
Generalización del principio de incertidumbre de Heisenberg en el marco del análisis de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Juan Lorthiois



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Generalización del principio de incertidumbre de
Heisenberg en el marco del análisis de Fourier sobre
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Trabajo de graduación presentado por
Juan Lorthois
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala,

2025

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



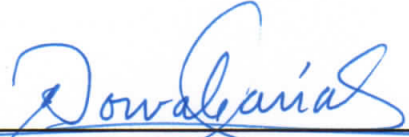
Generalización del principio de incertidumbre de
Heisenberg en el marco del análisis de Fourier sobre
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Trabajo de graduación presentado por
Juan Lorthois
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

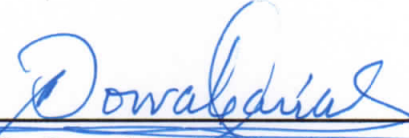
Guatemala,

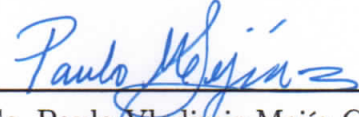
2025


Vo.Bo.:

(f) 
MSc. Dorval José Manuel Carias Samayoa

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Dorval José Manuel Carias Samayoa

(f) 
MSc. Paulo Vladimir Mejía Castillo

(f) 
MSc. Alan Gerardo Reyes Figueroa

Fecha de aprobación: Guatemala, 15 de mayo de 2025.

En el idioma francés, al igual que en inglés, la palabra “Matemática” suele escribirse en plural, es decir, “Mathématiques”. Note la letra ‘s’ al final de la palabra.

En la famosa serie de libros de matemática, *Éléments de mathématique* (elementos de matemática), del grupo de matemáticos conocido como “Nicolas Bourbaki”, la palabra *mathématique* aparece en singular. ¿Un error de ortografía? ¡Al contrario! El uso del singular en el título es totalmente voluntario, y viene del hecho de que para los autores, la matemática debe percibirse como una disciplina *unificada* (Aczel, 2007, p.99). De hecho, un breve estudio de la historia de la matemática en los últimos 200 años parece confirmar este punto de vista. En efecto, por más abstracta y general que se haya vuelto, mucha de la teoría que se presenta a continuación encuentra sus orígenes en problemas muy concretos y aplicados de Física o Ingeniería. De hecho, Joseph Fourier, Augustin Louis Cauchy y otros grandes matemáticos del siglo XIX recibieron una formación de ingeniería (école Polytechnique, Francia). Por lo tanto, resulta difícil pretender que hay una matemática pura, y otra matemática aplicada, y que es posible dedicarse al estudio de una sin considerar la otra. De hecho, el mismísimo John von Neumann advierte sobre el peligro incurrido cuando el enfoque de las investigaciones de un matemático es únicamente abstracto y pierde de vista el origen empírico de la disciplina que estudia:

« In other words, at a great distance from its empirical source, or after much “abstract” inbreeding, a mathematical subject is in danger of degeneration. [...] the only remedy seems to me to be the rejuvenating return to the source: the re-injection of more or less directly empirical ideas. I am convinced that this was a necessary condition to conserve the freshness and the vitality of the subject and that this will remain equally true in the future.» (von Neumann, 1947, p.196)

En las páginas que siguen, se presenta una deducción completamente matemática del principio de incertidumbre de Heisenberg, una idea que surgió primero en el contexto de la mecánica cuántica, y que después fue integrada al análisis de Fourier como un teorema formal, ilustrando perfectamente cómo los avances teóricos y las grandes ideas suelen surgir de la interacción entre aplicaciones y teoría, y no de una perspectiva mutuamente excluyente entre lo “concreto” y lo “abstracto”.

Agradecimientos: A mis profesores del departamento de matemática de la UVG, por hacer de mi experiencia universitaria uno de los mejores capítulos de mi vida. A Dorval, por todo lo que me ha enseñado, y por compartir conmigo su pasión por las ciencias aeroespaciales y la Historia mundial. A Nancy, por su dedicación, y por su apoyo incansable, desde el momento en que ingresé a la universidad. A mi familia, por el interés y el entusiasmo que han mostrado ante todo lo que aprendo, y lo que les cuento al respecto.

Prefacio	III
Resumen	VII
1. Introducción	1
2. Objetivos	4
2.1. Objetivos generales	4
2.2. Objetivos específicos	4
3. Justificación	5
4. Antecedentes	6
5. Definiciones y teoría preliminar	8
5.1. Notación y convenciones en \mathbb{R}^d	8
5.2. Integrales sobre intervalos en \mathbb{R}^d	9
5.3. Integrales impropias sobre \mathbb{R}^d	12
5.4. Funciones con descenso moderado	14
6. El principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	23
6.1. Definición y propiedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	24
6.2. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	31
6.3. Aplicación: Convoluciones y familias de buenos kernels	41
6.4. La identidad de Plancherel	49
6.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	54
7. El principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	59
7.1. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	59
7.2. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	66
7.3. Familias de buenos kernels y la fórmula de inversión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	72
7.4. Convoluciones y la identidad de Plancherel	76
7.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	79

8. Grupos LCA y dualidad de Pontryagin	84
8.1. Grupos LCA	84
8.2. Integrales de Haar	86
8.3. Transformada de Fourier sobre grupos LCA	90
8.4. La fórmula de sumación de Poisson	92
9. Comentarios finales	95
9.1. La transformada de Fourier y el análisis matemático	95
9.2. La relación entre el principio de incertidumbre de Heisenberg y la transformada de Fourier	96
9.3. Consideraciones sobre los grupos LCA, las integrales de Haar y el análisis armónico abstracto	98
10. Conclusiones	100
11. Recomendaciones	102
12. Bibliografía	103

El trabajo a continuación consiste de una presentación detallada de la teoría básica del análisis de Fourier en el marco de los espacios de Schwartz sobre \mathbb{R} y \mathbb{R}^d . En cada caso, se incluye una exposición de la manera en que esta teoría puede utilizarse para obtener una versión completamente matemática, en la forma de un teorema, del principio de incertidumbre de Heisenberg para funciones pertenecientes a estos espacios.

El capítulo 5 presenta los rudimentos del análisis en \mathbb{R}^d , establece un marco teórico riguroso para la convergencia de integrales impropias en \mathbb{R}^d , e introduce las principales propiedades (para fines de este trabajo) de los espacios de funciones con descenso moderado.

El capítulo 6 introduce los espacios de Schwartz sobre \mathbb{R} , los rudimentos del análisis de Fourier, y las principales propiedades de la transformada de Fourier necesarias para obtener el principio de incertidumbre en su versión para funciones de Schwartz de una sola variable. Estas propiedades incluyen entre otras, la transformada inversa de Fourier y la identidad de Plancherel.

El capítulo 7 sigue una estructura muy similar a la del capítulo 6 con la diferencia de que ahora los resultados son extendidos a los espacios de Schwartz sobre \mathbb{R}^d . Posteriormente, dichos resultados se utilizan para obtener una versión más general — para funciones de Schwartz definidas sobre \mathbb{R}^d — del principio de incertidumbre presentado al final del capítulo 6.

El capítulo 8 consiste de una breve discusión sobre la teoría más general del análisis armónico abstracto, los grupos LCA, la dualidad de Pontryagin, las integrales de Haar, y la manera en que las principales propiedades de la transformada de Fourier identificadas en capítulos anteriores pueden recuperarse de manera eficiente, como casos especiales de la teoría más general del análisis armónico abstracto.

El trabajo concluye con una discusión en tres partes, sobre la historia de la transformada de Fourier y el rol clave que jugó en el desarrollo del análisis matemático, su relación con el principio de incertidumbre de Heisenberg, al igual que la utilidad de disponer de una versión completamente matemática de dicho principio, tanto en el contexto de sus posibles aplicaciones a otras disciplinas, como en el dominio de la investigación matemática actual.

A principios del siglo XIX, mientras investigaba posibles soluciones de la ecuación de calor, el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier encontró una técnica que, según él, le permitía representar cualquier función periódica como una serie infinita de senos y cosenos (Bressoud, 2007, pp. 1-4; Tao, 2017, p. 107). Cuando en 1807 Fourier presentó estas ideas ante los académicos de la época en su manuscrito, *Théorie de la propagation de la chaleur dans les corps solides*, causó un diluvio de cuestionamientos: ¿Cualquier función periódica? ¿Qué garantiza la convergencia de estas series? ¿Qué condiciones debe satisfacer un función para que exista su representación como una serie de Fourier? (Bressoud, 2007, pp. 1-6; Bressoud, 2008, pp. 1-2) Para colmo, en el manuscrito de 1807 y en *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* (1811), Fourier también propone una primera versión de la ahora famosa *Transformada de Fourier* (Valentinuzzi, 2016), desatando, junto a las series de Fourier, una “crisis” en las fundaciones de la matemática (Bressoud, 2007, p.1) y marcando el inicio del *análisis de Fourier*, es decir, el estudio sistemático de estas problemáticas.

A partir de este momento, la búsqueda de respuestas a las preguntas planteadas por el análisis de Fourier se convertiría en una de las principales motivaciones tras el trabajo de algunos de los matemáticos más importantes de los últimos dos siglos, incluyendo gigantes como Cauchy, Dirichlet, Abel, Weierstrass, Gauss, Riemann o Lebesgue (Bressoud, 2007, 2008). Estas investigaciones culminaron en diversos momentos de la historia con la introducción de conceptos como la convergencia uniforme de sucesiones de funciones, la continuidad uniforme de una función, la formalización de la definición de integral, las condiciones bajo las cuales una función es Riemann integrable, un cambio drástico en la manera en que se percibe la relación entre continuidad y diferenciabilidad y un nivel de rigor sin precedentes (Bressoud, 2007, 2008). De manera general, es difícil encontrar algún aspecto o rama del análisis matemático cuyos orígenes no sean motivados, al menos en parte, por la teoría del análisis de Fourier. Es más, si incluimos la versión más general y moderna del análisis de Fourier, es decir, el análisis armónico, donde se emplean las herramientas del análisis matemático, de la topología, y del álgebra abstracta, para obtener una generalización de la transformada de Fourier sobre grupos LCA, entonces la manera en que el descubrimiento de Fourier trasciende su propósito inicial toma otra dimensión.

Ciento veinte años después de las publicaciones de Joseph Fourier, y tras haber introducido la mecánica matricial junto a Max Born y Pascual Jordan, el físico alemán Werner Heisenberg descubrió en 1927 que no es posible conocer a la vez, y con certeza probabilística, la posición y el momento de una partícula ([American Physical Society, s.f.](#); [Whittaker, 1953](#), p.267). Posteriormente, este concepto clave de la mecánica cuántica, ahora conocido como el *principio de incertidumbre de Heisenberg*, fue rigurosamente formalizado por primera vez en 1927 por medio de una deducción matemática debida a Earle Hesse Kennard ([Hilgevoord y Uffink, 2024](#), §2.5). En efecto, resulta que las varianzas correspondientes a las funciones de densidad probabilística que determinan la posición y el momento de una partícula están vinculadas por la transformada de Fourier (véase 9.2). Bajo este enfoque, el principio de incertidumbre de Heisenberg surge como una propiedad del análisis de Fourier. Desde entonces, se han descubierto varias relaciones de tipo “principio de incertidumbre” en la investigación matemática. Una de ellas fue elaborada por [Hardy \(1933\)](#), cuando formalizó una observación de Norbert Wiener, quien había notado que “una pareja de transformadas f y g no pueden ser ambas muy pequeñas”.

Lo que resulta fascinante, es que por una parte el principio de incertidumbre es una propiedad completamente teórica, e inextricable de la transformada de Fourier y por otra, es un fenómeno observable de la física de partículas que hasta puede comprobarse por la vía experimental (para una breve explicación sobre los experimentos relacionados al principio de incertidumbre véase [Wiseman \(2019\)](#)). De modo que tenemos una manifestación física, concreta, de un fenómeno completamente matemático, que no fue expresado como un teorema hasta después de ser descubierto en el contexto de la mecánica cuántica.

Por supuesto, el hecho de que el principio de incertidumbre pueda deducirse en el marco del análisis de Fourier, y de manera aislada de la mecánica cuántica, también implica que puede aparecer en otras aplicaciones, no necesariamente físicas. Es decir que a partir del momento en que la transformada de Fourier se encuentra involucrada en la matematización o modelado de algún fenómeno —en disciplinas como la estadística, teoría de distribuciones, o los estudios económicos— podemos estar seguros de que el principio de incertidumbre de Heisenberg va a manifestarse en algún momento.

A pesar de esto, en la enseñanza a nivel de licenciatura, no es común abordar estas temáticas de manera integrada, es decir, poniendo en valor la transformada de Fourier y el principio de incertidumbre de Heisenberg como dos teorías estrechamente relacionadas. En vez de esto, la mayoría de estudiantes de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas abordan la transformada de Fourier como una herramienta que sirve para resolver ecuaciones diferenciales parciales o, en el contexto del procesamiento de señales, para aplicaciones en telecomunicaciones. En cuanto al principio de incertidumbre, generalmente se reserva para los cursos de física moderna, o mecánica cuántica, y raramente se dan a conocer sus otras aplicaciones o versiones, en matemática, estadística o economía.

En los capítulos que siguen, se busca presentar la transformada de Fourier como una operación matemática que trasciende su propósito inicial, con suficientes propiedades como para que su estudio conforme una teoría en sí misma, el análisis de Fourier, y cuyo desarrollo conduce naturalmente al principio de incertidumbre de Heisenberg. Para esto, empezamos introduciendo $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, el espacio de funciones con descenso moderado, y mostramos que

la integral impropia de Riemann de cualquiera de estas funciones siempre existe y converge absolutamente. En el siguiente capítulo, definimos $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, el espacio de funciones de Schwartz cuyo dominio es \mathbb{R} , y mostramos que resulta ser un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Luego, desarrollamos los elementos del análisis de Fourier necesarios para obtener dos de los resultados más importantes en el marco de una prueba formal del principio de incertidumbre de Heisenberg: la fórmula de inversión de Fourier y el teorema o identidad de Plancherel. En el capítulo 7, utilizamos los aprendizajes del caso 1-dimensional y las propiedades de las funciones con descenso moderado en \mathbb{R}^d para extender todos los resultados del capítulo 6 al caso \mathbb{R}^d . Esto nos permite llegar al principal objetivo de este trabajo: el principio de incertidumbre de Heisenberg para el caso de funciones de Schwartz en \mathbb{R}^d . Finalmente, en el capítulo 8, enunciamos las bases del análisis de Fourier sobre grupos abelianos localmente compactos (LCA), y aplicamos la dualidad de Pontryagin para volver a obtener los principales teoremas de los capítulos 6 y 7, ahora como casos especiales de la teoría más moderna y general del análisis armónico abstracto.

2.1. Objetivos generales

1. Presentar el análisis de Fourier como una parte esencial del análisis matemático, con implicaciones importantes en ciencia.
2. Valorizar el análisis de Fourier como una herramienta que trasciende la búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.
3. Investigar la relación matemática que existe entre la transformada de Fourier y el principio de incertidumbre de Heisenberg.
4. Entender porqué el descubrimiento de la transformada de Fourier es considerado como un evento clave en la historia de la investigación matemática.

2.2. Objetivos específicos

1. Generalizar la transformada de Fourier, la fórmula de inversión, el teorema de Plancherel y la fórmula de sumación de Poisson al espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
2. Obtener y demostrar el principio de incertidumbre de Heisenberg como una desigualdad y generalizarlo al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. Presentar el principio de Heisenberg bajo un enfoque exclusivamente analítico-matemático.
4. Explorar otros enfoques teóricos que también permiten generalizar la teoría del análisis de Fourier y el principio de incertidumbre, en particular la dualidad de Pontryagin en grupos LCA.
5. Presentar las eventuales ventajas y dificultades de cada mecanismo de generalización.

El trabajo propuesto se justifica por:

1. Ampliar la percepción que se puede tener, a nivel de pregrado, de la transformada de Fourier únicamente como una herramienta útil en la solución de ecuaciones diferenciales parciales o en el análisis de ondas.
2. La relevancia teórica que representa una generalización del principio de incertidumbre de Heisenberg desde una perspectiva del análisis de Fourier.
3. Mostrar el principio de incertidumbre de Heisenberg desde el enfoque más accesible del análisis de Fourier, y su relación con la transformada de Fourier.
4. La posibilidad de ilustrar cómo, al tomar un enfoque estrictamente matemático, es posible realizar generalizaciones y avances teóricos que trascienden las eventuales aplicaciones de un concepto.
5. La importancia clave que tiene el análisis de Fourier como motivador de la investigación en el análisis matemático durante los dos últimos siglos.

Como se mencionó en la introducción, el análisis de Fourier y la matematización del principio de incertidumbre de Heisenberg no son temas nuevos. En efecto, un estudio de la transformada de Fourier en el espacio de funciones de Schwartz definidas sobre \mathbb{R} ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$) puede encontrarse en los libros de [Stein y Shakarchi \(2003, Cap. 5\)](#) y [Pereyra y Ward \(2012, Cap. 7\)](#). Además, [Deitmar \(2005, Caps. 5-8\)](#) provee una presentación accesible sobre la transformada de Fourier y la identidad de Plancherel en el contexto más general y moderno de los grupos abelianos localmente compactos (LCA), de la dualidad de Pontryagin y de las integrales de Haar. Sin embargo, a pesar de que cada uno de los textos mencionados está destinado a un público tanto de pregrado como de posgrado, a nivel de licenciatura, todos presentan ciertas ventajas y dificultades respecto a los objetivos (capítulo 2) de este trabajo:

1. El texto de [Stein y Shakarchi \(2003, pp. 180-184, Cap. 6\)](#) tiene la ventaja de incluir una breve presentación sobre la manera en que la transformada de Fourier y sus teoremas afines, pueden ser extendidos al espacio de funciones de Schwartz definidas sobre \mathbb{R}^d (denotado $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). Además, [Stein y Shakarchi \(2003, pp. 158-161\)](#) también incluyen una discusión sobre el principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sin embargo, a lo largo del texto, se asume un alto grado de familiarización con la teoría de integración de Riemann en varias variables; específicamente, integrales impropias múltiples sobre \mathbb{R}^d . Esto representa una dificultad ya que, por lo general, muchos libros de texto sobre el análisis de varias variables reales omiten un tratamiento detallado de las integrales impropias múltiples sobre \mathbb{R}^d a favor de una introducción a la teoría de integración de Lebesgue, la cual se considera más general. Además de esto, las pruebas incluidas por [Stein y Shakarchi \(2003\)](#) suelen ser relativamente concisas — especialmente en el caso de la discusión sobre la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — y requieren bastante trabajo personal para entenderlas con claridad. Finalmente, la demostración del principio de incertidumbre de Heisenberg para funciones del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se deja como un ejercicio para el lector ([Stein y Shakarchi \(2003, pp. 209, ej. 6\)](#)).
2. Aunque la presentación de [Pereyra y Ward \(2012, Cap. 7\)](#) sobre la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ aporta otros resultados pertinentes, incluyendo, en ciertos casos,

pruebas más detalladas que las de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#), varios detalles de los argumentos que justifican estos resultados se dejan al lector. Por otro lado, a pesar de que [Pereyra y Ward \(2012, Cap. 8\)](#) incluyen un capítulo sobre la transformada de Fourier en el contexto más amplio de las distribuciones templadas, al igual que una discusión —en la cual citan como referencia a la de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#)— sobre el principio de incertidumbre de Heisenberg para funciones del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, el texto de [Pereyra y Ward \(2012\)](#) no incluye una discusión sobre cómo extender estos resultados al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3. Finalmente, [Deitmar \(2005\)](#) ofrece una introducción a temáticas avanzadas del análisis armónico abstracto, lo cual puede ser una ventaja para quienes quieran iniciarse a una percepción moderna y generalizada de la transformada de Fourier. Sin embargo, el texto no menciona específicamente el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ya que resulta ser un caso particular de la teoría más general de los grupos LCA.

Por estas razones, en los capítulos que siguen, proponemos un acercamiento integrado, en el que tratamos de resolver estas dificultades de las siguientes maneras:

1. Incluyendo un capítulo en el que se exponen de manera estructurada los resultados necesarios de la teoría de integrales impropias múltiples de Riemann que puede encontrarse en el libro de [Zorich \(2004, sec. 11.6\)](#) y en cierta medida en el apéndice del libro de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#).
2. Mostrando cómo utilizar el marco formal para la convergencia de integrales impropias múltiples descrito por [Zorich \(2004\)](#) para justificar en mayor detalle la validez de los resultados que presentan [Stein y Shakarchi \(2003\)](#) sobre el espacio de funciones con descenso moderado en \mathbb{R}^d y sobre la transformada de Fourier en el espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
3. Incluyendo una demostración completa del principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
4. Incluyendo un capítulo en el que se discute la teoría presentada por [Deitmar \(2005, Caps. 5-8\)](#), y la manera en que las propiedades de la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se pueden obtener como un caso especial de la misma.

A continuación, enunciamos algunas definiciones y teoremas necesarios para el desarrollo de la teoría de la transformada de Fourier y del principio de incertidumbre. Para las pruebas de los hechos enunciados en este capítulo, y un desarrollo riguroso de la teoría de integración de Riemann en \mathbb{R}^d , incluyendo integrales impropias múltiples, incitamos al lector a consultar el apéndice de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#), las secciones 11.1 a 11.6 de [Zorich \(2004\)](#), y las secciones 4.1 a 4.7 de [Folland \(2002\)](#).

5.1. Notación y convenciones en \mathbb{R}^d

En los capítulos que siguen, y a menos que especifique lo contrario, los conceptos como \mathbb{R}^d ; *producto interno de \mathbb{R}^d* ; y *norma euclidiana* o *norma usual de \mathbb{R}^d* , se entenderán de la manera estipulada en las definiciones a continuación.

Definición 5.1.1.

$$\mathbb{R}^d = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \ni x_i \in \mathbb{R}\}$$

Definición 5.1.2 (Norma euclidiana). La norma euclidiana o *norma usual* de \mathbb{R}^d es la función $|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$$

Definición 5.1.3 (Producto interno de \mathbb{R}^d). El producto interno de \mathbb{R}^d es la función $\cdot : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_dy_d$$

Además, siempre asumiremos que las funciones son tales que $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, donde $d \in \mathbb{Z}^+$, y

f tiene la forma $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + iv(\mathbf{x})$ donde $u, v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. De modo que

$$|f(\mathbf{x})| = \sqrt{u^2(\mathbf{x}) + v^2(\mathbf{x})}.$$

Con esto en mente, introducimos las siguientes definiciones, que serán de utilidad al integrar o derivar en \mathbb{R}^d .

Definición 5.1.4 (Multi-índice). Un multi-índice en \mathbb{R}^d es la d -tupla dada por $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ donde cada α_i es un entero no-negativo.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 176)

Definición 5.1.5. Dado un multi-índice $\boldsymbol{\alpha}$, y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, definimos el monomio \mathbf{x}^α , dado por:

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 176)

Definición 5.1.6. Si $\boldsymbol{\alpha}$ es un multi-índice, definimos el operador diferencial $(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}})^\alpha$ dado por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

donde $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ es el *orden* del multi-índice $\boldsymbol{\alpha}$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 176)

Ejemplo 5.1.7. Suponga que la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 \cos(x_2) + e^{x_3^2}$. Entonces la notación anterior permite escribir de manera simplificada:

$$6x_1 \sin(x_2) = \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} [3x_1^2 \cos(x_2) + e^{x_3^2}] = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \partial x_2^3} [f(\mathbf{x})] = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha [f(\mathbf{x})]$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = (1, 3, 0)$

5.2. Integrales sobre intervalos en \mathbb{R}^d

A continuación enunciamos ciertas nociones básicas de los intervalos en \mathbb{R}^d , las condiciones bajo las cuales una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ es Riemann integrable y algunas herramientas útiles en el cálculo de estas integrales.

Definición 5.2.1 (Intervalo). Un rectángulo cerrado, o *intervalo*, en \mathbb{R}^d es el conjunto dado por:

$$I = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid a_i \leq x_i \leq b_i ; i = 1, 2, \dots, d ; a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

(Zorich, 2004, p.107; Stein y Shakarchi, 2003, p. 289)

Definición 5.2.2 (Partición de un rectángulo en \mathbb{R}^d). Una partición del rectángulo cerrado $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es la d -tupla $P = (P_1, P_2, \dots, P_d)$ donde P_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.3 (Subintervalo de una partición en \mathbb{R}). Sea una partición P_j del intervalo $[a_j, b_j]$ dada por $P_j = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $a_j = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_j$. Diremos que S_j es un subintervalo de P_j si tiene la forma $S_j = [x_{i-1}, x_i]$, donde $i \in \mathbb{N} \ni 1 \leq i \leq n$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.4 (Subrectángulo en \mathbb{R}^d). Sea $I \subseteq \mathbb{R}^d$ un intervalo en \mathbb{R}^d y $P = (P_1, P_2, \dots, P_d)$ una partición de I . Decimos que S es un *subrectángulo* de la partición P si $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_d$, donde S_j es un subintervalo de P_j .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.5 (Volumen de un subrectángulo). El volumen del subrectángulo S es el valor dado por

$$|S| = |S_1| |S_2| \dots |S_d|$$

donde $|S_i|$ es el tamaño del intervalo S_i .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.6 (Suma superior e inferior de Riemann). Sea $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, continua, acotada y definida sobre I . Entonces, las sumas superior e inferior de Riemann respecto a una partición P de I son dadas respectivamente por

$$\mathcal{U}(P, f) = \sum \sup_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) |S| \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(P, f) = \sum \inf_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}) |S|$$

donde las sumas se realizan sobre todos los posibles subrectángulos de P .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.7 (Refinamiento de P). $P' = (P'_1, P'_2, \dots, P'_d)$ es un refinamiento de $P = (P_1, P_2, \dots, P_d)$ si cada P'_i es un refinamiento de P_i .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Definición 5.2.8 (Riemann integrable). Sea $f : I \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, continua, acotada y definida sobre el rectángulo cerrado I . Diremos que f es Riemann integrable (o simplemente *integrable*) si $\forall \epsilon > 0$ existe una partición P de I tal que

$$| \mathcal{U}(P, f) - \mathcal{L}(P, f) | < \epsilon$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

Nota 5.2.9. La definición 5.2.8 implica que f es integrable si y solo si

$\inf_P \mathcal{U}(P, f) = \sup_P \mathcal{L}(P, f)$. Por lo tanto, diremos que el valor $\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ dado por

$$\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf_P \mathcal{U}(P, f) = \sup_P \mathcal{L}(P, f)$$

es la *integral* de f sobre I (siempre y cuando f sea integrable) (Stein y Shakarchi, 2003, p. 290).

Nota 5.2.10. Otras maneras válidas de denotar la integral de f son:

$$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d \quad \text{o bien} \quad \int_I f$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 290)

La integral de una función definida sobre $I \subset \mathbb{R}^d$ puede calcularse evaluando d integrales de una variable, una por una. Esto es posible gracias al teorema de Fubini y sus corolarios, enunciados a continuación, y cuyas pruebas pueden encontrarse en la sección 2.2 del apéndice de Stein y Shakarchi (2003) y la sección 11.4.1 de Zorich (2004).

Teorema 5.2.11 (Fubini). Sea f una función continua sobre un rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^d$.

Suponga además que $R = R_1 \times R_2$, donde $R_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ y $R_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ satisfaciendo $d = d_1 + d_2$. Si escribimos $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_i}$, entonces $F(\mathbf{x}_1) = \int_{R_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2$ es continua sobre R_1 y

$$\int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \right) d\mathbf{x}_1$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 291)

Corolario 5.2.12. Sea $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ un rectángulo cerrado de \mathbb{R}^d . Entonces, el teorema 5.2.11 implica que

$$\int_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_d \right) \dots dx_2 \right) dx_1 \quad (5.1)$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 292)

Corolario 5.2.13. *El teorema 5.2.11 y el corolario 5.2.12 también implican que el orden en el que se evalúe cada integral en el lado derecho de la expresión (5.1) no cambia el valor de $\int_R f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.*

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 292)

Finalmente, enunciaremos la fórmula de cambio de variables para el caso de integrales múltiples. Un estudio completo de este resultado puede encontrarse en la sección 11.5 de Zorich (2004).

Teorema 5.2.14 (Fórmula de cambio de variables). *Sea A y B subconjuntos compactos de \mathbb{R}^d y suponga que $\phi : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo de clase C^1 . Entonces, si f es continua sobre B , tenemos*

$$\int_{B=\phi(A)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_A (f \circ \phi)(\mathbf{t})|\det \phi'(\mathbf{t})|d\mathbf{t}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 292; Zorich, 2004, p. 136)

Nota 5.2.15. En el teorema anterior, note que la función ϕ toma valores de \mathbb{R}^d y los asigna a valores de \mathbb{R}^d , por lo tanto ϕ' resulta ser la matriz jacobiana de $d \times d$.

Nota 5.2.16. Como se muestra en la sección 2.4 del apéndice de Stein y Shakarchi (2003), el teorema 5.2.14 puede utilizarse para realizar un cambio a coordenadas esféricas al evaluar $\int_{A(n,m)} |\mathbf{x}|^\lambda d\mathbf{x}$, resultando en la siguiente expresión

$$\int_{A(n,m)} |\mathbf{x}|^\lambda d\mathbf{x} = \begin{cases} \frac{\omega_d}{\lambda+d} [m^{\lambda+d} - n^{\lambda+d}] & \text{si } \lambda \neq -d \\ \omega_d [\log(m) - \log(n)] & \text{si } \lambda = -d \end{cases}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, ω_d es el área de la esfera unitaria $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ y $A(n, m)$ es el anillo de radio interior n y radio exterior m dado por $A(n, m) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : n \leq |\mathbf{x}| \leq m\}$.

5.3. Integrales impropias sobre \mathbb{R}^d

En esta sección, establecemos las condiciones bajo las cuáles la integral impropia de una función definida sobre todo \mathbb{R}^d converge, extendiendo de esta manera el concepto de integrabilidad a la totalidad de \mathbb{R}^d . Para el argumento formal que justifica estos resultados, referimos al lector a la sección 11.6 de Zorich (2004).

Definición 5.3.1 (Conjunto de medida cero). Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene *medida cero* (en el sentido de Lebesgue) si $\forall \epsilon$ hay una cubierta de E por un sistema $\{I_i\}$, a lo sumo contable, de rectángulos cerrados (ver definición 5.2.1) para la cual $\sum_i |I_i| < \epsilon$, donde $|I_i|$ es el volumen del rectángulo I_i .

(Zorich, 2004, p. 110)

Definición 5.3.2 (Conjuntos admisibles). Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ es *admisibles* si es acotado en \mathbb{R}^d y su frontera es un conjunto de medida cero.

(Zorich, 2004, p. 117)

Nota 5.3.3. La esfera unitaria S^d , el rectángulo cerrado $I \subset \mathbb{R}^d$ y el anillo $A(N, M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : N \leq |\mathbf{x}| \leq M\}$ son conjuntos admisibles (véase Zorich, 2004, pp. 117-118).

Definición 5.3.4 (Agotamiento). Un *agotamiento* de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ es una sucesión de conjuntos admisibles $\{E_n\}$ tal que

$$(i) \quad E_n \subset E_{n+1} \subset E \text{ par todo } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

(Zorich, 2004, p. 150)

Nota 5.3.5. En la definición anterior, Zorich (2004) requiere que los conjuntos que conforman el agotamiento de E sean *Jordan medibles* (p. 150), sin embargo, Zorich (2004) también explica que todo conjunto Jordan medible también es admisible y vice versa (p. 120). Por esa razón, nos hemos tomado la libertad de incluirlo directamente en la definición 5.3.4.

Definición 5.3.6. Sea $\{E_n\}$ un agotamiento del conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y suponga que la función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre los conjuntos $E_n \in \{E_n\}$. Si el límite

$$\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (5.2)$$

existe y su valor es independiente de la selección de conjuntos en $\{E_n\}$ con la que se agote a E , entonces llamamos a dicho limite la *integral impropia* de f sobre E .

(Zorich, 2004, p. 151)

Nota 5.3.7. La definición anterior lleva consigo la dificultad agregada de que para poder demostrar la existencia de una integral impropia sobre conjuntos $E \subseteq \mathbb{R}^d$ donde $d > 1$, es necesario poder asegurar que el límite (5.2) converge para todos los posibles agotamientos de E . Dada la infinidad de subconjuntos con los que se puede agotar E , la utilidad de esta definición puede parecer limitada. Sin embargo, el siguiente resultado establece condiciones bajo las cuáles es suficiente la convergencia de (5.2) para solo uno de estos agotamientos.

Teorema 5.3.8. Si una función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es no-negativa y el límite (5.2) existe para al menos un agotamiento $\{E_n\}$ de E , entonces la integral impropia de f sobre E converge.

(Zorich, 2004, p. 152)

Teorema 5.3.9. Sea f y g funciones definidas sobre el conjunto E e integrables sobre exactamente los mismos subconjuntos admisibles de E . Además suponga que $|f(\mathbf{x})| \leq g(\mathbf{x})$ sobre E .

Si la integral impropia $\int_E g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ converge, entonces las integrales $\int_E |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$ y $\int_E f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ también convergen.

(Zorich, 2004, p. 153)

Nota 5.3.10. Juntos, los dos teoremas anteriores implican que si la integral impropia de f converge absolutamente para un agotamiento de E (o \mathbb{R}^d), entonces la integral impropia de f también converge para todo agotamiento de E (o \mathbb{R}^d)

Nota 5.3.11. Por supuesto, cuando hablamos de la convergencia de la integral impropia sobre \mathbb{R}^d de una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + iv(\mathbf{x})$, se subentiende que esto solo puede suceder si las integrales impropias $\int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ y $\int_{\mathbb{R}^d} v(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ convergen en el sentido de la definición 5.3.6.

5.4. Funciones con descenso moderado

Finalmente, retomamos la breve presentación propuesta por Stein y Shakarchi (2003, pp. 131-134) sobre funciones con descenso moderado definidas sobre \mathbb{R} y las propiedades de las integrales impropias de estas funciones, y extendemos estas ideas al caso de funciones con descenso moderado definidas sobre \mathbb{R}^d . Empezamos introduciendo el espacio de funciones con descenso moderado, el cual resulta ser un espacio vectorial. Además, mostramos que la integral impropia sobre \mathbb{R}^d de cualquier función con descenso moderado es convergente. Esta propiedad es muy útil y volverá a aparecer de manera recurrente en los siguientes capítulos.

Definición 5.4.1. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, una función continua sobre \mathbb{R}^d . Decimos que f tiene *descenso moderado* si existe $A > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 294)

Nota 5.4.2. Siguiendo el ejemplo de la notación introducida por Stein y Shakarchi (2003, p. 132) para el caso $d = 1$, denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ al conjunto de todas las funciones que satisfacen la definición 5.4.1.

Nota 5.4.3. Suponga que $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\exists A, B > 0$ tales que $|f(\mathbf{x})| \leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}$ y $|g(\mathbf{x})| \leq \frac{B}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}$. Por ende,

$$|f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x})||g(\mathbf{x})| \leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \cdot \frac{B}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} = \frac{C}{(1 + |\mathbf{x}|^{d+1})^2} \leq \frac{C}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}$$

donde $C = AB > 0$. Por lo tanto, $fg \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Lema 5.4.4. El conjunto $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, bajo la suma de funciones y el producto por escalares, forma un espacio vectorial sobre \mathbb{C} .

Demostración. Verificamos que se cumpla la definición de espacio vectorial:

1. (*Cerradura bajo la suma*) Sea $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, existen $A_1, A_2 > 0$ tales que

$$|f_1(\mathbf{x})| \leq \frac{A_1}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \quad \text{y} \quad |f_2(\mathbf{x})| \leq \frac{A_2}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Entonces, si hacemos $A = (A_1 + A_2) > 0$, tenemos:

$$|f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})| \leq |f_1(\mathbf{x})| + |f_2(\mathbf{x})| \leq \frac{A_1 + A_2}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} = \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Por lo tanto, $(f_1 + f_2) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ es cerrado bajo la suma de funciones.

2. (*Cerradura bajo el producto por escalares*) Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Entonces, $\exists A' > 0$ tal que

$$|f(\mathbf{x})| \leq \frac{A'}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Ahora bien, si hacemos $A = A'\sqrt{a^2 + b^2} > 0$ entonces

$$\begin{aligned} |zf(\mathbf{x})| &= |z||f(\mathbf{x})| \\ &= |a + ib||f(\mathbf{x})| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}|f(\mathbf{x})| \\ &\leq \frac{A'\sqrt{a^2 + b^2}}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \\ &= \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Por lo tanto, $zf \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, es decir, $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ es cerrado bajo el producto por escalares.

3. (*Conmutatividad de la suma*) Sea $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, f_1 y f_2 son tales que $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ y ambas son continuas sobre \mathbb{R}^d . Puesto que \mathbb{C} es un campo, entonces

$$(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x}) = (f_2 + f_1)(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Por lo tanto, la suma de funciones es conmutativa en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

4. (*Asociatividad de la suma*) Una vez más, si $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$ la imagen de estas funciones es compleja, y como \mathbb{C} es un campo, tenemos:

$$\begin{aligned} ((f_1 + f_2) + f_3)(\mathbf{x}) &= [(f_1 + f_2)(\mathbf{x})] + f_3(\mathbf{x}) \\ &= (f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) + f_3(\mathbf{x}) \\ &= f_1(\mathbf{x}) + (f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})) \\ &= f_1(\mathbf{x}) + [(f_2 + f_3)(\mathbf{x})] \\ &= (f_1 + (f_2 + f_3))(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Con esto, hemos comprobado la asociatividad de la suma de funciones en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

5. (*Asociatividad del producto*) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Como $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, entonces

$$z_1(z_2 f)(\mathbf{x}) = z_1(z_2 f(\mathbf{x})) = (z_1 z_2) f(\mathbf{x}) = ((z_1 z_2) f)(\mathbf{x})$$

Por lo tanto, el producto por escalares también es una operación asociativa en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

6. (*Existencia de la identidad aditiva*) Sea $f_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_0(\mathbf{x}) = 0$. Si A es un número arbitrario tal que $A > 0$, entonces $|f_0(\mathbf{x})| = 0 < \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, por lo que $f_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Además, note que si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$(f_0 + f)(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = 0 + f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + 0 = f(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}) = (f + f_0)(\mathbf{x})$$

Por lo tanto, f_0 es una identidad aditiva para $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

7. (*Existencia de inversos aditivos*)

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $|-f(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x})| \leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, para algún $A > 0$, por lo que $(-f) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Además,

$$((-f) + f)(\mathbf{x}) = (f + (-f))(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = 0 = f_0(\mathbf{x})$$

Por lo tanto, hemos encontrado un inverso aditivo para $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

8. (*Propiedades distributivas*) Sea $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Como $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} z_1(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) &= z_1(f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})) \\ &= z_1 f_1(\mathbf{x}) + z_1 f_2(\mathbf{x}) \\ &= (z_1 f_1)(\mathbf{x}) + (z_1 f_2)(\mathbf{x}) \\ &= (z_1 f_1 + z_1 f_2)(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} ((z_1 + z_2) f_1)(\mathbf{x}) &= (z_1 + z_2) f_1(\mathbf{x}) \\ &= z_1 f_1(\mathbf{x}) + z_2 f_1(\mathbf{x}) \\ &= (z_1 f_1 + z_2 f_1)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, ambas propiedades distributivas se cumplen sobre $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

9. (*Existencia de la identidad del producto por escalares*)

Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ entonces $(1f)(\mathbf{x}) = 1f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})1 = (f1)(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Por lo tanto, $1 \in \mathbb{C}$ es una identidad para el producto por escalares.

□

Nota 5.4.5. El resultado que mostramos en el teorema a continuación establece que el decaimiento impuesto sobre $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ por el descenso moderado es una condición suficiente para asegurar la convergencia de $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Teorema 5.4.6.

$$\text{Si } f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 294)

Demostración. Sea $g(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|$ y nótese que:

1. $g(\mathbf{x}) \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, es decir, g es *no-negativa*.
2. Como $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow g$ es continua y satisface $|g(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x})| \leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}}$ para algún número $A > 0$.

Luego, considere el agotamiento de \mathbb{R}^d dado por $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $E_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq n\}$ (i.e. E_n es la bola cerrada, de radio n , y centrada en el origen) y nótese que $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ es integrable sobre $E_n \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, si $\epsilon > 0$ es arbitrario, y $m > n > A\omega_d/\epsilon$, donde ω_d es el área de la esfera unitaria S^{d-1} , obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_m} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{E_n} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{E_m} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} - \int_{E_n} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{E_m \setminus E_n} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{E_m \setminus E_n} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \\ &= \int_{A(n,m)} |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{A(n,m)} \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} d\mathbf{x} \\ &\leq A \int_{A(n,m)} |\mathbf{x}|^{-(d+1)} d\mathbf{x} \\ &= A \frac{\omega_d}{-1} (m^{-1} - n^{-1}) \\ &= A\omega_d \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) \\ &< \frac{A\omega_d}{n} \\ &< \frac{A\omega_d}{A\omega_d/\epsilon} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el resultado de la nota 5.2.16 y el hecho de que

$$E_m \setminus E_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : n \leq |\mathbf{x}| \leq m\} = A(n, m)$$

Por lo tanto, hemos encontrado un agotamiento $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ para el cual

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$$

lo cual, en virtud del teorema 5.3.8 y la nota 5.3.10, implica que $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ converge para cualquier agotamiento de \mathbb{R}^d . □

Corolario 5.4.7. Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ un agotamiento de \mathbb{R}^d . Entonces,

$$\int_{E_n^c} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

Demostración. Del teorema anterior sabemos que $\forall \epsilon > 0$ existe un entero $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\left| \int_{E_n^c} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus E_n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \int_{E_n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| < \epsilon$$

□

Para concluir este capítulo, estudiamos algunas propiedades elementales de las integrales impropias de funciones con descenso moderado sobre \mathbb{R}^d .

Lema 5.4.8. Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} (af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = a \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + b \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Demostración. Sea $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Como $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ es espacio vectorial, entonces $(af + bg) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y por ende el teorema 5.4.6 implica que

$$\int_{\mathbb{R}^d} af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})d\mathbf{x} < \infty$$

Con esto, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} af(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} bg(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= a \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + b \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x})d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Donde $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cualquier agotamiento de \mathbb{R}^d y también hemos utilizado la linealidad y homogeneidad de la integral de Riemann sobre rectángulos cerrados. □

Lema 5.4.9. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 179)

Demostración. Puesto que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ sabemos, por el teorema 5.4.6 y la definición 5.3.6, que $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ existe y su valor es independiente de la manera en que se agote al conjunto \mathbb{R}^d (def. 5.3.4). De modo que, si consideramos $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{H_n\}_{n=1}^\infty$, dos agotamientos de \mathbb{R}^d dados respectivamente por

$$E_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_i \leq n\} \quad \& \quad H_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -n - h_i \leq x_i \leq n - h_i\}$$

donde $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_d)$ es un vector constante de \mathbb{R}^d , entonces tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Ahora bien, considere el difeomorfismo $\phi : E_n \rightarrow H_n$ dado por $\phi(\mathbf{t}) = \mathbf{t} - \mathbf{h}$ (donde E_n y H_n son compactos por ser subconjuntos cerrados y acotados de \mathbb{R}^d , para cada n).

Entonces,

$$\phi'(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_d \quad \& \quad \det(\phi'(\mathbf{t})) = 1$$

y por el teorema 5.2.14 tenemos

$$\int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{E_n} f(\mathbf{t} - \mathbf{h}) d\mathbf{t} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.10. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y $\delta > 0$, entonces

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 179)

Demostración. Procedemos de manera similar a la prueba del lema 5.4.8. Considere los agotamientos de \mathbb{R}^d dados por

$$E_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_i \leq n\} \quad \& \quad H_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -n\delta \leq x_i \leq n\delta\}$$

Como $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Luego, considere el difeomorfismo $\phi : E_n \rightarrow H_n$ dado por $\phi(\mathbf{t}) = \delta\mathbf{t}$. Entonces,

$$\phi'(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta \end{bmatrix} = \delta \mathbf{I}_d \quad \& \quad \det(\phi'(\mathbf{t})) = \det(\delta \mathbf{I}_d) = \delta^d$$

y por el teorema 5.2.14 tenemos

$$\int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta^d \int_{E_n} f(\delta\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \delta^d \int_{E_n} f(\delta\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

□

Lema 5.4.11. Si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \rightarrow 0 \quad \text{a medida que } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

Demostración. Debemos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $|\mathbf{h}| < \delta$ entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right| < \epsilon$$

Antes de empezar con la prueba observamos que, dado un agotamiento $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de \mathbb{R}^d , tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right| &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus E_n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{E_n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{E_n^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} + \int_{E_n^c} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{E_n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde E_n es el n -ésimo término de $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$. De modo que, si producimos cotas para estas tres integrales, habremos probado el teorema. Con esto en mente, procedemos mediante los siguientes tres pasos:

1. Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. Por el corolario 5.4.7 sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} = 0$$

Es decir que existe un entero $N_1 > 0$ tal que, si $n \geq N_1$ entonces,

$$\int_{E_n^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} < \frac{\epsilon}{4}$$

2. Sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario. Una vez más, por el corolario 5.4.7, sabemos que podemos encontrar un entero $N_2 > 0$ tal que, si $n \geq N_2$ entonces

$$\int_{E_n^c} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \frac{\epsilon}{4}$$

Por ende, si tomamos $n \geq K = \max\{N_1, N_2\}$ entonces, para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$, tenemos

$$\int_{E_n^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_{E_n^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} + \int_{E_n^c} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

3. Para terminar, necesitamos una cota superior para $\int_{E_n} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$.

Empezamos observando que, si tomamos un n^* , fijo, que satisfaga $n^* \geq K$ donde $K = \max\{N_1, N_2\}$ entonces se cumplen 2 cosas:

- a) Como E_{n^*} es admisible entonces su cerradura, dada por $E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}$, es acotada y por ende compacta.
- b) Dado que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ entonces f es continua sobre $E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}$ y por ende es uniformemente continua sobre $E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}$.

De modo que, dado $\epsilon > 0$, debe haber un número $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ entonces

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\epsilon}{2V_{n^*}}$$

donde $V_{n^*} = \int_{E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}} d\mathbf{x}$ es el volumen del compacto $E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}$.

Ahora bien, si hacemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ (note que no hay pérdida de generalidad ya que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_{n^*} \cup \partial E_{n^*} \subset \mathbb{R}^d$), esto equivale a decir que si $|\mathbf{h}| < \delta$ entonces

$$0 \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| < \frac{\epsilon}{2V_{n^*}}$$

Lo cual a su vez implica que, si $|\mathbf{h}| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{E_{n^*}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} &\leq \int_{E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} \\ &< \frac{\epsilon}{2V_{n^*}} \int_{E_{n^*} \cup \partial E_{n^*}} d\mathbf{x} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, al combinar las cotas de los pasos anteriores, obtenemos que, si $|\mathbf{h}| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &\leq \int_{E_{n^*}^c} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h})| d\mathbf{x} + \int_{E_{n^*}^c} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_{E_{n^*}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

□

Nota 5.4.12. El siguiente resultado extiende el teorema de Fubini (teorema 5.2.11) a funciones del espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. En efecto, [Stein y Shakarchi \(2003, p.295\)](#) enuncian y demuestran el caso $d = 2$ del teorema a continuación y explican que puede extenderse a cualquier función del espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. De modo que las integrales impropias sobre \mathbb{R}^d de funciones con descenso moderado pueden evaluarse como d integrales impropias sucesivas, cada una sobre \mathbb{R} .

Teorema 5.4.13 (Fubini en $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$). *Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y suponga que $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ donde $d = d_1 + d_2$. Si escribimos $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{d_i}$, entonces:*

1. $F(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^{d_1})$
2. $\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 \right) d\mathbf{x}_1$

El principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Como ya se mencionó en el capítulo 4, la teoría que se presenta a continuación es ampliamente conocida, y puede encontrarse en textos como el de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#), pp. 136-144 y pp. 158-159) o [Pereyra y Ward \(2012\)](#), pp. 164-182 y pp. 210-211). De hecho, la estructura lógica del desarrollo teórico que seguiremos en este capítulo es muy similar a la de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#). No obstante, las pruebas de los lemas, teoremas, y corolarios que presentamos aquí, no suelen encontrarse en todo su detalle en los textos anteriormente mencionados. En efecto, aunque en muchos casos el argumento central, o un esbozo de la prueba que justifica la validez de dichos teoremas, están presentes en los textos de [Stein y Shakarchi \(2003\)](#) y de [Pereyra y Ward \(2012\)](#), también es cierto que varios detalles pertinentes para un público poco familiarizado con estos temas se han omitido, ya sea con un objetivo pedagógico, o simplemente porque son considerados *evidentes*.

En todo caso, en este capítulo utilizamos la definición formal de la integral impropia, al igual que las propiedades de los espacios de funciones con descenso moderado, vistas en el capítulo 5, para presentar, ahora con pruebas completamente detalladas, la teoría del análisis de Fourier necesaria para el desarrollo de las dos principales herramientas utilizadas en la prueba del principio de incertidumbre de Heisenberg (Teorema 6.5.1), es decir, la fórmula de inversión de Fourier (Teorema 6.3.10) y el teorema de Plancherel (Teorema 6.4.8), en el contexto de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Por fin, además de ofrecer pruebas detalladas, la inclusión de este capítulo también tiene la ventaja de proporcionar un esquema, a través del estudio del caso 1-dimensional, de la trayectoria que deberá seguirse en el capítulo 6 para extender estos resultados a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

A continuación, empezamos por introducir el espacio de funciones de Schwartz en \mathbb{R} . Este resulta ser un subespacio de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ y, tras estudiar algunas propiedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (sección 6.1), observamos que la transformada de Fourier de una función de Schwartz también es de Schwartz (sección 6.2). Luego, estudiamos el comportamiento de la transformada de Fourier al aplicarla sobre la convolución de dos funciones de Schwartz, lo cual, junto con el hecho de que $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$ constituye una *familia de buenos Kernels*, nos permite obtener la transformada inversa de Fourier, haciendo de la transformada de Fourier una biyección

de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en sí mismo (sección 6.3). Con estas propiedades en mano, procedemos con la demostración de la identidad de Plancherel, la cual establece una relación de igualdad entre la norma de una función de Schwartz y la de su transformada de Fourier (sección 6.4). Finalmente, el principio de incertidumbre de Heisenberg resulta ser una aplicación directa de la identidad de Plancherel y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (sección 6.5).

6.1. Definición y propiedades de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Definición 6.1.1 (Funciones de Schwartz). Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ está en el espacio de Schwartz en \mathbb{R} , denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si dicha función es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R} y satisface

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0, \text{ donde } k, l \in \mathbb{N}.$$

(Stein y Shakarchi, 2003, pp.134-135)

Con esto, procedemos a estudiar las condiciones bajo las cuales la integral impropia de una función de Schwartz converge. Afortunadamente, esto no es muy complicado ya que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ resulta ser un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Lema 6.1.2. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subconjunto de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Demostración. Suponga que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, por definición, f es infinitamente diferenciable (y por ende continua en \mathbb{R}) y satisface

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0.$$

Entonces, cuando $k = 2$ y $l = 0$ tenemos

$$|x|^2 |f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^2 |f(x)| < A, \quad A > 0.$$

Y cuando $k = 0$ y $l = 0$ obtenemos:

$$|f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |1| |f(x)| < B, \quad B > 0$$

Por lo que al combinar estas dos desigualdades obtenemos:

$$\begin{aligned} |x|^2 |f(x)| + |f(x)| &< A + B = A' \\ \iff |f(x)|(1 + x^2) &< A' \\ \iff |f(x)| &< \frac{A'}{1 + x^2} \end{aligned}$$

y por lo tanto, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. □

Lema 6.1.3. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} bajo las operaciones de adición de funciones y producto por escalares. De hecho, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 135)

Demostración. Puesto que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ es espacio vectorial por el lema 5.4.4, solo es necesario mostrar que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ posee una identidad aditiva y que es cerrado bajo las operaciones usuales de adición y producto por escalares.

1. Identidad aditiva:

Considere la función $f_0(x) = 0$. Como $f_0^{(l)}(x) = 0 = f_0(x) \forall l \geq 0 \Rightarrow f_0$ es infinitamente diferenciable. Además, nótese que:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f_0^{(l)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} 0 = 0 < \infty, \quad \forall k, l \geq 0$$

entonces $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además, vemos que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(f_0 + f)(x) = f_0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = f(x) + 0 = f(x) + f_0(x) = (f + f_0)(x)$$

Entonces, f_0 es una identidad aditiva para $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Cerradura bajo la suma:

Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, f_1, f_2 son infinitamente diferenciables y satisfacen:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f_1^{(l)}(x)| < A \quad \forall k, l \geq 0 \quad \& \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f_2^{(l)}(x)| < B \quad \forall k, l \geq 0$$

Luego, por las propiedades del supremo y de la suma de derivadas obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f_1^{(l)}(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f_2^{(l)}(x)| < A + B = A' \\ \iff & \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left[|f_1^{(l)}(x)| + |f_2^{(l)}(x)| \right] < A' \end{aligned}$$

Y, puesto que

$$|(f_1 + f_2)^{(l)}(x)| = |f_1^{(l)}(x) + f_2^{(l)}(x)| \leq |f_1^{(l)}(x)| + |f_2^{(l)}(x)|$$

obtenemos:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |(f_1 + f_2)^{(l)}(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left[|f_1^{(l)}(x)| + |f_2^{(l)}(x)| \right] < A'$$

Entonces, como la suma de funciones diferenciables también es diferenciable y k y l son arbitrarios y no-negativos en la desigualdad anterior, concluimos que $f_1 + f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. Cerradura bajo el producto por escalares:

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |zf^{(l)}(x)| = |z| \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \sqrt{a^2 + b^2} A = A', \quad \forall k, l \geq 0$$

Por ende, $zf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

□

Lema 6.1.4. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces:

1. $f'(x) = \frac{df}{dx} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo la diferenciación)

2. $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo el producto por polinomios)

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 135)

Demostración.

1. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, f es infinitamente diferenciable y satisface:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty, \quad \forall k, l \geq 0 \tag{6.1}$$

Ahora bien, sea $g = f'$. Entonces, g también es infinitamente diferenciable. Además, si usamos la sustitución $t = l + 1$, entonces, (6.1) se convierte en:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(t)}(x)| < \infty, \quad \forall k \geq 0 \text{ y } t \geq 1$$

Lo cual equivale a escribir:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g^{(l)}(x)| < \infty, \quad \forall k, l \geq 0$$

2. Sea $t(x) = x$ y $p(x) = xf(x)$. Como $t'(x) = 1$ y f es infinitamente diferenciable, entonces:

$$\begin{aligned} p'(x) &= f(x) + xf'(x) \\ p''(x) &= 2f'(x) + xf''(x) \\ &\vdots \\ p^{(l)}(x) &= lf^{(l-1)}(x) + xf^{(l)}(x), \quad \forall l \geq 1 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $p(x)$ también es infinitamente diferenciable ya que la suma y el producto de funciones diferenciables también es diferenciable. Para probar que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |p^{(l)}(x)| < \infty, \quad \forall k, l \geq 0$$

considere primero el caso en que $k \geq 0$ es arbitrario y $l = 0$. Entonces,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |p^{(l)}(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |x| |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{k+1} |f(x)| < \infty$$

Luego, consideramos el caso en que $k \geq 0$ y $l \geq 1$, y notamos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ también implica que:

$$l \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l-1)}(x)| \leq A < \infty \quad \& \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{k+1} |f^{(l)}(x)| \leq B < \infty ; \quad \forall k \geq 0 \text{ y } \forall l \geq 1$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |p^{(l)}(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |lf^{(l-1)}(x) + xf^{(l)}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left[l \cdot |f^{(l-1)}(x)| + |x| |f^{(l)}(x)| \right] \\ &= l \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l-1)}(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{k+1} |f^{(l)}(x)| \\ &< A + B \\ &= A' < \infty, \quad \forall k \geq 0, \forall l \geq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p(x) = xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

□

Ahora que disponemos de estas propiedades, podemos proponer otro criterio para determinar si una función infinitamente diferenciable es de Schwartz.

Lema 6.1.5. *Si f es infinitamente diferenciable (i.e. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$) entonces*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0 \iff \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f^{(l)}(x)| = 0 \quad \forall k, l \geq 0$$

(Pereyra y Ward, 2012, p. 165)

Demostración.

(\Rightarrow) Suponga que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ y que satisface

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0$$

Entonces, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por definición y como $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ podemos decir que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ lo cual implica que $\exists A > 0 \ni |f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$. Por ende, si ϵ es arbitrario y satisface $A > \epsilon > 0$ (S.P.G), tenemos $K(\epsilon) = \sqrt{A/\epsilon} \geq 1 > 0$ tal que, si $|x| > K(\epsilon)$, entonces:

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} < \frac{A}{x^2} < \frac{A}{A/\epsilon} = \epsilon$$

lo cual demuestra que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0.$$

Ahora bien, como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo la diferenciación y la multiplicación por polinomios, sabemos que $g(x) = x^k f^{(l)}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall k, l \geq 0$. Entonces, el razonamiento anterior también aplica para $g(x)$ y obtenemos:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |g(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f^{(l)}(x)| = 0 \quad \forall k, l \geq 0$$

(\Leftarrow) Para el converso, suponga que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f^{(l)}(x)| = 0 \quad \forall k, l \geq 0$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe un número real $R(\epsilon) > 0$ tal que, si $|x| > R$ entonces

$$|x|^k |f^{(l)}(x)| < \epsilon, \quad \forall k, l \geq 0$$

Luego, como $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces $\frac{d^l f}{dx^l}$ es continua, y por ende uniformemente continua sobre el compacto $[-R, R]$ para cualquier $l \geq 0$. Lo cual implica inmediatamente que $\frac{d^l f}{dx^l}$ es acotada sobre $[-R, R]$ para cualquier $l \geq 0$.

Finalmente, si recordamos que todo polinomio sobre un compacto es acotado y que el producto de funciones acotadas también es una función acotada, obtenemos que $|x|^k |f^{(l)}(x)|$ es acotada cuando $|x| \leq R$. Por lo tanto,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \quad \forall k, l \geq 0$$

□

Nota 6.1.6. Además de proporcionar un ejemplo de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, el siguiente lema resultará ser esencial en el desarrollo de la teoría de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lema 6.1.7. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-ax^2}$, con $a > 0$, está en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$$

Demostración. Vamos a argumentar que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y luego utilizar el hecho de que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ para determinar el valor al que converge la integral. Por las propiedades de la exponencial, sabemos que $f(x) = e^{-ax^2}$ es infinitamente diferenciable y que

$$\frac{d^l f}{dx^l} = P_l(x) e^{-ax^2}$$

donde $P_l(x)$ es un polinomio de grado l . Además, note que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |f^{(l)}(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k |P_l(x) e^{-ax^2}| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x|^k |P_l(x)|}{e^{ax^2}} = 0$$

Entonces, $f(x) = e^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por el lema 6.1.5.

Luego, como $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx < \infty$ por el teorema 5.4.6, y también podemos aplicar el teorema 5.4.13 para obtener:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-a|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} e^{-a|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

donde

$$E_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 2n^2\}.$$

Ahora bien, considere

$$H_n = \{\mathbf{t} = (r, \theta) : 0 < r \leq \sqrt{2n} \ \& \ 0 < \theta \leq 2\pi\}$$

y sea $\phi : H_n \rightarrow E_n$, el mapeo dado por

$$\phi(\mathbf{t}) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Entonces,

$$\phi'(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \& \quad |\det(\phi'(\mathbf{t}))| = |r \cos^2(\theta) + r \sin^2(\theta)| = r$$

y por el teorema 5.2.14 tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} e^{-a|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} e^{-a|\phi(\mathbf{t})|^2} |\det(\phi'(\mathbf{t}))| d\mathbf{t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2n}} e^{-ar^2} r dr d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{e^{-a2n^2}}{2a} + \frac{1}{2a} \right) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2ae^{a2n^2}} \right) 2\pi \\ &= \frac{2\pi}{2a} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

□

Nota 6.1.8. Como lo explica Zorich (2004), note que el mapeo ϕ en la prueba del lema anterior no es un difeomorfismo (ejemplo pp. 146-147). En efecto, la función no es biyectiva. Sin embargo, esto no es un problema ya que los conjuntos de puntos en E_n y H_n para los cuales ϕ no es biyectiva tienen medida de Lebesgue igual a cero. En efecto, Zorich (2004) explica que la fórmula de cambio de variables (teorema 5.2.14) sigue siendo aplicable cuando es posible encontrar una restricción adecuada del dominio y del contradominio (donde en cada caso la diferencia entre el conjunto original y la restricción debe tener medida cero de Lebesgue) tal que ϕ sea un difeomorfismo, y tal que la cantidad $|\det(\phi')|$ sea acotada y definida (nota c y teorema 2 pp. 145-146).

Para terminar esta sección, demostramos que toda función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ resulta ser uniformemente continua sobre \mathbb{R} .

Lema 6.1.9. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces f es uniformemente continua sobre \mathbb{R} .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 140)

Demostración. Primero, nótese que como $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ entonces f es continua en cada punto de \mathbb{R} y $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$. En consecuencia, $|f(x)| \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Dicho de otra manera, dado $\epsilon > 0$, arbitrario, existe un número $K(\epsilon) > 0$ tal que, si $|x| \geq K \Rightarrow |f(x)| < \epsilon/4$. Con el número K ahora fijo, divídase a \mathbb{R} en dos conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq K\} = [-K, K]$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| > K\}$$

y nótese que la continuidad de f sobre \mathbb{R} implica que es uniformemente continua sobre el compacto A .

Ahora bien, para probar que f es uniformemente continua sobre \mathbb{R} , sea $\epsilon > 0$ un número arbitrario y suponga que x y y son dos puntos cualesquiera sobre \mathbb{R} . Entonces, hay tres posibilidades distintas:

1. Si $x, y \in A$ entonces la continuidad uniforme de f sobre A garantiza la existencia de $\eta(\epsilon) > 0$ tal que, si $|x - y| < \eta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$.
2. Si $x, y \in B \Rightarrow |x| > K$ y $|y| > K \Rightarrow |f(x)| < \epsilon/4$ y $|f(y)| < \epsilon/4$ y por ende:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x)| + |f(y)| \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/4 \\ &= \epsilon/2 \end{aligned}$$

(Nótese que no es necesaria ninguna restricción sobre la distancia $|x - y|$ para que la desigualdad anterior se cumpla)

3. Finalmente, si $x \in A$ y $y \in B \Rightarrow$ al hacer $|x - y| < \eta$ (nótese que este es el mismo η que en (1)), el hecho de que $|x - K| < |x - y|$ implica que $|x - K| < \eta$. Por ende, $|f(x) - f(K)| < \epsilon/2$ y como $K \geq K$ y $y \in B \iff |y| > K$ tenemos que $|f(K)| < \epsilon/4$ y $|f(y)| < \epsilon/4$ al igual que en (2).

Juntos, los tres casos anteriores implican que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(K)| + |f(K)| + |f(y)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/4 + \epsilon/4 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

cuando $|x - y| < \eta$. □

6.2. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

A continuación, definimos la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dado que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un subespacio de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, veremos, por medio de los lemas 6.2.3 a 6.2.9, que además de heredar muchas de las propiedades de las integrales impropias de una función con descenso moderado, la transformada intercambia las operaciones de diferenciación e integración excepto para factores de $2\pi i$ (corolario 6.2.12), lo cual implica que la transformada de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ también pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (teorema 6.2.14).

Definición 6.2.1 (Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, la transformada de Fourier de f es dada por el mapeo $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136)

Nota 6.2.2. Para que la notación sea más clara, también utilizamos $\hat{f}(\xi)$ en vez de $\mathcal{F}[f(x)](\xi)$. Además, note que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ entonces

$$|f(x)e^{-2\pi i x \xi}| = |f(x)|[\sin^2(-2\pi x \xi) + \cos^2(-2\pi x \xi)]^{1/2} = |f(x)|$$

y por ende la convergencia de la integral en la definición 6.2.1 está asegurada, lo cual implica que \hat{f} es acotada sobre \mathbb{R} (Stein y Shakarchi, 2003, p. 134).

Lema 6.2.3. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces,

$$\mathcal{F}[f(x+h)](\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136)

Demostración. Sea $F(x) = f(x)e^{-2\pi ix\xi}$, y nótese que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x+h)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi ix\xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi i(x+h-h)\xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi i(x+h)\xi+2\pi ih\xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x+h) \cdot e^{2\pi ih\xi} dx \\
 &= e^{2\pi ih\xi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+h) dx
 \end{aligned}$$

Ahora bien, como $F \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces sabemos por el lema 5.4.9 que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x+h) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x+h)](\xi) &= e^{2\pi ih\xi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+h) dx \\
 &= e^{2\pi ih\xi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \\
 &= e^{2\pi ih\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi} dx \\
 &= e^{2\pi ih\xi} \hat{f}(\xi)
 \end{aligned}$$

□

Lema 6.2.4. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-2\pi ixh}](\xi) = \hat{f}(\xi+h), \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136)

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(x)e^{-2\pi ixh}](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)e^{-2\pi ixh}) e^{-2\pi ix\xi} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix(\xi+h)} dx \\
 &= \mathcal{F}[f(x)](\xi+h) \\
 &= \hat{f}(\xi+h)
 \end{aligned}$$

□

Lema 6.2.5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) = \frac{1}{\delta} \hat{f}(\xi/\delta), \quad \forall \delta > 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136)

Demostración. Sea $F(x) = f(x)e^{-2\pi i x \xi/\delta}$ donde $\delta > 0$. Entonces, por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \frac{\delta}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-2\pi i x (\delta/\delta) \xi} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-2\pi i (x\delta) \xi/\delta} dx \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $F(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces por el lema 5.4.10 sabemos que

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx, \quad \forall \delta > 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(\delta x)](\xi) &= \frac{1}{\delta} \left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi/\delta} dx \\ &= \frac{1}{\delta} \hat{f}(\xi/\delta), \quad \forall \delta > 0 \end{aligned}$$

□

Lema 6.2.6. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136)

Demostración. Por definición

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \tag{6.2}$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sabemos que es infinitamente diferenciable, y como el integrando en (6.2) pertenece a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, sabemos que la integral impropia converge. Entonces, podemos integrar por partes para obtener:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f'(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(x)e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-t}^t + 2\pi i x \xi \int_{-t}^t f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(x)e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-t}^t \right\} + 2\pi i x \xi \mathcal{F}[f(x)](\xi)\end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(x)e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-t}^t \right\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(t)e^{-2\pi i t \xi} - f(-t)e^{2\pi i t \xi} \right\} = 0$$

En efecto, como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, sabemos que existe una constante real $A > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Además, si $\epsilon > 0$ es arbitrario, tenemos $\delta(\epsilon) = \sqrt{\frac{2A}{\epsilon}} > 0$ tal que, si $t > \delta$ entonces

$$\begin{aligned}|f(t)e^{-2\pi i t \xi} - f(-t)e^{2\pi i t \xi}| &\leq |f(t)e^{-2\pi i t \xi}| + |f(-t)e^{2\pi i t \xi}| \\ &\leq |f(t)| \cdot 1 + |f(-t)| \cdot 1 \\ &\leq \frac{A}{1+t^2} + \frac{A}{1+t^2} \\ &< \frac{2A}{t^2} \\ &< \frac{2A}{(\sqrt{(2A)/\epsilon})^2} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ f(x)e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-t}^t \right\} + 2\pi i x \xi \mathcal{F}[f(x)](\xi) = 2\pi i x \xi \hat{f}(\xi)$$

□

Nota 6.2.7. El siguiente lema es una propiedad que será de utilidad en la prueba del lema 6.2.9

Lema 6.2.8. Para todo número real $\theta \neq 0$, tenemos:

$$\left| \frac{e^{-i\theta} - 1}{\theta} + i \right| \leq 2$$

(Pereyra y Ward, 2012, p. 172)

Demostración. Primero, nótese que $\forall \theta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_0^\theta ie^{it} dt = e^{it} \Big|_0^\theta = e^{i\theta} - 1 \quad (\text{Julien, 2013})$$

Luego, suponga que $\theta = \alpha^2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $\theta \geq 0$. Entonces,

$$|e^{i\theta} - 1| = \left| \int_0^\theta ie^{it} dt \right| \leq \int_0^\theta |ie^{it}| dt = \int_0^\theta 1 dt = \theta$$

De manera similar, si ahora hacemos $\theta = -\alpha^2$, obtenemos $\theta \leq 0$, y en consecuencia

$$|e^{i\theta} - 1| = |e^{-i\alpha^2} - 1| = \overline{|e^{i\alpha^2} - 1|} = |e^{i\alpha^2} - 1| \leq \alpha^2 = -\theta$$

Juntas, estas observaciones implican que

$$|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta| \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, cuando $\theta \in \mathbb{R}^*$, podemos escribir

$$\left| \frac{e^{-i\theta} - 1}{\theta} + i \right| \leq \frac{|e^{-i\theta} - 1|}{|\theta|} + 1 \leq \frac{|\theta|}{|\theta|} + 1 = 2$$

□

Lema 6.2.9. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi) = \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 136; Pereyra y Ward, 2012, pp. 169 y 171-172)

Demostración. Debemos probar que $\hat{f}(\xi)$ es diferenciable sobre \mathbb{R} y que su derivada es dada por:

$$\mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi)$$

Es decir que si $\epsilon > 0$ es arbitrario, y $\xi_0 \in \mathbb{R}$ es dado, debemos encontrar un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, si $\xi \in \mathbb{R}$ satisface $0 < |\xi - \xi_0| < \delta(\epsilon)$, entonces

$$\left| \frac{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi_0) \right| < \epsilon$$

Con esto en mente, nótese que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi_0) \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi_0} dx + \int_{\mathbb{R}} 2\pi i x f(x) e^{-2\pi i x \xi_0} dx \right| \quad (6.3) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$, entonces por el lema 6.1.4 sabemos que los integrandos

en (6.3) están a su vez en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y por ende todas las integrales impropias en (6.3) convergen. Además, el corolario 5.4.7 implica que existe un numero real $K(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_{|x|>K} |x||f(x)|dx < \frac{\epsilon}{8\pi}$$

Entonces, fijando a K , podemos separar las integrales de la expresión (6.3) en 2 partes cada una, correspondiendo respectivamente a los valores de x tales que $|x| > K$ y $|x| \leq K$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)e^{-2\pi ix\xi}}_{E_1} dx - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)e^{-2\pi ix\xi_0}}_{E_2} dx + \int_{\mathbb{R}} \underbrace{2\pi ix f(x)e^{-2\pi ix\xi_0}}_{E_3} dx \right| = \\ & = \left| \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{|x|\leq K} E_1 dx + \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{|x|>K} E_1 dx - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{|x|\leq K} E_2 dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{|x|>K} E_2 dx + \int_{|x|\leq K} E_3 dx + \int_{|x|>K} E_3 dx \right| = \\ & = \left| \int_{|x|\leq K} f(x) \left[\frac{e^{-2\pi ix\xi} - e^{-2\pi ix\xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi ix e^{-2\pi ix\xi_0}) \right] dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{|x|>K} 2\pi x f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} \left[\frac{e^{-2\pi ix(\xi-\xi_0)} - 1}{2\pi x(\xi - \xi_0)} + i \right] dx \right| \quad (6.4) \end{aligned}$$

Lo único que falta es encontrar una cota para la expresión (6.4), lo cual no es muy complicado tras las siguientes observaciones:

1. La identidad del lema 6.2.8 puede aplicarse sobre el término entre corchetes de la segunda integral de la expresión (6.4).
2. La diferenciabilidad sobre \mathbb{R} de la función $g(\xi) = e^\xi$, y por ende el hecho de que

$$\frac{d}{d\xi}(e^{-2\pi ix\xi}) = -2\pi ix e^{-2\pi ix\xi},$$

inmediatamente implica que $\forall \epsilon \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que, si $0 < |\xi - \xi_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{e^{-2\pi ix\xi} - e^{-2\pi ix\xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi ix e^{-2\pi ix\xi_0}) \right| < \frac{\epsilon}{4AK}$$

(donde $A > 0 \ni |f(x)| \leq A/(1+x^2)$ por definición de descenso moderado).

Por ende,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi_0) \right| = \\
& = \left| \int_{|x| \leq K} f(x) \left[\frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x \xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi i x e^{-2\pi i x \xi_0}) \right] dx + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \int_{|x| > K} 2\pi x f(x) e^{-2\pi i x \xi_0} \left[\frac{e^{-2\pi i x (\xi - \xi_0)} - 1}{2\pi x (\xi - \xi_0)} + i \right] dx \right| \\
& \leq \int_{|x| \leq K} |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x \xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi i x e^{-2\pi i x \xi_0}) \right| dx + \\
& \qquad \qquad \qquad + \int_{|x| > K} (2\pi) |x f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x (\xi - \xi_0)} - 1}{2\pi x (\xi - \xi_0)} + i \right| dx \\
& < \int_{|x| \leq K} \frac{A}{1+x^2} \frac{\epsilon}{4AK} dx + 4\pi \int_{|x| > K} |x f(x)| dx \\
& \leq \frac{\epsilon}{4AK} \int_{|x| \leq K} A dx + 4\pi \frac{\epsilon}{8\pi} \\
& = \frac{\epsilon A}{4AK} 2K + 4\pi \frac{\epsilon}{8\pi} \\
& = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
& = \epsilon
\end{aligned}$$

Como $\xi_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ son arbitrarios, hemos encontrado un número $\delta(\epsilon) > 0$ tal que, si $0 < |\xi - \xi_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi_0) \right| < \epsilon$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[-2\pi i x f(x)](\xi)$$

□

Corolario 6.2.10. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces para todo entero $l \geq 0$ tenemos

$$\mathcal{F}[(-2\pi i x)^l f(x)](\xi) = \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)]$$

(Pereyra y Ward, 2012, p. 172)

Demostración. Procedemos por inducción sobre l . Primero, nótese que los casos $l = 0$ y $l = 1$ corresponden respectivamente a la definición de la transformada de Fourier y al lema 6.2.9, lo cual completa el caso base.

Para el paso inductivo, suponemos que

$$\mathcal{F}[(-2\pi ix)^l f(x)](\xi) = \frac{d^l}{d\xi^l}[\hat{f}(\xi)]$$

e imitamos la prueba del lema 6.2.9 para mostrar que $\frac{d^l}{d\xi^l}[\hat{f}(\xi)]$ es diferenciable y que

$$\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}[\hat{f}(\xi)] = \mathcal{F}[(-2\pi ix)^{l+1} f(x)](\xi).$$

Entonces, una vez más, nótese que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi) - \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[(-2\pi ix)^{l+1} f(x)](\xi_0) \right| = \\ & = \left| \frac{\mathcal{F}[(-2\pi ix)^l f(x)](\xi) - \mathcal{F}[(-2\pi ix)^l f(x)](\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[(-2\pi ix)(-2\pi ix)^l f(x)](\xi_0) \right| \\ & = \left| \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi} dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} dx - \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)(-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} dx \right| \quad (6.5) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo la multiplicación por polinomios, el corolario 5.4.7 garantiza la existencia de $K > 0$ tal que

$$\int_{|x|>K} |x|^{l+1} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{4(2\pi)^{l+1}}$$

Entonces, al igual que en la prueba anterior, separamos las integrales en la expresión (6.5) en dos partes, correspondientes a $|x| \leq K$ y $|x| > K$, respectivamente y obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi} dx \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\xi - \xi_0} \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} dx - \int_{\mathbb{R}} (-2\pi ix)(-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} dx \right| = \\ & = \left| \int_{|x|\leq K} (-2\pi ix)^l f(x) \left[\frac{e^{-2\pi ix\xi} - e^{-2\pi ix\xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi ix)e^{-2\pi ix\xi_0} \right] dx + \right. \\ & \quad \left. + \int_{|x|>K} (2\pi x)(-2\pi ix)^l f(x) e^{-2\pi ix\xi_0} \left[\frac{e^{-2\pi ix(\xi-\xi_0)} - 1}{2\pi x(\xi - \xi_0)} + i \right] dx \right| \end{aligned}$$

Donde la diferenciabilidad de $g(\xi) = e^\xi$ sobre \mathbb{R} garantiza que $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x \xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi i x e^{-2\pi i x \xi_0}) \right| < \frac{\epsilon}{4AK(2\pi)^l}$$

cuando $|\xi - \xi_0| < \delta(\epsilon)$, y el lema 6.2.8 establece que

$$\left| \frac{e^{-2\pi i x(\xi - \xi_0)} - 1}{2\pi x(\xi - \xi_0)} + i \right| \leq 2$$

Por ende, $\forall \epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < |\xi - \xi_0| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi) - \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} - \mathcal{F}[(-2\pi i x)^{l+1} f(x)](\xi_0) \right| = \\ & = \left| \int_{|x| \leq K} (-2\pi i x)^l f(x) \left[\frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x \xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi i x e^{-2\pi i x \xi_0}) \right] dx + \right. \\ & \quad \left. + \int_{|x| > K} (2\pi x)(-2\pi i x)^l f(x) e^{-2\pi i x \xi_0} \left[\frac{e^{-2\pi i x(\xi - \xi_0)} - 1}{2\pi x(\xi - \xi_0)} + i \right] dx \right| \\ & \leq \int_{|x| \leq K} (2\pi)^l |x|^l |f(x)| \left| \frac{e^{-2\pi i x \xi} - e^{-2\pi i x \xi_0}}{\xi - \xi_0} - (-2\pi i x e^{-2\pi i x \xi_0}) \right| dx + \\ & \quad + \int_{|x| > K} (2\pi)^{l+1} |x|^{l+1} |f(x)| \left| e^{-2\pi i x \xi_0} \frac{e^{-2\pi i x(\xi - \xi_0)} - 1}{2\pi x(\xi - \xi_0)} + i \right| dx \\ & < (2\pi)^l \int_{|x| \leq K} A \frac{\epsilon}{4AK(2\pi)^l} dx + (2\pi)^{l+1} \cdot 2 \cdot \int_{|x| \geq K} |x|^{l+1} |f(x)| dx \\ & = (2\pi)^l \frac{A\epsilon}{4AK(2\pi)^l} \cdot 2K + (2\pi)^{l+1} \cdot 2 \cdot \frac{\epsilon}{4(2\pi)^{l+1}} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)]$ es diferenciable y

$$\mathcal{F} \left[(-2\pi i x)^l f(x) \right] (\xi) = \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)], \quad \forall l \geq 0$$

□

Nota 6.2.11. El corolario anterior también establece que \hat{f} es infinitamente diferenciable.

Corolario 6.2.12. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces,

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^k}{dx^k} ((-2\pi i x)^l f(x)) \right] (\xi) = (2\pi i)^k \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)], \quad \forall k, l \geq 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 137)

Demostración. Primero, nótese que tanto $(-2\pi ix)^l f(x)$ como $\hat{f}(\xi)$ son infinitamente diferenciables. Luego, tras observar que el caso $k = 0$, $l \geq 0$ fue resuelto por el corolario 6.2.10, procedemos por inducción sobre k . Entonces, si $k = 1$, el lema 6.2.6 y el corolario 6.2.10 implican que

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dx}((-2\pi ix)^l f(x)) \right] (\xi) = 2\pi i \xi \mathcal{F} \left[(-2\pi ix)^l f(x) \right] (\xi) = 2\pi i \xi \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi), \quad \forall l \geq 0$$

Para el paso inductivo, asuma que

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^k}{dx^k}(-2\pi ix)^l f(x) \right] (\xi) = (2\pi i)^k \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi)$$

Luego, nótese que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}((-2\pi ix)^l f(x)) \right] (\xi) &= \mathcal{F} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{dx^k}(-2\pi ix)^l f(x) \right) \right] (\xi) \\ &= (2\pi i \xi) \mathcal{F} \left[\frac{d^k}{dx^k}(-2\pi ix)^l f(x) \right] (\xi) \\ &= (2\pi i \xi)(2\pi i)^k \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi) \\ &= (2\pi i)^{k+1} \xi^{k+1} \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado otra vez el lema 6.2.6 y el corolario 6.2.10. Por lo tanto,

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^k}{dx^k}((-2\pi ix)^l f(x)) \right] (\xi) = (2\pi i)^k \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)], \quad \forall k, l \geq 0$$

□

Nota 6.2.13. Note que además de generalizar el corolario 6.2.10, el corolario anterior también sintetiza los lemas 6.2.6 y 6.2.9 en una misma propiedad. Por esta razón, resulta ser una herramienta clave en la prueba del siguiente teorema.

Teorema 6.2.14. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Stein y Shakarchi, 2003, p. 137)

Demostración. Primero, nótese que \hat{f} es infinitamente diferenciable por el corolario 6.2.10 (nota 6.2.11). Luego, por el corolario 6.2.12, sabemos que

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^k}{dx^k}((-2\pi ix)^l f(x)) \right] (\xi) = (2\pi i)^k \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)], \quad \forall k, l \geq 0,$$

lo cual puede reescribirse como

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{(2\pi i)^k} \cdot \frac{d^k}{dx^k}((-2\pi ix)^l f(x)) \right] (\xi) = \xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)], \quad \forall k, l \geq 0.$$

Ahora bien, puesto que

$$G(x) = \left(\frac{1}{(2\pi i)^k} \cdot \frac{d^k}{dx^k}((-2\pi ix)^l f(x)) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

entonces la nota 6.2.2 implica que la función

$$\xi^k \frac{d^l}{d\xi^l} [\hat{f}(\xi)] = \mathcal{F}[G(x)](\xi)$$

es acotada sobre \mathbb{R} , y esto a su vez implica que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\xi|^k \left| \frac{d^l}{d\xi^l} \hat{f}(\xi) \right| < \infty \quad \forall k, l \geq 0$$

Por lo tanto, las dos condiciones necesarias para que \hat{f} pertenezca a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ han sido satisfechas. \square

Ahora que sabemos que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema 5.4.13 (Fubini) para obtener la siguiente propiedad:

Lema 6.2.15. *Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) dy$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 140)

Demostración. Primero, observe que por el teorema 6.2.14, ahora sabemos que $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Entonces, el hecho de que el producto de funciones con descenso moderado también pertenezca a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ (nota 5.4.3), junto con el teorema 5.4.6, implican la convergencia de ambas integrales en el enunciado. Con esto, podemos aplicar el teorema de Fubini para funciones con descenso moderado (Teorema 5.4.13), y obtener:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i y x} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y) e^{-2\pi i y x} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(y) e^{-2\pi i y x} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \hat{f}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) dy \end{aligned}$$

\square

6.3. Aplicación: Convoluciones y familias de buenos kernels

El objetivo de esta sección es la obtención de la transformada inversa de Fourier. Para lograrlo, combinamos el hecho de que la gaussiana e^{-ax^2} es igual a su propia transformada de Fourier con las propiedades de las *familias de buenos kernels* y de la convolución de funciones de Schwartz.

Lema 6.3.1. Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$ entonces $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ (Stein y Shakarchi, 2003, p. 138)

Demostración. Primero, nótese que $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es un caso especial del lema 6.1.7. Es decir que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además, los lemas 6.2.6 y 6.2.9 implican que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) &= \mathcal{F}[(-2\pi ix)e^{-\pi x^2}](\xi) \\ &= \mathcal{F}[i(-2\pi x)e^{-\pi x^2}](\xi) \\ &= i\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}e^{-\pi x^2}\right](\xi) \\ &= i(2\pi i\xi)\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \\ &= -2\pi\xi\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \end{aligned}$$

Luego, nótese que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot e^{\pi\xi^2} \right] &= \frac{d}{d\xi} \left[\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \right] \cdot e^{\pi\xi^2} + \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot (2\pi\xi)e^{\pi\xi^2} \\ &= (-2\pi\xi)\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot e^{\pi\xi^2} + (2\pi\xi)\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot e^{\pi\xi^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot e^{\pi\xi^2} = C, \quad \text{donde } C \in \mathbb{R} \quad (6.6)$$

Ahora bien, $C = 1$ puesto que, por el lema 6.1.7, sabemos que al evaluar (6.6) en $\xi = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](0) \cdot e^{\pi 0^2} &= \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi ix(0)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por ende,

$$\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) \cdot e^{\pi\xi^2} = 1 \iff \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi) = e^{-\pi\xi^2}$$

□

Corolario 6.3.2. Si $\delta > 0$ y $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$ entonces

$$\mathcal{F}[K_\delta(x)](\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 139)

Demostración. Por los lemas 6.2.5 y 6.3.1 tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[K_\delta(x)](\xi) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}\right](\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \mathcal{F}\left[e^{-\pi(x/\sqrt{\delta})^2}\right](\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{-1} \mathcal{F}\left[e^{-\pi x^2}\right]\left(\xi\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{-1}\right)\right] \\
&= e^{-\pi(\sqrt{\delta}\xi)^2} \\
&= e^{-\pi\delta\xi^2}
\end{aligned}$$

□

Definición 6.3.3 (Familia de buenos Kernels). Sea $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ un conjunto de funciones sobre \mathbb{R} . Decimos que $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ es una familia de *buenos kernels* si satisface las siguientes tres condiciones.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx < \infty.$
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)| dx = 0, \quad \forall \eta > 0.$

(Stein y Shakarchi, 2003, pp. 48 y 139; Pereyra y Ward, 2012, p. 177)

Lema 6.3.4. Si $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$ donde $\delta > 0$ entonces $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ es una familia de buenos kernels.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 139)

Demostración. Verificamos que $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ satisfaga la definición 6.3.3:

1. Nótese que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta} \cdot e^{-2\pi i x(0)} dx \\
&= \mathcal{F}[K_\delta(x)](0) \\
&= e^{-\pi\delta(0)^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Como $\pi/\delta > 0$ entonces $f(x) = e^{-\pi x^2/\delta}$ es de Schwartz por el lema 6.1.7. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |K_{\delta}(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta} \right| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\pi x^2/\delta}| dx < \infty\end{aligned}$$

3. Sea $u = x/\sqrt{\delta}$ y $du = \frac{1}{\sqrt{\delta}} dx$. Entonces, ya que $K_{\delta}(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} |K_{\delta}(x)| dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| > \eta} \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi(x/\delta)^2} \right| dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|u| > \eta/\sqrt{\delta}} e^{-\pi u^2} du = 0\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $e^{-\pi u^2}$ es de Schwartz, junto con el corolario 5.4.7.

□

Nota 6.3.5. Nótese que el argumento utilizado en la segunda parte de la prueba anterior también implica que $\frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}$ es una función de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición 6.3.6 (Convolución). Sea $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces la función $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

es la *convolución* de f y g .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 139)

Nota 6.3.7. Nótese que la convergencia de la integral impropia en la definición anterior está asegurada gracias al hecho de que tanto f como g están en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lema 6.3.8. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$f * g = g * f$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Sea x un número dado (fijo) en \mathbb{R} . Entonces, con $u = x - t$ y $du = -dt$ obtenemos

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt \\
&= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{x+h}^{x-h} -f(u)g(x-u)du \\
&= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{x-h}^{x+h} f(u)g(x-u)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x-u)f(u)du \\
&= (g * f)(x)
\end{aligned}$$

Donde el hecho de que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ garantiza la continuidad del integrando $\forall x \in \mathbb{R}$ al igual que la convergencia de la integral. \square

Lema 6.3.9. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $K_{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$ con $\delta > 0$, entonces

$$(f * K_{\delta})(x) \rightarrow f(x) \quad \text{cuando } \delta \rightarrow 0$$

independientemente de los valores de x .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 140)

Demostración. Por el lema 6.1.9 sabemos que $\forall \epsilon > 0$ existe $\eta(\epsilon) > 0$ tal que, si $x, y \in \mathbb{R}$ y $|x - y| < \eta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Por ende, si hacemos la sustitución $y = x - t$ donde $t \in \mathbb{R}$, obtenemos que $|f(x - t) - f(x)| < \epsilon/2$ cuando $|t| = |x - (x - t)| < \eta$. Además, recordemos que el conjunto $\{K_{\delta}\}_{\delta > 0}$ resulta ser una familia de buenos kernels en virtud del lema 6.3.4. De modo que la primera propiedad de las familias de buenos kernels (def. 6.3.3) implica que $\int_{\mathbb{R}} K_{\delta}(x)dx = 1$. Ahora bien, como

$$|K_{\delta}(x)| = \left| \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta} \right| = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta} = K_{\delta}(x) \quad \forall \delta > 0$$

entonces, en este caso, también tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} |K_{\delta}(x)| dx = 1$$

Si a esto agregamos el hecho de que $K_{\delta}(x)$ es infinitamente diferenciable por ser de Schwartz (véase lemas 6.1.7 y 6.1.3), entonces también es cierto que

$$\int_{|t| \leq \eta} |K_{\delta}(t)| dt < 1 \quad \forall \delta > 0$$

y, en consecuencia, obtenemos:

$$\int_{|t| < \eta} |K_{\delta}(t)| |f(x-t) - f(x)| dt < \epsilon/2 \int_{|t| < \eta} |K_{\delta}(t)| dt < \epsilon/2 \quad \forall \delta > 0.$$

Por otro lado, la tercera propiedad de las familias de buenos kernels implica que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta'(\epsilon) > 0$ tal que, si $|\delta| < \delta'$ entonces

$$\int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)| dt < \epsilon/(4A)$$

donde $A > 0$ corresponde a la cota superior $A \geq A/(1+x^2) \geq |f(x)|$ que estipula el descenso moderado de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Con esto, podemos combinar las dos observaciones anteriores para obtener

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)K_\delta(t)dt - \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)f(x)dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)K_\delta(t) - K_\delta(t)f(x)dt \right| \\ &= \left| \int_{|t|\leq\eta} K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]dt + \int_{|t|>\eta} K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]dt \right| \\ &\leq \int_{|t|\leq\eta} |K_\delta(t)||f(x-t) - f(x)|dt + \\ &\quad + \int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)||f(x-t)|dt + \int_{|t|>\eta} |K_\delta(t)||f(x)|dt \\ &< \epsilon/2 + \frac{\epsilon}{4A} \cdot A + \frac{\epsilon}{4A} \cdot A \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

siempre y cuando $|\delta| < \delta'$ y $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$(f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{cuando} \quad \delta \rightarrow 0$$

independientemente de los valores que tome x . □

Teorema 6.3.10 (Transformada inversa de Fourier). *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 141)

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$ donde $\delta > 0$ y considere los siguientes hechos:

1. $\mathcal{F}[G_\delta(x)](\xi) = K_\delta(\xi)$

En efecto, por el lema 6.2.5 tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[G_\delta(x)](\xi) &= \mathcal{F}[e^{-\pi\delta x^2}](\xi) \\
&= \mathcal{F}[e^{-\pi(\sqrt{\delta}x)^2}](\xi) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathcal{F}[e^{-\pi x^2}](\xi/\sqrt{\delta}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi\xi^2/\delta} \\
&= K_\delta(\xi)
\end{aligned}$$

2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(x)dx \rightarrow f(0)$ cuando $\delta \rightarrow 0$

Como $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta} \Rightarrow K_\delta(-x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi(-x)^2/\delta} = K_\delta(x) \Rightarrow K_\delta(x)$ es simétrica. Además, como ya se demostró que la convolución es conmutativa (lema 6.3.8) podemos utilizar el lema 6.3.9 de la siguiente manera:

$$(K_\delta * f)(x) = (f * K_\delta)(x) \rightarrow f(x) \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

por ende si $x = 0$, tenemos

$$(K_\delta * f)(0) \rightarrow f(0) \text{ cuando } \delta \rightarrow 0$$

lo cual implica que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)K_\delta(t)dt = \int_{\mathbb{R}} K_\delta(t)f(t)dt = (K_\delta * f)(0) \rightarrow f(0) \text{ cuando } \delta \rightarrow 0.$$

3. $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)G_\delta(\xi)d\xi \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)d\xi$ cuando $\delta \rightarrow 0$

Como $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{A}{1+\xi^2} \leq A$, $A > 0$. Además, por el corolario 5.4.7, sabemos que $\forall \epsilon > 0 \exists K(\epsilon) > 0$ tal que

$$\int_{|\xi| \geq K} |\hat{f}(\xi)|d\xi < \epsilon/4.$$

Luego, con K ahora fijo por la observación anterior, vemos que $\forall \epsilon > 0$ y $\forall \xi \in [-K, K]$ $\exists \delta'(\epsilon) > 0 \ni$ si $|\delta| < \delta' \Rightarrow |e^{-\pi\delta\xi^2} - 1| < \frac{\epsilon}{4AK}$.

Por ende,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) G_{\delta}(\xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_{|\xi| \leq K} \hat{f}(\xi) [e^{-\pi\delta\xi^2} - 1] d\xi + \right. \\
&\quad \left. + \int_{|\xi| > K} \hat{f}(\xi) e^{-\pi\delta\xi^2} d\xi + \int_{|\xi| > K} \hat{f}(\xi) d\xi \right| \\
&\leq \int_{|\xi| \leq K} |\hat{f}(\xi)| |e^{-\pi\delta\xi^2} - 1| d\xi + 2 \int_{|\xi| > K} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&< \frac{\epsilon}{4AK} \int_{|\xi| \leq K} A d\xi + 2\epsilon/4 \\
&= \frac{\epsilon}{4AK} \cdot 2AK + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon/2 + \epsilon/2 \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Entonces, por los hechos (1) (2) y (3), el lema 6.2.15, y la unicidad del límite, obtenemos

$$f(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) K_{\delta}(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) G_{\delta}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi$$

lo cual, tras la sustitución $F(y) = f(x + y)$ también implica que

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f(y + x)](\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

donde hemos utilizado el lema 6.2.3 con $h = x$. □

Corolario 6.3.11. *La transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en sí mismo.*

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Sea $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y considere el mapeo $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{F}^{-1}[h](y) = \int_{\mathbb{R}} h(\xi) e^{2\pi i \xi y} d\xi.$$

Entonces, por el teorema anterior tenemos que

$$(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})[h](x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[h](\xi)](x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{h}](x) = h(x)$$

Luego, nótese que

$$\mathcal{F}[h](\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{2\pi i x (-\xi)} dx = \mathcal{F}^{-1}[h](-\xi)$$

De modo que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1})[h](x) &= \mathcal{F} [\mathcal{F}^{-1}[h](y)] (x) \\
&= \mathcal{F} [\mathcal{F}[h](-y)] (x) \\
&= \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[h](-y)] (-x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(-y) e^{2\pi i y(-x)} dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(u) e^{2\pi i u x} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(u) e^{2\pi i u x} du \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

Recapitulando, tenemos $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I$, es decir que \mathcal{F} es invertible y por ende biyectiva. □

6.4. La identidad de Plancherel

La norma Hermitiana de una función de Schwartz resulta ser invariante bajo la transformada de Fourier. Este resultado se conoce como la identidad de Plancherel, o de "Parseval-Plancherel", y es la última herramienta necesaria para estar en medida de demostrar el principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En esta sección, empezamos probando algunas propiedades adicionales de la convolución de funciones de Schwartz, para luego introducir el producto interno Hermitiano sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al igual que su norma asociada, y terminamos con la demostración de la identidad de Plancherel.

Lema 6.4.1. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\frac{d^l}{dx^l} [(f * g)(x)] = (f * \frac{d^l}{dx^l} g)(x) \quad \forall l \geq 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Primero, nótese que $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ puede reescribirse como

$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy$ tras la sustitución $y = x - t$. Con esto, procedemos por inducción.

En efecto, tras notar que el caso $l = 0$ es trivial, continuamos con el caso $l = 1$, y observamos que, como $f, g, g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $g(x-y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}$, podemos aplicar la regla de Leibniz sobre el intercambio entre integrales y derivadas para obtener:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(f * g)(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{d}{dx} g(x-y)dy \\
&= (f * \frac{d}{dx}g)(x)
\end{aligned}$$

Luego, suponga que

$$\frac{d^l}{dx^l}(f * g)(x) = (f * \frac{d^l}{dx^l}g)(x)$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^l}{dx^l}(f * g) \right) (x) = \frac{d}{dx} \left(f * \frac{d^l}{dx^l}g \right) (x) = \left(f * \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}g \right) (x)$$

lo cual concluye la prueba. □

Nota 6.4.2. Nótese que la propiedad anterior también muestra que $f * g$ es infinitamente diferenciable (esto resulta del hecho de que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Lema 6.4.3. Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ & $y \in \mathbb{R}$ es dado, entonces

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x-y)| \leq 2^k A_k (1 + |y|)^k \quad \forall k \geq 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Como $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces dado cualquier $y \in \mathbb{R}$, sabemos que $\exists C_k \in [0, \infty)$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x - y|^k |g(x - y)| = C_k \quad \forall k \geq 0$$

Además, si $|x| \leq 2|y|$ entonces dado $y \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x-y)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |2y|^k |g(x-y)| \\
&= 2^k |y|^k \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x-y)| \\
&= 2^k |y|^k C_0 \\
&\leq 2^k A_k (1 + |y|)^k \quad \text{donde } k \geq 0 \text{ y } A_k = |y|^k C_0
\end{aligned}$$

Luego, si $|x| \geq 2|y|$ entonces, como $|x| \leq |x - y| + |y|$, obtenemos

$$|x - y| + |y| \geq |x| \geq 2|y| \iff |x - y| \geq |x| - |y| \geq 2|y| - |y| \iff |x - y| \geq |y|$$

Entonces, $|x| \leq |x - y| + |y| \leq |x - y| + |x - y| = 2|x - y|$ puede utilizarse en una forma similar para acotar $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x - y)|$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x-y)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} 2^k |x - y|^k |g(x-y)| \\
&= 2^k C_k \\
&\leq 2^k A_k (1 + |y|)^k \quad \text{donde } k \geq 0 \text{ y } A_k = C_k
\end{aligned}$$

□

Lema 6.4.4. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Por el lema 6.4.3 sabemos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |g(x - y)| \leq 2^k A_k (1 + |y|)^k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ni k \geq 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |(f * g)(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |g(x - y)| dy \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| |x|^k |g(x - y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| 2^k A_k (1 + |y|)^k dy \\ &= 2^k A_k \int_{\mathbb{R}} |f(y)| (1 + |y|)^k dy < \infty \end{aligned} \quad (6.7)$$

Donde la cota sobre $\int_{\mathbb{R}} |f(y)| (1 + |y|)^k dy$ viene del hecho de que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ el cual es cerrado bajo la multiplicación por polinomios.

Finalmente, como g y todas sus derivadas están en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, podemos utilizar el hecho de que la desigualdad (6.7) es verdadera para cualquier función $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ junto con el lema 6.4.1 para obtener la siguiente cota:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| \frac{d^l}{dx^l} (f * g)(x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| (f * \frac{d^l}{dx^l} g)(x) \right| < \infty \quad \forall k, l \geq 0$$

Por lo tanto $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

Lema 6.4.5. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\mathcal{F}[(f * g)(x)](\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 142)

Demostración. Como $f, g, f * g, \hat{f}, \hat{g}$ están en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, podemos aplicar el teorema 5.4.13 y el lema 6.2.3 para obtener:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f * g)](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) e^{-2\pi i x \xi} dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) e^{-2\pi i x \xi} dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t) \int_{\mathbb{R}} f(x-t) e^{-2\pi i x \xi} dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t) \mathcal{F}[f(x + (-t))](\xi) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(t) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i (-t) \xi} dt \\
&= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i t \xi} dt \\
&= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

□

Concluimos esta sección con la identidad de Plancherel, la cual establece una relación de igualdad entre las normas hermitianas de las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y sus transformadas de Fourier.

Definición 6.4.6 (Producto interno hermitiano). Sea $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces el producto hermitiano de f y g sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 143)

Nota 6.4.7. La norma asociada al producto interno hermitiano, se obtiene de la manera usual, es decir:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} dx \right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Teorema 6.4.8 (Identidad de Plancherel). Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces

$$\|\hat{f}\| = \|f\|$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 143)

Demostración. Sea $g(x) = \overline{f(-x)}$ y $h(x) = (f * g)(x)$. Primero, nótese que esto inmediatamente implica que g, \hat{g}, h y \hat{h} también están en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Luego, tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)} e^{2\pi i x \xi} dx \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x) e^{2\pi i x \xi} dx} \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i u \xi} du} \\
 &= \hat{f}(\xi)
 \end{aligned}$$

Entonces, podemos utilizar los lemas 6.3.8 y 6.4.5 para obtener:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{f}\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[(f * g)(x)](\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(\xi) e^{2\pi i(0)\xi} d\xi \\
 &= h(0) \\
 &= (f * g)(0) \\
 &= (g * f)(0) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(0 - t) f(t) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} f(t) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \\
 &= \|f\|^2
 \end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. □

6.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Cerramos este capítulo con la demostración del principio de incertidumbre de Heisenberg sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y dos corolarios. Esta relación entre una función de Schwartz y su transformada de Fourier resulta de una aplicación directa de la identidad de Plancherel y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz sobre el producto interno hermitiano introducido anteriormente.

Teorema 6.5.1 (Principio de incertidumbre de Heisenberg). *Suponga que ψ es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ que satisface la condición de normalización*

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi|^2 dx = 1$$

Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 158)

Demostración. Nótese que:

1. Como $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo la multiplicación por polinomios, podemos aplicar el lema 6.1.5 sobre $\psi^2(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para obtener la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [t|\psi(t)|^2 - (-t|\psi(-t)|^2)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} t|\psi^2(t)| - \lim_{t \rightarrow \infty} [-t|\psi^2(-t)|] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t|\psi^2(t)| - \lim_{t \rightarrow -\infty} [t|\psi^2(t)|] \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Si hacemos $v = |x||\psi(x)|$ y $w = |\psi'(x)|$ entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos:

$$\begin{aligned} |\langle v, w \rangle| &\leq \langle v, v \rangle^{1/2} \langle w, w \rangle^{1/2} \\ \iff \int_{\mathbb{R}} (|x||\psi(x)|) (|\psi'(x)|) dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

3. Por la identidad de Plancherel tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx &= \|\psi'(x)\|^2 \\ &= \|\mathcal{F}[\psi'(x)](\xi)\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}[\psi'(x)](\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |2\pi i \xi \hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Juntas, estas observaciones y la condición de normalización implican que:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ (x|\psi(x)|^2) \Big|_{-t}^t - \int_{-t}^t x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx \right\} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \{ t|\psi(t)|^2 - (-t|\psi(-t)|^2) \} - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx \\
&= 0 - \int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} (\psi(x)\overline{\psi(x)}) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} x (\psi'(x)\overline{\psi(x)} + \psi(x)\overline{\psi'(x)}) dx
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
1 &= |1| \\
&= \left| - \int_{\mathbb{R}} x (\psi'(x)\overline{\psi(x)} + \psi(x)\overline{\psi'(x)}) dx \right| \\
&= \left| - \int_{\mathbb{R}} x \psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\psi(x)\overline{\psi'(x)} dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi'(x)| |\overline{\psi(x)}| + |x| |\psi(x)| |\overline{\psi'(x)}| dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\
&\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&= 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Lo cual, si tomamos el primer y el último termino de esta cadena de igualdades/desigualdades, equivale a escribir:

$$1 \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

donde ambos lados de la desigualdad pueden elevarse al cuadrado (ya que ambos son no-negativos) para obtener:

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)$$

□

Corolario 6.5.2. Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{16\pi^2}$$

si, y solo si, $\psi(x) = Ae^{-Bx^2}$ con $B > 0$ y $|A|^2 = \sqrt{\frac{2B}{\pi}}$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 158)

Demostración.

(\Rightarrow) Por hipótesis,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) = \frac{1}{16\pi^2}$$

Entonces,

$$2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |2\pi i \xi \hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = 1$$

lo cual, tras observar que $2\pi i \xi \hat{\psi}(\xi) = \mathcal{F}[\psi'(x)](\xi)$ y aplicar la identidad de Plancherel, como en la prueba del teorema anterior, implica que

$$2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1$$

Ahora bien, como se vio en la prueba del teorema anterior, $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ implica, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Pero entonces,

$$\begin{aligned} 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} &= 1 \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Y por ende,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx = \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

lo cual, por las condiciones bajo las cuales se cumple la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, significa que hay un número $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$|\psi'(x)| = \lambda|x\psi(x)|.$$

Para resolver esta ecuación diferencial, debemos considerar el caso $\psi'(x) = \lambda|x\psi(x)|$, el cual a su vez resulta en los casos

$$\psi'(x) = \lambda x\psi(x) \quad \& \quad \psi'(x) = -\lambda x\psi(x)$$

y por otro lado, debemos considerar el caso $-\psi'(x) = \lambda|x\psi(x)|$ el cual también resulta en los casos

$$\psi'(x) = \lambda x\psi(x) \quad \& \quad \psi'(x) = -\lambda x\psi(x)$$

Entonces, resolvemos ambas ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando los factores integrantes $\mu_1(x) = e^{-\lambda x^2/2}$ y $\mu_2(x) = e^{\lambda x^2/2}$, respectivamente, lo cual resulta en dos posibilidades para ψ :

$$\psi(x) = Ce^{\lambda x^2/2} \quad \text{o bien} \quad \psi(x) = Ce^{-\lambda x^2/2}$$

Ahora bien, por hipótesis sabemos que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces el lema 6.1.5 implica que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$, lo cual solo puede suceder si $\psi(x) = Ce^{-\lambda x^2/2}$ con $\lambda = 2B > 0$.

Finalmente, también sabemos por hipótesis que $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ lo cual, junto con el lema 6.1.7, implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} |Ce^{-2Bx^2/2}|^2 dx \\ &= |C| \int_{\mathbb{R}} |e^{-2Bx^2/2}|^2 dx \\ &= |C| \int_{\mathbb{R}} e^{-2Bx^2} dx \\ &= |C| \left(\frac{\pi}{2B}\right)^{1/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\psi(x) = |C|e^{-\lambda x^2/2}$ donde $\lambda = 2B > 0$, lo cual implica que $B > 0$ y $|C| = \sqrt{2B/\pi}$. □

Corolario 6.5.3. Si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ es tal que $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$ entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad \forall x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 158)

Demostración. Puesto que ya se demostró que la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en sí mismo, debe haber una función $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\hat{\phi} = \psi$. Ahora bien, nótese que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} |u - u_0|^k |\phi^{(l)}(u - u_0)| = \lim_{|u| \rightarrow \infty} |u|^k |\phi^{(l)}(u)| = 0 \quad \forall k, l \geq 0$$

Entonces, $\phi(u - u_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall u_0 \in \mathbb{R}$. Además, el lema 6.2.3 implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\phi(u - u_0)](v + v_0) &= \mathcal{F}[\phi(u + (-u_0))](v + v_0) \\ &= e^{-2\pi i u_0 v_0} \cdot e^{-2\pi i u_0 v} \cdot \hat{\phi}(v + v_0) \\ &= e^{-2\pi i u_0 v_0} \cdot e^{-2\pi i v u_0} \cdot \hat{\phi}(v + v_0) \end{aligned}$$

lo cual significa que la función $\zeta(v) = e^{-2\pi i u_0 v_0} \cdot e^{-2\pi i v u_0} \cdot \hat{\phi}(v + v_0)$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ por el teorema 6.2.14. Y como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es cerrado bajo el producto por escalares, también implica que $\gamma(v) = \frac{1}{e^{-2\pi i u_0 v_0}} \cdot \zeta(v) = e^{-2\pi i v u_0} \psi(v + v_0)$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \forall u_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

Con esto en mano, nótese que el lema 6.2.3 junto con la hipótesis implican que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x + x_0)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, el principio de incertidumbre de Heisenberg puede aplicarse sobre $\gamma(x) = e^{-2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ para obtener

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 \left| e^{-2\pi i x \xi_0} \psi(x + x_0) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left| \hat{\psi}(\xi + \xi_0) e^{2\pi i x_0(\xi + \xi_0)} \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

lo cual, tras aplicar las sustituciones $\alpha = x + x_0$ y $\beta = \xi + \xi_0$, implica que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (\alpha - x_0)^2 |\psi(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\beta - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\beta)|^2 d\beta \right)^{1/2} \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

□

El principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

El objetivo de este capítulo es la extensión del principio de incertidumbre de Heisenberg al espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Para lograrlo, es necesario extender los resultados del capítulo anterior a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Esto se consigue por medio de la estructura lógica propuesta por [Stein y Shakarchi \(2003, sec. 2, Cap. 6\)](#). En efecto, la teoría presentada a continuación es conocida. Sin embargo, la brevedad de presentaciones como la de [Stein y Shakarchi \(2003, pp.180-184\)](#) o la de [Zorich \(2004, pp.576-581\)](#), combinada a un grado de familiarización limitado con la teoría de las integrales impropias sobre \mathbb{R}^d , puede volverlas inaccesibles para la mayoría de estudiantes de licenciatura.

Por esta razón, en este capítulo retomamos la estructura del caso 1-dimensional —tal y como lo sugieren [Stein y Shakarchi \(2003\)](#)— y mostramos en detalle cómo utilizar la notación de multi-índice introducida en la sección 5.1; la definición de integrales impropias múltiples vía agotamientos de conjuntos admisibles (def. 5.3.6); el teorema de cambio de variables (teorema 5.2.14); el trabajo preliminar que se hizo en la sección 5.4 sobre las funciones con descenso moderado en \mathbb{R}^d ; y el teorema de Fubini (teorema 5.4.13), para extender la teoría de la transformada de Fourier al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

En consecuencia, el hecho de contar con una versión extendida a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la fórmula de inversión de Fourier, y de la identidad de Plancherel, permite, a su vez, extender el principio de incertidumbre de Heisenberg a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Esto representa un resultado no trivial, que demostramos en detalle, y que [Stein y Shakarchi \(2003, p. 209\)](#) dejan como un ejercicio para el lector.

7.1. El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Empezamos por definir el conjunto de funciones sobre \mathbb{R}^d con descenso rápido. Luego, agregamos la condición de que estas funciones sean infinitamente diferenciables sobre \mathbb{R}^d y que cualquiera de sus derivadas parciales también tenga descenso rápido para obtener el espacio de funciones de Schwartz en \mathbb{R}^d . De la misma manera que en el capítulo anterior, este resulta ser un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Finalmente, utilizamos dos caracterizaciones

alternas de las funciones con descenso rápido para demostrar que la gaussiana d -dimensional $g(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|^2}$ es de Schwartz y calculamos el valor de su integral sobre \mathbb{R}^d mediante el teorema 5.4.13.

Definición 7.1.1. Una función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tiene *descenso rápido* si, y solo si, es continua sobre \mathbb{R}^d y la función dada por $|\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})|$ es acotada para cualquier multi-índice α .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 178)

Nota 7.1.2. El lema 7.1.3 proporciona otra caracterización de las funciones con descenso rápido. Antes de enunciarlo y demostrarlo, recordamos que el teorema del binomio puede generalizarse para obtener el teorema *multinomial*, el cual estipula la siguiente igualdad

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_d)^k = \sum \binom{k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} \prod_{t=1}^d x_t^{\alpha_t} \quad (7.1)$$

donde la suma se realiza respecto a todos los enteros no-negativos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k$; $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{N}$ y

$$\binom{k}{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!}$$

Además, si utilizamos la notación de multi-índices (ver capítulo 5), podemos simplificar la ecuación (7.1) para obtener

$$(x_1 + \cdots + x_d)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \mathbf{x}^\alpha$$

Una discusión sobre el resultado de la nota 7.1.2 puede encontrarse en [Digital Library of Mathematical Functions](#) (s.f.)

Lema 7.1.3. La función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tiene descenso rápido si y solo si f es continua sobre \mathbb{R}^d y satisface la siguiente condición:

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| < \infty$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 178)

Demostración.

(\Rightarrow) Por hipótesis, sabemos que la función $|\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})|$ es acotada para cualquier multi-índice α .

Entonces, si $k \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} \right)^k |f(\mathbf{x})| \\
&= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)^k} |f(\mathbf{x})| \\
&= \left(\sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \mathbf{x}^{2\alpha} \right)^{1/2} |f(\mathbf{x})| \\
&\leq \left[\sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\binom{k}{\alpha}} |\mathbf{x}^\alpha| \right] |f(\mathbf{x})| \tag{7.2}
\end{aligned}$$

donde cada término de la sumatoria en (7.2) tendrá la forma $\sqrt{\binom{k}{\alpha}} |\mathbf{x}^\alpha| |f(\mathbf{x})|$ en la que $\sqrt{\binom{k}{\alpha}}$ es solo una constante que depende de α y k . Recapitulando, tenemos que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ y $\forall k = 0, 1, \dots$,

$$|\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| \leq \left[\sum_{|\alpha|=k} \sqrt{\binom{k}{\alpha}} |\mathbf{x}^\alpha| \right] |f(\mathbf{x})| < \infty$$

lo cual, por el axioma de completud, implica que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

(\Leftarrow) Para el converso, suponga que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Entonces, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ es un multi-índice tal que $|\alpha| = k$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})| &= |(x_1^{\alpha_1})(x_2^{\alpha_2}) \dots (x_d^{\alpha_d}) f(\mathbf{x})| \\
&= \left(x_1^{2\alpha_1} \right)^{1/2} \left(x_2^{2\alpha_2} \right)^{1/2} \dots \left(x_d^{2\alpha_d} \right)^{1/2} |f(\mathbf{x})| \\
&= (x_1^2)^{\alpha_1/2} \dots (x_d^2)^{\alpha_d/2} |f(\mathbf{x})| \\
&\leq (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\alpha_1/2} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\alpha_2/2} \dots (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\alpha_d/2} |f(\mathbf{x})| \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d)/2} |f(\mathbf{x})| \\
&= \left[(x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2} \right]^{|\alpha|} |f(\mathbf{x})| \\
&= |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $|\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})|$ es acotada para cualquier multi-índice α . □

Definición 7.1.4. Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ al conjunto formado por todas las funciones $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tales que:

1. f es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R}^d
2. f y todas sus derivadas tienen descenso rápido, es decir,

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left| \mathbf{x}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty$$

para cualesquiera multi-índices α y β .

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 180)

Nota 7.1.5. Por el lema 7.1.3, la condición (2) en la definición anterior equivale a decir que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty \quad \forall k = 0, 1, \dots \text{ y para cualquier multi-índice } \beta.$$

Lema 7.1.6. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un subconjunto de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces f es continua sobre \mathbb{R}^d y la función $|\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})|$ es acotada para cualquier multi-índice α . Ahora bien, por el lema 7.1.3 esto implica que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |f(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

y en particular, en los casos en que $k = 0$ y $k = d + 1$, respectivamente, esto significa que existen A' y A'' , no necesariamente iguales, tales que

$$|\mathbf{x}|^0 |f(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x})| \leq A' \quad \& \quad |\mathbf{x}|^{d+1} |f(\mathbf{x})| \leq A'' \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

Por ende,

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x})| + |\mathbf{x}|^{d+1} |f(\mathbf{x})| &\leq A' + A'' = A \\ \iff (1 + |\mathbf{x}|^{d+1}) |f(\mathbf{x})| &\leq A \\ \iff |f(\mathbf{x})| &\leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. □

Lema 7.1.7. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

Demostración.

1. Identidad aditiva:

Sea $f_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f_0(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Entonces, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tenemos:

$$(f_0 + f)(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) = 0 + f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + 0 = f(\mathbf{x}) + f_0(\mathbf{x}) = (f + f_0)(\mathbf{x})$$

Además, f_0 es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R}^d por ser una función constante y

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f_0(\mathbf{x}) \right| = 0 < \infty \quad \forall k = 0, 1, \dots \text{ y cualquier multi-índice } \beta$$

Por ende, $f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2. Cerradura bajo la suma:

Sea $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dado que la suma de funciones diferenciables es a su vez diferenciable en cualquier espacio métrico, concluimos que $f_1 + f_2$ también es infinitamente diferenciable. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta (f_1 + f_2)(\mathbf{x}) \right| &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f_1(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f_2(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f_1(\mathbf{x}) \right| + \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f_2(\mathbf{x}) \right| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Por ende, $f_1 + f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

3. Cerradura bajo el producto por escalares:

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, λf es infinitamente diferenciable y

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta (\lambda f(\mathbf{x})) \right| = |\lambda| \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty$$

para todo $k = 0, 1, \dots$ y cualquier multi-índice β . Por ende, $\lambda f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Lema 7.1.8. *Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si y solo si f es infinitamente diferenciable y*

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots \text{ y cualquier multi-índice } \beta$$

Demostración.

(\Rightarrow) Suponga que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces f es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R}^d y, por

el lema 7.1.3, sabemos que $\forall k = 0, 1, \dots$ y cualquier multi-índice β , existe un número real $A > 0$ tal que:

$$|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| \leq A$$

En particular, tenemos que

$$|\mathbf{x}|^{k+1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| \leq A'$$

lo cual implica que

$$0 \leq |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{A'}{|\mathbf{x}|}$$

y, en consecuencia,

$$0 \leq \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| \leq \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \frac{A'}{|\mathbf{x}|} = 0$$

ya que $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right|$ es continua para cada k y cualquier β .

(\Leftarrow) Para el converso, suponemos que f es infinitamente diferenciable y que

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| = 0.$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \epsilon$ cuando $|\mathbf{x}| > \delta$. Fijando a δ , esto significa que, si $\mathbf{x} \notin B_\delta(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq \delta\}$ entonces $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right|$ es acotada por ϵ . Luego, si $\mathbf{x} \in B_\delta(0)$, entonces la continuidad de $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right|$ nos permite asegurar que $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty$. En efecto, como $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right|$ es el producto de un monomio y una función infinitamente diferenciable entonces es continua sobre \mathbb{R}^d , y como $B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^d$ es un compacto, entonces $|\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right|$ es acotada sobre $B_\delta(0)$.

Por lo tanto, y puesto que $k = 0, 1, 2, \dots$ y el multi-índice $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$ son arbitrarios, tenemos que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty$$

lo cual, por el lema 7.1.3, es equivalente a escribir que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \left| \mathbf{x}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta f(\mathbf{x}) \right| < \infty$$

para cualesquiera multi-índices α y β . □

Lema 7.1.9. La función $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(\mathbf{x}) = e^{-a|\mathbf{x}|^2}$ con $a > 0$ es de Schwartz.

Demostración. Nótese que, de manera similar al lema 6.1.7, $e^{-a|\mathbf{x}|^2}$ es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R}^d y que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\beta e^{-a|\mathbf{x}|^2} = P(x_i)e^{-a|\mathbf{x}|^2}$$

donde $P(x_i)$ es un polinomio de grado no mayor a $|\beta|$ que depende de las componentes x_i del vector \mathbf{x} . Por lo tanto,

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\beta e^{-a|\mathbf{x}|^2} \right| = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|^k \left| \frac{P(x_i)}{e^{|\mathbf{x}|^2}} \right| = 0$$

y por el lema 7.1.8 $e^{-a|\mathbf{x}|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Nota 7.1.10. Con el lema anterior en mano, podemos utilizar el teorema 5.4.13 y aplicar d veces el resultado del lema 6.1.7 para obtener:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2} \cdot e^{-ax_2^2} \dots e^{-ax_d^2} dx_d \dots dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2} \dots e^{-ax_{d-1}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax_d^2} dx_d \right) dx_{d-1} \dots dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_1^2} \dots e^{-ax_{d-1}^2} \left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \right) dx_{d-1} \dots dx_1 \\ &= \dots \\ &= \underbrace{\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \dots \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}}_{d\text{-veces}} \\ &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \end{aligned}$$

7.2. La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

En esta sección, definimos la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y utilizamos el teorema 5.4.13 (Fubini) para extender a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ los principales resultados de la sección 6.2. Luego, demostramos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ también es cerrado bajo la transformada de Fourier y concluimos mostrando que la gaussiana d -dimensional es igual a su propia transformada de Fourier.

Definición 7.2.1. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces definimos su transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})} d\mathbf{x} \quad (7.3)$$

donde $(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})$ es el producto punto de los vectores $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 181)

Nota 7.2.2. De la misma manera que para el caso 1-dimensional, tenemos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. De modo que $\exists A > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})} \right| &= |f(\mathbf{x})| |\cos(2\pi(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})) - i \sin(2\pi(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}))| \\ &= |f(\mathbf{x})| (1) \\ &= |f(\mathbf{x})| \\ &\leq \frac{A}{1 + |\mathbf{x}|^{d+1}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el integrando en la expresión 7.3 pertenece a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y la convergencia de la integral queda asegurada por el teorema 5.3.8.

Lema 7.2.3. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces:

1. $\mathcal{F}[f(\mathbf{x} + \mathbf{h})](\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h}} \quad ; \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$
2. $\mathcal{F}[f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}}](\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}) \quad ; \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$
3. $\mathcal{F}[f(\delta \mathbf{x})](\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\delta^d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}/\delta) \quad ; \quad \forall \delta > 0$
4. $\mathcal{F} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha f(\mathbf{x}) \right] (\boldsymbol{\xi}) = (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$
5. $\mathcal{F} [(-2\pi i \mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})] (\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 181)

Demostración.

(1) Por la nota anterior sabemos que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, podemos utilizar el lema 5.4.9 y las propiedades distributivas del producto interno entre vectores de \mathbb{R}^d :

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h})} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) &= e^{2\pi i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h})} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi})} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \cdot \boldsymbol{\xi}} e^{2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) e^{-2\pi i[\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{h}]} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \mathcal{F}[f(\mathbf{x} + \mathbf{h})](\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

(2) Por definición, tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h}) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{h})} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{h})} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}} \right) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \mathcal{F}[f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}}](\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d
\end{aligned}$$

(3) Puesto que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, podemos aplicar el lema 5.4.10 con $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(\delta \mathbf{x})](\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta \mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{\delta^d} \left(\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta \mathbf{x}) e^{-2\pi i(\delta \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi} / \delta} d\mathbf{x} \right) \\
&= \frac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} / \delta} d\mathbf{x} = \frac{1}{\delta^d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi} / \delta)
\end{aligned}$$

(4) Por definición, sabemos que

$$\mathcal{F} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha f(\mathbf{x}) \right] (\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}$$

Luego, el teorema 5.4.13 implica que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha f(\mathbf{x}) \right] e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha f(\mathbf{x}) \right] e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} dx_d \right) \dots dx_2 \right) dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f(\mathbf{x}) \right] e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdot e^{-2\pi i x_2 \xi_2} \cdot \dots \cdot e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \dots dx_2 dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_{d-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{d-1}^{\alpha_{d-1}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \dots dx_2 dx_1 \quad (7.4)
\end{aligned}$$

donde el intercambio entre los operadores $\frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ y $\int_{\mathbb{R}} dx_i$, cuando $i \neq j$, se justifica por el hecho de que f es infinitamente diferenciable y la regla de la integral de Leibniz.

Ahora bien, considere $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_i(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)$, es decir, f_i se define por la función $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ donde hemos fijado todas las variables excepto x_i . Entonces, por el lema 6.2.6 tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} f(\mathbf{x}) \right] e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} f_i(x) \right] e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= \mathcal{F} \left[\frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} f_i(x) \right] (\xi) \\
&= (2\pi i \xi)^{\alpha_i} \hat{f}(\xi) \\
&= (2\pi i \xi)^{\alpha_i} \int_{\mathbb{R}} f_i(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\
&= (2\pi i \xi_i)^{\alpha_i} \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i x_i \xi_i} dx_i
\end{aligned}$$

De modo que, si regresamos a la expresión (7.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \cdots \partial^{\alpha_{d-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_{d-1}^{\alpha_{d-1}}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f(\mathbf{x}) \right] e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdots \\
& \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \cdots dx_2 dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \cdots \partial^{\alpha_{d-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_{d-1}^{\alpha_{d-1}}} \left((2\pi i \xi_d)^{\alpha_d} \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdots \\
& \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \cdots dx_2 dx_1 \\
&= \dots \\
&= (2\pi i \xi_1)^{\alpha_1} (2\pi i \xi_2)^{\alpha_2} \cdots (2\pi i \xi_d)^{\alpha_d} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i x_d \xi_d} \cdots \\
& \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots e^{-2\pi i x_2 \xi_2} \cdots e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_d \cdots dx_2 dx_1 \\
&= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

(5) De manera similar a la prueba de (4), el teorema 5.4.13 y el corolario 6.2.10 justifican la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(-2\pi i \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^d} (-2\pi i \mathbf{x})^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x_1)^{\alpha_1} \cdots (-2\pi i x_d)^{\alpha_d} f(x_1, \dots, x_d) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdots \cdots e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \cdots dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x_1)^{\alpha_1} \cdots (-2\pi i x_{d-1})^{\alpha_{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x_d)^{\alpha_d} f(x_1, \dots, x_d) e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) \times \\
& \qquad \qquad \qquad \times e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \cdots \cdots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \cdots dx_1 \\
&= \dots \\
&= \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \cdots \partial^{\alpha_d}}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \cdots \partial \xi_d^{\alpha_d}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i x_d \xi_d} \cdots \cdots e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_d \cdots dx_1 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^{\boldsymbol{\alpha}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

□

Nota 7.2.4. De la misma manera que para el caso 1–dimensional, las propiedades (4) y (5) del lema anterior implican que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta ((-2\pi i \mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})) \right] (\boldsymbol{\xi}) &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\beta \mathcal{F} [(-2\pi i \mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})] (\boldsymbol{\xi}) \\ &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Corolario 7.2.5. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 181)

Demostración. El argumento es el mismo que para el caso 1–dimensional (Teorema 6.2.14). En efecto, la propiedad (5) del lema 7.2.3 también muestra que $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ existe para cualquier multi–índice $\boldsymbol{\alpha}$, de modo que $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ es infinitamente diferenciable sobre \mathbb{R}^d . Para ser más específicos, estamos diciendo que la existencia de todas las derivadas parciales de \hat{f} y por ende su continuidad en cada punto de \mathbb{R}^d , implican la existencia de la matriz Jacobiana de \hat{f} en cualquier punto de \mathbb{R}^d para cualquier orden. (Un argumento que justifica este razonamiento puede encontrarse en el teorema 6.3.8 de la sección 6.3 de Tao (2017, p. 140).) Luego, suponga que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces,

$$|\hat{g}(\boldsymbol{\xi})| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$$

de modo que la transformada de Fourier de cualquier función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ también es acotada.

Ahora bien, la nota 7.2.4 y el hecho de que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ por la definición 5.1.4 implican que

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{(2\pi i)^{\beta_1} \dots (2\pi i)^{\beta_d}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\beta ((-2\pi i \mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})) \right] (\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$$

de modo que $\boldsymbol{\xi}^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ es la transformada de Fourier de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto,

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} \left| \boldsymbol{\xi}^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^\alpha \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \right| < \infty$$

para cualesquiera multi–índices $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$. □

Lema 7.2.6.

$$\mathcal{F}[e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}] (\boldsymbol{\xi}) = e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 182)

Demostración. Una vez más, el teorema 5.4.13 (Fubini) nos permite descomponer la integral

$$\mathcal{F}[e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}](\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\mathbf{x}|^2} e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \quad (7.5)$$

en d integrales sobre \mathbb{R} . (Note que $e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ por el lema 7.1.9 y por ende la integral (7.5) está bien definida, i.e. converge $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$). De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}](\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi|\mathbf{x}|^2} e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi(x_1^2 + \dots + x_d^2)} e^{-2\pi i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_d\xi_d)} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x_1^2} e^{-\pi x_2^2} \dots e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} e^{-2\pi i x_2 \xi_2} \dots e^{-2\pi i x_d \xi_d} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} \dots e^{-\pi x_{d-1}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \dots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \dots dx_1 \end{aligned}$$

Ahora bien, por el lema 6.3.1 sabemos que

$$\mathcal{F}\left[e^{-\pi x_d^2}\right](\xi_d) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d = e^{-\pi \xi_d^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-\pi|\mathbf{x}|^2}](\boldsymbol{\xi}) &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} \dots e^{-\pi x_{d-1}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_d^2} e^{-2\pi i x_d \xi_d} dx_d \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \dots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \dots dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} \dots e^{-\pi x_{d-1}^2} \left(\mathcal{F}\left[e^{-\pi x_d^2}\right](\xi_d) \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \dots e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \dots dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_1^2} \dots e^{-\pi x_{d-2}^2} \left(e^{-\pi \xi_d^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x_{d-1}^2} e^{-2\pi i x_{d-1} \xi_{d-1}} dx_{d-1} \right) e^{-2\pi i x_1 \xi_1} \dots \\ &\quad \dots e^{-2\pi i x_{d-2} \xi_{d-2}} dx_{d-2} \dots dx_1 \\ &= \dots \\ &= e^{-\pi \xi_1^2} e^{-\pi \xi_2^2} \dots e^{-\pi \xi_d^2} \\ &= e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2} \end{aligned}$$

□

Corolario 7.2.7.

$$\mathcal{F}\left[e^{-\pi\delta|\mathbf{x}|^2}\right](\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2/\delta} \quad ; \quad \forall \delta > 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 183)

Demostración. Aplíquese la propiedad (3) del lema 7.2.3 para obtener:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left[e^{-\pi\delta|\mathbf{x}|^2} \right] (\boldsymbol{\xi}) &= \mathcal{F} \left[e^{-\pi|\sqrt{\delta}\mathbf{x}|^2} \right] (\boldsymbol{\xi}) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d \mathcal{F} \left[e^{-\pi|\mathbf{x}|^2} \right] (\boldsymbol{\xi}/\sqrt{\delta}) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d e^{-\pi|\frac{1}{\sqrt{\delta}}\boldsymbol{\xi}|^2} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d e^{-\pi|\boldsymbol{\xi}|^2/\delta}
 \end{aligned}$$

□

7.3. Familias de buenos kernels y la fórmula de inversión en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Ahora que extendimos la transformada de Fourier a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y hemos demostrado que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, deseamos obtener la transformada inversa de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Por ende, debemos extender a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ los resultados sobre las familias de buenos kernels de la sección 6.3.

Definición 7.3.1 (Familias de buenos kernels en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). Sea $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ el conjunto de funciones $K_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ donde $K_\delta(\mathbf{x})$ depende tanto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ como de $\delta > 0$. Decimos que $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ es una *familia de buenos kernels* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
2. $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}|>\eta} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0 \quad ; \quad \forall \eta > 0.$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 183)

Lema 7.3.2. Sea $K_\delta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $K_\delta(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d e^{-\pi|\mathbf{x}|^2/\delta}$ donde $\delta > 0$. Entonces, $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ es una familia de buenos kernels.

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 183)

Demostración.

1. Por el corolario 7.2.7 tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{0}} d\mathbf{x} \\
&= \mathcal{F}[K_\delta(\mathbf{x})](\mathbf{0}) \\
&= \mathcal{F}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi \cdot \frac{1}{\delta} |\mathbf{x}|^2}\right](\mathbf{0}) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d \cdot \left(\frac{1}{(1/\delta)^{1/2}}\right)^d \cdot e^{-\pi \delta |\mathbf{0}|^2} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d (\sqrt{\delta})^d \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Por los lemas 7.1.9 y 7.2.6, y por el corolario 7.2.5, sabemos que

$K_\delta(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi |\mathbf{x}|^2/\delta}$ está en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Por lo tanto existe $M > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi |\mathbf{x}|^2/\delta} \right| d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi |\mathbf{x}|^2/\delta} d\mathbf{x} \leq M < \infty$$

3. Dado $\eta \in \mathbb{R} \ni \eta > 0$, considere los compactos H_1 y H_2 dados por:

$$H_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq \eta \right\} \quad \& \quad H_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| \leq \eta/\sqrt{\delta} \right\}$$

donde $\delta > 0$. Luego, considere el difeomorfismo $\phi : H_2 \rightarrow H_1$ dado por $\phi(\mathbf{x}) = \sqrt{\delta} \mathbf{x}$. Entonces,

$$\phi'(\mathbf{t}) = \sqrt{\delta} I_d \quad \& \quad |\det(\phi'(\mathbf{t}))| = |\det(\sqrt{\delta} I_d)| = (\sqrt{\delta})^d$$

y por el teorema 5.2.14, la parte 1 de esta prueba, y la nota 7.1.10, tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}| > \eta} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} - \int_{H_1} |K_\delta(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right\} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ 1 - \int_{H_2} (K_\delta \circ \phi)(\mathbf{t}) |\det(\phi'(\mathbf{t}))| d\mathbf{t} \right\} \\
&= 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{H_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^d e^{-\pi |\sqrt{\delta} \mathbf{t}|^2/\delta} (\sqrt{\delta})^d d\mathbf{t} \\
&= 1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}| \leq \eta/\sqrt{\delta}} e^{-\pi |\mathbf{t}|^2} d\mathbf{t} \\
&= 1 - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi |\mathbf{t}|^2} d\mathbf{t} \\
&= 1 - \left(\frac{\pi}{\pi}\right)^{d/2} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Corolario 7.3.3. Si $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x} \longrightarrow F(\mathbf{0}) \quad \text{cuando } \delta \longrightarrow 0$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 183)

Demostración. Por un argumento idéntico al del lema 6.1.9 la función F resulta ser uniformemente continua sobre \mathbb{R}^d . De modo que $\forall \epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que, si $|\mathbf{x}| < \eta$, entonces

$$|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})| < \epsilon$$

Ahora bien, por la primera propiedad de las familias de buenos kernels, tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x} - F(\mathbf{0}) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x} - F(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x}) (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})) d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{x}|>\eta} K_\delta(\mathbf{x}) (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})) d\mathbf{x} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{|\mathbf{x}|\leq\eta} K_\delta(\mathbf{x}) (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{|\mathbf{x}|>\eta} K_\delta(\mathbf{x}) |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})| d\mathbf{x} + \\ &\quad + \int_{|\mathbf{x}|\leq\eta} K_\delta(\mathbf{x}) |F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{0})| d\mathbf{x} \\ &< A \int_{|\mathbf{x}|>\eta} K_\delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \left(A \int_{|\mathbf{x}|>\eta} K_\delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \epsilon \cdot 1 \right) \rightarrow \epsilon \quad \text{a medida que } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que

$$|K_\delta(\mathbf{x})| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d e^{-\pi|\mathbf{x}|^2/\delta} \right| = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^d e^{-\pi|\mathbf{x}|^2/\delta} = K_\delta(\mathbf{x})$$

y la tercera propiedad de las familias de buenos kernels. □

Lema 7.3.4. Suponga que f y g pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 183)

Demostración. Por el corolario 7.2.5, sabemos que $\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $f\hat{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y por el teorema 5.4.13 (Fubini)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\hat{g}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{y})e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{y}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{y}) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{y})\hat{f}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \end{aligned}$$

□

Teorema 7.3.5 (Fórmula de inversión). *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 182)

Demostración. Sea $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y nótese que los corolarios 7.2.7 y 7.3.3, y el lema 7.3.4, implican que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{0}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F} \left[e^{-\pi\delta|\boldsymbol{\xi}|^2} \right] (\mathbf{x})F(\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\boldsymbol{\xi}) \cdot e^{-\pi\delta|\boldsymbol{\xi}|^2}d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hacemos $F(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ y aplicamos la propiedad (1) del lema 7.2.3 obtenemos:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{0}) = F(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{F}(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F} [f(\mathbf{x} + \mathbf{h})] (\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi})e^{2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\boldsymbol{\xi}$$

□

Corolario 7.3.6. *La transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo.*

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Demostración. El argumento es idéntico al de la prueba del corolario 6.3.11.

□

7.4. Convoluciones y la identidad de Plancherel

Finalmente, estamos en medida de extender la identidad de Plancherel a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Esta tarea resulta ser una aplicación directa de las propiedades de la convolución de dos funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y del teorema 5.4.13 (Fubini).

Definición 7.4.1. Sea $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces la convolución de f con g es la función $f * g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Lema 7.4.2. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Demostración. Primero, nótese que aplicando el lema 6.4.1 tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha (f * g)(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} (f * g)(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_{d-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{d-1}^{\alpha_{d-1}}} \left(f * \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}[g]\right)(\mathbf{x}) \\ &= \dots \\ &= \left(f * \frac{\partial^{\alpha_1} \dots \partial^{\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}[g]\right)(\mathbf{x}) \\ &= \left(f * \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha [g]\right)(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Luego, por un argumento idéntico al de la prueba del lema 6.4.3, también sabemos que, si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k |h(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq 2^k A_k (1 + |\mathbf{y}|)^k \quad \forall k \geq 0$$

Entonces, como $\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha [g] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \forall \alpha$, tenemos

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^\alpha [g(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \right| \leq 2^k A_k (1 + |\mathbf{y}|)^k$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha [(f * g)(\mathbf{x})] \right| &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \left(f * \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha [g] \right)(\mathbf{x}) \right| \\
&= \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^k \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha [g(\mathbf{x} - \mathbf{y})] d\mathbf{y} \right| \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{y})| |\mathbf{x}|^k \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^\alpha [g(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \right| d\mathbf{y} \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{y})| 2^k A_k (1 + |\mathbf{y}|)^k d\mathbf{y} \\
&= 2^k A_k \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{y})| (1 + |\mathbf{y}|)^k d\mathbf{y} < \infty
\end{aligned}$$

y por la nota 7.1.5, concluimos que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Lema 7.4.3. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$f * g = g * f$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Demostración. Procedemos de manera similar a la prueba del lema 6.3.8. Dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, considere los agotamientos de \mathbb{R}^d , $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{H_n\}_{n=1}^\infty$, dados por

$$E_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : -n \leq y_i \leq n\} \quad \& \quad H_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : -n - x_i \leq y_i \leq n - x_i\}$$

Además, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, considere el difeomorfismo $\phi : E_n \rightarrow H_n$ dado por

$$\phi(\mathbf{t}) = -\mathbf{t} + \mathbf{x}$$

y para el cual

$$\phi'(\mathbf{t}) = -I_d \quad \& \quad \det(\phi'(\mathbf{t})) = (-1)^d$$

Entonces, por el teorema 5.2.14, tenemos:

$$\begin{aligned}
(f * g)(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) g(\mathbf{t}) | -1|^d d\mathbf{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{t}) f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{t}) f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t} \\
&= (g * f)(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

□

Lema 7.4.4. Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\mathcal{F}[(f * g)](\boldsymbol{\xi}) = \hat{f}(\boldsymbol{\xi})\hat{g}(\boldsymbol{\xi})$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Demostración. Por el lema 7.4.2 sabemos que $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Entonces, $\mathcal{F}[(f * g)](\boldsymbol{\xi})$ está bien definida y por el teorema 5.4.13 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[(f * g)](\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y} \right) e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y})e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x} - \mathbf{y})e^{-2\pi i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})\mathcal{F}[g(\mathbf{x} - \mathbf{y})](\boldsymbol{\xi})d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y})\hat{g}(\boldsymbol{\xi})e^{-2\pi i\mathbf{y}\cdot\boldsymbol{\xi}}d\mathbf{y} \\ &= \hat{g}(\boldsymbol{\xi})\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

□

Nota 7.4.5. De la misma manera que para el caso de las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ podemos definir el producto interno hermitiano mediante la operación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x})\overline{g(\mathbf{x})}d\mathbf{x}$$

Finalmente, también tenemos la norma asociada al producto interno, es decir:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

Teorema 7.4.6 (Identidad de Plancherel en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

$$\text{Si } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ entonces } \|\hat{f}\| = \|f\|$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 184)

Demostración. De la misma manera que para el caso de una variable, suponga que $g(\mathbf{x}) = \overline{f(-\mathbf{x})}$ y que $h(\mathbf{x}) = (f * g)(\mathbf{x})$. Luego, considere el difeomorfismo $\phi : E_n \rightarrow H_n$ dado por $\phi(\mathbf{t}) = -\mathbf{t}$ y donde $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ son agotamientos de \mathbb{R}^d dados por:

$$E_n = H_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : -n \leq x_i \leq n\}$$

Entonces,

$$\phi'(\mathbf{t}) = -I_d \quad \& \quad \det(\phi'(\mathbf{t})) = (-1)^d$$

y por el teorema 5.2.14 tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-\mathbf{x})} e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(-\mathbf{x}) e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}} \\
&= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{H_n} f(-\mathbf{x}) e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}} \\
&= \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\xi}} |\mathbf{t}|^{-1} d\mathbf{t}} \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{t}} \\
&= \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

lo cual, por los lemas 7.4.3 y 7.4.4 implica que

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \overline{\hat{f}(\boldsymbol{\xi})} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f * g](\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{h}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \\
&= (f * g)(\mathbf{0}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{0} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\mathbf{y})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \\
&= \|f\|^2
\end{aligned}$$

□

7.5. Principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

De manera similar al capítulo anterior, obtenemos el principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mediante una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la identidad de Plancherel extendida a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, el teorema 5.4.13, y de la definición del producto interno hermitiano.

Teorema 7.5.1 (Principio de incertidumbre de Heisenberg). *Suponga que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ satisface la condición de normalización:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 1$$

Entonces,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 209)

Demostración. Retomamos la demostración del teorema 6.5.1, esta vez trabajando de atrás para adelante. Primero, nótese que

$$\begin{aligned} 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} &= \\ &= 2 \cdot 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Segundo, nótese que la identidad de Plancherel (teorema 7.4.6) y la propiedad (4) del lema 7.2.3 implican que

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^d} 4\pi^2 (\xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2) |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 4\pi^2 \xi_1^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} + \cdots + \int_{\mathbb{R}^d} 4\pi^2 \xi_d^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi i \xi_1 \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} + \cdots + \int_{\mathbb{R}^d} |2\pi i \xi_d \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{F} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right] (\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi} + \cdots + \int_{\mathbb{R}^d} \left| \mathcal{F} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right] (\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 d\mathbf{x} + \cdots + \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right|^2 + \cdots + \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x_d}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \psi \cdot \overline{\nabla \psi} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

En la cadena de igualdades anterior, nótese que $\nabla\psi \in \mathbb{C}^d$ y que $\overline{\nabla\psi} = \left(\overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial\psi}{\partial x_d}}\right)$. De esta manera, si retomamos la expresión (7.6) obtenemos

$$\begin{aligned} 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} &= \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(4\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Tercero, si hacemos $u = |\mathbf{x}||\psi(\mathbf{x})|$ y $w = |\nabla\psi(\mathbf{x})|$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $2\langle u, u \rangle^{1/2} \langle v, v \rangle^{1/2} \geq 2|\langle u, v \rangle|$, es decir,

$$2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\psi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \geq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}||\psi||\nabla\psi| d\mathbf{x}$$

Cuarto, nótese que, al igual que para el caso 1-dimensional podemos escribir

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}||\psi||\nabla\psi| d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}||\nabla\psi||\psi| + |\mathbf{x}||\nabla\bar{\psi}||\psi| d\mathbf{x} \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x} \cdot \nabla\psi| |\bar{\psi}| + |\mathbf{x} \cdot \nabla\bar{\psi}| |\psi| d\mathbf{x} \\ &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla\psi) \bar{\psi} + (\mathbf{x} \cdot \nabla\bar{\psi}) \psi d\mathbf{x} \right| \end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla\psi) \bar{\psi} + (\mathbf{x} \cdot \nabla\bar{\psi}) \psi d\mathbf{x} &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(x_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \dots + x_d \frac{\partial\psi}{\partial x_d} \right) \bar{\psi} + \left(x_1 \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1} + \dots + x_d \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_d} \right) \psi d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_1} \right) + \dots + x_d \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_d} \bar{\psi} + \psi \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_d} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\psi\bar{\psi}) + \dots + x_d \frac{\partial}{\partial x_d} (\psi\bar{\psi}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} |\psi(\mathbf{x})|^2 + \dots + x_d \frac{\partial}{\partial x_d} |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\psi(\mathbf{x})|^2 + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) - |\psi(\mathbf{x})|^2 + \dots \\ &\quad \dots + \left(|\psi(\mathbf{x})|^2 + x_d \frac{\partial}{\partial x_d} |\psi(\mathbf{x})|^2 \right) - |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) - \underbrace{|\psi|^2 - \dots - |\psi|^2}_{d \text{ veces}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) d\mathbf{x} - d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d\mathbf{x} \\ &= -d \end{aligned}$$

En la cadena de igualdades anterior, $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d\mathbf{x} = 1$ por la condición de normalización impuesta en la hipótesis. En cuanto a la razón por la que $\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) d\mathbf{x} = 0$, esta depende de varias herramientas avanzadas de la geometría diferencial, y de las formas diferenciales; específicamente se trata del teorema de Stokes generalizado. Un tratamiento completo de estos temas puede encontrarse en el libro de [Zorich \(2004, Caps. 12 y 13\)](#) o bien el libro de [Hubbard y Burke Hubbard \(2015, Cap. 6\)](#).

Sin embargo, es posible proporcionar una explicación cualitativa. En efecto, nótese que $\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2 = (x_1|\psi(\mathbf{x})|^2, \dots, x_d|\psi(\mathbf{x})|^2)$ resulta ser un campo vectorial donde cada componente tiene descenso rápido. Ahora bien, $\nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2)$ representa la divergencia de dicho campo vectorial. Entonces, si escogemos el agotamiento de \mathbb{R}^d dado por $\{E_n\}$ con $E_n = \{\mathbf{x} : -n \leq x_i \leq n\}$ y aplicamos el teorema de Stokes en \mathbb{R}^d como se muestra en [Bouchard \(2024, tma. 6.3.3\)](#), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) d\mathbf{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) dV_d \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial E_n} (\mathbf{x}|\psi|^2) \cdot \mathbf{n} dV_{d-1} \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde ∂E_n es la frontera de E_n , y \mathbf{n} es el vector normal que apunta hacia el exterior de la superficie ∂E_n .

Si nos basamos en la interpretación cualitativa del teorema de Stokes, entonces la expresión (7.8) representa el flujo neto del campo vectorial $\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2$ que pasa a través de la superficie ∂E_n a medida que $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, cada componente de dicho campo vectorial tiende a 0 a medida $n \rightarrow \infty$ ya que $\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2$ tiene descenso rápido. Por ende, el flujo es nulo sobre \mathbb{R}^d ; es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial E_n} (\mathbf{x}|\psi|^2) \cdot \mathbf{n} dV_{d-1} = 0$$

Tras esta nota explicativa, recopilamos los resultados obtenidos hasta el momento en una misma cadena de igualdades/desigualdades:

$$\begin{aligned} 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right)^{1/2} &= \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{x} \cdot \nabla \psi) \bar{\psi} + (\mathbf{x} \cdot \nabla \bar{\psi}) \psi d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\mathbf{x}|\psi|^2) d\mathbf{x} - d \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 d\mathbf{x} \right| \\ &= |-d| \\ &= d \end{aligned}$$

Lo cual equivale a escribir que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |\psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\hat{\psi}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}$$

□

Grupos LCA y dualidad de Pontryagin

En este último capítulo, discutimos de algunos resultados del texto de [Deitmar \(2005, Caps. 6-8\)](#) sobre la teoría de los grupos LCA, las bases de las integrales de Haar, y de la dualidad de Pontryagin. El objetivo no es un estudio sistemático de esta teoría, ya que la presentación de [Deitmar \(2005\)](#) es completa y accesible. En vez de esto, buscamos exponer de una manera informal, aunque estructurada, las técnicas más modernas del análisis armónico abstracto, y cómo estas permiten recuperar los principales resultados de la teoría de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ como simples casos particulares.

Empezamos examinando los grupos LCA y el concepto de *dualidad de Pontryagin*. Luego, introducimos las integrales de Haar y mostramos que la integral “clásica” de Riemann resulta ser un caso particular de dichas integrales. Con esto, discutimos del uso de las integrales de Haar para definir una versión generalizada, a grupos LCA, de la transformada de Fourier, la fórmula de inversión y la identidad de Plancherel, y explicamos cómo recuperar estos resultados en sus versiones correspondientes al caso $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Finalmente, concluimos el capítulo con una breve nota sobre la fórmula de sumación de Poisson en el contexto de los grupos LCA.

8.1. Grupos LCA

El enfoque más moderno del análisis armónico abstracto permite generalizar los principales resultados de los capítulos anteriores hacia estructuras algebraicas menos restrictivas que \mathbb{R}^d . Empezamos por definir las propiedades con las que cuentan dichas estructuras.

Definición 8.1.1 (Metrizable). Si X es un espacio topológico, se dice que X es *metrizable* si existe una métrica d sobre el conjunto X que induce la topología de X . Un espacio métrico es un espacio metrizable X junto con una métrica específica que induce la topología de X .

([Munkres, 2000](#), p. 120)

Definición 8.1.2 (σ -compacidad). Un espacio metrizable X es σ -compacto si existe una sucesión $K_n \subset K_{n+1}$ de subconjuntos compactos tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Dicha sucesión se denomina *agotamiento compacto* de X .

(Deitmar, 2005, p. 88)

Nota 8.1.3. Si recordamos la manera en que se definieron las integrales impropias sobre \mathbb{R}^d en la sección 5.3 y en particular el rol de los agotamientos de \mathbb{R}^d por medio de conjuntos admisibles, vemos que la definición 8.1.2 permite recuperar esta misma noción, ahora en el contexto más general de los espacios metrizables.

Definición 8.1.4 (Localmente compacto). Un espacio metrizable X es *localmente compacto* si, dada una métrica d para X , para cada punto $x \in X$ existe $r > 0$, tal que la bola cerrada

$$\bar{B}_r(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

sea compacta.

(Deitmar, 2005, pp. 88-89)

Definición 8.1.5 (σ -localmente compacto). Si un espacio metrizable es σ -compacto y localmente compacto, entonces se dice que es σ -localmente compacto.

(Deitmar, 2005, p. 89)

Con estas definiciones en mano, estamos listos para introducir la principal estructura algebraica del análisis armónico abstracto.

Definición 8.1.6 (Grupos LCA). Sea G un espacio metrizable, σ -localmente compacto. Si G también resulta ser un grupo abeliano, diremos que G es un *Grupo Abeliano Localmente Compacto*. (O un grupo LCA por sus siglas en inglés).

(Deitmar, 2005, p. 94)

Ejemplo 8.1.7. Nótese que \mathbb{R}^n forma un grupo LCA bajo la suma usual de vectores. En efecto, la topología usual de \mathbb{R}^n puede obtenerse vía uniones e intersecciones de bolas abiertas

$$B_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \epsilon\}$$

donde

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2}$$

es la métrica euclidiana usual. Además, \mathbb{R}^n es σ -compacto ya que, como se vió en la sección 5.3, este puede agotarse por medio de subrectángulos compactos. Luego, sabemos que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $\epsilon > 0$, la bola cerrada

$$\bar{B}_\epsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \epsilon\}$$

es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n , entonces es compacta por Heine-Borel.

Una de las propiedades más importantes de los grupos LCA es la relación que existe entre dichos grupos, su dual, y su bidual. Este fenómeno se manifiesta por medio del teorema de dualidad de Pontryagin, y resulta ser de suma importancia en las generalizaciones de la fórmula de inversión de Fourier y por ende del teorema de Plancherel para grupos LCA.

Definición 8.1.8 (Carácter, Dual). Sea G un grupo LCA. Un *carácter* de G es un homomorfismo continuo $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$, donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. El conjunto formado por los caracteres de G es el dual de Pontryagin (o simplemente el *dual*) de G y se denota por \hat{G} .

(Deitmar, 2005, p. 101)

Ejemplo 8.1.9. En el caso de \mathbb{R}^n , la función $\alpha_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}$ dada por $\alpha_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}$ es un carácter de \mathbb{R}^n .

Nota 8.1.10. Con esto, el dual de un grupo LCA es a su vez un grupo LCA (véase el libro de Deitmar (2005, p. 104, tma. 7.1.4)), y para \mathbb{R}^n , esto no es muy complicado de comprobar. En efecto, considere la biyección $\phi_{\mathbf{h}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}^n}$ dada por $\phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{h}}$, donde $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Entonces, si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\phi_{\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2}(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)} = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1} e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_2} = \phi_{\mathbf{y}_1}(\mathbf{x}) \phi_{\mathbf{y}_2}(\mathbf{x}).$$

De modo que $\phi_{\mathbf{h}}$ es un isomorfismo entre \mathbb{R}^n y su propio dual. (El razonamiento anterior es una extensión a \mathbb{R}^n de la explicación proporcionada por Deitmar (2005, p. 103) para el caso \mathbb{R}/\mathbb{Z} .)

Ahora bien, si G es un grupo LCA, y \hat{G} también es un grupo LCA, entonces podemos volver a aplicar el razonamiento anterior sobre \hat{G} para obtener $\hat{\hat{G}}$, el bidual de G . Dicho bidual se compone de caracteres que mapean los elementos de \hat{G} en \mathbb{T} . El teorema de dualidad de Pontryagin establece que $\hat{\hat{G}}$ es isomorfo a G , y por ende que \hat{G} también es un grupo LCA.

Teorema 8.1.11 (Dualidad de Pontryagin). Sea G un grupo LCA. Entonces el mapeo $\delta_g : G \rightarrow \hat{\hat{G}}$ dado por

$$\delta_g(\chi) = \chi(g)$$

es un isomorfismo entre grupos LCA.

(Deitmar, 2005, p. 107)

Nota 8.1.12. El teorema 8.1.11 también se puede interpretar como una versión más general de la relación que existe entre un espacio vectorial y su bidual.

8.2. Integrales de Haar

Ahora que hemos definido una estructura algebraica más general por medio de los grupos LCA, es necesario definir una manera de integrar funciones sobre dichos grupos. Esto se logra por medio de las integrales de Haar.

Definición 8.2.1 (Soporte compacto). Sea G un grupo LCA y considere $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces el soporte de f sobre G es el conjunto:

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$$

donde la línea superior denota la cerradura de dicho conjunto. Si el soporte de f es un conjunto compacto entonces decimos que f tiene *soporte compacto*.

(Deitmar, 2005, pp. 112-113)

Con esta definición, estamos listos para introducir una generalización del concepto de “integración” para grupos LCA bajo la forma de un funcional lineal. Sin embargo, al igual que en la teoría de la integral de Riemann sobre \mathbb{R} , primero debemos introducir el concepto de “integral” para funciones con soporte compacto antes de poder definir una integral “impropia” sobre todo el dominio de una función.

Definición 8.2.2 (Integral). Sea $C_c(G)$ el espacio vectorial sobre \mathbb{C} formado por todas las funciones continuas y con soporte compacto $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, donde G es un grupo LCA. Entonces, un funcional lineal $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$ es llamado una *integral* si, dada $f \in C_c(G)$,

$$f(x) \geq 0 \forall x \in G \Rightarrow I(f) \geq 0.$$

(Deitmar, 2005, p. 113)

Nota 8.2.3. Podría decirse que la definición anterior hace un abuso de la notación al escribir $f(x) \geq 0$ ya que f toma sus imágenes en \mathbb{C} . Sin embargo, f puede interpretarse como $f(x) = u(x) + iv(x)$ donde u y v toman sus imágenes en \mathbb{R} . De esta forma, si $u(x) \geq 0 \forall x \in G$ y $v(x) \geq 0 \forall x \in G$, entonces la linealidad y la homogeneidad de I implican que

$$I(f) = I(u) + iI(v)$$

y, si I es una integral, tenemos

$$I(u) \geq 0 \quad \& \quad I(v) \geq 0.$$

Si $(G, *)$ es un grupo LCA, $s \in G$ y $f \in C_c(G)$ podemos definir la *traslación izquierda de f por s* mediante la función

$$L_s f(x) = f(s^{-1} * x) \in C_c(G)$$

(Deitmar, 2005, p. 114)

De esta forma, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 8.2.4 (Integrales invariantes). Una integral $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$ es invariante si

$$I(L_s f) = I(f)$$

para cualquier $f \in C_c(G)$ y cualquier $s \in G$.

(Deitmar, 2005, p. 114)

Ejemplo 8.2.5. Suponga que $G = (\mathbb{R}^n, +)$ y defínase el funcional lineal $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

donde $\int_{\mathbb{R}^n}$ es la integral de Riemann sobre \mathbb{R}^n . Entonces, si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ es no-negativa (i.e. $f \geq 0$), sabemos, por las propiedades de la integral de Riemann, que

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \geq 0$$

por lo que I es una integral en el sentido de la definición 8.2.2. Luego, sea $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, y considere los conjuntos

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\} \quad B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} - \mathbf{s} \in A\} \quad C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \neq 0\}$$

Entonces,

$$\mathbf{y} \in C \iff f(\mathbf{y} - \mathbf{s}) \neq 0 \iff \mathbf{y} - \mathbf{s} \in A \iff \mathbf{y} \in B$$

con lo cual, $\text{supp}(L_{\mathbf{s}}f) = \bar{C} = \bar{B}$. Ahora bien, \bar{B} es compacto ya que es la imagen continua de un compacto. En efecto, $\bar{B} = \phi(\bar{A}) = \phi(\text{supp}(f))$ donde $\phi : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ es el difeomorfismo de clase C^1 dado por $\phi(\mathbf{t}) = \mathbf{t} + \mathbf{s}$. Entonces, $\phi'(\mathbf{t}) = I_n$ & $|\det \phi'(\mathbf{t})| = 1$ y por el teorema 5.2.14 tenemos:

$$I(L_{\mathbf{s}}f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{s})d\mathbf{x} = \int_{\bar{B}} f(\mathbf{x} - \mathbf{s})d\mathbf{x} = \int_{\bar{A}} f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = I(f)$$

De modo que la integral de Riemann es una integral invariante en el sentido de las definiciones 8.2.2 y 8.2.4.

Hasta este punto, hemos extendido el concepto de “integración” a funciones del espacio $C_c(G)$ por medio de “integrales invariantes”. Sin embargo, aún quedan dos problemas por resolver:

1. Dado G un grupo LCA, ¿Cómo garantizar la existencia de una integral invariante?
2. Para que una integral sea satisfactoria en el contexto de la transformada de Fourier de funciones definidas sobre grupos LCA, es necesario que esta pueda aplicarse sobre funciones continuas $F : G \rightarrow \mathbb{C}$, definidas sobre la totalidad del grupo LCA, y no únicamente aquellas con soporte compacto.

El siguiente teorema aporta una solución a la primera pregunta:

Teorema 8.2.6 (Integrales de Haar). *Dado G un grupo LCA, existe una integral invariante no-nula I de G . Si I' es una segunda integral invariante no-nula, entonces existe un número $c > 0$ tal que $I' = cI$. Cualquier integral invariante de este tipo se denomina integral de Haar.*

(Deitmar, 2005, p. 115)

Ahora que disponemos de una garantía de la existencia de una integral de Haar para cualquier grupo LCA, podemos definir una integral para funciones continuas $f : G \rightarrow [0, \infty)$, y resolver en parte el segundo problema de la observación anterior.

Definición 8.2.7 (Integral sobre un grupo LCA). Sea G un grupo LCA, $I : C_c(G) \rightarrow \mathbb{C}$ una integral de Haar sobre G , y $f : G \rightarrow [0, \infty)$ una función continua, cuyo soporte no es necesariamente compacto. Entonces, la integral de f sobre G es dada por:

$$\int_G f(x)dx = \sup \left\{ I(\varphi) : \varphi \in C_c(G) \text{ \& } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, \infty]$$

(Deitmar, 2005, p. 118)

Siempre en el marco de una eventual transformada de Fourier para funciones continuas $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, la definición anterior podría ser satisfactoria si no fuera por el hecho de que el contra-dominio de f está restringido a $[0, \infty)$. Sin embargo, este es un problema menor que resolveremos a continuación.

Definición 8.2.8 (Espacio $L^1_{bc}(G)$). Sea G un grupo LCA. Entonces, $L^1_{bc}(G)$ es el conjunto de todas las funciones $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ que son acotadas, continuas, y satisfacen:

$$\|f\|_1 = \int_G |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} < \infty$$

(Deitmar, 2005, p. 119)

Ahora bien, como lo explica Deitmar (2005, p. 119), considere $f \in L^1_{bc}(G)$. Entonces, $f = u + iv$, donde $u, v : G \rightarrow \mathbb{R}$. Luego, defina $u_+(x) = \text{máx}\{u(x), 0\}$ y $u_-(x) = \text{máx}\{-u(x), 0\}$. Entonces, u_{\pm} son continuas y satisfacen $0 \leq u_{\pm} \leq |f|$, de modo que $u_{\pm} \in L^1_{bc}(G)$. De la misma manera, obtenemos $v_{\pm} \in L^1_{bc}(G)$, y por ende:

$$f = u + iv = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$$

lo cual implica que podemos aplicar la integral de la definición 8.2.7 sobre funciones $f \in L^1_{bc}(G)$.

Definición 8.2.9. Sea G un grupo LCA y considere $f \in L^1_{bc}(G)$. Entonces

$$\int_G f(x)dx = \int_G u_+(x)dx - \int_G u_-(x)dx + i \left(\int_G v_+(x)dx - \int_G v_-(x)dx \right). \quad (8.1)$$

(Deitmar, 2005, p. 119)

Nota 8.2.10. Puesto que $u_{\pm}, v_{\pm} : G \rightarrow [0, \infty)$ las integrales del lado derecho de la expresión (8.1) son del tipo de la definición 8.2.7.

Para concluir esta sección, introducimos la última herramienta necesaria para obtener la fórmula de inversión de Fourier y el teorema de Plancherel para funciones en $L^1_{bc}(G)$. Una prueba de dicho resultado puede encontrarse en el libro de Deitmar (2005, sec. 8.2).

Teorema 8.2.11 (Fubini sobre grupos LCA). Sea G, H grupos LCA y considere $f \in L^1_{bc}(G \times H)$. Además, suponga que la función $F(y) = \int_G f(x, y) dx$ está en $L^1_{bc}(H)$ y que $F(x) = \int_H f(x, y) dy$ también está en $L^1_{bc}(G)$. Entonces

$$\int_G \int_H f(x, y) dy dx = \int_H \int_G f(x, y) dx dy$$

(Deitmar, 2005, p. 119)

8.3. Transformada de Fourier sobre grupos LCA

Finalmente estamos en medida de presentar los principales resultados de los capítulos anteriores en el contexto de los grupos LCA. A continuación, introducimos la transformada de Fourier, la fórmula de inversión, y el teorema de Plancherel sobre $L^1_{bc}(G)$ y mostramos que son consistentes con la definición 7.2.1 y los teoremas 7.3.5 y 7.4.6. En particular, veremos el rol clave que juega la dualidad de Pontryagin en la generalización de la teoría del análisis de Fourier hacia los grupos LCA.

Definición 8.3.1 (Transformada de Fourier). Sea G un grupo LCA, \hat{G} el dual de Pontryagin de G , y fije una integral de Haar sobre G . Dada $f \in L^1_{bc}(G)$ definimos su transformada de Fourier $\hat{f} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ por:

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx \quad (8.2)$$

(Deitmar, 2005, p. 120)

Note que la integral de la expresión (8.2) es del tipo de la definición 8.2.9, puesto que f es continua y acotada sobre G y

$$\int_G |f(x) \overline{\chi(x)}| dx = \int_G |f(x)| dx < \infty$$

En el ejemplo siguiente, extendemos a \mathbb{R}^n la explicación de Deitmar (2005, p. 120) sobre el caso \mathbb{R} . Para esto, aplicamos la definición 8.3.1 al caso de las funciones definidas sobre $G = (\mathbb{R}^n, +)$, y comprobamos que efectivamente se trata de una generalización de la definición 7.2.1.

Ejemplo 8.3.2. Suponga que $G = (\mathbb{R}^n, +)$ y fije $I : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ la integral de Haar sobre $C_c(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\text{supp}(\varphi)} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(Note que esta es la misma integral de Haar que la que se vio en el ejemplo 8.2.5). Luego, considere $\hat{\mathbb{R}}^n$ el dual de Pontryagin de \mathbb{R}^n . Por el ejemplo 8.1.9 sabemos que, si $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces el carácter asociado a \mathbf{y} , dado por $\chi_{\mathbf{y}} \in \hat{\mathbb{R}}^n$, tiene la forma $\chi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}$. De

modo que, si $f \in L_{bc}^1(\mathbb{R}^n)$, la definición 8.3.1 dicta que su transformada de Fourier sea dada por la función $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\hat{f}(\chi_{\mathbf{y}}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{\chi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{x}$$

Nota 8.3.3. Primero, observe que el ejemplo anterior muestra que la definición 8.3.1 es consistente con la definición de la transformada de Fourier vista en los capítulos 6 y 7. Segundo, vemos que incluso para el caso $G = (\mathbb{R}^d, +)$, hemos obtenido una transformada de Fourier sobre un espacio de funciones menos restrictivo que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En efecto,

$$\text{si } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty$$

y por ende $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{bc}^1(\mathbb{R}^d)$.

Para concluir esta sección, presentamos la fórmula de inversión de Fourier y el teorema de Plancherel para funciones $f \in L_{bc}^1(G)$, donde G es un grupo LCA. En cada caso, mostramos cómo aplicarlos a \mathbb{R}^d para volver a obtener los teoremas 7.3.5 y 7.4.6 del capítulo 7.

Teorema 8.3.4 (Fórmula de inversión de Fourier). *Sea G un grupo LCA, y suponga que para cada $f \in L_{bc}^1(G)$, su transformada de Fourier \hat{f} está en $L_{bc}^1(\hat{G})$. Entonces tenemos, para todo $a \in G$,*

$$\hat{f}(\delta_a) = f(a^{-1})$$

(Deitmar y Echterhoff, 2009, p. 82; Deitmar, 2005, p. 124)

Ejemplo 8.3.5. Considere $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{bc}^1(\mathbb{R}^d)$. Por dualidad de Pontryagin, sabemos que $\hat{\mathbb{R}}^d$ es isomorfo a \mathbb{R}^d y por la nota 8.1.10 sabemos que \mathbb{R}^d es isomorfo a $\hat{\mathbb{R}}^d$. Además, sabemos por el ejemplo 8.1.9 que en el caso de \mathbb{R}^d , $\delta_{\mathbf{a}}(\chi) = \chi(\mathbf{a}) = e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}$, donde \mathbf{a} es algún elemento de \mathbb{R}^d . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\delta_{\mathbf{a}}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\chi) \overline{\delta_{\mathbf{a}}(\chi)} d\chi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{y}) \overline{e^{2\pi i \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}}} d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\mathbf{y}) e^{2\pi i (-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{y} \\ &= f(-\mathbf{a}) \end{aligned}$$

donde $-\mathbf{a} = \mathbf{a}^{-1}$ puesto que $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$.

Antes de presentar el teorema de Plancherel, al igual que Deitmar (2005, p. 119), introducimos $L_{bc}^2(G)$ el espacio de funciones continuas y acotadas sobre G , un grupo LCA, tales que

$$\int_G |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty$$

Además, siempre retomando la notación de Deitmar (2005, p. 119) definimos

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

y hacemos notar que $L_{bc}^1(G)$ y $L_{bc}^2(G)$ son espacios vectoriales sobre \mathbb{C} .

Teorema 8.3.6 (Plancherel). *Sea G un grupo LCA. Entonces existe una medida de Haar sobre \hat{G} tal que para cada $f \in L_{bc}^1(G)$*

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

(Deitmar, 2005, p. 123)

Nota 8.3.7. Suponga que $G = (\mathbb{R}^d, +)$ y considere $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_{bc}^1(\mathbb{R}^d)$. Entonces, si escogemos la integral de Haar estudiada en el ejemplo 8.2.5, el teorema anterior implica que

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_G |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_G |\hat{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &= \|\hat{f}\|_2 \end{aligned}$$

Lo cual nos permite recuperar el enunciado del teorema 7.4.6.

8.4. La fórmula de sumación de Poisson

Cerramos este capítulo con una breve nota sobre otro importante resultado del análisis de Fourier, es decir, la siguiente relación entre una función de Schwartz y su transformada de Fourier.

Teorema 8.4.1 (Fórmula de sumación de Poisson). *Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$

En particular, si $x = 0$ tenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$$

(Stein y Shakarchi, 2003, p. 154)

La razón por la que es pertinente mencionar este resultado, es que la teoría de las integrales de Haar sobre grupos LCA y la dualidad de Pontryagin también permiten obtener una generalización de dicha fórmula.

Como puede verse en el libro de [Deitmar y Echterhoff \(2009, pp. 83-86\)](#), si A es un grupo LCA y $E \subseteq A$ entonces se define $E^\perp = \{\chi \in \hat{A} : \chi(x) = 1, \forall x \in E\}$, y se obtiene la siguiente propiedad:

Lema 8.4.2. *Sea A un grupo LCA y B un subgrupo cerrado de A . Entonces, B^\perp es isomorfo a $\widehat{A/B}$ via $\chi \mapsto \tilde{\chi}$ donde $\tilde{\chi} \in \widehat{A/B}$ se define por:*

$$\tilde{\chi}(xB) := \chi(x)$$

([Deitmar y Echterhoff, 2009, p. 84](#))

Con esto, y tomando en cuenta que $f \in L^1(A)$ implica que $\|f\| := \int_A |f(x)|dx < \infty$ (donde la integral se interpreta en el sentido de Haar), la generalización de la fórmula de sumación de Poisson toma la forma del siguiente teorema:

Teorema 8.4.3 (Fórmula de sumación de Poisson generalizada). *Sea B un subgrupo cerrado del grupo LCA denotado por A . Para $f \in L^1(A)$ defínase $f^B \in L^1(A/B)$ dada por $f^B(xB) = \int_B f(xb) db$. Entonces, si identificamos $\widehat{A/B}$ con B^\perp al igual que en el lema 8.4.2, obtenemos $\widehat{f^B} = \widehat{f}|_{B^\perp}$. Si, adicionalmente, $\widehat{f}|_{B^\perp} \in L^1(B^\perp)$, obtenemos*

$$\int_B f(xb) db = \int_{B^\perp} \widehat{f}(\chi)\chi(x) d\chi$$

para casi todos los $x \in A$, donde la medida de Haar en $\widehat{B^\perp} \cong \widehat{A/B}$ es la medida de Plancherel respecto a la medida de Haar sobre A/B . Si f^B está definida y es continua en todas partes, la ecuación anterior es válida para todo $x \in A$.

([Deitmar y Echterhoff, 2009, p. 85](#))

Ahora bien, [Deitmar y Echterhoff \(2009, p. 86\)](#) explican que, si $A = (\mathbb{R}, +)$ y $B = \mathbb{Z}$, entonces el mapeo $y \mapsto \chi_y$ donde $X_y(x) = e^{2\pi ixy}$ implica que A es isomorfo a su dual \hat{A} y que hay una biyección entre B y B^\perp . En efecto, si $y_1, y_2 \in A = (\mathbb{R}, +) \Rightarrow \chi_{y_1+y_2}(x) = e^{2\pi ix(y_1+y_2)} = e^{2\pi ixy_1} e^{2\pi ixy_2} = \chi_{y_1}\chi_{y_2}(x)$. Además, note que cuando $y = k \in B \Rightarrow \chi_y(x) = e^{2\pi i xk} = \cos(2k\pi x) + i \sin(2k\pi x) = 1, \forall x \in B = \mathbb{Z}$. Entonces, $\chi_{y=k} \in B^\perp$.

Luego, [Deitmar y Echterhoff \(2009, p. 86\)](#) también mencionan que, si además de las observaciones anteriores, se tiene $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}|_{\mathbb{Z}} \in L^1(\mathbb{Z})$, donde $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi ixy} dy$ (en el sentido de la definición 6.2.1) entonces el teorema 8.4.3 implica que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

para casi todos los puntos $x \in \mathbb{R}$.

Para el caso aún mas específico de las funciones de Schwartz, basta notar que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ (teorema 5.4.6) $\Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$ y que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por el teorema 6.2.14. De modo que, en el caso en que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, también se cumple $\hat{f}|_{\mathbb{Z}} \in L^1(\mathbb{Z})$. Estas observaciones, y un razonamiento idéntico al anterior, junto a la última parte del teorema 8.4.3, permiten recuperar el enunciado de la versión “clásica” de la fórmula de sumación de Poisson, presentada en el teorema 8.4.1.

9.1. La transformada de Fourier y el análisis matemático

A lo largo de este trabajo, hemos impuesto una restricción significativa sobre el tipo de funciones para las cuales aplican los resultados estudiados. En efecto, desde el capítulo 6, se restringió la teoría de la transformada de Fourier al conjunto de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La principal razón tras esta decisión es simplemente el hecho de que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, lo cual, junto a la infinita diferenciabilidad de las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, nos permite aprovechar la convergencia de las integrales impropias de las funciones del espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y nos evita dificultades relacionadas al intercambio entre integrales y derivadas parciales sobre \mathbb{R}^d .

Esta observación revela el importante rol de la transformada de Fourier en los últimos 200 años de investigación matemática, especialmente en el campo del análisis. En efecto, tras llegar al principio de incertidumbre de Heisenberg (Teorema 7.5.1), podría interesarnos extender dicho resultado a un conjunto de funciones más amplio, empezando con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ en vez de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Luego, podríamos preguntarnos: ¿qué propiedades de las funciones del espacio $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ o $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pueden removerse sin afectar drásticamente los principales resultados de la teoría desarrollada? En particular, podríamos investigar las modificaciones que habría que aportar a las pruebas de estos resultados si las funciones ya no cuentan con descenso rápido o moderado. Es decir, ¿por qué no podemos simplemente considerar un conjunto de funciones arbitrarias sobre \mathbb{R}^d ?

Hoy en día la respuesta sería obvia: necesitamos la continuidad o al menos una cantidad contable de discontinuidades de la función para asegurar la existencia de la integral de Riemann. De modo que la principal restricción de la teoría presentada en los capítulos 6 y 7 podría ser el uso de la integral de Riemann en la definición de la transformada de Fourier. Por ende, si quisiéramos solucionar este problema, podríamos considerar el uso de una integral menos restrictiva, como la de Lebesgue...

Por otro lado, ¿por qué limitarnos a \mathbb{R} para el dominio de nuestras funciones? ¿Acaso podríamos desarrollar una teoría generalizada del análisis de Fourier, en la que trabajamos

con funciones sobre espacios como \mathbb{Z} o \mathbb{R}/\mathbb{Z} ? Y en ese caso, ¿seguiría manifestándose el principio de incertidumbre de Heisenberg como una propiedad intrínseca de la transformada? Las respuestas a estas preguntas son recientes y, bajo este enfoque, la transformada de Fourier sigue siendo un tema de mucha actualidad en la investigación matemática; especialmente en el campo del análisis armónico abstracto, la versión moderna del análisis de Fourier, donde se utilizan herramientas muy poderosas como la dualidad de Pontryagin o la teoría de integración de Lebesgue.

Aunque las ideas contenidas en los últimos párrafos representan 200 años de investigación, ayudan a ilustrar la manera en que los descubrimientos de Joseph Fourier han servido como una de las principales motivaciones tras el estudio del análisis matemático. Si, además, tomamos en cuenta lo mencionado en el capítulo 1, y la teoría presentada en los capítulos 5 a 8, entonces es difícil subestimar a qué punto la transformada de Fourier ha trascendido su propósito inicial. Por ende, las ideas de Fourier no deben percibirse únicamente como una herramienta para la solución de ecuaciones diferenciales parciales. En vez de esto, deben reconocerse como una teoría completa, que sigue evolucionando, y cuyo contenido tiene implicaciones importantes para toda la ciencia.

9.2. La relación entre el principio de incertidumbre de Heisenberg y la transformada de Fourier

Desde el punto de vista del análisis de Fourier, el principio de incertidumbre de Heisenberg puede interpretarse de dos maneras:

1. Por un lado, como una ley de la mecánica cuántica, comprobada por la física experimental, y que después se convirtió en un teorema matemático, gracias al trabajo de Earle Hesse Kennard en 1927.
2. Por otro lado, como una manifestación física de una propiedad inquebrantable del análisis de Fourier.

La ventaja de esta última opción —la cual implica tomar un enfoque completamente matemático, como el de los teoremas 6.5.1 y 7.5.1— es que se extiende el campo de acción del principio de incertidumbre a otras disciplinas; diferentes de la física de partículas.

De hecho, la discusión incluida por Stein y Shakarchi (2003, pp. 158-161) respecto a la interpretación física de la desigualdad (9.1), la cual se introdujo en el corolario 6.5.3 al teorema 6.5.1, puede aplicarse con facilidad a una pareja de distribuciones arbitrarias siempre y cuando se relacionen entre ellas mediante su transformada de Fourier.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}} (\phi - \phi_0)^2 |\hat{\psi}(\phi)|^2 d\phi \right)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (9.1)$$

En efecto, suponga que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y que $f_\chi(x) := |\psi(x)|^2$ es una función de densidad probabilística correspondiente a la variable aleatoria continua $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Nota 9.2.1. Observe que f_χ es válida como función de densidad probabilística ya que $f_\chi \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, y que

$$\int_{\mathbb{R}} f_\chi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

por la condición de normalización impuesta sobre ψ en la hipótesis del teorema 6.5.1. Las razones por las cuales esto justifica satisfactoriamente la validez de f_χ como función de densidad probabilística pueden encontrarse en los libros de [Lefebvre \(2009, pp. 57-60\)](#) y [Wackerly, Mendelhall III, y Scheaffer \(2008, pp. 158-165\)](#).

Luego, suponga que

$$x_0 = E[\chi] = \int_{\mathbb{R}} x f_\chi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx$$

Entonces,

$$Var[\chi] = E[(\chi - x_0)^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 f_\chi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx$$

Ahora bien, por el teorema de Plancherel, también tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\phi)|^2 d\phi = \|\hat{\psi}\|^2 = \|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

De modo que $g_\Phi(\phi) := |\hat{\psi}(\phi)|^2 \geq 0 \forall \phi \in \mathbb{R}$ también resulta ser una función de densidad probabilística válida para la variable aleatoria $\Phi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, y podemos escribir:

$$Var[\Phi] = E[(\Phi - \phi_0)^2] = \int_{\mathbb{R}} (\phi - \phi_0)^2 g_\Phi(\phi) d\phi = \int_{\mathbb{R}} (\phi - \phi_0)^2 |\hat{\psi}(\phi)|^2 d\phi$$

donde $\phi_0 = E[\Phi] = \int_{\mathbb{R}} \phi |\hat{\psi}(\phi)|^2 d\phi$. Entonces, la desigualdad (9.1) se convierte en:

$$\boxed{Var[\chi] Var[\Phi] \geq \frac{1}{16\pi^2}} \quad (9.2)$$

Esto implica que a partir del momento en que dos funciones de densidad probabilística se relacionan por medio de la transformada de Fourier, está prácticamente garantizada la aparición de una cota inferior del tipo principio de incertidumbre.

En resumen, al expresar el principio de incertidumbre de Heisenberg en términos de la transformada de Fourier, extendemos la aplicabilidad de esta idea a la Estadística y por ende a otras disciplinas que hacen uso del análisis estadístico.

Nota 9.2.2. [Stein y Shakarchi \(2003\)](#) explican que en el contexto de la mecánica cuántica, ψ es una función de estado, tal que los valores dados por $\int_a^b |\psi(x)|^2 dx$ y $\int_a^b |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ correspondan respectivamente a las probabilidades de que la posición y el momento de una partícula que se desplaza en línea recta se ubiquen en el intervalo (a, b) . De esta manera, en la desigualdad (9.2), $Var[\chi]$ resultaría ser la varianza (o incertidumbre) correspondiente al valor esperado de la posición de la partícula y $Var[\Phi]$ sería la varianza (o incertidumbre) que corresponde al valor esperado del momento de dicha partícula. Por ende, si retomamos la desigualdad (9.2), vemos que a medida que incrementa la certeza probabilística con la que se conoce la posición de la partícula, (i.e. $Var[\chi]$ disminuye), entonces la certeza probabilística

con la que se conoce el momento de la partícula debe disminuir (i.e. $Var[\Phi]$ aumenta). Por otro lado, si aumenta la certeza con la que se conoce el momento de la partícula (i.e. $Var[\Phi]$ disminuye) entonces, la certeza con la que se conoce la posición de dicha partícula deberá disminuir (i.e. $Var[\chi]$ aumenta). De lo contrario, se transgrediría la cota inferior impuesta por la desigualdad (9.2). De esta forma, explican Stein y Shakarchi (2003), excepto por la constante de Planck, la desigualdad (9.2) prácticamente coincide con el principio de incertidumbre descubierto por W. Heisenberg y del cual resultan los teoremas 6.5.1 y 7.5.1 (pp. 158-161).

9.3. Consideraciones sobre los grupos LCA, las integrales de Haar y el análisis armónico abstracto

En el capítulo 8 vimos cómo los principales resultados del análisis de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pueden obtenerse de manera muy eficiente utilizando la teoría más moderna y más general de los grupos LCA, las integrales de Haar y la dualidad de Pontryagin. En ese sentido, tenemos dos caminos lógicos para llegar al principio de incertidumbre de Heisenberg en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: el primero vía el uso de las técnicas ‘clásicas’ del análisis de Fourier (i.e. la teoría desarrollada durante el siglo XIX), y el segundo vía análisis armónico abstracto (i.e. la teoría que busca resolver las carencias detectadas en el análisis de Fourier a finales del siglo XIX).

Desde un punto de vista meramente teórico, podría argumentarse que las técnicas del análisis ‘clásico’ de Fourier son obsoletas, y que es mejor abordar la transformada de Fourier, y los teoremas afines, por medio de las integrales de Haar o incluso la integral de Lebesgue. En efecto, esto tendría el potencial para eliminar (al menos en parte) las restricciones habituales sobre el conjunto de discontinuidades de las funciones; impuestas por el uso de la integral de Riemann en la definición de la transformada de Fourier. Además, se abre la posibilidad de investigar la persistencia del principio de incertidumbre a un nivel general, como una relación entre funciones definidas sobre grupos LCA y sus respectivas transformadas de Fourier (en el sentido de la definición (8.3.1)). Por otra parte, la integral de Haar permite extender otros resultados importantes del análisis ‘clásico’ de Fourier, como la fórmula de suma de Poisson, a los grupos LCA. De esta manera, la principal aplicación de los métodos del análisis armónico abstracto es teórica, es decir, la búsqueda de nueva teoría matemática.

Por otro lado, y a pesar de todas las ventajas que presenta la teoría de los grupos LCA, tiene el defecto de ser muy exigente en cuanto a prerrequisitos teóricos. En efecto, para acceder a un manejo elemental de los conceptos vistos en el capítulo 8, es necesario estar familiarizado con las bases del álgebra abstracta; del análisis matemático del siglo XIX; de la teoría de la medida; e incluso de la topología general. Por ende, se complica la investigación de aplicaciones más técnicas; por ejemplo en ingeniería, economía o estadística. Además, muchas de estas aplicaciones pueden abordarse directamente en el contexto de funciones definidas sobre \mathbb{R}^d , de modo que no requieren la generalidad de los grupos LCA. Bajo este punto de vista, se justifica más el uso del análisis ‘clásico’ de Fourier; siempre y cuando no sea necesario lidiar con funciones cuyo dominio es algún grupo LCA, o cuyo conjunto de discontinuidades tenga una medida de Lebesgue distinta de cero.

En resumen, tanto la versión moderna del análisis de Fourier como la versión ‘clásica’ del siglo XIX son de utilidad en una amplia variedad de disciplinas y tienen razones tanto

teóricas; como prácticas; como históricas; de existir. En el contexto del principio de incertidumbre, la decisión de escoger una sobre la otra será determinada por el tipo de aplicación que se esté estudiando y el grado de generalidad con el que se desee trabajar.

1. La transformada de Fourier, y las preguntas que planteó, han motivado mucha de la investigación tras el análisis matemático formal.
2. Históricamente, el principio de incertidumbre de Heisenberg es un descubrimiento de la física de partículas que, después de su matematización, fue integrado como un teorema a la teoría del análisis de Fourier; sin embargo, también puede percibirse como una propiedad inquebrantable de la transformada de Fourier que fue expuesta por primera vez en el contexto de la física de partículas.
3. En un contexto completamente analítico-matemático, el principio de incertidumbre de Heisenberg puede obtenerse como una desigualdad que relaciona una función de Schwartz y su transformada de Fourier.
4. La matematización del principio de incertidumbre de Heisenberg permite aplicar esta relación a otras disciplinas, diferentes de la física de partículas, como la estadística; además, permite extender esta relación al espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
5. Por medio de herramientas modernas del análisis armónico abstracto, como la dualidad de Pontryagin, y las integrales de Haar, es posible aplicar la transformada de Fourier a funciones definidas sobre conjuntos mucho más generales, como los grupos LCA.
6. El estudio de la transformada de Fourier y del principio de incertidumbre de Heisenberg en el contexto de las integrales múltiples de Riemann y del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tiene la ventaja de ser menos exigente en cuanto a prerrequisitos teóricos, y tiene aplicaciones inmediatas en estadística clásica; sin embargo, las investigaciones teóricas sobre posibles generalizaciones del principio de incertidumbre a espacios de funciones menos restrictivos pueden verse limitadas por el uso de la integral de Riemann.
7. El uso de la dualidad de Pontryagin y de las integrales de Haar para generalizar la transformada de Fourier a grupos LCA abre el camino hacia nuevas exploraciones teóricas y posiblemente al estudio de relaciones de tipo “principio de incertidumbre” entre funciones definidas sobre estos espacios; sin embargo, la investigación de posibles

aplicaciones del análisis armónico abstracto a otras disciplinas puede verse restringida por los prerequisites teóricos que exige esta teoría.

8. Las conclusiones 1 a 7 muestran que la transformada de Fourier ha trascendido su propósito inicial, es decir, la solución de ecuaciones diferenciales.

1. Para un público familiarizado con teoría de la medida, también es posible estudiar análisis de Fourier desde esta perspectiva, por medio de la teoría de integración de Lebesgue. Esto tiene la ventaja de mitigar las restricciones impuestas por los espacios de Schwartz y por la integral de Riemann sin tener que acudir a los grupos LCA y al álgebra abstracta.
2. Además del principio de incertidumbre de Heisenberg, también existen otras desigualdades de tipo “principio de incertidumbre”, como el principio de incertidumbre de Hardy, con las cuales también es recomendable familiarizarse.
3. Las herramientas del análisis de Fourier también son muy utilizadas en teoría de números; por esta razón puede resultar útil familiarizarse con las bases de la teoría analítica de números y las principales maneras en que se aplica el análisis armónico a esta rama de la matemática.
4. Una de las ramas recientes del análisis armónico es la teoría de onduletas o *Wavelets*. Dado que se encuentra bajo investigación activa, puede ser de utilidad familiarizarse con las bases de esta teoría. El libro de [Pereyra y Ward \(2012\)](#) incluye una introducción a este tema.
5. En caso se desee indagar a un nivel más avanzado —o de posgrado— sobre el análisis de Fourier, es recomendable disponer de un buen manejo de la teoría de la integración de Lebesgue y del análisis funcional ya que la mayoría de textos dirigidos a este público suelen asumir un buen manejo de estos temas.

- Aczel, A. D. (2007). *The artist and the mathematician: the story of Nicolas Bourbaki, the genius mathematician who never existed*. High Stakes Publishing.
- American Physical Society. (s.f.). *This month in physics history, february 1927: Heisenberg's uncertainty principle*. Descargado de <https://www.aps.org/archives/publications/apsnews/200802/physicshistory.cfm>
- Bouchard, V. (2024, 5 de Marzo). *Divergence theorem in \mathbb{R}^n* . University of Alberta. Descargado de https://sites.ualberta.ca/~vbouchar/MATH315/section_applications_stokes1.html (Math 315: Calculus IV)
- Bressoud, D. M. (2007). *A radical approach to real analysis* (2.^a ed.). American Mathematical Society.
- Bressoud, D. M. (2008). *A radical approach to Lebesgue's theory of integration*. Cambridge University Press.
- Deitmar, A. (2005). *A first course in harmonic analysis* (2.^a ed.). Springer-Verlag.
- Deitmar, A., y Echterhoff, S. (2009). *Principles of harmonic analysis*. Springer.
- Digital Library of Mathematical Functions. (s.f.). *Lattice paths: Multinomial coefficients and set partitions; §26.4(ii) generating function*. Descargado de <https://dlmf.nist.gov/26.4>
- Folland, G. B. (2002). *Advanced calculus*. Prentice Hall.
- Hardy, G. H. (1933). A theorem concerning Fourier transforms. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-8(3), 227–231. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/s1-8.3.227>
- Hilgevoord, J., y Uffink, J. (2024). The Uncertainty Principle. En E. N. Zalta y U. Nodelman (Eds.), *The Stanford encyclopedia of philosophy* (Spring 2024 ed.). Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/archives/spr2024/entries/qt-uncertainty/>.
- Hubbard, J. H., y Burke Hubbard, B. (2015). *Vector calculus, linear algebra and differential forms: A unified approach* (5th ed.). Matrix Books.
- Julien. (2013, 28 de Noviembre). *Prove $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta|$* . Mathematics Stack Exchange. Descargado de <https://math.stackexchange.com/q/584507> (Accedido: 2025-02-19 Julien: <https://math.stackexchange.com/users/38053/julien>)

- Lefebvre, M. (2009). *Basic probability theory with applications*. Springer.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology* (2.^a ed.). Prentice-Hall Inc.
- Pereyra, M. C., y Ward, L. A. (2012). *Harmonic analysis: From Fourier to wavelets*. American Mathematical Society.
- Stein, E. M., y Shakarchi, R. (2003). *Fourier analysis: An introduction*. Princeton Univ. Press.
- Tao, T. (2017). *Analysis ii* (3.^a ed.). Hindustan Book Agency.
- Valentinuzzi, M. E. (2016). *Highlights in the history of the Fourier transform*. IEEE EMBS. Descargado de <https://www.embs.org/pulse/articles/highlights-in-the-history-of-the-fourier-transform/>
- von Neumann, J. (1947). The mathematician. En R. B. Heywood (Ed.), *Works of the mind* (Vol. 1, p. 180-196). University of Chicago Press. Descargado de <https://www.zhangzk.net/docs/quotation/TheMathematician.pdf>
- Wackerly, D. D., Mendelhall III, W., y Scheaffer, R. L. (2008). *Mathematical statistics with applications* (7.^a ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.
- Whittaker, E. T. (1953). *A history of the theories of aether & electricity*. (Vol. II: The Modern Theories 1900-1926). Thomas Nelson and Sons Ltd.
- Wiseman, H. (2019). *Quantum physics experiment shows Heisenberg was right about uncertainty, in a certain sense*. The Conversation. Descargado de <https://theconversation.com/quantum-physics-experiment-shows-heisenberg-was-right-about-uncertainty-in-a-certain-sense-118456>
- Zorich, V. A. (2004). *Mathematical analysis* (Vol. II). Springer-Verlag.