+1}))} = \langle \sigma | T | \sigma' \rangle. \quad (3.9)$$

Donde T es la matriz de transferencia del sistema. Además podemos reescribir Lo anterior como:

$$Z_N(K, N) = \text{Tr} [T(K, H)^N]. \quad (3.10)$$

¹Problema 3.1 de DiFrancesco *et al.* (1997)

Como se está trabajando con la base $(1, -1)$, entonces:

$$\langle \sigma | T | \sigma' \rangle = e^{K\sigma\sigma' + \frac{1}{2}h(\sigma + \sigma')}, \quad (3.11)$$

$$\langle 1 | T | 1 \rangle = e^{(K+H)}, \quad (3.12)$$

$$\langle -1 | T | -1 \rangle = e^{(K-H)}, \quad (3.13)$$

$$\langle 1 | T | -1 \rangle = e^{-K}, \quad (3.14)$$

$$\langle -1 | T | 1 \rangle = e^{-K}. \quad (3.15)$$

Por lo que la matriz de transferencia T es:

$$T = \begin{bmatrix} e^{(K+H)} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{(K-H)} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Ahora si se quisiera calcular la magnetización con la ecuación 3.1 primero habría que encontrar la energía libre. La matriz de transferencia se puede diagonalizar con sus eigenvalores, entonces T^N se puede reescribir como la matriz diagonal con los eigenvalores Λ_i^N y por lo tanto la traza estaría dada por la suma de esos valores.

$$\text{Tr} [T(K, H)^N] = \sum_i \Lambda_i^N. \quad (3.17)$$

Evaluamos el siguiente límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_i \Lambda_i^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\Lambda_1^N + \Lambda_2^N} = \max[\Lambda_1, \Lambda_2]. \quad (3.18)$$

Sabemos que el eigenvalor más grande es:

$$\Lambda_{max} = e^K \left[\cosh(H) + \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}} \right]. \quad (3.19)$$

Entonces tenemos:

$$f(K, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} -(1/N) \ln Z_N(K, H) = -K - \ln \left[\cosh(H) + \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}} \right]. \quad (3.20)$$

Calculamos la magnetización:

$$M = \frac{\partial f}{\partial h} = \frac{dH}{dh} \frac{\partial f}{\partial H} = \beta \frac{\sinh(H)}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2(H)}}. \quad (3.21)$$

Si se evalúa para h pequeñas, entonces H pequeña también y $\sinh(H) \rightarrow H$ y $\cosh(H) \rightarrow 1$; por

último $e^{-4k} \gg H^2$. Por lo que M es:

$$M \approx \beta e^{2K} H \Rightarrow M \sim h e^{2k}. \quad (3.22)$$

Ahora se procede a verificar si hay una transición de fase. Se calcula primero la susceptibilidad magnética

$$\chi = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{dH}{dh} \frac{\partial M}{\partial H} = \beta \frac{\partial M}{\partial H} \approx \beta^2 e^{2J\beta}. \quad (3.23)$$

Si se evalúa en el límite termodinámico, para la cual diverge cuando $T \rightarrow 0 \Rightarrow \beta \rightarrow \infty$. Finalmente tomamos el límite cuando $h \rightarrow 0$ en la magnetización:

$$\lim_{h \rightarrow 0} M = 0. \quad (3.24)$$

Por lo que no hay puntos críticos no triviales, entonces no hay transiciones de fase. Este resultado fue el que llevó a Ising a abandonar su modelo, sin embargo esta fue una decisión inocente y apresurada ya que las transiciones de fase si existen para dimensiones mayores a 1 (como se describirá en la siguiente sección).

Otra cantidad que puede resultar útil es la función de correlación espín-espín, la cual está dada por:

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle = \frac{\text{Tr} (T^{N-r} \hat{\sigma} T^r \hat{\sigma})}{\text{Tr} (T^N)}, \quad (3.25)$$

donde r es la distancia entre dos sitios de la red, pero el operador $\hat{\sigma}$ actúa dos veces sobre la misma posición por lo que se anula, entonces tenemos:

$$\langle \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle = \frac{\text{Tr} (T^{N-r} T^r)}{\text{Tr} (T^N)} = \frac{\Lambda_1^{N-r} \Lambda_2^r + \Lambda_1^r \Lambda_2^{N-r}}{\Lambda_1^N + \Lambda_2^N}, \quad (3.26)$$

entonces al evaluar en el límite termodinámico (suponiendo $\Lambda_1 > \Lambda_2$):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda_1^{N-r} \Lambda_2^r + \Lambda_1^r \Lambda_2^{N-r}}{\Lambda_1^N + \Lambda_2^N} = \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1} \right)^r = \left[\frac{\cosh(H) - \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}}}{\cosh(H) + \sqrt{\sinh^2(H) + e^{-4K}}} \right]^r. \quad (3.27)$$

3.2 Modelo de Ising en dos dimensiones

El modelo de Ising actualmente está resuelto para 2 dimensiones pero no para 3 o más. El primero es uno de los modelos estadísticos más conocidos y vastamente estudiados. Una de las aplicaciones más importantes de este modelo es permitir calcular funciones de correlación del

operador energía en el plano. La energía por sitio de este sistema está dada por:

$$E_{\langle ij \rangle} = -J\sigma_i\sigma_j, \quad (3.28)$$

por lo que la función de partición es:

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \sum_{\langle ij \rangle} E_{\langle ij \rangle}}. \quad (3.29)$$

Es de interés saber lo que sucede en una transición de fase en un valor crítico K_c del acoplamiento $K = \beta J$. Así se puede mostrar que los límites por la derecha (mayor temperatura) y por la izquierda (menor temperatura) para Z son:

$$Z_{high} = [2 \cosh(K)]^{NM} \sum_{loops} [\tanh(K)]^{longitud}, \quad (3.30)$$

$$Z_{low} = 2e^{NMK} \sum_{loops} e^{-2K(longitud)}. \quad (3.31)$$

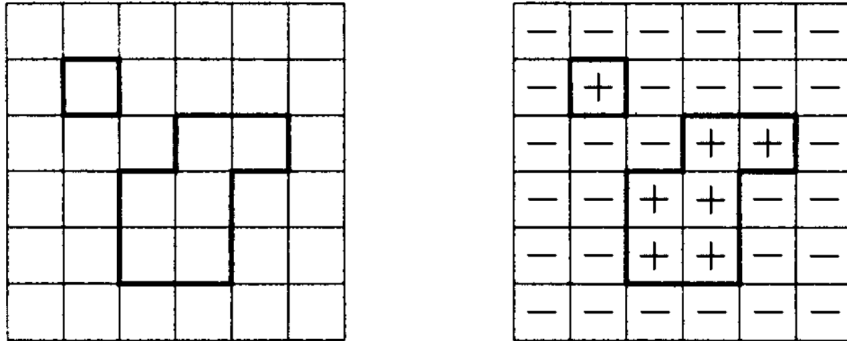
El caso de la ecuación 3.30 se entiende como la suma de todas las trayectorias cerradas (no necesariamente conexas) mientras que el de la ecuación 3.31 es la suma de las trayectorias que encierran 'áreas' de espines iguales; esta interpretación se puede apreciar en la Figura 3.2. De estas dos expresiones es evidente que las dos fases se pueden mapear entre ellas a través de:

$$e^{-2K} = \tanh K, \quad (3.32)$$

lo cual lleva a que:

$$K_c = -\frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1) \approx 0.440686. \quad (3.33)$$

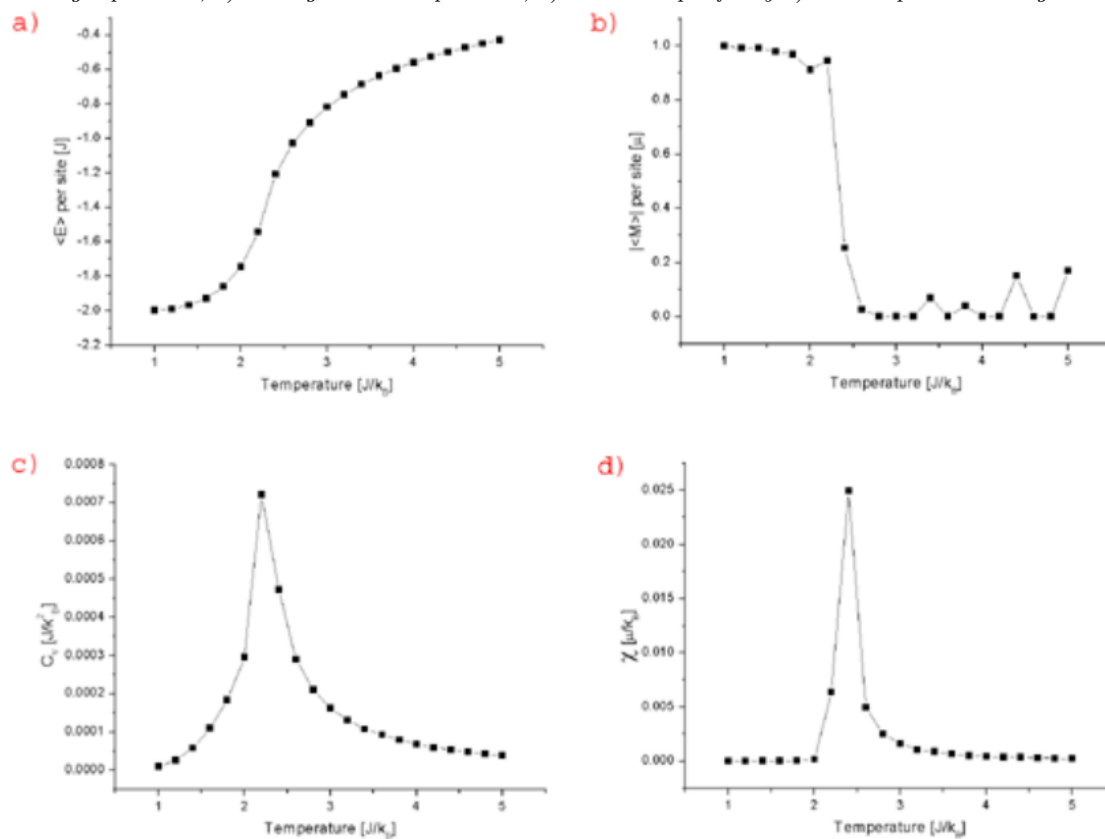
Figura 3.2: La cuadrícula de la izquierda muestra la consecuencia de la ecuación 3.30 y la cuadrícula de la derecha las consecuencias de 3.31



Las transiciones de fase se pueden apreciar en cantidades termodinámicas como la magnetización y susceptibilidad magnética. Cabe mencionar que para cualquier transición de fase, la capacidad

calorífica tiende al infinito Pathria y Beale (2011). Estas características se pueden apreciar en la Figura 3.3.

Figura 3.3: (Witthauer y Dieterle, 2007) Simulaciones de cantidades termodinámicas de un sólido. a) es la energía por sitio, b) la magnetización por sitio, c) el calor específico y d) la susceptibilidad magnética.



4 Teoría de campos conformes

Cuando un sistema de muchas partículas sufre una transición de fase continua, la longitud de correlación se vuelve infinita. Esto da lugar a una invarianza ante cambios de escala. Generalmente, esta invarianza ante cambios de escala induce una invarianza ante transformaciones conformes que será lo que se estudiará en este capítulo.

Definición 4.1. Una *transformación conforme* es aquella que preserva ángulos y está dada por

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \rightarrow \Lambda(\mathbf{x})g_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

donde $\Lambda > 0$, $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio donde vive la teoría (ver apéndice B) y \mathbf{x} son las coordenadas del espacio que describe la métrica.

Es de interés conocer cuales son los mapas que generan transformaciones conformes, en particular se quiere estudiar esta pregunta a nivel infinitesimal. Considerando que esta teoría vive en el espacio de Minkowski, la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Ahora infinitesimalmente se tiene

$$x'^{\rho} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.2)$$

Entonces bajo este mapa, la métrica se transforma como

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.3)$$

También se puede expandir el Λ de la ecuación 4.1 como

$$\Lambda(x)\eta_{\mu\nu} = (1 + \kappa)\eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.4)$$

Al eliminar los términos de orden superior a $\mathcal{O}(\epsilon)$, decimos que ϵ_{ρ} genera una transformación conforme si cumple con la ecuación de Killing conforme DiFrancesco *et al.* (1997)

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \kappa(\mathbf{x})\eta_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Se puede encontrar κ con la traza de la ecuación 4.4, obteniendo

$$\kappa(\mathbf{x}) = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon), \quad (4.6)$$

donde d es la dimensión del espacio-tiempo. Por lo que Λ es:

$$\Lambda = 1 + \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon) + \mathcal{O}^2 \quad (4.7)$$

Por último se puede encontrar la restricción de ϵ sustituyendo la ecuación 4.5 en la 4.4 y derivando parcialmente ambos lados, obteniendo

$$(d-1)\square(\partial \cdot \epsilon) = 0. \quad (4.8)$$

A partir de esta ecuación es claro que $\partial \cdot \epsilon$ es lineal, por lo que la solución para ϵ debe ser alguna forma cuadrática, es decir:

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho. \quad (4.9)$$

Se puede deducir que la parte simétrica de $b_{\mu\nu}$ es proporcional a la métrica sustituyendo solo el segundo término del lado derecho de 4.8 en 4.4, entonces ésta genera una dilatación. La anti-simétrica de $b_{\mu\nu}$ genera boosts y rotaciones. Agrupando las transformaciones finitas de la manera siguiente

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu, \quad (4.10)$$

$$x'^\mu = ax^\mu, \quad (4.11)$$

$$x'^\mu = M^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (4.12)$$

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - b \cdot x + b^2 x^2}, \quad (4.13)$$

donde M es una rotación y $b_\mu \equiv \frac{1}{d}c^\sigma{}_{\sigma\mu}$. Los generadores de las transformaciones conformes son

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (\text{traslaciones}), \quad (4.14)$$

$$D = -ix^\mu \partial_\mu \quad (\text{dilataciones}), \quad (4.15)$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (\text{rotaciones}), \quad (4.16)$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu) \quad (SCT)^0. \quad (4.17)$$

⁰Transformaciones conformes especiales, por sus siglas en inglés.

Estos describen el álgebra conforme mediante los siguientes conmutadores:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu, \quad (4.18)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu, \quad (4.19)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \quad (4.20)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \quad (4.21)$$

$$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \quad (4.22)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}); \quad (4.23)$$

y puede mostrarse que el grupo conforme es isomorfo a $SO(d-1,2)$ (DiFrancesco *et al.*, 1997).

4.1 Teoría de campos conformes en dos dimensiones

En dos dimensiones las teorías conformes son especiales, puesto que adquieren un álgebra de simetrías infinita (Belavin *et al.*, 1984). En esta sección trabajamos con la métrica euclidiana. Cuando $d = 2$ entonces de las ecuaciones 4.4 y 4.5 se obtienen las expresiones

$$\partial_1\epsilon_0 + \partial_0\epsilon_1 = 0, \quad (4.24)$$

$$\partial_0\epsilon_0 - \partial_1\epsilon_1 = 0, \quad (4.25)$$

entonces las ecuaciones de Killing conformes se convierten en la ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por esta razón se le da atención especial a esta teoría en dos dimensiones, ya que permite utilizar todas las herramientas del análisis complejo. Ahora se pasa de la base $\{x^0, x^1\}$ a la base $\{z, \bar{z}\}$ por medio de las transformaciones

$$z = x^0 + ix^1, \quad (4.26)$$

$$\bar{z} = x^0 - ix^1, \quad (4.27)$$

lo cual genera el tensor métrica en el espacio complejo

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Por otro lado, se evaluará la transformación $z \rightarrow z + \epsilon(z)$ y $\epsilon(z)$ lo podemos expandir en series como

$$\epsilon(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -c_n z^{n+1}. \quad (4.29)$$

Esto tiene un problema; si fuese holomórfica, z no puede ser un polo; pero en realidad es una función meromórfica, lo cual deja bien definida a $\epsilon(z)$. Haciendo una expansión por series de Laurent de un campo que se transforma con un término de primer orden como 4.29 (y por otro lado la versión conjugada), se obtienen los generadores

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad (4.30)$$

$$\bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \quad (4.31)$$

que forman el álgebra de Witt y obedecen las relaciones de conmutación

$$[l_m, l_n] = (m - n)l_{m+n}, \quad (4.32)$$

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m - n)\bar{l}_{m+n}, \quad (4.33)$$

$$[\bar{l}_m, l_n] = 0. \quad (4.34)$$

Esta subálgebra $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ corresponde al álgebra conforme global, donde: $n = -1$ genera traslaciones sobre el plano complejo, $n = 0$ genera rotaciones y dilataciones y $n = 1$ genera las SCT. A esta base se le llama álgebra conforme global.

Ahora se realiza la extensión central del álgebra de Witt, lo cual es hacer la suma directa $g \oplus \mathbb{C}$. Al resultado de esto se le denomina el álgebra de Virasoro. La idea de esto es tomar los conmutadores 4.32, 4.33 y 4.34 y agregarles un término como

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + cp(m, n), \quad (4.35)$$

donde c es la *carga central* y p es una función que depende de la teoría. Para una teoría conforme $p(m, n) = \frac{1}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}$, por lo que 4.35 es

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}. \quad (4.36)$$

Es de interés conocer el contenido de la teoría. Usando el álgebra de Virasoro definimos los siguientes campos.

Definición 4.2. Un campo es *quiral* si

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(z), \quad (4.37)$$

viceversa, un campo es *antiquiral* si

$$\phi(z, \bar{z}) = \phi(\bar{z}). \quad (4.38)$$

Es de interés conocer como los campos se ven afectados ante transformaciones como $z \rightarrow f(z)$, donde f es meromórfica, en ese caso tenemos

$$\phi'(z, \bar{z}) = \left| \frac{df}{dz} \right|^{h/d} \left| \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right|^{\bar{h}/d} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})), \quad (4.39)$$

donde a h y \bar{h} se les llama los *pesos conformes*. Si un campo se transforma como 4.39 se dice que es:

1. cuasiprimario si f está en el álgebra conforme global
2. primario si f está en el álgebra de Virasoro.

Al hacer una transformación conforme infinitesimal (ecuación 4.2)

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi(z, \bar{z}) + (h\partial_z + \epsilon\partial_{\bar{z}})\phi(z, \bar{z}) + a.c., \quad (4.40)$$

donde a.c. es la parte antiquiral.

Uno de los resultados de esta teoría en dos dimensiones es poder calcular analíticamente funciones de dos puntos. Primero, se nota a partir de Se empieza notando que si la función de dos puntos es una función $g(z_1, z_2)$, al ser invariante ante traslaciones y rotaciones, debe ser una función de la diferencia, por lo que se tiene

$$\langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = g(z_1, z_2) = g(|z_1 - z_2|). \quad (4.41)$$

Ahora la invarianza ante dilataciones implica que

$$\langle \lambda^{h_1}\phi(\lambda z_1)\lambda^{h_2}\phi(\lambda z_2) \rangle = \lambda^{h_1+h_2}g(\lambda|z_1 - z_2|) = g(|z_1 - z_2|) = \frac{C_{12}}{|z_1 - z_2|^{h_1+h_2}}, \quad (4.42)$$

donde la última igualdad se debe a que los λ se cancelan de esa manera. Por último, para ver qué sucede con las SCT, se verifica como se transforma $|z_1 - z_2|$, de lo cual se obtiene

$$|z'_1 - z'_2| = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 - 2b \cdot z_1 + b^2 z_1^2)^{1/2}(1 - 2b \cdot z_2 + b^2 z_2^2)^{1/2}}. \quad (4.43)$$

De acuerdo a la ecuación 4.39

$$\left| \frac{dz'_i}{dz_i} \right| = \frac{1}{(1 - 2b \cdot z_i + b^2 z_i^2)^d}. \quad (4.44)$$

Finalmente definiendo $\gamma_i = (1 - 2b \cdot z_i + b^2 z_i^2)^d$ y utilizando las igualdades de la ecuación 4.42 se obtiene

$$\frac{C_{12}}{|z_1 - z_2|^{h_1+h_2}} = \frac{C_{12}}{\gamma_1^{h_1}\gamma_2^{h_2}} \frac{(\gamma_1\gamma_2)^{(h_1+h_2)/2}}{|z_1 - z_2|^{h_1+h_2}}, \quad (4.45)$$

de lo que se concluye que para que exista invarianza para SCT, $h_1 = h_2$. Por lo que la función de dos puntos es

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \frac{C_{12}}{|z_1 - z_2|^{2h}}, \quad (4.46)$$

si y solo si $h_1 = h_2 = h$ los pesos conformes de z_1 y z_2 respectivamente. Además se puede normalizar con $C_{12} = 1$ y se concluye que para $d = 2$ se transforman como

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1) \phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \left| \frac{dw_1}{dz_1} \right|^{2h} \left| \frac{dw_2}{dz_2} \right|^{2h} \langle \phi(z_1, \bar{z}_1) \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle. \quad (4.47)$$

En general, para una teoría conforme no se puede encontrar la forma precisa de las funciones de cuatro puntos. Sin embargo, en dos dimensiones si existe. Estas funciones son de la forma

$$\langle \phi_1, \dots, \phi_4 \rangle = f(x, \bar{x}) \prod_{i < j}^4 z_{ij}^{h/3 - h_i - h_j} \bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3 - \bar{h}_i - \bar{h}_j}, \quad (4.48)$$

donde

$$x = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}} \quad (4.49)$$

es la razón cruzada, $h = \sum_{i=1}^4 h_i$ y $\bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$.

Es pertinente mencionar que las ecuaciones 4.24 y 4.25 tienen el problema de ser válidas solo a nivel local. Entonces se debe hacer una distinción entre transformaciones conformes locales y transformaciones conformes globales. El conjunto completo de transformaciones conformes globales está dado por:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad ; \quad ad - bc = 1, \quad (4.50)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. El conjunto de todas estas transformaciones conforman el *grupo conforme especial*. Se puede asociar los coeficientes a una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

la cual pertenece al grupo de matrices 2×2 complejas invertibles con determinante unitario, es decir es el grupo $SL(2, \mathbb{C})$ y se sabe que éste es isomorfo al grupo de Lorentz en cuatro dimensiones $SO(3, 1)$ (DiFrancesco *et al.*, 1997).

Una teoría conforme en dos dimensiones está determinada completamente por los pesos conformes de sus primarios y los coeficientes de las ecuaciones de 3 puntos. (Belavin *et al.*, 1984)

4.2 Función de dos puntos a temperatura finita

Si ahora se quiere aplicar a sistemas estadísticos, hay que agregar temperatura a la teoría. Para esto se hace la transformación

$$z_i \rightarrow e^{\frac{2\pi}{\beta} w_i}, \quad (4.52)$$

de lo cual se obtiene

$$\frac{dw_i}{dz_i} = \frac{2\pi}{\beta} z_i = \frac{2\pi}{\beta} e^{\frac{2\pi}{\beta} w_i}, \quad (4.53)$$

por lo que usando las ecuaciones 4.46 y 4.47 se obtiene

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1) \phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \left| \frac{2\pi}{\beta} e^{\frac{2\pi}{\beta} w_1} \right|^{2h} \left| \frac{2\pi}{\beta} e^{\frac{2\pi}{\beta} w_2} \right|^{2h} \frac{1}{\left| e^{\frac{2\pi}{\beta} w_1} - e^{\frac{2\pi}{\beta} w_2} \right|^{4h}} = \left| \frac{2\pi}{\beta} \frac{e^{\frac{2\pi}{\beta} (w_1 + w_2)}}{e^{\frac{2\pi}{\beta} w_1} - e^{\frac{2\pi}{\beta} w_2}} \right|, \quad (4.54)$$

lo cual da como resultado

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1) \phi(w_2, \bar{w}_2) \rangle = \left| \frac{\pi}{\beta} \operatorname{csch} \left[\frac{\pi}{\beta} (w_1 - w_2) \right] \right|^{4h}, \quad (4.55)$$

lo cual muestra la simplicidad y conveniencia de calcular funciones de dos puntos utilizando teoría de campos conformes en dos dimensiones. Por otro lado se le puede imponer el tiempo usando las ecuaciones 4.26 y 4.27

$$w_j = x_j + it_j. \quad (4.56)$$

Pero como este tiempo correspondería a un tiempo en un espacio euclidiano, lo cual no corresponde al tiempo físico. Entonces se hace una continuación analítica

$$t_j \rightarrow t_j^E - it_j^L, \quad (4.57)$$

donde t^E es un tiempo euclidiano y t^L es un tiempo lorentziano. Por lo que se tiene

$$z_j \rightarrow e^{\frac{2\pi}{\beta} (x_j + t_j^L + it_j^E)}, \quad (4.58)$$

de lo que se periodicidad en el tiempo euclidiano corresponde a temperatura finita.

4.3 El modelo de Ising en dos dimensiones de nuevo

Ahora se estudia un ejemplo, que es la primera teoría conforme no trivial. Esta corresponde al modelo de Ising en 2 dimensiones en su punto crítico. El modelo de Ising crítico en 2 dimensiones tiene 3 campos primarios: la identidad \mathbb{I} , el espín σ y la energía ϵ ; cuyos pesos conformes son $0, \frac{1}{2}$

y $\frac{1}{16}$. La función de cuatro puntos para σ (Ginsparg, 1988) es

$$\langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \sigma(z_2, \bar{z}_2) \sigma(z_3, \bar{z}_3) \sigma(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \left| \frac{z_{13} z_{24}}{z_{12} z_{23} z_{34} z_{41}} \right|^{\frac{1}{4}} (|1 + \sqrt{1-x}| + |1 - \sqrt{1-x}|), \quad (4.59)$$

donde se ha introducido la notación $z_{ij} = z_i - z_j$ y x es la razón cruzada y está dado por

$$x = \frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}}. \quad (4.60)$$

Para ϵ (Christe y Henkel, 1993), la función de cuatro puntos está dada por

$$\langle \epsilon(z_1, \bar{z}_1) \epsilon(z_2, \bar{z}_2) \epsilon(z_3, \bar{z}_3) \epsilon(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \left| \frac{1}{z_{12} z_{34}} \right|^2 \left| \frac{x^2 - x + 1}{1 - x} \right|^2 \quad (4.61)$$

También se puede calcular una función con términos cruzados (Christe y Henkel, 1993), la cual es

$$\langle \sigma(z_1, \bar{z}_1) \epsilon(z_2, \bar{z}_2) \sigma(z_3, \bar{z}_3) \epsilon(z_4, \bar{z}_4) \rangle = \frac{1}{|z_{32}|^2 |z_{41}|^{\frac{1}{4}}} \left| \frac{2-x}{2\sqrt{1-x}} \right|^2. \quad (4.62)$$

Las teorías conformes unitarias en dos dimensiones están totalmente clasificadas para $c < 1$, el modelo de Ising corresponde a $c = \frac{1}{2}$. Estas teorías son conocidas como modelos minimales, otros ejemplos son el modelo de Ising tricrítico, tripots, entre otros (Ginsparg, 1988).

5 OTOCs y caos

Uno de los fenómenos físicos más conocidos es el efecto mariposa, el cual se refiere a que un leve cambio en las condiciones iniciales presenta un cambio significativo en el sistema al cabo de *mucho* tiempo. Cuando un sistema presenta esta sensibilidad a condiciones iniciales se dice que es caótico. Cabe mencionar que este caos es determinístico y no aleatorio. Hacer una medición a estos sistemas nos permite predecir el futuro hasta cierto punto (Thornton y Marion, 2004).

5.1 Caos cuántico

Clásicamente para detectar caos en un sistema se requiere calcular la función de posición q en términos del tiempo t y la condición inicial q_0 , entonces $q \rightarrow q(t, q_0)$. Ahora, se requiere conocer cómo cambia la posición respecto de la condición inicial $\frac{\partial q(t, q_0)}{\partial q_0}$ y esto es equivalente a

$$\frac{\partial q(t, q_0)}{\partial q_0} = \{q(t), p(0)\}, \quad (5.1)$$

donde, son brackets de Poisson. Aplicando la cuantización canónica (Tong, 2012) $\{, \} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[,]$ donde $[,]$ es un conmutador se obtiene

$$\frac{\partial q(t, q_0)}{\partial q_0} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [q(t), p(0)]. \quad (5.2)$$

Si q y p son operadores \mathcal{O} entonces $q(t) \rightarrow \mathcal{O}_i$ y $p(0) \rightarrow \mathcal{O}_j$, se define

$$F_{ij}^\beta = -\langle [\mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_j(0)]^2 \rangle_\beta. \quad (5.3)$$

Con esto definimos caos cuántico cuando (Larkin y Ovchinnikov, 1969)

$$F_{ij}^\beta \sim 2\langle \mathcal{O}_i(t), \mathcal{O}_i(t) \rangle \langle \mathcal{O}_j, \mathcal{O}_j \rangle_\beta \quad (5.4)$$

para t grandes. La cual al expandirla

$$\begin{aligned} F_{ij}^\beta = & \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle + \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle \\ & - \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle - \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle, \end{aligned} \quad (5.5)$$

Lo cual motiva las definiciones de la siguiente sección.

5.2 OTOC

Sería maravilloso encontrar una forma de encontrar el comportamiento de las funciones de cuatro puntos de la ecuación 5.5. Notamos que según la ecuación 5.4 las funciones de 4 puntos de alguna manera tendrían que tender a la multiplicación de las funciones de dos puntos de sus argumentos. Dado esto se define un OTOC térmico (*Out of Time Order Correlator*) por

$$C_{ij}^\beta = \frac{\langle \mathcal{O}_i^\dagger(t) \mathcal{O}_j^\dagger(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta}{\langle \mathcal{O}_i^\dagger(t) \mathcal{O}_i(t) \rangle_\beta \langle \mathcal{O}_j^\dagger(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta}. \quad (5.6)$$

Se quiere verificar qué sucede con la razón cruzada cuando avanza el tiempo (Roberts *et al.*, 2015), por lo que se usan los siguientes valores

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(t+i\epsilon_1)}, \quad \bar{z}_1 = e^{-\frac{2\pi}{\beta}(t+i\epsilon_1)}, \quad (5.7)$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(t+i\epsilon_2)}, \quad \bar{z}_1 = e^{-\frac{2\pi}{\beta}(t+i\epsilon_2)}, \quad (5.8)$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(x+i\epsilon_3)}, \quad \bar{z}_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(x-i\epsilon_3)}, \quad (5.9)$$

$$z_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(x+i\epsilon_4)}, \quad \bar{z}_1 = e^{\frac{2\pi}{\beta}(x-i\epsilon_4)}, \quad (5.10)$$

donde $\epsilon_i = t_i^E$ y $t = t^L$.

Figura 5.1: Gráfica en el plano complejo de la ecuación 4.47 utilizando la ecuaciones 5.8-5.13 donde el camino rojo es para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_4$, el azul para $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_4$ y el verde para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_4 < \epsilon_2$.

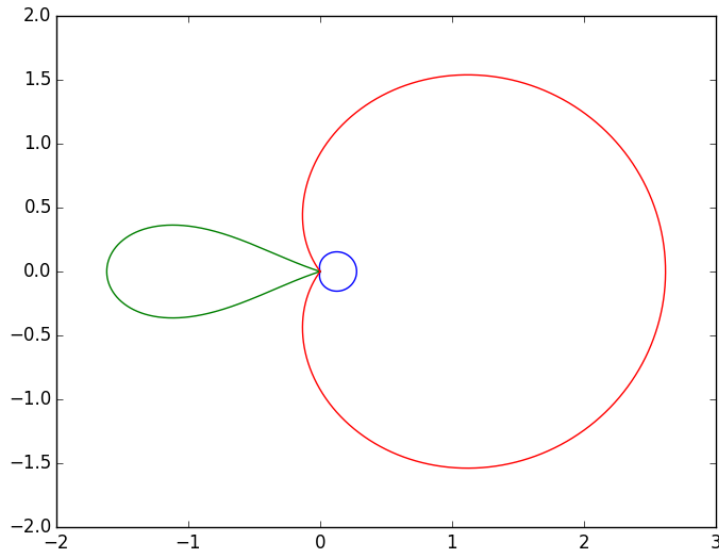
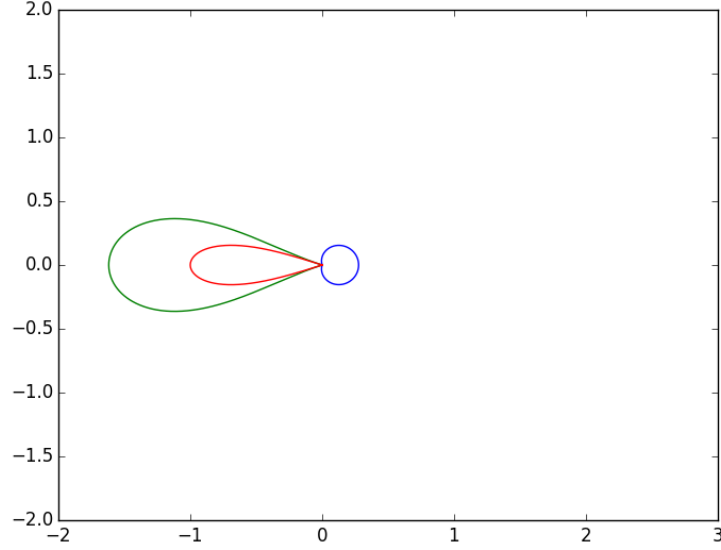


Figura 5.2: Gráfica en el plano complejo de la ecuación conjugada 4.47 utilizando los conjugados en las ecuaciones 5.8-5.13 donde el camino rojo es para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_4$, el azul para $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < \epsilon_4$ y el verde para $\epsilon_1 < \epsilon_3 < \epsilon_4 < \epsilon_2$.



Como se puede observar en la Figura 5.1 la razón cruzada para el orden de ϵ_j correspondiente al OTOC envuelve al punto $z = 1$, el cual es un *branch point* de las funciones de cuatro puntos. Es importante notar que no sucede con \bar{x} (Nótese x y \bar{x} no son conjugados por la continuación analítica en la ecuación 5.5).

Ahora se trabajará con las funciones de 4 puntos del modelo de Ising (ecuaciones 4.59, 4.61 y 4.62), y por envolver el *branch cut* x se puede reescribir por

$$x \rightarrow 1 + (x - 1)e^{i\theta}. \quad (5.11)$$

Usando esto para el modelo de Ising, se puede obtener los OTOC cuando $t \rightarrow \infty$ y $\theta = 2\pi$

$$\frac{\langle \sigma_1(t)\sigma_2(0)\sigma_3(t)\sigma_4(0) \rangle}{\langle \sigma_1(t)\sigma_3(t) \rangle \langle \sigma_2(0)\sigma_4(0) \rangle} = 0, \quad (5.12)$$

$$\frac{\langle \epsilon_1(t)\epsilon_2(0)\epsilon_3(t)\epsilon_4(0) \rangle}{\langle \epsilon_1(t)\epsilon_3(t) \rangle \langle \epsilon_2(0)\epsilon_4(0) \rangle} = 1, \quad (5.13)$$

$$\frac{\langle \sigma_1(t)\epsilon_2(0)\sigma_3(t)\epsilon_4(0) \rangle}{\langle \sigma_1(t)\sigma_3(t) \rangle \langle \epsilon_2(0)\epsilon_4(0) \rangle} = 1. \quad (5.14)$$

Que es consistente con las predicciones de (Caputa *et al.*, 2016) y (Gu y Qi, 2016). El hecho de que σ se comporte diferente da sospecha que puede ser caótico o viceversa, los otros dos son caóticos. Ahora se investiga lo que sucede para los TOC (*Time Ordered Correlators*) que están definidos

por

$$T_{ij}^\beta = \frac{\langle \mathcal{O}_j^\dagger(0) \mathcal{O}_i^\dagger(t) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta}{\langle \mathcal{O}_i^\dagger(t) \mathcal{O}_i(t) \rangle_\beta \langle \mathcal{O}_j^\dagger(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta}. \quad (5.15)$$

Para los primarios del sistema de Ising se obtienen los siguientes TOC cuando $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\langle \sigma_1(0) \sigma_2(t) \sigma_3(t) \sigma_4(0) \rangle}{\langle \sigma_2(t) \sigma_3(t) \rangle \langle \sigma_1(0) \sigma_4(0) \rangle} = 1, \quad (5.16)$$

$$\frac{\langle \epsilon_1(0) \epsilon_2(t) \epsilon_3(t) \epsilon_4(0) \rangle}{\langle \epsilon_2(t) \epsilon_3(t) \rangle \langle \epsilon_1(0) \epsilon_4(0) \rangle} = 1, \quad (5.17)$$

$$\frac{\langle \epsilon_1(0) \sigma_2(t) \sigma_3(t) \epsilon_4(0) \rangle}{\langle \sigma_2(t) \sigma_3(t) \rangle \langle \epsilon_1(0) \epsilon_4(0) \rangle} = 1. \quad (5.18)$$

De lo que se deduce que para t grandes

$$\langle \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(t) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta \sim \langle \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta \langle \mathcal{O}_i(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta. \quad (5.19)$$

Por otro lado, al expandir F_{ij}^β se obtiene

$$\begin{aligned} F_{ij}^\beta = & \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle + \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle \\ & - \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle - \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle, \end{aligned} \quad (5.20)$$

de la cual los términos de la línea superior son TOC y los de la línea inferior son OTOC. Por lo que para el modelo de Ising, cuando $t \rightarrow \infty$ cualquier primario cumple con

$$F_{ij}^\beta \sim 2 \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_i(t) \rangle_\beta \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta - \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta - \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_i(t) \rangle_\beta. \quad (5.21)$$

Es de notar que para ϵ y el caso mixto $\epsilon - \sigma$ los OTOC se comportan igual que los TOC cuando $t \rightarrow \infty$ por lo que $F_{ij}^\beta \rightarrow 0$, de lo que se concluye que no habrá comportamiento caótico. Sin embargo, en el caso de σ los OTOC tienden a cero, por lo que

$$F_{ij,\sigma}^\beta \rightarrow 2 \langle \mathcal{O}_i(t) \mathcal{O}_i(t) \rangle_\beta \langle \mathcal{O}_j(0) \mathcal{O}_j(0) \rangle_\beta, \quad (5.22)$$

por lo que se concluye que existe caos cuántico para el spin, lo que significa que al hacer dos mediciones con mucho tiempo entre ellas no se podrá predecir el comportamiento de la segunda en base a la primera.

6 Conclusión

Se probó la no existencia de cambios de fase en el modelo de Ising 1-dimensional y se describió la naturaleza del cambio de fase del caso 2-dimensional. Además se encontró que el spin es cuánticamente caótico mientras que la energía y el caso mixto energía-spin no lo es para el caso de dos dimensiones.

7 Bibliografía

- Belavin, A. A., A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov. 1984. *¶¶Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory¶¶*. Nucl. Phys. B **241**, 333.
- Di Francesco, P.; P. Mathieu y D. Senechal. 1997. *Conformal Field Theory*. Nueva York: Springer-Verlag New York, Inc. 890 págs.
- Caputa P., T. Numasawa y A. Veliz-Ororio. 2016. *¶¶Scrambling without chaos in RCFT¶¶*. arXiv:1602.06542 [hep-th].
- Carroll, S. 2004. *An Introduction to General Relativity: Spacetimes and Geometry*. Chicago: Addison Wesley. 499 págs.
- Christe, P. y M. Henkel. 1993. *Introduction to Conformal Invariance and Its Applications to Critical Phenomena*. Berlín, 260 págs.
- El-Showk, S., M. F. Paulos, D. Poland, S. Rychkov, D. Simmons-Duffin y A. Vichi. 2012. *¶¶Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap¶¶*. Phys. Rev. D **86**, 025022 [arXiv:1203.6064 [hep-th]].
- Ginsparg P. H. 1988. *Applied Conformal Field Theory*. hep-th/9108028.
- Gu, Y. and X. L. Qi. 2016. *¶¶Fractional Statistics and the Butterfly Effect¶¶*. JHEP **1608**, 129 [arXiv:1602.06543 [hep-th]].
- Herstein, I. 1975. *Topics in Algebra*. 2a edición. EEUU, Xerox College Pub. 388 págs.
- Huang, K. 1987. *Statistical Mechanics*. 2a edición. Massachusetts: John Wiley & sons. 486 págs.
- Larkin, A. y Y. Ovchinnikov. 1969. *¶¶Quasiclassical method in the theory of superconductivity¶¶*. *JETP* 28,6 1200-1205.
- Maldacena, J., S. Shenker y D. Stanford. *¶¶A bound on chaos¶¶*. arXiv:1503.01409.
- Pathria R. y P. Beale. 2011. *Statistical Mechanics*. 3a edición. Oxford: Elsevier. 718 págs.
- Shankar, R. 1980. *Principles of Quantum Mechanics*. 2a edición. Nueva York: Prentice Hall. 669 págs.
- Thornton, S. y J. Marion. 2004. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5a edición. Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning. 642 págs.

- Tong, D. 2012. *Statistical Physics*. Cambridge University. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys/sp.pdf> [consultado 10 de octubre de 2016]
- Tong, D. 2012. *Classical Dynamics*. Cambridge University. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/dynamics/clas.pdf> [consultado 24 de octubre de 2016]
- Reitz, J., F. Milford y R. Christy. 1981. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. México: Union Tipográfica Editorial Hispano-Americana. 440 págs.
- Roberts, D. A., D. Stanford and L. Susskind. 2015. "Localized shocks". *JHEP* **1503**, 051 [arXiv:1409.8180 [hep-th]].
- Witthauer, L. y M. Dieterle. 2007. *The Phase Transition of the 2D-Ising Model*. <http://quantumtheory.physik.unibas.ch/people/bruder/Semesterprojekte2007/p1/index.html> [consultado 13 de agosto de 2016]

8 Anexos

8.1 Matrices de transición

Un método bastante poderoso para resolver modelos estadísticos parecidos al modelo de Ising es el método de matriz de transferencia, el cual es un análogo al formalismo de operadores en teoría cuántica de campos. Para ser más generales, se considera el modelo de Ising en dos dimensiones con condiciones de frontera periódicas dadas por

$$\sigma_{i,j+n} = \sigma_{ij} \quad \sigma_{i+m,j} = \sigma_{ij}, \quad (8.1)$$

para $n \times m$ partículas. Esto define una red sobre un toroide. Se denota μ_i a la configuración de spines de la i -ésima columna:

$$\mu_i = \{\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{in}\}. \quad (8.2)$$

Nótese que para el modelo de Ising en una dimensión $\mu \rightarrow \sigma$. En particular la energía de una configuración μ es

$$E[\mu_i] = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}, \quad (8.3)$$

y la energía de la interacción con una fila vecina es

$$E[\mu_i, \mu_j] = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk}. \quad (8.4)$$

Utilizando notación bra-ket de Dirac, se puede expresar el espacio vectorial V de filas de configuraciones generadas por el ket $|\mu_i\rangle$, análogamente a mecánica cuántica. Finalmente se define una *matriz de transferencia* T por

$$\langle \mu | T | \mu' \rangle = \exp \left[-\beta \left(E[\mu, \mu'] + \frac{1}{2} E[\mu] + \frac{1}{2} E[\mu'] \right) \right]. \quad (8.5)$$

En términos de T la función de partición Z es de la forma

$$Z = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_m} \langle \mu_1 | T | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | T | \mu_3 \rangle \dots \langle \mu_m | T | \mu_1 \rangle = \text{Tr } T^m, \quad (8.6)$$

donde un término μ_i de la sumatoria significa una suma sobre todas las configuraciones posibles en el generado de $|\mu_i\rangle$ DiFrancesco *et al.* (1997).

8.3 Álgebra y esquema de prueba de isomorfismo álgebra conforme-SO(d+1,1)

Esta sección es para todo lector que no esté familiarizado con teoría de grupos, para profundizar más en el tema ver (Herstein, 1975). Se presentará la definición de grupo, cómo se aplica para transformaciones infinitesimales y finalmente un esquema de la prueba del título del apéndice.

Definición 8.2. Un conjunto no vacío G es un *grupo* si en G está definida una operación binaria, llamada producto (y en este caso denotada por \cdot) tal que

1. $a, b \in G \implies a \cdot b \in G$.
2. $a, b, c \in G \implies a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. $\exists e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a, \forall a \in G$.
4. $\forall a \in G, \exists a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Para transformaciones infinitesimales, el producto \cdot se vuelve el conmutador $[\cdot, \cdot]$. Cuando se habla de un álgebra en específico, se refiere a las reglas del producto.

Un isomorfismo, informalmente hablando, es cuando se puede arreglar los elementos de un grupo G de tal forma que estos arreglos cumplan las reglas de un grupo G' . Dicho esto, podemos arreglar el grupo conforme como:

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu} & J_{-1,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \\ J_{-1,0} &= D & J_{0,\mu} &= \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu), \end{aligned} \tag{8.11}$$

donde $J_{ab} = -J_{ba}$ para $a, b \in \{-1, 1, \dots, d\}$. Finalmente solo se comprueba (DiFrancesco *et al.*, 1997) que cumple con las reglas de SO(d+1,1)

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}) \tag{8.12}$$