UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Educación

RELACION ENTRE EL CONOCIMIENTO DEL LENGUAJE DE LA MATEMATICA Y EL RENDIMIENTO ACADEMICO EN DICHA MATERIA

FAUSTINO C. BOTACIO T.

Trabajo de investigación presentado para optar
al Grado Académico de Maestría en Medición,
Evaluación e Investigación Educativas

Guatemala, noviembre de 1975

Aprobada por:

(f)

Doctor Otto Gilbert - Asesor

Fecha de aprobación: noviembre de 1975.

A
Betzaida y Mayanin

Agradezco a las autoridades de la Universidad del Valle de Guatemala por haberme brindado la oportunidad de descubrir y abrir nuevos senderos en el campo de la investigación educativa; en forma particular al Dr. Otto Gilbert por su atinada asesoría y al Lic. Arcadio Madrid por su valiosa cooperación.

"... nos declaramos partidarios del método experimental como único medio de zanjar las disputas relativas a la práctica educacional, única forma de verificar adelantos en el campo pedagógico y único método para acumular un saber al cual puedan introducírsele mejoras sin correr el peligro de que se descarten caprichosamente los conocimientos ya adquiridos a cambio de novedades de inferior calidad".

CAMPBELL y STANLEY (1973; p. 11)

INDICE

LISTA DE DIAGRAMAS Y CUADROS

LISTA DE DIAGRAMAS Y CUADROS

INTRODUCCION

La presente investigación tiene como objeto determinar la relación que existe entre el conocimiento del lenguaje de la matemática (para expresar signos, símbolos, principios y conceptos) y el rendimiento académico del estudiante en dicha materia. La sustentación teórica se hace con base en la concepción psico-genética de J. Piaget, que supone un proceso de maduración intelectual multietápico no asociativo y un orden vertical de comunidad y jerarquía de conceptos para lograr conocimientos más complejos.

El contenido del lenguaje (oral o escrito) es una forma del pensamiento. Por medio de su estudio es posible conocer el significado que tienen los conceptos en cada individuo. En este contexto se utiliza la palabra lenguaje en su acepción más amplia: cualquier medio que se emplea para expresar las ideas. El término conocimiento implica: saber, dominar, distinguir y reconocer.

El marco teórico del estudio contiene comentarios de varios autores respecto a "estadios" en las operaciones matemáticas, formación de conceptos y principios en los escolares, resolución de problemas y jerarquización de etapas en el desarrollo de operaciones fundamentales. Posteriormente se describe la metodología utilizada a través de

la investigación y finalmente se comentan los resultados de las pruebas estadísticas utilizadas y se presentan algunas conclusiones y recomendaciones.

El análisis estadístico consiste en determinar la correlación entre el rendimiento académico en matemática (variable dependiente) y las variables independientes: cociente intelectual y conocimiento del lenguaje de la matemática. Se supone homogeneidad en cuanto al sexo, edad y nivel socio-económico, de los estudiantes.

Las conclusiones a que llega el estudio pueden ser de mucha utilidad para los educadores interesados por el mejoramiento del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática.

I. EL PROBLEMA

La sociedad en que nos desenvolvemos ha hecho esfuerzos notorios para incrementar la investigación en las ciencias naturales y ha dejado un poco al margen la búsqueda de explicaciones científicas a los hechos relacionados con la educación. Quizás este hecho explique la fórmula simplista tradicional de considerar al educador como el único responsable de toda la problemática del proceso enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, existen elementos intrínsecos en cada individuo que en una forma u otra están incidiendo sobre el proceso: desarrollo físico-motor y todo el intrincado proceso psicológico (intereses, valores, actitudes, etc.)

Cuando medimos atributos físicos, la tarea es relativamente sencilla, pero la situación es diferente cuando tratamos de cuantificar variables psicológicas. Al medir variables, comenta Magnuson (1972; p. 13), como independencia, neurotismo, capacidad de pensamiento lógico o de aptitudes de aprendizaje, nos encontramos con problemas de escalonamiento muy complejos. El problema de medición en psicología es considerablemente más complicado que en los campos donde se emplean instrumentos físicos comunes de medición. Esta es una de las razones que pueden explicar el por qué se tiende a obviar la investigación educativa cuando el elemento de estudio es la parte psíquica del sujeto.

Sería largo explicar todos los problemas que debe afrontar y resolver el que enseña matemática cuando trata de lograr los objetivos educativos que se propuso. No obstante, las estadísticas educativas indican altos índices de fracasos escolares en ésta materia tanto en el nivel primario como en el secundario. Es absurdo suponer que los educadores de esta disciplina tienen deficiente preparación académica o que la matemática es privilegio de la minoría.

El problema central del rendimiento académico en matemática puede estar ubicado en la comunicación educador-educando. Es obvio que la comunicación básicamente se encuentra organizada a base de conceptos que se expresan por medio del lenguaje oral o escrito. La palabra puede considerarse como la forma del pensamiento más cuantificable. Es la portadora de las concepciones intelectuales de cada individuo. Schúkina (1968; p. 19) dice: es precisamente la palabra lo que ayuda a alcanzar la esencia del fenómeno.

El problema del lenguaje como portador de conceptos y principios es más complejo de lo que pudiera parecer a simple vista porque en la enseñanza de la matemática no se trata de introducir conceptos aisladamente sin que exista una concatenación definida con otros conceptos que deben haber sido adquiridos con antelación. El conocimiento humano, comenta Rubinstein (1968; p. 45), es una categoría histórica; no puede reducirse a un acto momentáneo durante el cual un

determinado saber surge y se apaga al instante. La cognición, en el sentido estricto de la palabra, presupone continuidad y articulación de conocimientos. Shardakov (1968; p. 247) supone que para la asimilación de conceptos, por los escolares, es necesario establecer relaciones de comunidad y subordinación entre ellos; y Piaget afirma que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de reacciones anteriores y más primitivas y llega a identificar "estadios de desarrollo" y "niveles de equilibrio" en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos.

El educador pocas veces echa una mirada retrospectiva a fin de verificar si los conocimientos básicos (signos, símbolos, principios y conceptos) son suficientes y se encuentran prestos para trascender a concepciones más complicadas. Por otro lado, el estudiante debe haber cumplido satisfactoriamente ciertos "estadios" de desarrollo y niveles de equilibrio (que desgraciadamente no son ni asociativos ni conmutativos entre sí) para poder dar continuidad al aprendizaje.

Cabe suponer que en la medida en que el estudiante tenga bien afianzada toda la estructura conceptual básica y acorde con su desarrollo psico-genético, podrá escalar con más facilidad a los conocimientos que requieran mayor complejidad. Por otro lado, sería una violación de los principios psico-genéticos introducir nuevos elementos en el

aprendizaje cuando todavía no se hubiesen cimentado otros que se consideran imprescindibles en el proceso de encadenamiento.

II. MARCO TEORICO

Son muchas las teorías, autores y enfoques que tratan de explicar el problema de la enseñanza-aprendizaje, pero para fines de este estudio sólo se escogieron algunos señalamientos que se consideran preponderantes.

A. Estadios de las operaciones matemáticas

En este controvertido tema se toma como punto de partida la concepción teórica de la Psicología Genética de J. Piaget. En uno de sus razonamiento plantea: en el dominio de las operaciones intelectuales, asistimos a un doble fenómeno; por una parte vemos estructuras en formación, que podemos seguir paso a paso desde sus primeros lineamientos; y, por la otra, asistimos a su culminación, es decir, a la constitución de niveles de equilibrio. Tomemos como ejemplo la organización de los números enteros. Podemos seguir esta estructuración a partir de los números 1, 2, 3, etc.; hasta el momento en que el niño descubre la serie de los números y, al mismo tiempo, las operaciones aritméticas. En un momento dado esta estructura se encuentra construida y alcanza su nivel de equilibrio, pero este equilibrio es tan estable que los números enteros no se modifican más durante toda la vida, integrándose luego en sistemas más complejos (números fraccionarios, etc.). Nos encontramos en presencia, pues, de un dominio privilegiado, en el seno del cual podemos asistir a la formación de estructuras y a su

culminación, donde diferentes estructuras pueden sucederse o integrarse según múltiples combinaciones. (Piaget, 1973; p. 55).

Piaget distingue varios "estadios", llamándole así a los "cortes" que poseen los caracteres siguientes:

1. Para que haya un estadio hace falta, primero, que el orden de sucesión de las nociones sea constante. Se pueden caracterizar los estadios, en una población dada, por su cronología; pero la posible cronología es extremadamente variable y depende de la experiencia anterior de los individuos y no solamente de su maduración. Depende, sobre todo, del medio social que puede acelerar o retardar la aparición de un "estadio" o, incluso, impedir su manifestación.

2. El carácter integrador, o sea, que las estructuras construidas en una edad se convierten en parte integrante de las estructuras de la edad siguiente. Por ejemplo, el objeto se construye en el nivel sensorio-motriz y será un elemento integrante de las nociones de conservación posteriores, cuando hay conservación de un conjunto o de una colección, o también de un objeto cuya apariencia espacial se deforma. Las operaciones, que llamamos concretas, constituirán asimismo una parte integrante de las operaciones formales, en el sentido de que estas últimas constituirán una nueva estructura que se apoyará sobre las primeras a título de contenido. Las segundas constituyen así

operaciones efectuadas sobre otras operaciones.

3. Estructura de conjunto. Este "estadio" se caracteriza no por la yuxtaposición de propiedades desligadas entre sí, sino, por la estructura de agrupación. Estas estructuras se podrán caracterizar por sus leyes de totalidad, de manera que cuando se alcanza la estructura, se pueden determinar todas las operaciones involucradas en ella. Entonces, una vez que el niño haya alcanzado tal o cual estructura se sabe que será capaz de múltiples operaciones diferentes y, a menudo, sin ningún parentezco visible entre ellas, en una primera aproximación. En esto reside la ventaja de la noción de estructura: cuando son complejas permiten reducir a una unidad superior una serie de esquemas operatorios que no poseen relaciones aparentes entre sí; en este momento es la estructura de conjunto como tal lo que caracteriza el estadio.

4. Un estadio lo forman, por consiguiente, un nivel de preparación por una parte y de culminación por otra; por ejemplo: para las operaciones formales, es estadio de preparación abarca todo el período de los 11 a los 13-14 años y la culminación será el nivel de equilibrio que aparezca en ese momento.

5. Pero como la preparación de adquisiciones posteriores puede abarcar más de un estadio (con superposiciones diversas entre algunas preparaciones más cortas y otras más largas) y como, en segundo lugar, existen grados

diversos de estabilidad en las culminaciones, es necesario distinguir en toda serie de estadios los procesos de formación o de génesis y las formas de equilibrio final (en el sentido relativo). Sólo estas últimas constituyen las estructuras de conjunto que hemos mencionado bajo el aspecto de diferenciaciones sucesivas de tales estructuras (diferenciación de la estructura anterior y preparación de la siguiente).

B. La simbología en la matemática

Además de significar para el estudiante un lenguaje distinto todo el universo vocabular utilizado en la matemática (cociente, factor, sumando, radical, perímetro, círculo, área, volumen, base, arista, exponente, apotema, ángulo, diagonal, perpendicular, congruente, inecuación, línea, paralela, punto, raíz, adición, números primos, números racionales, etc.), se auna a esta condición el tener que interiorizar un código simbólico-conceptual más o menos uniforme para cada uno de los elementos que conforman todo el andamiaje de la matemática.

Sin apelar todavía a los resultados de sus investigaciones sobre la psicología del niño, Piaget presenta esta tesis para las matemáticas: "En una expresión cualquiera, como ($x^2 + y = z - u$), cada término expresa en definitiva una acción: el signo (=) expresa la posibilidad de una substitución; el signo (+) una reunión; el signo (-) una sepa-

ración; el cuadrado (x^2), la acción de reproducir determinado número de veces la unidad. Cada uno de los símbolos se refiere, pues, a una acción que podía ser real aunque el lenguaje matemático se limita a designarlos abstractamente bajo forma de actos interiorizados, es decir, de operaciones de pensamiento". (Aebli, 1966; p. 58)

Un alumno puede, por ejemplo, repetir correctamente (sin haber comprendido su sentido) la regla para resolver la adición de un binomio al cuadrado: "es igual al cuadrado del primer término, más dos veces el primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado". Si éste al repetir de memoria una regla no le encuentra sentido alguno, el enunciado verbal será un proceso puramente sensoriomotor que implica únicamente el movimiento de los órganos vocales y sensaciones auditivas. Cuando no puede asignársele un significado lógico a la regla se convierte ésta en un hábito sensorio-motor. El verdadero sentido del enunciado consistirá en una serie de operaciones interiorizadas y concatenadas que le permiten al sujeto hacer conexiones jerárquicas para llegar a su cabal comprensión. Según Aebli (1966; p. 71), comprender la regla significa ser capaz de evocar interiormente estas operaciones espaciales y numéricas. Las palabras y sus coordinaciones de conjunto o frases constituyen así signos y las operaciones sus significados. Los signos y los significados son actos psíquicos, los primeros son sensorio-motores, los segundos racionales,

los más frecuentemente interiorizados; y la coordinación del uno y del otro permiten al hombre expresarse y comprender la expresión del pensamiento ajeno.

Nos interesa considerar el símbolo, signo concreto aceptado por convención, como representante de lo simbolizado. El signo que sirve de símbolo puede ser una palabra, un gesto, un color, una señal o una representación gráfica. No obstante, la misión del lenguaje es considerable en el aprendizaje y en el desarrollo de la abstracción. El uso de una misma palabra o un mismo signo por el adulto, señala al niño la reaparición, en circunstancias variables, de una misma noción que ha de abstraerse. El empleo cada vez más adecuado, de un vocabulario para el niño o el principiante es índice de una mayor penetración en el significado del lenguaje y de un reconocimiento cada vez más patente de las correspondientes abstracciones. Cuando los elementos del lenguaje disponen de un apoyo suficiente en el espíritu, ayudan a descifrar el significado de nuevas expresiones simbólicas. La definición; aunque fundamental desde el punto de vista lógico, sólo es un medio de introducción en el código de un lenguaje (Gattegno, 1964).

C. La formación de conceptos matemáticos en los escolares

El mundo en que vive el ser humano se halla en gran medida organizado a base de conceptos, símbolos y principios; piensa sobre lo que le rodea y sobre su naturaleza intrín-

seca, se comunica con los demás y viceversa, mediante ellos. La adquisición de conceptos generales es lo que hace posible la enseñanza en todos sus niveles. El alumno puede por lo tanto, aprender mediante la transmisión de conocimientos orales o escritos y también comunicar sus intenciones, acciones y pensamientos a los demás, porque la palabra que utiliza hace surgir en sus oyentes conceptos comunes cuyo mensaje coincide con los de otros. Solamente gracias a la palabra, el individuo que manifiesta determinado interés penetra más y más en el proceso del conocimiento; llegando a ser dueño de conceptos que reflejan las relaciones y las leyes más profundas y más importantes del mundo que nos rodea, conceptos que es imposible imaginarse sin la palabra (Shúkina, 1968; p. 19).

En la forma más simple de aprendizaje que se puede observar o imaginar existe una relación invariable entre el estímulo y la respuesta, esta forma básica de aprendizaje se llama de asociación. Pero casi todo el aprendizaje verbal está enormemente influido por su significado, como lo han demostrado los experimentos sobre asociaciones verbales (Gagné, 1971; p. 5).

Gagné resume las cuatro condiciones para el aprendizaje de cadenas verbales de la siguiente manera:

1. El individuo necesita hacer una conexión que asocie la palabra con la imagen del objeto. En otras pala

bras, el individuo tiene que saber lo que es el objeto.

2. Ha de haber producido previamente una diferenciación de la respuesta.

3. Debe haber aprendido anteriormente una conexión simbólica en clave, si desea establecer la cadena con facilidad.

4. La cadena tiene que ser formada rápidamente dentro de una serie, de manera que cada estímulo-respuesta sea contigua en el tiempo con la siguiente. En otras palabras, la contiguidad de conceptos es necesaria para el aprendizaje.

Al referirse a la formación de conceptos en el alumno, el mismo autor señala que se necesitan tres condiciones:

1. La parte de estímulo de la cadena, mediante la cual se diferencia el concepto tiene que haber sido aprendido previamente. Así mismo, la clave interna de la cadena tiene que haber sido previamente adquirida.

2. Hay que presentar una variedad de situaciones estímulo-respuesta que incorporen la propiedad conceptual que se va a aprender, con objeto de que dicha propiedad pueda llegar a discriminarse en forma interna.

3. El aprendizaje de un nuevo concepto puede ser, en determinada circunstancia, un proceso gradual, debido a la variedad de diferentes situaciones estímulo-respuesta que requiere.

Todo maestro debe preguntarse, entonces, cómo puede provocar la adquisición de conceptos en el alumno. Una tesis fundamental de la psicología de Piaget da la base para la solución de este problema: "todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de reacciones anteriores y más primitivas". Cada operación tiene su historia. A lo largo de la génesis del pensamiento infantil, puede observarse cómo las operaciones se diferencian poco a poco a partir de esquemas de acción elementales para formar sistemas cada vez más complejos y más móviles, capaces de captar finalmente el universo entero. Debe apelar a los esquemas anteriores de que el niño dispone y a partir de ellos desarrollar la nueva operación (Aebli, 1966).

Surge entonces la pregunta respecto de por qué esas operaciones tienden o deben tender, según la concepción de Piaget a integrarse como sistemas totales. Piaget lo explica del siguiente modo: piénsese en la operación de considerar determinados objetos como miembros de una única clase. Piaget sostiene que esta operación sería imposible si no se poseyese con anterioridad una orientación clasificadora general. Para proponer una clase y conocerla como una verdadera clase lógica, antes que como una configuración conceptual y momentánea o una colección de elementos, uno debe tener la capacidad general de proponer otras clases, de sumar diversas clases superordenadas, de sustraer una clase de otra etc. En síntesis, la operación única y ac-

tualizada en el momento de proponer una clase no puede tener lugar sin que exista con anterioridad todo un sistema potencial de operaciones de clase, actualizable en el momento. En realidad, es imposible aprehender el concepto de clase sin comprender qué supone un sistema de clasificación, pues la clase particular es sólo una abstracción hecha a partir del sistema total (Flavell, 1971; p. 184).

El efecto del aprendizaje de conceptos es liberar al sujeto del control de estímulos específicos. No es sorprendente, pues, que la comprobación de la presencia del concepto consista en la demostración de que éste puede generalizarse (Gagné, 1966).

El concepto descubre conexiones y relaciones; para ello pasa de los fenómenos al conocimiento generalizado de su carácter, ganando así un carácter abstracto, no intuitivo. El contenido del concepto no siempre puede interpretarse como intuitivo pero se puede pensar o saber. Su determinación objetiva se descubre mediatamente y va más allá de los límites de inmediata intuición. La forma, en la cual existe el concepto es la palabra (Rubinstein, 1967).

Al referirse Shardakov (1968; p. 247) a los conceptos en los escolares, afirma que éstos también se transforman y desarrollan constantemente. Gracias al estudio sucesivo de estos conceptos en correlación con los de las distintas ciencias, los conocimientos iniciales se amplían, profundi

zan y alcanzan el nivel de conocimientos científicos. La asimilación por los escolares de los conceptos de tal o cual ciencia tiene lugar también según un sistema adecuado, mediante el descubrimiento de las relaciones que existen entre ellos. Los alumnos asimilan los conceptos mediante el establecimiento entre los mismos de relaciones de comunidad y de subordinación.

Mientras los escolares no sean capaces de establecer relaciones de comunidad y subordinación entre los conceptos que estudian, sus conocimientos no serán sistemáticos. Por ejemplo, la asimilación del concepto de "ángulo opuesto por el vértice", sólo será consciente y completa, según ha demostrado V. Zykova, cuando se estudie como un caso especial del concepto más amplio de ángulos que tienen vértice común.

Los conceptos se forman en los alumnos, como escribe Thompson, según un sistema vertical, de acuerdo con jerarquías de especie, género, clase y al mismo tiempo en un sistema horizontal en el que se comparan ampliamente las especies de un género determinado y los géneros de la correspondiente clase. Gagné (1971) denomina a este último sistema de transferencia "lateral", porque el individuo hace ciertas realizaciones que no son directamente aprendidas, sino similares a las adquiridas. A la segunda forma la denomina de transferencia "vertical" porque el estudian

te es capaz de transferir las capacidades subordinadas para trascender a contenidos nuevos y superiores.

La transferencia vertical se manifiesta cuando el sujeto adquiere más rápidamente una capacidad, al haber sido precedida del aprendizaje previo de capacidades subordinadas. El sujeto que ha aprendido previamente los conceptos de "punto" y "segmento" adquirirá más facilmente el de "triángulo" que el que no lo haya hecho así. En este caso, la cuestión de la cantidad de transferencia se convierte en la del tiempo empleado para aprender los conocimientos de orden superior, por parte del primer sujeto comparado con el segundo. Por otro lado, se puede también contrastar la proporción de sujetos que adquieran una capacidad de orden superior, con grupos de alumnos que hayan aprendido las capacidades subordinadas y otros que no lo han logrado. Es posible observar esta transferencia vertical a través de estructuras completas de aprendizaje, como se ha hecho en temas tales como la adición de números enteros (Gagné, Mayor, Garstens, y Paradise, 1962). La condición primaria para la transferencia vertical es el dominio de los conocimientos subordinados. Esta transferencia tiene poca posibilidad de ocurrir, a menos que se hayan adquirido las cadenas, conceptos y principios de orden inferior. La regla más importante respecto de la preparación de las condiciones de la transferencia vertical se puede enunciar así: "hay que asegurarse de que se han aprendido los conocimien

tos subordinados necesarios antes de usar la transferencia vertical como ayuda para el aprendizaje de los conocimientos superiores" (Gagné, 1971; p. 208).

D. Formación de los principios matemáticos

En el sentido formal, un principio es una cadena de dos o más conceptos o en otra forma, es una relación entre conceptos. Algunos sugieren que la mejor forma de aprender un principio es descubrirlo después de observar varios casos en que se aplique. En cualquier circunstancia, el método sería válido si el estudiante tiene conocimientos bien definidos de los conceptos primitivos que intervienen.

La adquisición de un principio se puede ejemplificar mediante la interiorización de la "idea" contenida en las proposiciones como "A entonces B"; "A mayor que X"; "Si y sólo si"; "a+0=0"; "$f=mc^2$" etc. No queda duda de que el alumno necesita adquirir, dominar, comprender y operar con gran número de principios fundamentales como requisito previo para facilitar la realización de procedimientos más complejos.

Pero en lo que respecta a un tema determinado, es evidente que se da una progresión en los tipos de aprendizaje desde uno muy simple a uno muy complejo. Se puede estar más o menos en desacuerdo con cuál sea la progresión exacta, pero en lo que se tiene que coincidir es en la necesi-

dad de una progresión en la que los principios que hay que aprender procedan de conceptos que sirvan de requisitos previos, dependiendo estos a su vez de discriminaciones multiples aprendidas con anterioridad, encadenamientos y conexiones del tipo estímulo-respuesta.. Los errores serios que se cometen en la enseñanza se deben al desconocimiento de la existencia de la jerarquía, cualquiera que sea su estructura detallada (Gagné, 1971; p. 164).

E. Resolución de problemas

Una vez adquiridos los principios fundamentales necesarios, el alumno es capaz de combinarlos lógicamente para obtener nuevos y superiores principios que a su vez se vuelven a combinar con viejas concepciones y así formar una cadena teóricamente indefinida.

Para ejemplificar el caso, tomemos el teorema de Pitágoras. Si se plantea el problema de buscar todos los elementos de un triángulo rectángulo, un simple encadenamiento previo que debe realizar el estudiante puede ser: identificar lo que es un triángulo; ubicar en un diagrama la hipotenusa y sus catetos; definir mentalmente qué es un cateto y qué es una hipotenusa; recordar la fórmula correcta; reconocer en la fórmula los tres elementos que intervienen; recurrir a principios de substitución; substituir; interpretar resultados, etc.

Una vez terminado de recorrer el camino de descodificación-codificación, es razonable pensar que el estudiante ha aprendido algo nuevo; no ha adquirido un mecanismo sino aprendió a demostrar en términos concretos la relación de igualdad implícita en la proposición. Piaget ha puesto en evidencia otra particularidad respecto a la solución de problemas, cuya aplicación didáctica nos parece importante; "la composición de las operaciones es "asociativa" (en el sentido lógico del término) es decir, que el pensamiento queda libre siempre para realizar rodeos y que el resultado con dos métodos diferentes es el mismo en ambos casos" (Aebli, 1966; p. 76).

¿ Cuántas situaciones son necesarias para que el alumno discrimine entre dos conceptos matemáticos en el camino para resolver un problema ? Cualquier respuesta que se dé es imprecisa. Si a un estudiante le deseamos transmitir el concepto de área, su primer paso consistirá en aprender la palabra autogenerada (área) por medio de estímulo-respuesta; después aprenderá a identificar áreas específicas; posteriormente será necesario ayudarlo a discriminar entre área y otros elementos que no lo son (perímetro, ángulo, arista, vértice, etc.); necesita además discriminar cuándo se trata de área (dos dimensiones) y no de volumen (tres dimensiones), identificarlas y diferenciarlas; además debe enseñársele a calcularla, cuando se trate de un triángulo, cuadrado, rombo, trapecio, etc. Hemos recorrido en forma

muy general el proceso jerárquico para llegar a comprender lo que es el área y resolver un problema relacionado con ella.

F. Jerarquización de etapas para poder llegar a operar con números naturales

Reconstruir toda la secuencia lógica que requieren algunos procesos matemáticos, por sencillos que sean, sería motivo de un minucioso estudio. Se presenta en el diagrama (1) la estructura teórica y simplificada de lo que podría ser la jerarquización de etapas que deben cumplirse para operar con números naturales. (Tomado de Gagné, 1971)

Fase 1: Aprendizaje por estímulo-respuesta. En el primer estadio los niños aprenden con frecuencia a contar de uno a diez y quizás superan este número antes de ir a la escuela. Más tarde pueden aprender muchas palabras técnicas como restar, sumar, cuadrado, triángulo, etc. Otra conexión simple que pueden hacer es usar lápiz y papel para marcar.

Fase 2: Encadenamiento. Las cadenas no verbales básicas para el aprendizaje matemático incluyen la escritura de letras, símbolos y dibujos geométricos. Algunos adquieren estas destrezas en la época pre-escolar y otros en los primeros años de estudio.

Fase 3: Asociaciones verbales. Aunque el niño "sepa" contar porque es capaz de repetir mecánicamente una serie

de números, son más útiles las asociaciones mediante las cuales los niños aprenden a decir el nombre de números escritos. Posteriormente aprenderá el nombre de nuevos caracteres simbólicos: radical, exponente, base, etc.

Fase 4: Discriminaciones múltiples. Algunas de las discriminaciones que el niño aprende, le permiten diferenciar un objeto específico de dos, de tres, de cuatro y así sucesivamente. Cuando se trata de números mayores tendrá que aprender a contar. Puede ser capaz de distinguir entre caracteres muy parecidos: + y x ; - de ÷ ; 8 de 00; 6 de 9 etc.

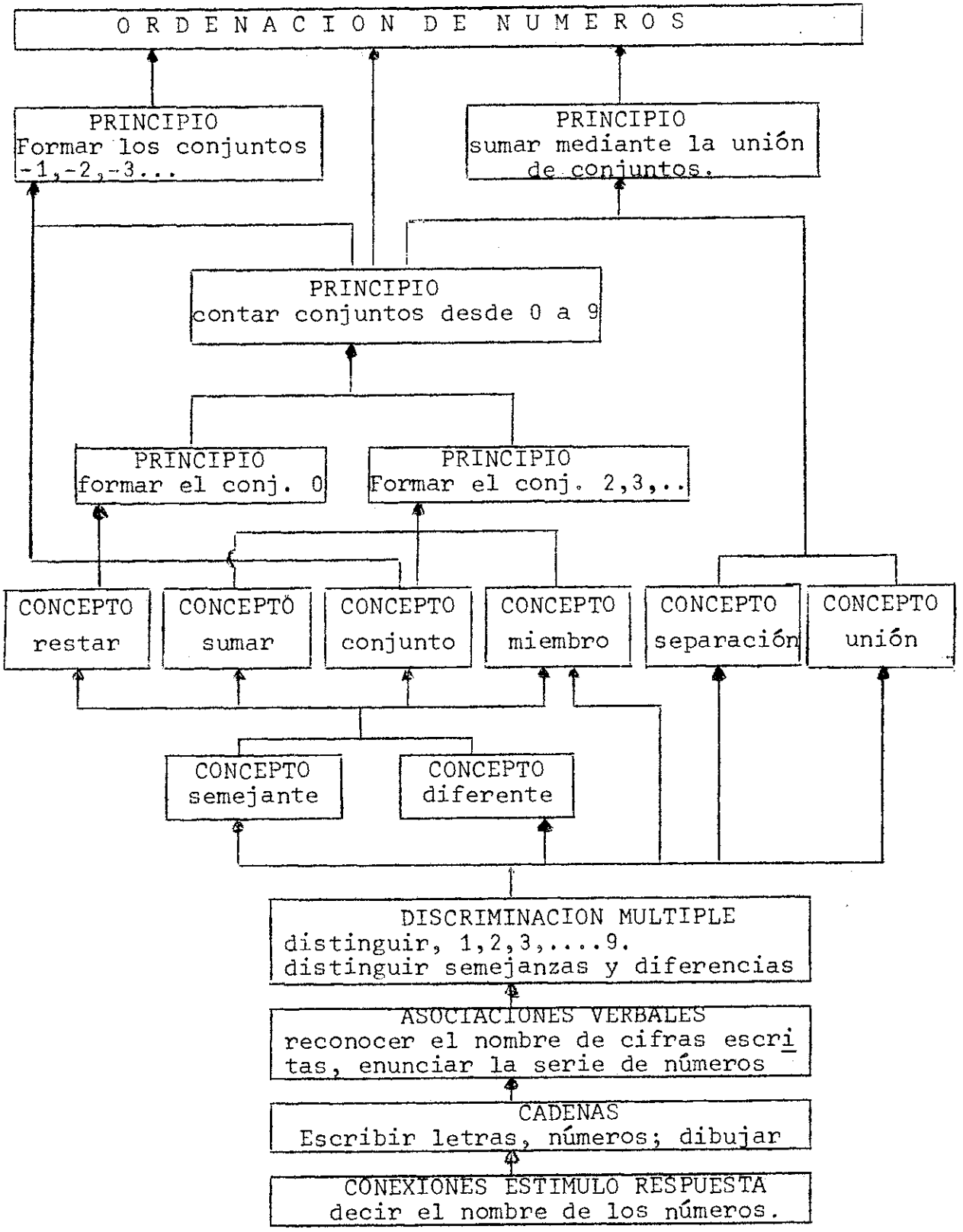
Fase 5: Aquí el niño es capaz de distinguir la semejanza y diferencia entre objetos, dibujos etc. En una etapa más avanzada adquiere el concepto de conjunto, abstraído intrínsecamente de una relación de cantidad considerando objetos específicos. Colateralmente aprende la noción de "elemento", "subconjunto", "unión", "intersección", "sustracción y adición de conjuntos", etc. Mediante este tipo de conceptualizaciones y asociaciones verbales, puede, posteriormente, nombrar a nivel consciente los números uno, dos, tres, ... y asignarles dichos nombres a cantidades de objetos independientes de otras características que ellos posean.

Fase 6: Aprendizaje de principios. Poseyendo los principios básicos de conjunto, elemento, unión y otros, es posible que el niño pueda adquirir principios como el siguiente: "en una secuencia de números, cada número superior se consigue adicionando uno al anterior". Esto le permitirá contar en una forma lógico-conceptual. Es posible que adquiera la noción de conjunto vacío aplicando el principio inverso de la secuencia numérica.

El diagrama 1 resume lo expuesto anteriormente. Indica gráficamente la sobreposición de fases para poder llegar a ordenaciones de números y operaciones numéricas.

Diagrama 1

Una estructura de aprendizaje de operaciones numéricas



III. METODOLOGIA

Esta investigación se realizó siguiendo el procedimiento que se presenta continuación.

A. Sistema de variables

En el proceso enseñanza-aprendizaje se interaccionan muchos elementos que en la mayoría de los casos son difíciles de segregar uno del otro. No obstante, sólo nos referimos a las variables que aparecen descritas aquí.

TIPOS DE VARIABLES	VARIABLES
VARIABLES INTERVINIENTES	- Nivel socio-económico - Edad - Sexo
VARIABLES INDEPENDIENTES	- Conocimiento del lenguaje Matemático - Cociente intelectual
VARIABLE DEPENDIENTE	- Rendimiento académico en Matemática

B. Definición de las variables

DEF. NOMINAL	DEF. REAL	DEF. OPERACIONAL	INSTRUMENTO
Conocimiento y dominio del lenguaje Matemático	Lenguaje Matemático	Itemes que miden el conocimiento del lenguaje Matemático	Test de conocimiento del lenguaje Matemático

C. Sistema de hipótesis

La hipótesis general del estudio se enuncia así:

1. Hipótesis general

(1) $H_{1(g)}$: El conocimiento del lenguaje matemático está en proporción directa con el rendimiento académico del estudiante en dicha materia.

si x= rendimiento académico del estudiante en matemática.

y= conocimiento del lenguaje matemático

Entonces:

$H_{1(g)}$: $r_{xy} \neq 0$ para $\alpha = .05$

2. Hipótesis alternativas u operacionales

(2) H_1: Existe diferencia estadísticamente significativa entre el rendimiento escolar promedio de los alumnos del grupo A y los del grupo B.

si $\overline{X}_A$ = Rendimiento medio del grupo A.

$\overline{X}_B$ = Rendimiento medio del grupo B.

Entonces:

H_1: $\overline{X}_A \neq \overline{X}_B$ para $\alpha = .05$

(3) H_1: Existe diferencia estadísticamente significativa entre el rendimiento medio del test de conocimiento de la simbología matemática entre el grupo A y el grupo B.

si $\overline{X}_A$ = Rendimiento medio del grupo A en el test de conocimiento de la simbología matemática.

$\overline{X}_B$ = Rendimiento medio del grupo B en el test de conocimiento de la simbología matemática.

Entonces:

H_1: $\overline{X}_A \neq \overline{X}_B$ para $\alpha = .05$

(4) H_1: Existe diferencia estadísticamente significativa en el cociente intelectual promedio de los alumnos del grupo A y los del grupo B.

si $\overline{X}_A$ = Promedio del cociente intelectual de los alumnos del grupo A.

$\overline{X}_B$ = Promedio del cociente intelectual de los alumnos del grupo B.

Entonces:

H_1: $\overline{X}_A \neq \overline{X}_B$ para $\alpha = .05$

(5) H_1: Existe correlación positiva estadísticamente significativa entre el conocimiento del lenguaje matemático y el rendimiento académico en esa materia.

si x = Rendimiento académico en matemática.

y = Conocimiento del lenguaje matemático.

Entonces:

H_1: $r_{xy} \neq 0$ para $\alpha = .05$

(6) H_1: Existe correlación positiva estadísticamente significativa entre el conocimiento del lenguaje matemático, el cociente intelectual y el rendimiento académico en dicha materia.

si x = Rendimiento académico en matemática.

y = Conocimiento del lenguaje matemático.

z = Cociente intelectual.

Entonces:

H_1: $R_{x,yz} \neq 0$ para $\alpha = .05$

D. Variables, escalas de medición y pruebas estadísticas

Los cálculos estadísticos de éste trabajo se hicieron con la computadora Hewlett Packard HP-65 y ellos fueron: Medias, desviaciones estándar, varianzas, correlaciones producto-momento, correlaciones múltiples, "t" de "student" y regresión múltiple.

El diagrama 2 presenta las posibles combinaciones de las variables consideradas en el estudio, el tipo de variable y las pruebas estadísticas respectivas.

Diagrama 2

Tipos de variables, escala de medición y pruebas estadísticas

VARIABLES	TIPO	VARIABLES	TIPO	PRUEBAS
RENDIMIENTO ACADEMICO (x)	DEPENDIENTE*	Test de conocimiento del lenguaje matemático (y)	INDEPENDIENTE	Correlación de Pearson. r_{xy} Prueba F.
		Cociente intelectual (z)		Correlación de Pearson r_{xz} Prueba F.
		Test de conocimiento del lenguaje matemático y cociente intelectual (y) y (z)		Correlación múltiple. $R_{x,yz}$ Prueba F.
		Test de conocimiento del lenguaje matemático y cociente intelectual (y) y (z)		Regresión múltiple. $Y' = a_o + a_1 Y + a_2 Z$
Test de conocimiento del lenguaje matemático. (y)	INDEPENDIENTE	Cociente intelectual. (z)	INDEPENDIENTE*	Correlación de Pearson r_{yz} Prueba F.

* Escala de intervalos

E. Instrumento de medición

Es necesario hacer una breve descripción del test que sirvió de base para cuantificar los conocimientos del lenguaje de la matemática porque por medio de él se obtuvo el valor de una de las variables independientes que más preponderancia tiene en el estudio.

1. Objetivos del instrumento

a. cuantificar el conocimiento de símbolos, signos y conceptos matemáticos;

b. medir la capacidad para hacer jerarquización de procesos sucesivos y lógicos para llegar a encontrar el resultado final de operaciones matemáticas;

c. medir el nivel de codificación y descodificación que posee el estudiante cuando se trata de traducir del lenguaje común al simbólico y viceversa; y

d. cuantificar el nivel de discriminación que posee el estudiante cuando se trata de manipular con los signos de operación.

2. Metodología para la confección del instrumento. Se hizo una lista exhaustiva de los signos, símbolos, principios y conceptos utilizados en los cursos de matemátemática hasta el nivel de primer año de secundaria. Para la selección final, se utilizó el criterio de más representatividad y uso. Las fuentes bibliográficas utilizadas fueron: libros de texto, otros libros de matemática (álgebra, aritmética y geometría) y los apuntes del profesor.

3. Aplicación preliminar y definitiva del instrumento.

Se hizo una aplicación previa del instrumento a fin de descubrir algunas características y posibles deficiencias en cuanto a: tiempo, ambiguedades, claridad en las instrucciones e ítemes, dificultad y errores técnicos. Con base en el análisis de estos resultados se ajustó la prueba definitiva. Se le aplicó la versión final del test a dos grupos de primer año de secundaria del Colegio Americano de Guatemala.

4. Descripción del instrumento. El test consta de 63 ítemes que se han de resolver en 45 minutos aproximadamente. Forman el contenido del examen: signos, símbolos, principios y conceptos de aritmética, algebra y geometría que se supone los estudiantes deben conocer hasta el nivel de I año.

Parte I: IDENTIFICACION DE SIMBOLOS. Dado un conjunto de símbolos matemáticos el alumno debía identificarlo y escribir su nombre en español.

Parte II: CODIFICACION DE EXPRESIONES MATEMATICAS. Dado un conjunto de frases en español que implican conceptos u operaciones matemáticas, el estudiante debe escribir su significado en símbolos matemáticos.

Parte III: DISCRIMINACION DE SIGNOS DE OPERACION. El alumno debe arreglar adecuadamente los seis signos fundamentales de operación, entre un trío de núme

ros, para obtener la respuesta que se le indica.

Parte IV: IDENTIFICACION DE CONJUNTOS DE NUMEROS E IDENTIFICACION DEL NOMBRE DE LOS TERMINOS DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES.

a. El alumno debe identificar y escribir el nombre del conjunto del cual algunos números son elementos.

b. Dado un conjunto de operaciones completas el alumno debe identificar el nombre de algunos términos que integran la proposición.

Parte V: DESCODIFICACION DE PRINCIPIOS ALGEBRAICOS. Dado algunos principios algebraicos, el alumno debe escribir el significado que para él tiene cada uno.

Parte VI: JERARQUIZACION DE OPERACIONES. El alumno debe explicar el orden en que resolvería las operaciones matemáticas que se le dan, a fin de llegar a su respuesta final.

Parte VII: CONCEPTUALIZACION. Se da una serie de conceptos matemáticos y el alumno debe definir cada uno de ellos.

IV. RESULTADOS

Los cuadros que aparecen a continuación resumen los datos estadísticos, resultados de las pruebas "t" y F y los valores de los coeficientes de la línea de regresión. Los resultados del grupo A se presentan simultáneamente con los del grupo B.

Cuadro 1

Valores de las medias ($\overline{X}$), desviaciones estándar corregida y varianzas corregidas (S_c^2) de las variables: rendimiento académico (x), conocimiento del lenguaje de la matemática (y) y cociente intelectual (z)

Estadísticos	Grupo A n=30			Grupo B n=32		
	Variables			Variables		
	x	y	z	x	y	z
$\overline{X}$	80.3	47.30	105.07	75.63	59.56	112.66
S	9.9	13.16	8.15	7.79	9.71	7.60
S_c	9.73	12.94	8.01	7.67	9.55	7.48
S^2	98.01	173.19	66.42	60.68	94.28	57.76
S_c^2	94.67	167.44	64.16	58.83	91.20	55.95

Las medidas de las variables (z) y (y) son mayores en el grupo B. Las varianzas de las variables del grupo B resultan menores que para el grupo A.

Cuadro 2

Resultados de la prueba "t" .05 para los grupos A y B cuando se comparan las respectivas medias de rendimiento escolar (x), test de conocimiento del lenguaje de la matemática (y) y cociente intelectual (z)

Variable	Grupo	n	gl	"t" crítica	"t" calculada	Decisión
Rendimiento Académico (x)	A B	30 32	60	2.00	2.15*	se acepta H_1
Test de conocimiento del lenguaje de la matemática (y)	A B	30 32	60	2.00	4.35*	se acepta H_1
Cociente intelectual (z)	A B	30 32	60	2.00	3.94*	se acepta H_1

* Valores estadísticamente significativos con una probabilidad de error de .05

Cuadro 3

Significación de las correlaciones r_{xy} (rendimiento académico y test de conocimiento de la simbología de la matemática); r_{xz} (rendimiento académico y cociente intelectual) y r_{yz} (test de conocimiento de la simbología matemática y cociente intelectual)

Correlación	Grupo	n	gl	r crítica	r calculada	Decisión
Rendimiento académico en matemática y conocimiento del lenguaje de la matemática (r_{xy})	A	30	28	.36	.89*	se acepta H_1
	B	32	30	.35	.89*	se acepta H_1
Rendimiento académico y cociente intelectual (r_{xz})	A	30	28	.36	.35	se rechaza H_1
	B	32	30	.35	.44*	se acepta H_1
Test de conocimiento del lenguaje de la matemática y cociente intelectual (r_{yz})	A	30	28	.36	.47*	se acepta H_1
	B	32	30	.35	.50*	se acepta H_1

* Valores significativos con un nivel de significación de .05

Cuadro 4

Resultados de la prueba $_{.05}F$ para las Correlaciones r_{xy} ; r_{xz} ; r_{yz} y $R_{x,yz}$ en los grupos A y B

Correlaciones	Grupo	gl	F crítico	F obtenido	decisión
Rendimiento académico y test de conocimiento del lenguaje de la matemática (r_{xy})	A	1 / 28	4.20	105.62*	se acepta H_1
	B	1 / 30	4.17	113.16*	se acepta H_1
Rendimiento académico y cociente intelectual (r_{xz})	A	1 / 28	4.20	3.90	se rechaza H_1
	B	1 / 30	4.17	7.20*	se acepta H_1
Test de conocimiento del lenguaje de la matemática y cociente intelectual (r_{yz})	A	1 / 28	4.20	7.94*	se acepta H_1
	B	1 / 30	4.17	10.00*	se acepta H_1
Correlación múltiple entre el rendimiento académico; test de conocimiento de la simbología matemática y C. I. ($R_{x,yz}$)	A	2 / 27	3.35	52.55*	se acepta H_1
	B	2 / 29	3.33	52.97*	se acepta H_1

* El valor obtenido es significativo con un nivel de 0.05

Cuadro 5

Valores estimados (a_0, a_1, a_2) para la ecuación de regresión lineal

Valores estimados	grupo A	grupo B
a_0	86.02	33.60
a_1	.76	.74
a_2	-.37	-.02

Los valores estimados se obtuvieron comparando los valores de la variable dependiente con las dos variables predictoras.

V. INTERPRETACION DE RESULTADOS, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El análisis que aquí se hace es ex post facto (Campbell y Stanley; 1973) en tanto que no existió manipulación previa de las variables ni asignación al azar de los sujetos sometidos a tratamientos experimentales. Esta es una de las razones que no permiten generalizar los resultados para la población.

A. Prueba "t" de student

La tabla 2 presenta los resultados del test de "t" para diferencias de medias ($\bar{X}$) entre los grupos A y B respecto del rendimiento escolar, de la prueba de conocimiento de simbología matemática y del cociente intelectual.

Si se toma un nivel de confianza de $\alpha = .05$, aceptamos la hipótesis alternativa (H_1) de que hay diferencias significativas. Esto nos lleva a decidir que sería estadísticamente incorrecto hacer un análisis conjunto donde estén interactuándose los factores que condicionan a los grupos.

1. Se puede suponer que existen factores externos (de selección, por ejemplo, para ubicar a los estudiantes en los respectivos grados) que hacen diferenciar significativamente a los dos grupos respecto de las tres variables estudiadas.

2. En cuanto a la variable dependiente (rendimiento

académico en matemática) puede suponerse que la interacción: maestro-método-alumno está ejerciendo alguna influencia en la calidad de los productos del aprendizaje.

B. Correlaciones

1. Correlación r_{xy}. El cálculo estadístico para r_{xy} (Cuadro 3) indica alta correlación (para cada uno de los dos grupos) entre el rendimiento académico en matemática y el test de conocimientos del lenguaje en esa materia. Se acepta la (5) H_1 al nivel de $\alpha = .05$. Se pueden hacer al respecto las siguientes suposiciones:

a. El test de conocimiento del lenguaje de la matemática aplicado, es una buena medida para detectar y/o estimar el rendimiento académico en ella.

b. El conocimiento del lenguaje matemático está en proporción directa (correlación positiva) con el rendimiento académico en esa materia; indicando que mientras más conceptos primitivos afines con la materia tenga un estudiante, más posibilidades tendrá de escalar estratos superiores.

c. De la igualdad de valores para la correlación (r_{xy}) del grupo A y B, pese a las diferencias estadísticamente significativas encontradas en el test de "t", en cuanto al rendimiento escolar, se puede suponer que las diferencias conceptuales detectadas entre los 2 grupos de alumnos y medidas por el test de conocimiento de la simbología matemática, son independientes del educador.

2. Correlaciones r_{xz} y r_{yz}. Se aceptan las hipótesis operacionales para estas dos correlaciones tanto para el grupo A como para B, con un nivel de significación de $\alpha = .05$. Lo cual indica una correlación significativa no atribuida al azar. (Cuadro 3)

Si hay diferencias significativas entre el cociente intelectual y el test de conocimiento de la simbología matemática puede hacernos suponer que la habilidad mental del sujeto (entre otros factores) está influyendo individualmente en el logro de los estadios operativos de los conceptos matemáticos. La correlación r_{xz} no es objeto de este estudio; aunque sí necesaria para cálculos ulteriores.

3. Coeficiente de correlación múltiple. Al relacionar la variable dependiente con la combinación lineal de las dos independientes encontramos altos valores para $R_{x,yz}$ tanto para el grupo A como para el B. Los peligros que implica hacer afirmaciones categóricas con este tipo de coeficiente, nos limita a suponer que tanto el cociente intelectual como el conocimiento de la simbología matemática ejercen conjuntamente fuerte influencia sobre el rendimiento académico.

C. Regresión múltiple

La ecuación de predicción encontrada es:

$Y'_A = 86.02 + .76\,y - .37z$

$Y'_B = 33.60 + .74y - .02z$

Es lógico pensar que existen muchos factores que pueden estar influyendo en el rendimiento académico del estudiante aparte de las variables utilizadas para el cálculo de los coeficientes de la ecuación predictora.

Esto explica el por qué se debe manejar con mucho cuidado la estimación univariada de la variable predicha (rendimiento académico) respecto de la combinación lineal de las variables independientes.

Si se desea estimar el rendimiento académico en matemática a partir del cociente intelectual y del conocimiento de conceptos matemático debe tenerse el cuidado de circunscribir los resultados a los grupos estudiados.

D. Conclusiones

De los resultados del estudio podemos sacar algunas conclusiones:

1. Los resultados estadísticos muestran una proporción directa (correlación positiva) entre el rendimiento académico en matemática y el conocimiento del lenguaje de esa materia.

2. Concuerdan estos resultados con los planteamientos de la psicología-genética, cuyo principio fundamental es la gradación inexorable en el aprendizaje de signos, símbolos, principios y conceptos dentro de la individualidad intrínseca de cada persona.

3. Los planteamientos psicológicos esbozados anteriormente concuerdan con los resultados estadísticos en

contrados porque se demuestra que mientras mayor es el conocimiento conceptual que posea el alumno mayor será su posibilidad de éxito académico.

4. Los resultados estadísticos de la correlación múltiple concuerdan con la hipótesis alternativa planteada. El cociente intelectual interactuando con el conocimiento del lenguaje matemático parece influir considerablemente en el rendimiento académico en esa materia.

E. Recomendaciones

1. El proceso enseñanza-aprendizaje puede mejorarse si el educador es capaz de descubrir fallas en la formulación verbal o escrita de los fundamentos matemáticos básicos. Se recomienda echar una mirada retrospectiva antes de introducir un tema nuevo y verificar si todos los conocimientos y capacidades se hallan prestas para poder trascender a nuevas etapas o estadios de conocimiento.

2. Si el docente de la matemática pretende obtener resultados óptimos en el rendimiento académico, necesita conocer todo el intrincado mecanismo del proceso psico-genético necesario para la aprehensión permanente de signos, símbolos, principios y conceptos.

3. Se recomienda continuar el estudio de este tema con enfoques que abran nuevos senderos a fin de mejorar la enseñanza de la matemática.

BIBLIOGRAFIA

Aebli, H. Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Buenos Aires, Kapelusz, S.A., 1966.

Campbell D. y J. Stanley. Diseños Experimentales y Cuasi experimentales en la investigación social. Buenos Aires, Amorrorto Editores, 1973.

Clauss, G.; Hiebsch, H. Psicología del niño escolar. México, D.F., Grijalbo, S.A., 1966.

Downie, N. M. y Heath, R.W. Métodos estadísticos aplicados. México, D.F., Harla, S.A., 1974.

Eicholz, R.; Phares, G.; O'daffer y otros. School mathematics I. Canada, Addison-Wesley publishing Co., 1967.

_____; Phares, G.; O'daffer y otros. School mathematics II. Canada, Addison-Wesley publishing Co., 1967.

Flavell, J. La psicología evolutiva de Jean Piaget. Buenos Aires, Paidós, 1971.

Gagné, R. M. Las condiciones del aprendizaje. España, Aguilar, S.A., 1971.

Glass, G. y J. Stanley. Métodos estadísticos aplicados a las ciencias sociales. España, Prentice Hall International, 1974.

Kerlinger, F. N. Foundations of Behavioral Research. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

Komisar, P. y Macmillan C.J.B. Conceptos psicológicos en la Educación. Buenos Aires, El Ateneo, 1972.

Nicolet, J.L.; Gattegno, C.; Biguenet, A. y otros. El material para la enseñanza de las matemáticas. Madrid, Editorial Aguilar, S.A., 1964.

Piaget, J.; Gattegno, C. y otros. La enseñanza de las matemáticas. España, Editorial Aguilar, S.A., 1963.

Piaget, J.C. Estudios de psicología genética. Argentina, Editores EMECE, 1973.

Piaget, J.; Inhelder, B. Psicología del niño. Madrid, Ediciones Morata, S.A., 1972.

Rubinstein, S.L. El ser y la conciencia. México, D.F., Editorial Grijalbo, S.A., 1968.

_____; Principios de Psicología General. México, D.F., Grijalbo, S.A., 1967.

Schúkina, G.I. Los intereses cognoscitivos en los escolares. México, D.F., Grijalbo, S.A., 1968.

Shardakov, M.N. Desarrollo del Pensamiento en el escolar. México, D.F., Grijalbo, S.A., 1968.

Travers, R. M. Introducción a la Investigación Educacional. Buenos Aires, Paidós, 1971.

Van Dalen, D. B.; Meyer, W.J. Manual de Técnica de la Investigación Educacional. Buenos Aires, Paidós, 1971.

Wirsma, W. Research methods in education. New York, L.B. Lippincott Company, 1969.