

PRESENTACION AXIOMATICA

DE LA

MECANICA DE FLUIDOS

Aprobada por el Comité

Dr. Eduardo Suger

Dr. Robert N. Little

Dr. Bernardo R. Morales F.



I N D I C E

I.	INTRODUCCION	1
	A. Facetas lingüística, lógica y semántica	3
	1 Lingüística	3
	2 Lógica	4
	3 Semántica	4
	a) Relación de designación	4
	b) Relación de referencia	4
	c) Extensión e Intensión	5
	d) Significado	6
	e) Sinonimia	8
	f) Verdad	8
	B. Variables y Constantes	10
	C. Hipótesis	10
	1 Hipótesis especiales	11
	2 Restricciones	11
	3 Hipótesis comprensivas	11
	4 Hipótesis básicas	12
	D. Leyes.	12
II.	TEORIAS	13
	A. Enunciados	13
	B. Características	13
	C. Requerimientos formales y semánticos	15
	1 Consistencia interna	16
	2 Consistencia Externa	16
	3 Independencia de Primitivas	16
	4 Independencia de Axiomas	17
	5 Unidad de Referencia	17
	6 Interrelación conceptual	17
	7 Cerradura semántica	18
	8 Homogeneidad Semántica	18
III.	AXIOMATICA FISICA	19
	A. Antecedentes	19
	B. Base primitiva P	20
	C. Conjunto de Conceptos C	21
	D. Base axiomática A y Fórmulas F	21
	E. Interpretación de la Teoría	23
	F. Construcción de la Teoría	26
	G. Test de la Teoría	27



IV.	PROTOFISICA	30
V.	SISTEMAS FISICOS GENERALES	35
	A. Sistema Físico	35
	1 Suma Física o Yuxtaposición (+)	35
	2 Producto Físico o Superposición (x)	36
	3 Definiciones	37
VI.	MECANICA DE FLUIDOS	39
	A. Conocimientos Previos	42
	B. Base Primitiva P	
	C. Conjunto de Conceptos C	44
	D. Base Axiomática A	48
	1 Axiomas Cronológicos	48
	2 Axiomas Geométricos	48
	3 Axiomas de Fluídos	48
	4 Axiomas Cinemáticos	50
	5 Axiomas Dinámicos	51
	E. Desarrollo de algunas Consecuencias	52
	1 Desarrollo de Continuidad	52
	2 Ley de Movimiento de Newton-Euler	57
	3 Hidrostática	62
	4 Ausencia de corrientes de convección	66
	5 Ecuación de Bernoulli	69
	6 Flujo de Energía	72
	7 Flujo de Momentum	74
	8 Conservación de Circulación	76
	9 Flujo Potencial	78
	10 Flujo Rotacional	84
	11 Flujo Incomprensible	86
	12 Fuerza sobre un cuerpo sólido en flujo potencial	97
	13 Viscosidad	104
	14 Ecuaciones para flujo viscoso	108
	F. Consideraciones finales	119
VII.	APENDICES	124
VIII.	BIBLIOGRAFIA	131

PRESENTACION AXIOMATICA

DE LA

MECANICA DE FLUIDOS

por

Jorge Ramiro Antillon- Matta
Ingeniero Civil, Engenheiro Sanitarista, Ed. M.

Disertación

Presentada en la Facultad de Ciencias y Humanidades
de la

Universidad del Valle de Guatemala
como parte de los requisitos
para la obtención del grado

de
Doctor

Universidad del Valle de Guatemala
Guatemala, 1 de octubre de 1976

I. INTRODUCCION

El objeto principal de este trabajo es examinar las suposiciones de la Mecánica de Fluidos, discutir el estado de sus conceptos, fórmulas y procedimientos físicos más importantes para buscar inconsistencias o vaguedades que pudieran existir en ella. Consiste pues en realizar un análisis crítico de los fundamentos de esta rama de la Física, de sus ideas básicas y formular una teoría de manera explícita y ordenada, es decir axiomática.

Por su estructura, los fundamentos de toda ciencia son susceptibles de cambio. Todo científico está conciente que los cimientos de su ciencia (y de las demás) no son rígidos, inmutables, autosuficientes ni eternos. Muy al contrario, son de carácter transitorio y provisional y sujetos a cambio, pero, de todas maneras constituyen las bases fundamentales en un tiempo dado.

También cabe agregar que los sistemas de bases axiomáticas, no constituyen compartimientos estancos sino que son mutuamente dependientes.

La razón para preocuparnos de los fundamentos es que mientras más los conocamos tendremos una mejor comprensión de lo que ya hemos alcanzado. Y una comprensión clara permite no sólo entender las limitaciones de nuestra ciencia sino también conocer la extensión de su validez y, mejor aún, sugerir maneras de mejorarla y ampliarla y, algunas veces, también sugerir nuevos enfoques.

El estado actual de la investigación de los fundamentos se encuentra subdesarrollado y poco científico en algunas ramas de la ciencia y la razón es que existen ciertos obstáculos para su desarrollo. Quienes los estudian son filósofos pero no científicos o viceversa. Pero este último caso no es tan grave pues lo que el científico necesita es poseer una actitud crítica y alerta y un sentido o gusto por los problemas fundamentales.

Además, se confrontan otros problemas y dificultades pues, a veces, ambos tienen prejuicios, es decir que tanto unos como otros aceptan y comparten dogmas tales como la desconfianza en nuevas ideas que conlleva la deificación de la experiencia pura. Tienen la creencia que la experiencia puede y debe, per se, definir cada concepto físico, que cada teoría es justamente una racionalización, a posteriori, de la experiencia y que las teorías no son

inventadas sino inferidas de datos por inducción.

Si tal fuera el caso, bastaría con llenar de datos experimentales las computadoras y ponerlas a construir teorías.

Y, por último, los científicos experimentan disgusto al ser criticados ya sea porque consideran que la crítica es estéril o porque creen que es poco cortés.

Aquí hemos adoptado una actitud abierta tanto para crear como para recibir crítica de manera que en lo posible nos hemos liberado de esas desventajas y hemos tratado de hacer un estudio concienzudo de los conceptos y enunciados en los que se basa la Mecánica de Fluidos, de arreglar los en forma lógica y convincente y establecer el status de sus conceptos, aseveraciones, axiomas, teoremas, definiciones, datos y teoría.

Analizar no es una tarea popular; a los filósofos les disgustan los detalles científicos y técnicos y, a los científicos no les agrada investigar sobre lo ya realizado sino avanzar incesantemente y olvidan, a veces, profundizar sobre lo que ya se ha hecho y analizarlo críticamente para estar en mejor posición para los nuevos avances. Por cierto que esto último no es tan problemático puesto que, mucha de la investigación en la frontera de la ciencia es casi libre de fundamentos.

Y al final de cuentas ¿Qué son los fundamentos?

Pues los fundamentos de una ciencia o de una rama de ella son el conjunto de sus suposiciones, tanto tácitas como explícitas, que organizadas lógicamente en el contexto de una teoría axiomática permiten que el trabajo analítico sea más preciso y eficiente.

En nuestro estudio confrontaremos dos tipos de problemas. Uno semántico, el de relacionar las ideas físicas con la realidad y, otro metodológico, relacionar las ideas con hechos o con procedimientos que se someten a test, es decir, con el experimento. Además del problema que siempre confronta el investigador acerca de la extensión que debe darle a su trabajo. Esto último es de fácil solución puesto que hemos supuesto que una gran cobertura es poco importante comparada con un análisis crítico detallado.

A. Facetas Lingüística, Lógica y Semántica

Toda idea tiene un contenido o significado que debe ser expresado en un lenguaje lógico. Así, el análisis general del discurso físico presenta tres facetas perfectamente definidas: lingüística, lógica y semántica.

1. Lingüística

Consiste en el análisis del lenguaje (cuerpo altamente organizado de signos) y debe ser anterior a las otras dos. Todo lenguaje debe estar diseñado para transmitir ideas con claridad; en especial, el lenguaje físico, es un simbolismo inventado para transmitir ideas acerca de objetos físicos tales como partículas, ondas, campos, etc.

Cada rama de la física tiene su propio lenguaje cuyo vocabulario es un conjunto de signos y términos. Tomemos el lenguaje de la Mecánica de Fluidos; su vocabulario consiste de palabras ordinarias como instante, dirección, punto, símbolos que corresponden a la Física en general (p = momentum lineal, por ejemplo), términos propios de ella (viscosidad dinámica η , por ejemplo) y símbolos matemáticos.

Es pues en parte ordinario y en parte técnico, con reglas morfológicas del lenguaje étino más la parte especial matemática que emplea esta rama de la Física.

2. Lógica

Cada lenguaje tiene su propia gramática; la que a nosotros nos interesa es la gramática del lenguaje de la Física que es la sintaxis general de las ideas científicas, es decir, la lógica formal, simbólica o matemática que trata con ideas, no con hechos. Y sólo con un aspecto de las ideas: su forma lógica o sea su estructura.

Si bien es cierto que la ciencia no se puede librar de la época, también es verdad que la lógica sólo es insuficiente para el trabajo científico, puesto que siempre es necesario hacer uso de inferencias no deductivas, como razonamientos plausibles, analogías e inducciones de varias clases.

3. Semántica.

Por último estudiaremos el aspecto semántico que trata con los conceptos de designación, referencia, extensión, intensión, sinonimia y verdad

a) Relación de designación. La relación de designación o de nombrar es binaria y asimétrica. En este trabajo la usaremos así:

Sean: 'y' un símbolo que es elemento de algún conjunto de símbolos S

'o' el designatum que es elemento de algún conjunto de objetos O

Diremos: " y designa a o " , o más corto Dyo, o como comunmente se usa $y \stackrel{d}{=} o$

b) Relación de referencia. Un poco más profundo es el concepto semántico de referencia que trata con objetos conceptuales y que en Física sirve para salvar el vacío que hay entre los conceptos "ideas" y "hechos".

Sean: 'o' un elemento del conjunto de objetos O

'c' un elemento del conjunto de conceptos C

Diremos: " c se refiere a o " , " c representa a o " o más corto Rco.

Cuando 'o' es un sistema físico (ver cap V) esperamos que c modele

o refleje a 'o' y escribimos $c \stackrel{m}{=} o$, que se lee " c modela a o " , " c refleja a o " .

Es claro que $\stackrel{m}{=}$ es una subrelación de R y ambas van del conjunto de objetos O al conjunto de conceptos C, donde $C \subset O$, puesto que se toma el sentido filosófico de objeto y no el popular.

Ejemplos:

m e alfabeto = un conjunto de símbolos

masa e conjunto de conceptos físicos = conjunto de objetos

para expresar " m designa masa " diremos D m masa o $m \stackrel{d}{=} \text{masa}$

donde $\stackrel{d}{=}$ quiere decir "designa", "igual por designación".

F = conjunto de todos los fluídos reales = conjunto de objetos

f = un símbolo e alfabeto = conjunto de objetos

D f fluído real; $f \stackrel{d}{=} \text{fluído real}$

F = { f } = conjunto de todos los fluídos reales

M = conjunto de manifolds m = conjunto de conceptos

Para expresar "m se refiere a f", "m modela a f", "m refleja a f" diremos

Rmf o $m \stackrel{m}{=} f$, que quiere decir "m representa a un fluído real "

$\stackrel{m}{=}$ es pues "igual por referición".

Dentro de una teoría dada tanto R como $\stackrel{m}{=}$ son funciones, así:

$R : O \longrightarrow C$ y también $\stackrel{m}{=} : O \longrightarrow C$

puesto que $\forall o \in O \exists_1$ compañero conceptual $c \in C$ tq $c \stackrel{m}{=} o$
 No así en toda la física en que R y $\stackrel{m}{=}$ no son funciones ya que en ese contexto puede haber más de un concepto c para el mismo objeto o .

Debemos tener presente que la relación de referencia R es la unión de la referencia inmediata R_i y la mediata R_m

$$R = R_i \cup R_m$$

donde R_i relaciona c (concepto) con m (concepto) modelo teórico del objeto físico f . Y R_m relaciona c (concepto) con f (objeto físico) ;

como ejemplo designemos la vorticidad(concepto) con la letra Ω , un fluido ideal (concepto) por m y un fluido real de baja viscosidad (objeto físico) por f , así:

$m \stackrel{d}{=} \text{fluido ideal}$, $Dm \text{ fluido ideal}$; $Df \text{ fluido real}$; $D\Omega \text{ vorticidad}$
 $f \stackrel{d}{=} \text{fluido real de baja viscosidad}$; $\Omega \stackrel{d}{=} \text{vorticidad}$
 $m \stackrel{m}{=} f$, entonces

$$R_i \Omega m, \Omega \stackrel{m}{=} \text{vorticidad de } m$$

$$R_m \Omega f, \Omega \stackrel{m}{=} \text{vorticidad de } f$$

$$R = R_i \cup R_m = R_i \Omega m \cup R_m \Omega f$$

c) Extensión e intensión. Sea $c \in C$ un concepto que pertenece a un conjunto de conceptos C ; definimos "extensión de c " como la colección de referentes de c .

La extensión de fluido es el conjunto de todos los fluidos.

La extensión de masa es el conjunto de todos los objetos que poseen inercia.

"Intensión" lo definimos así: "intensión de c " es el conjunto de propiedades de c .

Intensión de fluido = { presión, volumen, temperatura, número de moléculas, densidad, ... }

Intensión de masa = { inercia, cantidad de materia, ser afectada por campo g , ... }

Los dos conceptos anteriores, que se abrevian $E(c)$ e $I(c)$, permiten construir definiciones más completas.

Por ejemplo, en Física decimos que algo es cuerpo si es localizable y tiene masa, así: sea P el conjunto de todos los objetos físicos

$$\forall x \in P, Cx \stackrel{df}{=} Lx \wedge Mx$$

que leemos: todo x que pertenece al conjunto de objetos físicos P es cuerpo si posee las propiedades de localizabilidad y masa.

De modo que $I(\text{cuerpo}) = \{\text{localizabilidad, masa}\}$

Además, los conceptos de extensión e intensión permiten definir otros conceptos como son significado y sinonimia.

d) **Significado.** Decimos que significado de un símbolo es la pareja ordenada extensión-intensión del concepto c simbolizado, así:

$$Dsc \Rightarrow [\text{Sig } s \stackrel{df}{=} \langle E(c), I(c) \rangle]$$

Y naturalmente, s carece de significado cuando la extensión e intensión del concepto que designa son vacías, lo cual equivale a decir que c no es un concepto.

Brevemente $Dsc, E(c) = \{\emptyset\} \wedge I(c) = \{\emptyset\} \Rightarrow c$ no es concepto o también $Dsc, \nexists \text{Sig } s \Leftrightarrow \nexists c \in C,$ o más simple

$$Dsc \exists \text{Sig } s \Leftrightarrow \exists c \in C$$

El concepto significado es contextual es decir que debe estar referido al lenguaje en el cual ocurre el símbolo. Además, "significado" es incompleto puesto que "extensión" también es incompleto ya que es imposible que podamos examinar toda la colección de referentes del concepto de que se trate; todas las muestras de fluidos, por ejemplo.

Si E(c) e I(c) se refieren exclusivamente a objetos físicos decimos que el símbolo tiene significado físico.

I(c) debe contener predicados puramente físicos en tanto que no requerimos que E(c) tenga existencia real pues permitimos que sea hipotética.

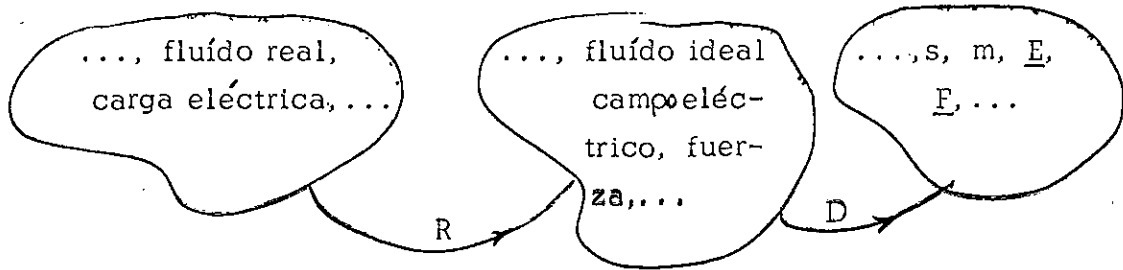
El significado físico es directo ssi existe por lo menos un c e C y un p e P tales que Dsc y Rcp. Y es indirecto ssi s depende de otro u otros signos s' tales que tienen significado directo.

Ejemplo de significado físico directo

$P = \{\text{objetos físicos}\}$

$C = \{\text{conceptos}\}$

$S = \{\text{símbolos}\}$



$m \stackrel{d}{=} \text{fluido ideal}, \quad Dm \text{ fluido ideal}$

$f \stackrel{d}{=} \text{fluido real}, \quad Df \text{ fluido real}$

$m \stackrel{m}{=} f, \quad R_m mf$;

$E(m) = \{\text{fluidos ideales}\}$

$I(m) = \{\text{disipación de energía, conducción de calor, ...}\}$

De acuerdo con nuestra definición "m" tiene significado directo.

Analícemos qué tipo de significado tiene el concepto "campo eléctrico":

Tomemos $D\underline{E}$ campo eléctrico

$D\underline{F}$ fuerza eléctrica

$D\underline{q}$ carga eléctrica

$\text{Sig } \underline{E} \stackrel{df}{=} [\langle E(\underline{E}), I(\underline{E}) \rangle]$; $E(\underline{E}) = \{\text{espacio, cuerpos, ...}\}$

$I(\underline{E}) = \{\text{intensidad, dirección, ...}\}$

$\text{Sig } \underline{E}$ es indirecto puesto que depende de los conceptos fuerza eléctrica y carga.

Analícemos el tipo de significado de densidad (de masa):

Tomemos $D\underline{\rho}$ densidad

Dm masa

DV volumen

$\text{Sig } \underline{\rho} \stackrel{df}{=} [\langle E(\text{densidad}), I(\text{densidad}) \rangle]$; $E(\text{densidad}) = \{\text{cuerpos}\}$

$I(\text{densidad}) = \{\text{magnitud, dimensión, ...}\}$

$\text{Sig } \underline{\rho}$ es indirecto puesto que depende de m y V

También debe tomarse en cuenta que para que un símbolo tenga significado físico no es necesario que:

- i) exista una cosa real a la cual se refiera la idea (p. ej. "centro de masa de un anillo")
- ii) la extensión no sea vacía (i. e. $E(c) \neq \emptyset$) p. ej. "capa material de ancho cero"

e) Sinonimia. Existe sinonimia cuando dos conceptos tienen significados iguales: $Dsc \wedge Ds'c' \Rightarrow [\text{Sin } ss' \stackrel{\text{df}}{=} E(c) = E(c') \wedge I(c) = I(c')]$ es decir, cuando las parejas ordenadas que definen el significado son iguales.

"sinonimia" al igual que "significado" es contextual e incompleta. Y esto también puede decirse de cualquier objeto conceptual científico, puesto que si se le encuentra interesante y se le examina más a fondo, de seguro se modificarán su extensión e intensión.

Entonces, todos los conceptos científicos son vagos, pero esta vaguedad se va eliminando poco a poco a medida que la ciencia avanza. Sin embargo, es seguro que nunca será eliminada totalmente.

f) Verdad. Dados una proposición $c \in C$, un objeto $o \in O$ y una relación de referencia R entre c y o , decimos que c es verdadera o que lo que predica acerca de o es verdadero si la pareja ordenada $\langle c, o \rangle$ satisface la relación R .

Verdad es, entonces, un caso de satisfacción de una relación de referencia. R puede ser satisfecha o no por el par $\langle c, o \rangle$ y la cuestión particular si $\langle c, o \rangle$ satisface o no a una R es científica, no filosófica.

$\sqrt{2}$ es racional. No es verdadera puesto que $\langle \text{racional}, \sqrt{2} \rangle$ no satisface la relación de referencia "ser"; es formal puesto que no necesita de referencia externa.

Todo flujo real es compresible. Aquí $\langle \text{compresible}, \text{flujo real} \rangle$ satisface la relación de referencia "ser". Es una verdad factual.

Si sucede que o es un objeto conceptual entonces Rco se mantiene en el nivel conceptual y nace así la idea de verdad formal o adecuación de una idea a otra. Todas las verdades lógicas y matemáticas son formales puesto que no necesitan de referencia externa.

Si o es un objeto físico entonces Rco es heterogénea, en el sentido que no es directa puesto que o debe ser descrito por un concepto. Tenemos entonces Rcc' con $c' \stackrel{\text{m}}{=} o$. Estamos en el caso de una verdad factual que debe ser evaluada tanto interna como externamente.

La verificación interna se hace estableciendo la coherencia con otras aseveraciones aceptadas como verdaderas y la externa haciendo uso de procedimientos empíricos. Esta última no es completamente precisa o absolutamente exacta de modo que la verdad factual es parcial.

Ejemplo. Supongamos como objeto físico un fluido real. Podemos inventar el concepto c' fluido ideal sin fricción interna ni intercambio de calor entre

sus partes ni con el medio ambiente.

Todo fluido real puede ser descrito por un fluido ideal

Rco es la relación heterogénea "concepto fluido" con "objeto físico fluido"

$c' \stackrel{m}{=} o$ es " el concepto fluido ideal modela o refleja al objeto físico fluido "

" el concepto fluido ideal se refiere al objeto físico fluido "

y Rcc' es la relación directa entre los conceptos fluido real y fluido ideal, que hay que verificar.

La verificación interna se realiza averiguando si las características del fluido real se adecúan a las del fluido ideal, es decir, si se puede considerar que no hay disipación interna de energía (fricción interna) ni

intercambio apreciable de calor entre las diversas partes del fluido real.

La externa midiendo la viscosidad del fluido y las pérdidas de energía.

Ejemplo. Todo flujo real es isoentrópico; aquí isoentrópico, flujo real

no satisface R. La relación de referencia no permanece en el nivel conceptual (isoentrópico = concepto; flujo real = objeto) y nuestro ejemplo es una verdad factual heterogénea pues $o =$ flujo real debe ser descrito por un concepto c' flujo ideal.

Los lógicos, en general, son reacios a aceptar la existencia de verdad parcial. Y los filósofos de la ciencia malinterpretan la verdad parcial con probabilidad que es un functor matemático, con grado de aceptación que es un predicado pragmático, con grado de confirmación que es un concepto metodológico, con ser creíble o ser cierto que es un concepto psicológico, con verdad relativa que es una verdad que depende del contexto o con valor que es un concepto subjetivo de utilidad.

Debe tenerse en cuenta también que no existe contradicción cuando asignamos dos valores diferentes de verdad a una verdad factual dependiendo de la función que desempeñe. Es decir que la podemos considerar como:

- i) valor lógico verdadero si la usamos como premisa de deducción, o
- ii) valor de verdad parcial o verdad factual que depende de su relación con el referente.

Por ejemplo, los postulados de una teoría física son usados como verdades lógicas para deducción y al mismo tiempo son puestos en duda y estamos concientes de su calidad de verdades parciales.

B. Variables y Constantes

En física tratamos con cantidades que pueden ser variables o constantes. Una variable es el representante matemático de una propiedad física que puede tomar diferentes valores.

La propiedad en sí no cambia sino sólo toma diferentes valores. La variable presión es siempre presión aunque tome diferentes valores. Las hay que no dependen del tiempo como los puntos fijos en el espacio o el tiempo mismos.

Las variables son lugares vacíos que pueden ser ocupados por números. Decir por ejemplo que, x , un real es una variable significa que en lugar de ella se puede poner arbitrariamente cualquier representante de los reales.

No es pues una propiedad cambiante sino un elemento no especificado de algún conjunto.

Que una variable dependa del tiempo significa que toma diferentes valores en diferentes instantes. Se escribe $x = f(t)$ lo que quiere decir que para un t dado, que pertenece al dominio de T de f , hay una x del contra-dominio X de f que no es arbitrario sino que está determinado en forma única i.e. $f: T \rightarrow X$

Cuando una variable es independiente del tiempo se le llama constante. Razonamiento similar podría haberse hecho respecto de la posición o el es pacio. Cuando una variable no cambia con la posición se dice que es unifor me.

C. Hipótesis

Un enunciado físico es una proposición en la que sólo aparecen predicados formales y físicos.

"La longitud L del sistema es el valor que el observador puede leer en un instrumento adecuado" no es un enunciado físico sino psico-físico puesto que interviene la operación de leer hecha por el observador, que no es un objeto físico solamente sino físico, psicológico, social, etc. En tanto que: "Si L representa la propiedad longitud de un sistema físico, entonces L son los únicos valores de longitud que puede tener" es un enunciado físico.

A los enunciados físicos los podemos clasificar desde un punto de vista me todológico como incorregibles y corregibles. Los primeros con conven-

ciones, reglas de designación, convenios, definiciones. Todo enunciado no convencional que se refiere a la realidad es corregible por argumento racional, invoque o no a la experiencia. Los enunciados corregibles pueden ser datos o hipótesis. Los primeros son la expresión de un resultado proveniente de alguna operación empírica (observación, medida o experimento) Los segundos son suposiciones, es decir enunciados supuestos verdaderos.

Algo que caracteriza una hipótesis física es que sobrepasa a la experiencia ya sea porque es universal o porque se refiere a cosas o propiedades inobservables.

"La velocidad de las ondas e-m en el vacío es c" es universal y sobrepasa la experiencia.

"la energía de un fotón que viaja en el vacío es $h\nu$ " universal e inobservable.

Veamos unos cuantos tipos de hipótesis:

1. Hipótesis Especiales

Son supuestos más que inferencias de la experiencia: condiciones iniciales, condiciones de frontera, valores especiales de parámetros, campos que se hacen cero en el infinito. Todas ellas son conjeturas testables por experimento pero hasta cierto límite.

2. Restricciones.

Son condiciones particulares. $T = cte$, distancia entre cargas = cte, viscosidad = cero, compresibilidad = cero, conductividad térmica = cero. Este tipo de hipótesis fija las características del modelo que refleja el sistema físico a tratar; determina la forma en que el modelo evoluciona y que debe ser acorde a las restricciones. Así se obtienen ecuaciones que caracterizan los modelos ideales del sistema. Por ejemplo la ecuación de Newton-Euler.

3. Hipotesis Comprensivas

Este tipo de hipótesis presenta suposiciones tan vastas, penetrantes y arrolladoras que casi no las notamos. Ejemplos de ellas son: el espacio-tiempo es continuo; tiene métrica. El flujo de densidad de energía puede ser representado por un vector. Las trayectorias de las partículas son continuas.

En general, aceptamos estas hipótesis sin darnos cuenta de ellas, pero si no las aceptáramos tendríamos que dar hipótesis alternativas y deberíamos, además, esperar algunas consecuencias observables.

4. Hipotesis básicas o Axiomas.

Son enunciados fundamentales aceptados como verdaderos, al menos temporalmente, a partir de los cuales se obtienen todas las demás afirmaciones de una teoría. Algunas veces son sugeridos por la intuición o por la experiencia, otras son puramente el resultado de la imaginación creadora o aventura intelectual

D Leyes.

Una ley física es una proposición física general, una hipótesis universal, o casi, que puede ser corroborada y que describe el comportamiento de la realidad física, pero no de un solo hecho específico o particular sino de un conjunto de hechos, es decir que trasciende los hechos particulares. De una manera equivalente podemos decir que se refiere a cualquier hecho posible de alguna clase dada. Que la posibilidad realmente ocurra no lo determina la ley sino ésta y las circunstancias.

La corroboración de la ley no le da de ninguna manera carácter final sino que sólo le asigna un valor de verdad en un dominio dado. Por otra parte, la ley es sistémica, es decir, que está basada en todo un sistema de hipótesis.

Cuando de ella se pueden derivar una serie de leyes de alto nivel la elevamos a rango de principio. De las leyes de alto nivel se derivan las de bajo nivel y de estas últimas una infinidad de casos particulares.

Las leyes físicas son introducidas de muy diversas maneras: generalizando relaciones empíricas, notando parecido o semejanza con casos conocidos, obteniendo consecuencias de principios generales o simplemente (y muy importante) por invención.

II TEORIAS

Toda teoría física es un sistema hipotético-deductivo, un conjunto de hipótesis ligadas por la relación de vínculo o de deducibilidad, \Rightarrow , en el sentido de herencia, transmisión o legado.

Cada hipótesis (postulada o deducida) se refiere a la realidad física y es corregible, pero la relación de vínculo (\Rightarrow) entre sus premisas y sus consecuencias lógicas es rígida .

A Enunciados.

En una teoría ninguna fórmula es aislada; cada enunciado es:

- i) una suposición básica , postulado o axioma,
- ii) una consecuencia lógica de fórmulas previas, a menos que sea
- iii) una definición

B Características .

Toda teoría física se caracteriza por:

- i) formalismo matemático: su estructura debe ser razonablemente correcta
- ii) significado físico: debe tener contenido definido i. e. conferirle significado físico a sus símbolos básicos o sea que su formalismo debe ser físicamente interpretado, y
- iii) testabilidad: debe ser capaz de encajar datos empíricos con la teoría y aparear otras teorías que cubran campos afines. Si no puede ser testada permanece como teoría especulativa en tanto lo es.

Sean A un conjunto de axiomas y t un teorema. Para que un teorema t sea deducible de un conjunto A de axiomas el condicional $A \Rightarrow t$ debe ser lógicamente verdadero y, a menos que un conjunto de fórmulas tenga su estructura rígida por la relación de deducibilidad no cuenta como teoría. En lo que respecta a su forma, una teoría es un conjunto de fórmulas del cálculo de predicados con identidad i. e. de la lógica ordinaria $T = [F, \Rightarrow]$ y, además, debe ser cerrada en la relación de deducibilidad.

Para que los axiomas del conjunto A puedan generar toda la teoría, deben

cumplir con una serie de requerimientos:

- i) tratar de la misma cosa, es decir sobre el universo del discurso de la teoría
- ii) ser interrelacionables o ensamblables, o sea que deben encajar unos con los otros de alguna manera
- iii) algunos de ellos, por lo menos, deben ser universales.

El conjunto A de axiomas es entonces el conjunto de generadores lógicos de todas las fórmulas o sea la base axiomática de la teoría.

Las fórmulas de la teoría (axiomatizable o axiomatizada) forman un conjunto F que es la colección de todas las consecuencias lógicas de A y es cerrado bajo la deducción.

Existen dos relaciones muy importantes en el estudio de sistemas deductivos la identidad formal y la inclusión formal.

Decimos que existe identidad formal cuando bases equivalentes generan la misma teoría, o sea que T_1 es formalmente idéntica con T_2 (es decir $F_1 = F_2$) ssi $A_1 \Leftrightarrow A_2$. Hablamos entonces de formulaciones diferentes de la misma teoría.

Pero esa equivalencia es puramente formal puesto que dos teorías formalmente idénticas pueden tener diferente significado físico.

Dos teorías son completamente equivalentes si son equivalentes tanto formal como semánticamente, i. e. son sólo dos maneras diferentes de decir la misma cosa.

Decimos que T_2 es formalmente una subteoría de T_1 si $F_2 \subset F_1$ ssi $A_1 \Rightarrow A_2$

Se dice que T_1 se puede restringir o reducir a T_2 y a T_1 se le llama una extensión de T_2 .

Estática \subset Dinámica; Optica Geométrica \subset Optica Física \subset Electromagnetismo Clásico.

La estructura formal de toda teoría física está constituida por su estructura matemática y su estructura lógica. Como, además, presupone análisis, tiene estructura analítica que es dada por las propiedades de transformación. Si esa estructura formal es conocida entonces la teoría es matemáticamente madura, es un formalismo, y se le debe dar interpretación física si es que se desea que constituya una teoría física.

10

Cuando no se le da interpretación física o sea que sus símbolos (aparte de los lógicos) se mantienen sin interpretar constituye una teoría abstracta.

Al interpretar los símbolos de la teoría abstracta adquiere significado y se transforma en una teoría interpretada, realización o modelo de la teoría abstracta si satisface los predicados de ésta. No existe límite para las interpretaciones y por consiguiente para los modelos, pero aquellas deben ser interpretaciones verdaderas o sea que deben respetar la estructura de los conceptos y de los axiomas.

Todas las teorías físicas, modelos de teorías abstractas, son factuales y, por consiguiente, vagas puesto que las interpretaciones de los símbolos son siempre parciales puesto que se refieren a objetos extraconceptuales y, por consiguiente, no bien conocidos.

En resumen, las teorías físicas, modelos factuales de su esqueleto abstracto, son sistemas hipotético-deductivos parcialmente interpretados. Poseen significado físico ssi contienen suposiciones interpretativas que asignan referentes físicos a sus conceptos básicos.

Consideramos que la teoría física es significativa aunque no sea testable en su totalidad.

La teoría electromagnética es significativa aunque la electrostática de una esfera cargada simétricamente no sea testable, por ejemplo.

Es más, una teoría testable empíricamente debe ser interpretada antes de pensar en testarla. Debemos saber pues, de qué trata la teoría, o sea que debe tener significado físico previo al test.

Entonces, significado físico es una condición necesaria, pero no suficiente, para testabilidad. Y esta última es suficiente, pero no necesaria, para que la teoría tenga significado físico.

C Requerimientos Formales y Semánticos.

Una buena teoría física satisface una serie de requisitos que son previos a su comprobación experimental y, claro, son más fáciles de enunciar que de ser testados o satisfechos. Unos de ellos son formales, otros semánticos.

1. Consistencia interna (obligatoria)

Un cálculo es consistente cuando es imposible demostrar en él una contradicción, es decir, un enunciado y su negación. Toda teoría debe ser libre de contradicciones pues de lo contrario se puede concluir cualquier cosa pero ninguna válida. En el sistema no debe haber proposiciones que a la vez sean falsas y verdaderas.

La consistencia interna puede ser violada, sin saberlo, cuando se trata de extender una teoría agregándole algunas hipótesis.

Se puede eliminar la contradicción eliminando una o más hipótesis.

El test de consistencia interna consiste en mostrar un modelo libre de contradicciones

2. Consistencia externa (obligatoria)

Es la compatibilidad de la teoría en cuestión con las otras teorías, no competitivas, ya aceptadas en el mismo campo y campos afines.

Claro que toda teoría es consistente automáticamente con todas las teorías presupuestas para elaborarla i. e. las teorías en las cuales se basa.

Por consiguiente el progreso de las teorías factuales no puede llegar a refutar ninguna de las teorías presupuestas, como la lógica ordinaria o la teoría de probabilidades.

Los tests de verdad incluyen tests de consistencia externa. Una teoría que contradiga a toda otra teoría ni siquiera se considera pero una que no se oponga a todo puede ser una novedad y esta situación no debe emplearse para desacreditar o desechar revoluciones parciales.

3. Independencia de Primitivas (altamente deseable)

Los concep-

tos básicos, primitivos, indefinidos de una teoría deben ser lógicamente independientes o sea no interdefinibles. De otra manera no todos ellos serían básicos y uno no sabría si algunas fórmulas son hipótesis o definiciones. El test consiste en reinterpretar las primitivas de la teoría, una por vez, y comprobar si los axiomas son satisfechos. Debe tenerse el cuidado de no confundir independencia lógica con independencia semántica o matemática.

En una teoría dos conceptos son:

- i) matemáticamente independientes ssi la teoría no los relaciona
- ii) semánticamente independientes ssi tienen referentes diferentes

Masa y carga son lógicamente independientes pero no lo son matemática ni semánticamente.

La independencia no es tan importante como la consistencia y responde más a un ideal de economía lógica y de elegancia.

4. Independencia de Axiomas (deseable)

Un axioma de un conjunto axiomático es independiente de los demás cuando no es demostrable como teorema a partir de ellos. Es decir que ningún axioma debe ser deducible de cualquier otra hipótesis de la teoría. El test consiste en eliminar o negar uno por vez y comprobar si el sistema permanece consistente. Investigaciones sobre la independencia de axiomas han sido alguna vez muy importantes en el desarrollo de la ciencia.

Los requerimientos semánticos, que suplementan a los formales, son:

5. Unidad de Referencia (obligatoria)

La teoría debe tener una clase de referencia definida, es decir referirse a miembros de un universo definido del discurso. Por ejemplo cuerpos, pares partícula-campo. De otra manera no se pueden establecer relaciones lógicas entre las fórmulas.

Cualquier teoría física tiene dentro de sus conceptos primitivos uno o más conjuntos cuyos elementos se supone que modelan o reflejan objetos físicos y, cada enunciado de la teoría debe referirse a miembros de esos conjuntos.

No obstante eso, hay algunos enunciados que no se refieren a elementos de esos conjuntos. Son ellos los enunciados que no tienen ningún contenido físico y aquellos que conciernen al espacio-tiempo.

6. Interrelación Conceptual (obligatoria)

Los conceptos básicos de la teoría deben estar interrelacionados; en otras palabras, ningún postulado debe referirse a una sola primitiva. De otra manera los axiomas no se podrían conectar y no habría posibilidad de iniciar la deducción.

7. Cerradura Semántica (altamente deseable)

En una teoría no se deben permitir más predicados que los que se han admitido o introducido por definición al inicio.

Si las fórmulas se refieren a objetos físicos no es posible interpretarlas en términos de cosas humanas como incertidumbre, predictabilidad u observabilidad. De otro modo cualquier cosa puede ser concluída puesto que $p \Rightarrow p \vee q$ con q arbitrario y además, se pueden deducir condicionales irrelevantes.

8. Homogeneidad Semántica (deseable)

Los predicados de una teoría deben pertenecer a una misma familia semántica. Por ejemplo una propiedad macroscópica como presión no se puede aplicar a una sola partícula.

III AXIOMATICA FISICA

Las teorías científicas son respaldadas por la Lógica pero no nacen de ella. Son concebidas en formas muy diversas y aun raras. Con el uso de analogías, indicaciones heurísticas y principalmente metafísicas. Su estructura y contenido emergen gradualmente a medida que maduran. En cierto momento de su desarrollo están listas para Axiomatización; esto sucede cuando sus antecedentes y componentes esenciales han sido reconocidos.

Los antecedentes de una teoría son las ideas que usa y toma como presupuestas.

Los componentes esenciales son las hipótesis que la caracterizan y que pueden ser cambiadas sin modificarla totalmente.

Cada enunciado de una teoría es:

- i) una suposición inicial A de la teoría T o (exclusivo)
- ii) una consecuencia lógica t de: suposiciones iniciales A , consecuencias previamente obtenidas t' o partes B de los antecedentes de la teoría.

A Antecedentes.

Toda teoría es construída sobre la base de ideas anteriores. Ideas lógicas para comenzar. Salvo la Lógica Elemental que carece de antecedentes. Esas ideas fundamentales ocurren no solamente como indicaciones heurísticas (caso de la hidrodinámica y la electrodinámica) sino, también, como ideas propias de la nueva teoría. Y, sólo estas últimas cuentan como antecedentes propios de la teoría ya que las guías heurísticas pueden ser abandonadas cuando la teoría ya ha sido construída.

Los antecedentes de una teoría física consisten en dos clases de ideas, las formales y las no-formales.

Las primeras están constituídas por, todas las ideas lógicas y matemáticas que emplea. Así, la Mecánica del Continuum presupone la Lógica ordinaria, teoría de conjuntos, topología, geometría analítica y análisis.

Sus antecedentes no formales o materiales consisten en todas las teorías genéricas y específicas en que se basa.

Además, existen las hipótesis generales que pueden ser:

- i) filosóficas: "existen objetos físicos", "existen eventos". Y aunque muchos sean imperceptibles o conocidos sólo en parte, tenemos que referirnos a ellos si no queremos encerrarnos en misticismo y contemplación.
- ii) especiales de existencia: "hay campos". Que se hacen muchas veces al principio de la teoría (en la axiomatización) y, es claro, pueden ser falibles como cualquier hipótesis.

La realidad (o no) de las hipótesis contenidas en una teoría física debe inferirse de la forma en que la teoría:

- i) encaja en todo el cuerpo del conocimiento aceptado, y
- ii) describe y predice eventos susceptibles de control empírico siempre con el auxilio de otras teorías.

Naturalmente que este criterio de realidad física puede fallar pero de ninguna manera es un criterio tonto; algunos o todos los entes hipotéticos pueden alguna vez, ser irreales.

La experiencia no puede comprobar una teoría, pero puede descubrir que es verdadera parcialmente, que es falsa o que es inútil.

Un criterio inadecuado de realidad física es mensurabilidad. "Ser real es ser medible" no se puede aceptar. Baste recordar el gran número de científicos que han medido propiedades de irrealidades como calórico y partículas inexistentes.

Cuando axiomatizamos una teoría no es necesario exponer todos sus antecedentes sino solamente listar sus items principales. Después de profundizar en sus antecedentes, deben ser expuestas sus unidades básicas, que constituyen su base primitiva.

B Base Primitiva P.

El conjunto de unidades básicas o conceptos técnicos fundamentales de una teoría son los componentes iniciales de sus axiomas y definiciones y se llaman base primitiva P.

Ellos son los indefinibles o primitivas de la teoría en cuestión pero pueden ser definidos por otras teorías. No son indeterminados o no-analizados; muy por el contrario, los postulados los determinan, analizan y caracterizan tanto formal como semánticamente.

Las llamadas variables independientes de una teoría son sus indefinibles

pero, por otro lado, las variables independientes también pueden ser primitivas.

Los conjuntos que representan el estudio de una teoría están en la familia P y el objetivo principal de la teoría es caracterizar ese objeto de su estudio, esa clase de referencia. Siempre que la clase de referencia de una teoría es un conjunto de individuos la llamamos unitaria. Si la clase de individuos está formada por dos clases mutuamente independientes se llama dualista ya que postula dos "substancias" mutuamente irreducibles. La Mecánica de Fluidos es pluralista puesto que trata muchas "substancias" irreducibles: campos gravitacionales, campos de velocidades, de densidades, de vorticidad, de presiones, cuerpos, áreas, volúmenes, por citar algunos.

C Conjunto de Conceptos C.

Una vez tenemos la base primitiva podemos definir todos los demás conceptos de la teoría, por ejemplo partícula, punto material, esfuerzos, posición, movimiento, configuración, velocidad, momentum lineal, fuerzas, etc.

El conjunto total C de conceptos técnicos de una teoría T consiste de sus primitivas y de sus conceptos definidos: $C = P \cup D$

Un concepto que no pertenece a P ni a D no pertenece a la teoría T

$$c \notin P \wedge c \notin D \Rightarrow c \notin T$$

Así, como el concepto observador no aparece en P ni en D, entonces es un intruso en la teoría.

Una vez establecidos los conceptos básicos o fundamentales de la teoría (su base primitiva P) podemos establecer sus enunciados básicos.

D Base Axiomática A y Fórmulas F.

El conjunto de enunciados básicos (fundamentalmente lógicos), suposiciones iniciales, axiomas o postulados básicos de una teoría constituye su base axiomática A, que determina la estructura y significado de sus primitivas.

Idealmente, al menos, todos los demás enunciados de T son deducibles de A en conjunción con cualesquiera premisas lógicas, matemáticas o protofísicas a las que podamos asirnos.

Entonces, el conjunto de fórmulas F de la teoría es la unión de los conjuntos A y $\{t\}$, conjunto de todos los teoremas deducidos o deducibles (i. e. demostrados o demostrables) $F = A \cup \{t\}$

Debe enfatizarse la diferencia entre los axiomas de la Mecánica de Fluidos y de la Matemática en general. Mientras los segundos definen familias de objetos o estructuras formales, los primeros tratan de caracterizar, no de definir, especies de objetos concretos, verbigracia, fluidos, sistemas físicos que tienen existencia independiente de tales axiomas. Esto es, mientras la Axiomática de la Mecánica de Fluidos presta las ideas matemáticas que necesita, no puede imitar en cada punto el estilo de la axiomatización matemática. Por ejemplo:

"Definición: la estructura $H = [F, M, \varphi, p, Q, \eta, V, L]$, donde F y M son conjuntos, φ, p, Q son funciones sobre $F \times M$, η, V, L son funciones sobre F y M es una función sobre $M \times M$ es una red hidráulica si y sólo si: ... y aquí viene una lista de axiomas que caracterizan el estado matemático y las relaciones mutuas entre las primitivas "

Ese tipo de definición axiomática es inadecuado para la Mecánica de Fluidos puesto que las redes hidráulicas están allí en el mundo y no en nuestra mente.

Un físico no inventa sistemas físicos al igual que los matemáticos inventan espacios. Lo mejor que puede hacer es dar una descripción de lo que es el sistema físico lo más apegada a la realidad con la ayuda de conceptos y enunciados cuidadosamente elaborados.

A algunos matemáticos les puede desagradar este procedimiento y podrían demandar que definiéramos los sistemas físicos en forma puramente matemática sin ligar los términos con objetos externos. Esto causaría la falla de la teoría de la Mecánica de Fluidos.

El objeto de la Axiomatización de la Mecánica de Fluidos es aclarar las peculiaridades y características principales de los sistemas físicos que aparecen en ella.

No hay nada intuitivo ni final en un axioma; muchas veces se postula y se ve qué se puede deducir y si lo concluido es relativamente verdadero.

Lo que distingue la Axiomática en Física de la Axiomática en Lógica y en Matemática es:

1) mientras los axiomas formales son, hasta cierto punto, convencionales, elegidos por su fertilidad, poder de unificación y tal vez belleza, sola

mente, se supone que los axiomas físicos adquieren su máxima veracidad relacionados con hechos.

ii) mientras que en Matemática uno puede admitir prácticamente casi cualquier cosa, siempre que no entre en conflicto con la Lógica, y luego demostrar lo que sea, en Física nada puede tomarse por supuesto ni dar después una prueba concluyente.

Para que la base primitiva sea caracterizada adecuadamente por los axiomas debe haber un grupo de éstos por cada concepto primitivo.

Cualquier conjunto de axiomas suficiente para caracterizar la base primitiva de una teoría se llama p-completo, condición que es necesaria pero no suficiente para proporcionar todos los enunciados de una clase.

Un conjunto de axiomas p-completo se llama d-completo si es necesario y suficiente para deducir todas las fórmulas deseadas en un campo dado.

Si, por azar, aparece una fórmula escrita en el simbolismo de la base axiomática puede ser imposible reconocer si esa fórmula fue deducida de tal base y puede no haber procedimiento para decidir esta cuestión.

Cualquier axiomatización alternativa constituye una teoría diferente. Al cambiar la base primitiva y la base axiomática resulta un conjunto diferente de fórmulas y es, por ende, una teoría diferente puesto que

$T = [F, \implies]$. Pero si al cambiar la base primitiva o la base axiomática resulta el mismo conjunto de fórmulas, entonces tenemos una formulación diferente de la misma teoría.

E Interpretación de la Teoría.

En contraste con la Matemática, en Física debemos caracterizar no sólo la estructura e interrelación de las primitivas sino también su significado; esta es la función semántica de los axiomas, referir las primitivas a entidades físicas con propiedades, o dicho de otra manera, establecer las relaciones concepto-objeto físico aunque ellas sean algo vagas y pueden ser no satisfechas por los objetos reales. Esto quiere decir que los axiomas se mánticos pueden ser falsos o por lo menos inexactos, o que no determinan por completo el significado de la variable física sino que sólo la delimitan. Son pues los postulados interpretativos de la teoría que trazan su perfil semántico.

Los significados físicos son sólo esquematizados, no determinados por completo en una sola teoría. Su determinación la hace toda la Física. Así,

los significados no nacen de golpe sino emergen gradual y paulatinamente a medida que la ciencia crece. Esto siempre ha sido así y se nota al estudiar trabajos originales de investigadores tanto en los albores de la Física como con el advenimiento de la Teoría de la Relatividad y de la Mecánica Cuántica, que nos muestran el fruto de trabajar con sistemas matemáticos semi-interpretados.

Existen cuatro maneras de interpretar físicamente una teoría:

- i) deduciendo teoremas generales
- ii) aplicándolos a casos especiales
- iii) descifrando fórmulas en términos experimentales, y
- iv) encontrando analogías con otras teorías.

Mientras que las dos primeras son legítimas, las dos últimas no puesto que se trabajan a propósito.

La manera más segura de obtener el significado físico de una teoría es aplicándola a casos paradigmáticos, aunque éstos no existan en la naturaleza.

En todo caso, las interpretaciones físicas no se dan desde el inicio sino que se van descubriendo a medida que se sacan consecuencias lógicas y que se introducen suposiciones específicas, excepto en las reconstrucciones axiomáticas. Al revés que muchos sistemas matemáticos, las teorías físicas no nacen axiomatizadas.

La discusión de situaciones experimentales con el empleo de teorías básicas no esclarece mayor cosa puesto que las situaciones experimentales son tan específicas y complejas que una explicación realista de ellas requiere la contribución de diferentes teorías además de aseveraciones puramente descriptivas.

En cuanto al uso de analogías para obtener significado, es tan tentadora que muchas veces nos olvidamos de sus fallas. No debemos olvidar que es un cuchillo de dos filos y que puede conducirnos a disparates. Hay que manejarla con cuidado.

La axiomatización de una teoría solamente organiza y completa lo que ha sido un cuerpo de conocimientos más o menos desorganizado e incompleto; expone la estructura de la teoría y hace que el significado sea más preciso. Aun así, hay algunos físicos que tienen resistencia a la axiomatización. Algunos creen que puede eliminar el contenido físico y otros que vuelve rígidas a las teorías.

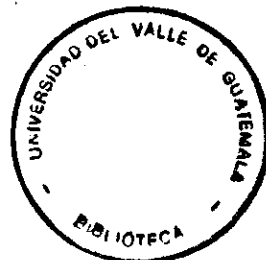
Ambos temores son fundados pero el primero puede ser evitado con los axiomas semánticos y el otro tomando en consideración que una idea establecida en forma precisa es rígida en sí y sólo puede evolucionar si se

transforma en otra idea.

Por otro lado, no debemos olvidar que la Axiomatización, aunque insuficiente, es imprescindible para que la teoría alcance su madurez pues sólo axiomatizándola es que:

- i) se aclaran la estructura y las fórmulas de la teoría
- ii) se mantiene dentro del terreno de su validez y, si se desea ir más allá hay que ampliarla
- iii) nos damos cuenta clara que existen suposiciones tácitas en las que se basa la teoría intuitiva o natural y que esas suposiciones pueden ser inexploradas, redundantes o aun falsas y que no estaban bajo control, precisamente por no haber sido expuestas ni enunciadas.
- iv) aparecen expuestos aquellos conceptos esenciales de la teoría y que no pueden ser eliminados ni definidos
- v) se identifican las hipótesis centrales o esenciales de la teoría
- vi) se evita tratar de definir y demostrar todo
- vii) se puede explorar qué diferencias habría al cambiar o eliminar ciertas suposiciones básicas
- viii) se evita tomar hipótesis como teoremas demostrados
- ix) se evita el uso de variables que no aparecen en los axiomas
- x) uno puede manejar, por lo menos, los axiomas o generadores aunque no maneje toda la teoría
- xi) los puntos débiles de la teoría pueden ser rastreados hasta sus orígenes
- xii) se puede vigilar el crecimiento de la teoría
- xiii) pueden hacerse más fuertes los fundamentos de la teoría reforzando ciertas suposiciones.

No obstante lo anterior puede ocurrir que aparezcan ciertas dificultades. Si se expone sólo lo esencial de la teoría puede ser que se olvide que la solución real del problema específico requiere premisas adicionales, hipótesis especiales, que no están dentro de los axiomas. Esto es muy importante y se verá explícitamente en el desarrollo de algunas consecuencias del desarrollo de la teoría axiomatizada de la Mecánica de Flúidos en el capítulo VI.



F. Construcción de la Teoría

En Física las teorías están ya hechas en forma intuitiva o natural antes de ser axiomatizadas. Para ello no hay reglas fijas, tan sólo guías heurísticas requerimientos y restricciones. Las teorías se inventan, no se obtienen exprimiendo un montón de datos ni de la Lógica pura. No nacen ex pon tane ame nte sino que nacen y mueren por inspiración, generalmente como respuesta a algún problema propuesto, como explicación de algún mecanismo, como unificación de sistemas, como deducción a partir de menos axiomas pero más fuertes y, eso sí, siempre se basán en conocimientos previos.

Cada nueva teoría física contiene, pues, fragmentos del conocimiento disponible, tanto formal como físico y protofísico.

Las grandes teorías físicas no han nacido de la experimentación, no han emergido del procesamiento de un montón de datos particulares o del análisis de casos especiales, puesto que ningún amontonamiento de datos puede dar una teoría que es un sistema que contiene proposiciones universales y difícilmente se refiere a hechos observables. Aunque, es claro, el análisis de datos puede motivar la construcción de teorías y hay buenos ejemplos de esto.

Por el contrario, su origen en general es altamente especulativo y se hace uso de hipótesis fuertemente atrevidas que involucran no-observables.

La observación propone problemas y test para las teorías pero no las genera. Ni aún las teorías fenomenológicas son puro acoplamiento de datos. Y esto no es cosa de historia, que podría cambiar en el futuro. Es lógicamente imposible deducir teorías de hechos pues los conceptos que se necesitan para describir o explicar hechos no viene pegados a éstos sino que necesitan ser creados. El proceso es al revés: es a partir de enunciados generales que se deducen proposiciones concernientes a hechos singulares.

Más aún, las leyes físicas básicas no contienen datos empíricos para nada; entonces no pueden ser determinadas por datos exclusivamente.

Hay quienes creen que una teoría sirve esencialmente para sistematizar datos y que consiste de dos partes: un cálculo abstracto y un conjunto de reglas de correspondencia que le dan significado a todos o a la mayoría de los símbolos que emplea el cálculo.

Sin embargo, no se debe despreciar la íntima conexión entre la teoría y el experimento. Estos últimos son diseñados, planeados, ejecutados y analizados con base en la teoría pero ésta es controlada por el experimento.

G. Test de la Teoría

Toda teoría debe ser testada en su unidad lógica y semántica así como en su veracidad. Los tests de veracidad son conceptuales y empíricos. Los conceptuales consisten en comprobar si la teoría encaja dentro de todo el conocimiento disponible, es decir, si hay correspondencia con éste. Y los empíricos consisten en ver como encajan los datos empíricos disponibles y accesibles dentro de la teoría.

Si la teoría no satisface el test de consistencia externo se le declara especulativa, pero si lo satisface relativamente bien, tal vez en el límite de correspondencia y, además, precide nuevos hechos, entonces debe ser examinada como una teoría promisoría.

Si es confirmada por el experimento se considera que tiene algo de verdad aunque, es claro, puede ser falible. Su valor, con respecto a otras teorías competitivas, debe examinarse con la ayuda de más criterios incluyendo sus poderes heurísticos y de unificación y puede variar con el tiempo. Se debe estar alerta para encontrar fallas pero si no aparece ninguna se le puede usar para juzgar otras teorías y para analizar problemas específicos. Y cuando comienza a acusar fallas vale la pena tratar de corregirlas aún introduciendo hipótesis a propósito, siempre que éstas sean testables independientemente.

Puede ser que la teoría no sobreviva o que su dominio sea mas reducido. En todo caso, la búsqueda de una nueva teoría debe iniciarse de inmediato. Naturalmente, antes de someter una idea a test es necesario ver si es testable o no, ya sea porque es inmune a la crítica por el poder que tiene la experiencia, porque no es enunciado sino un concepto o una propuesta, porque es puramente formal, está protegida por otra idea o porque los experimentos que es posible realizar son demasiado burdos.

Y también hay que considerar que una idea sólo no es testable, tiene que ir acompañada de un contexto, de hipótesis que encajen dentro de un cuerpo de ideas que tengan contacto con el experimento.

Por ejemplo una idea como la temperatura irá relacionada con alguna propiedad física y las parejas utilizadas pueden ser longitud-temperatura, resistencia-temperatura, color-temperatura, etc. La idea de corriente eléctrica igual, usamos ángulo-corriente u otra pareja.

Nótese bien que las relaciones entre observables son siempre teóricas; no digamos entre observables y no-observables. y esas relacio-

nes son las que permiten someter a test las ideas físicas y las teorías.

En todo caso, no hay definiciones operacionales, reglas de correspondencia o hipótesis interpretativas sino enunciados físicos que deben ser comprobados independientemente; su función es metodológica, no semántica.

No proporcionan significado, sino maneras indirectas de manipular no-observables y forzar a que se manifiesten.

La testabilidad de un enunciado es mayor mientras más relaciones tenga.

Pero hay que fijarse que todas las teorías no son testables por sí mismas sino que requieren hipótesis ajenas a ellas. Y no son testables por sí por que no tratan hechos observables sino hechos que deben ser inferidos por caminos indirectos y difíciles. Y aunque traten con hechos observables, sólo pueden ser explicados por muchas teorías.

El test de una teoría requiere de muchas teorías auxiliares, que son la contraparte conceptual de los instrumentos usados en los tests empíricos.

La física experimental hace pues uso de muchísimas teorías auxiliares, aunque algunas veces el físico experimental se olvida de esas teorías y las da por sabidas. Ambas, la física teórica y la experimental son interdependientes; la física teórica usa a la experimental para realizar el test de las teoorías y la experimental emplea muchas ideas y conceptos que están siempre respaldados por alguna teoría.

En ciencia avanzada no existe observación libre de teoría.

Explicación es deducción hecha dentro del cuerpo de alguna teoría, En una explicación física las premisas son piezas de alguna teoría física, hipótesis suplementarias, datos y matemática. Si la conclusión obtenida es general se habrá explicado un hecho. En este último caso la explicación se llama predicción, pero, siempre tiene la estructura de un árbol lógico.

La sóla explicación, sin exactitud, no sirve para nada. Todos queremos que nuestras teorías den explicaciones exactas.

A las teorías que explican una gran cantidad de hechos las llamamos de gran cobertura ya sea que sus explicaciones sean profundas o no. Si además de gran cobertura sus explicaciones son profundas decimos que tienen alto poder explicativo. Pero no todo puede ser explicado en determinado contexto, algunas premisas deben ser aceptadas como básicas y de ellas, como punto de partida, inferir conclusiones; de lo contrario se cae en la creencia que todo debe ser explicado lo cual es una demanda no razonable puesto que cualquier explicación se basa en premisas.

Una predicción es una aseveración singular que concierte a un futuro no ex-

perimentado o a un hecho pasado; si se hace dentro de un contexto científico i. e. deducida de premisas teóricas en conjunción con datos que pueden encajar en alguna teoría se llama predicción científica.

Una colección de datos solamente es insuficiente para generar predicciones, aun con el uso de computadoras, puesto que los datos se refieren a estados actuales de un sistema en cuestión. Sólo leyes también son insuficientes pues ellas se refieren a situaciones posibles y cambios posibles del sistema. Necesitamos ambos (datos reales o conjeturados y leyes) si queremos anticipar el estado más probable del sistema o indicar cuál fue su pasado.

IV PROTOFISICA

Ninguna teoría física es libre de presuposiciones; cada una tiene un conjunto de ideas que le sirve de base sin someterlo a cuestionamiento. Aunque, es claro, esas ideas pueden estar sujetas a crítica dentro de otros contextos.

El conjunto de ideas compartidas por cada conjunto de teorías físicas, pero que ninguna investiga, cae dentro de dos clases:

- i) el conjunto de teorías lógicas y matemáticas que constituyen el formalismo de las teorías físicas, y
- ii) una bella colección arcaica de principios genéricos importantes que constituyen la protofísica.

La existencia de estos principios no formales usualmente pasa desapercibida o, si se les nota, se les toma como triviales o pertenecientes a otros campos. Por otro lado, son fragmentarios y no constituyen una teoría. Por consiguiente no tienen, per se, gran poder deductivo.

Sin embargo, no debe pasárseles por alto. Lo que se da por sabido debe ser sometido a escrutinio de vez en cuando.

Daremos algunos ejemplos de esas presuposiciones, ideas y principios no formales que constituyen la protofísica.

"Las leyes de la Física que son válidas en un sistema de coordenadas son válidas en cualquier otro", nos indica que ellas deben ser independientes del observador y de su elección de la representación. Esta es una suposición que se refiere a leyes y que se logra escribiendo las ecuaciones de manera que independan del sistema de coordenadas. Es un caso de covariancia general.

"Las leyes fundamentales de la Física tienen que ser invariantes ante transformaciones de sistemas de referencia inerciales", se refiere a leyes nuevamente, no a objetos físicos; esta vez a leyes fundamentales. Es un principio de covariancia similar al anterior. Aquel ante una transformación de sistema de coordenadas, éste ante transformación de sistemas inerciales.

Se intentó que su extensión fuera toda la Física pero realmente sólo era válido en Mecánica. Posteriormente este Principio de Relatividad Galileana quedó incluido dentro de las Transformaciones de Lorentz de la Relatividad Especial.

"Todas las interacciones decaen exponencialmente" se refiere al concepto interacción y puede ser ejemplificada de muy diversas maneras. Para utilizar algo relacionado con Mecánica de Fluidos consideremos el movimiento relativo de un cuerpo dentro de un fluido en el cual se supone que ese movimiento no afecta al fluido en el "infinito" y por consiguiente allí el flujo puede considerarse uniforme y por consiguiente potencial. Entonces $\underline{v} = \text{uniforme} \Rightarrow \underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} = \underline{0}$ y de aquí podríamos concluir que $\underline{\Omega} = \underline{0}$ a lo largo de cada línea de flujo i. e. en todo el espacio. Conclusión de muy limitada validez que se utiliza aquí para ejemplificar el principio indicado y que se toma como válido sin cuestionarlo.

"Si A y B son propiedades con dependencia temporal y A determina a B, entonces $B(t) = B[A(t')]$ para todo t' anterior a t "

"Sólo pueden interactuar regiones de campo que pueden ser conectadas por un disturbio de campo"

Todos los principios de arriba tratan de objetivar y tienen cierto valor puesto que ayudan a demarcar la forma de la teoría física separándola de las características que dependen del observador.

Su extensión no abarca toda la Física sino parte de ella y algunos son usados muy ampliamente en partes de la Física, como el principio de invariancia ante transformaciones de coordenadas en Mecánica de Fluidos.

Otro concepto importantísimo que emplea cualquier teoría física es el de tiempo, aun cuando se trate de una teoría atemporal como la estática o la óptica geométrica, quienes toman el tiempo como sobreentendido puesto que los hechos que a ellas conciernen ocurren en el espacio tiempo i. e. dentro de muchísimos otros eventos y, además, sus leyes son válidas en cualquier instante y en cualquier lugar.

Como siempre tendremos que trabajar con el tiempo, es conveniente teorizar un poco a este respecto en lo que a Física concierne. Se podría decir que tiempo es la variable independiente de la Física. Esto no sería gran cosa puesto que muchas de las variables físicas son suficientemente bien comportadas y se podrían tomar como independientes. Algo más sería decir que es un parámetro y que además es real. Insuficiente puesto que si sólo eso pudiera decirse del tiempo debería ser la Matemática quien lo estudiara. Pero la Matemática no estudia su-

cesos o eventos; esta no es su tarea.

Estudiar " A ocurre en el instante t " compete a la Física, no a la Matemática.

Antiguamente se aceptaba el tiempo como absoluto, independiente de todo lo demás y que " fluía de pasado a futuro a razón constante " . A-severaciones todas incompletas y la última metafórica y circular puesto que "fluír a razón constante" involucra en sí el propio principio de tiempo.

Una teoría aceptable de tiempo físico debe cumplir ciertos requisitos:

- i) refinar nuestra intuición de tiempo físico erradicando de ella todo posible elemento subjetivo
- ii) ser cuantitativa y bien organizada
- iii) relacionar elementos objetivos puesto que tiempo no es un objeto absoluto sino un concepto que sólo puede existir al haber eventos.

Nosotros aceptaremos una teoría de tiempo basada en la teoría de tiempo universal de Noll que supone un tiempo para cada lugar y cada sistema de referencia en la cual el tiempo es una relación entre pares de eventos y pares de números, pero con la generalización necesaria para establecer las relaciones entre eventos que ocurren en diferentes sistemas de referencia utilizando las transformaciones de Lorentz.

Por otro lado, cualquier teoría física da por hecho que todos los objetos tienen una configuración espacial o por lo menos guardan relación espacial con otros objetos y, ninguna investiga la naturaleza del espacio, excepto la Teoría General de la Relatividad.

Las teorías físicas no presuponen estructura alguna del espacio o bien lo suponen euclidiano y, esto último sin custionarlo ya que la geometría euclidiana es comprobada, razonablemente bien al menos, en pequeñas regiones del espacio.

Una geometría es verdadera a priori, por convención o estipulación, siempre que sea consistente. Naturalmente ello no implica que se refiera a algo real, de modo que todas las geometrías son igualmente verdaderas.

Lo importante es que la geometría euclidiana, cuando se le interpreta con propiedad, es válida para las relaciones espaciales entre las cosas lo que quiere decir que tiene una verdad factual y, por cierto, muy alta. Nos re-

ferimos aquí a la geometría euclidiana interpretada, es decir, a la geometría euclidiana física, puesto que la primera es puramente formal y no factual. Y la geometría euclidiana física ha sido aceptada por costumbre en términos de rayos de luz y ángulos medidos y, sólo recientemente es que se han clarificado las relaciones entre las teorías matemáticas y los modelos físicos.

Como la geometría euclidiana física concierne a todas las ramas de la Física, excepto a la Relatividad General, puede incluirse con propiedad dentro de la profísica.

Puede distinguirse entre una teoría puramente matemática y una teoría física. La primera tiene sus primitivas sin interpretar en tanto que en la segunda se les asigna un significado físico (i. e. se establece una coordinación entre los elementos primitivos matemáticos y los objetos físicos) y entonces los predicados de la teoría matemática se tornan modelos de la realidad física, es decir, reflejan las relaciones que hay entre los objetos físicos y sus cambios.

Bajo este punto de vista el espacio no es el continente pasivo de cosas en que ocurren eventos sino que es el conjunto de todas las relaciones geométricas entre los objetos físicos y posibles eventos.

No es preciso asignarle al espacio una métrica precisa, excepto como una hipótesis.

Y cuál es la estructura del espacio se describe asumiendo conexiones, teorizando y testando después, o sea dándole interpretación física a una geometría para que aparezca una geometría física con una métrica precisa y averiguando el grado de verdad de ese formalismo físico, tarea que compete a la Física y que requiere test experimental.

Para realizarlo hay que adoptar dos conceptos más:

- i) distancia unidad, y
- ii) sistema de referencia.

El primero se establece por convención y constituye un concepto de referición.

El segundo es una traducción material del concepto geométrico de sistema de coordenadas, que posee direcciones espaciales preferenciales fácilmente identificables y se refiere a eventos cuatridimensionales, es decir que posee, además, su tiempo. O, de otro modo, un sistema

de coordenadas sobre una región del espacio euclidiano n -dimensional es una función que mapea la región sobre un subconjunto de \mathbb{R}^n ; "manda", "envía" a cada punto a una n -ada de reales.

Las coordenadas de un punto son pues el nombre del punto y nada más; en tanto que las coordenadas de un objeto físico identifican al objeto y no son su nombre sino representan una situación física.

Sistema de coordenadas es pues un concepto matemático y, como tal, no se mueve en el espacio. Por consiguiente las transformaciones de coordenadas no involucran movimiento.

Por otro lado, los sistemas de referencia pueden moverse entre sí, de suerte que debemos de distinguir entre transformaciones de sistemas de coordenadas y transformaciones de sistemas de referencia.

Una transformación galileana, una no-inercial y una de Lorentz son de esta última clase.

Generalmente no se distingue entre sistemas de referencia y observadores puesto que estos últimos llevan consigo su propio sistema de referencia. Cuando hablamos de un "observador" tenemos que pensar que es "un sistema de referencia" pues es necesario eliminar de la teoría todas las características que posean algún sentido psicológico para evitar la intervención de elementos manifiestamente subjetivos en todas las situaciones físicas posibles o actuales.

V SISTEMAS FISICOS GENERALES

Otro conjunto de ideas que le sirve de base a la Física y que muchas veces es motivo de discusión y aun de controversia está constituido por los sistemas físicos y los conjuntos.

A Sistema Físico

Entenderemos por sistema físico algo que existe en el espaciotiempo y que se comporta como un todo o puede ser tratado como tal, al menos en algún aspecto. No es un conjunto arbitrario de elementos sino un grupo de individuos, simple o complejo, que coexisten con o sin interconexión física, y que debe entenderse que forman una unidad física, no solamente una unidad conceptual.

Si el sistema tiene masa se le llama cuerpo, partícula, quantum de materia; si no la tiene es un campo o un quantum de campo.

La colección de estrellas coexistentes, las moléculas de un gas, la colección de ^{gotas de agua} agua existentes, el agua de un lago, las partículas de un fluido, son ejemplos de sistemas físicos.

La colección de todas las gotas de líquido pasadas, presentes y futuras es un conjunto solamente, no un sistema físico. Es una unidad conceptual, no una unidad física.

Otro concepto importante es el de relación espacio-temporal, que algunos designan con \dot{e} , y da la calidad de ser miembro de un sistema físico, pero difiere de e no solamente en que se emplea en sistemas físicos sino en que es transitiva

protoplasma \dot{e} célula \dot{e} tejido \dot{e} brazo \dot{e} persona

En términos de la relación espacio-temporal se pueden dar los demás conceptos clave de la teoría de sistemas físicos generales.

1. Suma Física o Yuxtaposición ($\dot{+}$).

Si s_1 y s_2 son sistemas físicos entonces $s = s_1 \dot{+} s_2$ ssi cada parte de s es parte de s_1 o parte de s_2 .

Un agregado de cuerpos se puede considerar como la suma física de sus partes aunque no estén en contacto. Es pues unión externa.

2. Producto Físico o Superposición (\dot{x})

Si s_1 y s_2 son sistemas físicos entonces $s = s_1 \dot{x} s_2$ ssi cada parte de s es parte de s_1 y parte de s_2 .

El sistema compuesto de campos \underline{E} y \underline{B} superpuestos es el producto físico de sus partes. Es una interpenetración.

En particular, todo sistema físico es su propia suma y su propio producto.

Veamos otros ejemplos:

La masa relativa de un cuerpo c formado de partes c_1 y c_2 es la suma aritmética de sus masas parciales

$$M(c) = M(c_1 \dot{+} c_2) = M(c_1) + M(c_2)$$

que es una verdad factual aproximada no una propiedad matemática.

Esta es una idea, nada más, de la manera como se suman las masas para formar un todo. Lo cual no es matemática aunque involucre matemática. c_1 y c_2 son un sistema físico, no simplemente un conjunto. Los conjuntos obedecen a las leyes de la teoría de conjuntos en tanto que los sistemas físicos obedecen a las leyes físicas.

Supongamos que m_1 y m_2 son un sistema físico sometido a fuerzas. Designemos las siguientes fuerzas:

$F_{tot}(m_1)$ = fuerza resultante o total sobre m_1

$F_{m_2}(m_1)$ = fuerza que m_2 hace sobre m_1 , que es fuerza interna al sistema o fuerza de interacción entre m_1 y m_2 .

$F_{ext}(m_1 \dot{+} m_2)(m_1)$ = parte de la fuerza externa sobre el sistema y que se ejerce sobre m_1

$$F_{tot}(m_1) = F_{m_2}(m_1) + F_{ext}(m_1 \dot{+} m_2)(m_1)$$

Supongamos dos partículas con cargas eléctricas q_1 y q_2 en el vacío inmersas dentro del campo eléctrico \underline{E} y potencial \emptyset que producen.

Su fuerza de interacción es \underline{F}_O y $q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset$, que queda mejor descrita

$$\underline{F}_O(q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset)$$

Si ahora las partículas están inmersas en un dieléctrico perfecto D de permitividad ϵ su fuerza de interacción es \underline{F}_d y $q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset \dot{x} D$

La fuerza queda mejor descrita

$$\underline{F}_d(q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset \dot{x} D)$$

y todos sabemos que

$$(1/\epsilon) \underline{F}_O(q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset) = \underline{F}_d(q_1, q_2 \dot{\in} \underline{E} \dot{x} \emptyset \dot{x} D)$$

3. Definiciones.

Def 1. - Un sistema físico es una suma física o yuxtaposición de todos los sistemas individuales $s_i \in S'$, con $S' \subseteq S$ e $i \in N$, ssi cada parte de s es parte de, al menos, uno de los miembros de S'

$$s = \sum_{s_i \in S'} s_i$$

Def 2. - Un sistema físico es un producto físico o superposición de todos los sistemas individuales $s_i \in S'$, con $S' \subseteq S$ e $i \in N$, ssi cada parte de s es parte de todos los miembros de S'

$$s = \prod_{s_i \in S'} s_i$$

Def 3. - Un sistema físico es un nulo de la clase S ssi su suma física hasta un individuo arbitrario de la misma clase iguala al último individuo

$$0_S$$

Def 4. - Un sistema físico es un universo de la clase S ssi es la yuxtaposición de todos los sistemas de esa misma clase

$$U_S$$

Def 5. - Un individuo tal que sumado físicamente con otro individuo s de la misma clase da U_S se llama complemento de s en S

$$\bar{s}$$

Ahora fijémonos en la 6-ada $(S, \dot{+}, \dot{x}, \bar{\quad}, 0_S, U_S)$.

S es el conjunto de todos los sistemas físicos (S' es un conjunto físico arbitrario)

$\dot{+}$, \dot{x} son operaciones binarias en S

$\bar{\quad}$ es una operación unitaria en S

0_S , U_S son elementos fijos de S .

Las operaciones $\dot{+}$, $\dot{\times}$ son

- i) asociativas y conmutativas
- ii) distributivas una sobre la otra
 - (azúcar $\dot{+}$ crema) $\dot{+}$ cafe = azúcar $\dot{+}$ (crema $\dot{+}$ cafe)
 - jalea $\dot{+}$ helado = helado $\dot{+}$ jalea
 - fuerza $\dot{+}$ (te $\dot{\times}$ agua) = (fuerza $\dot{+}$ te) $\dot{\times}$ (fuerza $\dot{+}$ agua)
 - fuerza $\dot{\times}$ (aire $\dot{+}$ abejas) = (fuerza $\dot{\times}$ aire) $\dot{+}$ (fuerza $\dot{\times}$ abejas)
- iii) $\forall s \in S, s \dot{+} 0_S = 0_S$

$$\text{Luz } \dot{+} \text{ oscuridad} = \text{luz}$$

$$\text{iv) } \forall s \in S, s \dot{\times} U_S = s$$

todos los guatemaltecos $\dot{\times}$ todos los hombres = todos los guatemaltecos

$$\text{luz } \dot{\times} \text{ oscuridad} = \text{oscuridad}$$

$$\text{v) } \forall s \in S, \exists \bar{s} \in S \text{ tq } s + \bar{s} = U_S \wedge s \dot{\times} \bar{s} = 0_S$$

Tenemos pues un álgebra de sistemas físicos que es necesaria pero insuficiente pues es necesario hacer uso del análisis. Para ello requerimos que el concepto refleje, modele o represente conceptualmente, claro está, al objeto físico. Necesitamos entonces del concepto de referencia $\overset{m}{=}$.

Las cosas y las ideas no son idénticas y es por ello que existe la necesidad de mapear cosas sobre ideas. Las cosas obedecen leyes físicas, en las que hay matemática, pero no son leyes matemáticas.

Es tentador usar \cup e \cap en vez de $\dot{+}$, $\dot{\times}$. Pero cuerpos y campos son objetos físicos, no conjuntos y las fuerzas físicas actúan sobre cosas no sobre ideas. Aunque el error de usar \cup , \cap no tiene consecuencias computables y todo puede pasar desapercibido.

Ahora ya es posible definir la relación de parte

Def 6.- Si $s_1, s_2 \in S$, entonces $s_1 \dot{\leq} s_2$ ssi $s_1 \dot{+} s_2 = s_2$

La clase de referencia S es parcialmente ordenada por la relación de parte espaciotemporal.

VI MECANICA DE FLUIDOS

Hasta finales del siglo pasado la Mecánica Clásica fue considerada la teoría por excelencia; aun hoy pasa como paradigma de las teorías científicas y es objeto de muchas discusiones, tal vez, de la mayoría de las discusiones científicas.

La revolución de campos iniciada por Faraday y llevada a la cima por Einstein demostró que la Física Clásica consiste de dos conjuntos de teorías igualmente básicas: Mecánica y Física de Campos, que desde un punto de vista enteramente lógico están en el mismo pie.

La Mecánica Clásica es la unión de tres teorías: Mecánica del Continuum (dentro de la cual está la Mecánica de Fluidos), Mecánica de Partículas y Mecánica Estadística. Las tres tienen orígenes remotos y han constituido la semilla de varias cosmologías.

La razón principal para investigar los fundamentos de la Mecánica Clásica, y en especial de la Mecánica de Fluidos, es que en su mayoría son inadecuados, desconocidos por los físicos, o ambas cosas.

Aun en muchos libros de texto actualmente en uso en las universidades se encuentra la famosa y ampliamente aceptada eliminación del concepto de masa propuesto por Ernst Mach, que trató de definirla como una relación de aceleraciones sin darse cuenta que:

- i) La segunda ley de Newton, que involucra $a \propto m^{-1}$, no es una convención sino una ley de la Naturaleza
- ii) las razones de aceleraciones dependen del sistema de referencia donde se tomen mientras que, en Mecánica Clásica la masa es invariante
- iii) lejos de independen de una teoría, esa relación de aceleraciones está basada en la segunda y tercera ley de Newton.
- iv) la relación se rompe cuando se toma en un sistema acelerado, y
- v) la idea descanza en una confusión entre una definición y una ecuación numérica.

Aunque sepamos que la Física Clásica falla a nivel atómico y subatómico esto no debe preocuparnos puesto que toda verdad factual es siempre parcial y, aunque estemos concientes de esa falla, existen por lo menos las siguientes razones para investigar sus fundamentos:

- i) esa investigación nos enseñará algo concerniente a la estructura

y contenido de las teorías físicas en general

- ii) los fundamentos de la Física Clásica están lejos de poder ser considerados como concluidos; hay más oscuridad en ellos que claridad.
- iii) las teorías clásicas son siempre los límites de las no clásicas y, consecuentemente, deben estar en buena forma para servir de guía y de comprobación, además de que constituyen la fuente de inspiración para la interpretación física de teorías más generales
- iv) es un cuerpo de conocimientos regularmente usado que sirve de base a toda la tecnología, además de servir de control a toda idea nueva
- v) es empleada como base y constituyente en varios campos
- vi) hasta hoy parece no existir axiomatización aceptada en forma general y las que existen en su mayoría son formales, es decir que les preocupa la matemática y la lógica y dejan por un lado la semántica de la teoría.

Si un cuerpo de conocimientos lo usamos todos los días, debemos librarlo de inconsistencias, renovarlo, completarlo, clarificarlo y formalizarlo cuanto sea posible.

La Mecánica del Continuum es la parte de la Mecánica más cercana a la experiencia puesto que la materia con que experimentamos siempre ocupa volumen, está en bulto, y nunca podemos utilizar experimentalmente la idealización exagerada de masas puntuales. Todo el equipo de laboratorio y los cuerpos perceptibles son materia con volumen. Por eso es que, metodológicamente, y sin concesiones pedagógicas, necesitaríamos primero una teoría para la Mecánica del Continuum antes que una teoría para la Mecánica de Partículas (puesto que esta última puede ser obtenida cuando se relajan adecuadamente las suposiciones de continuidad) y también antes que otras teorías físicas que la presuponen.

El proceso inverso, o sea obtener la Mecánica del Continuum a través de la de Partículas es imposible puesto que no se obtiene un continuo al incrementar la cardinalidad de un conjunto.

Todo lo anterior no quiere decir que sea non plus ultra sino que, dentro de la Física Clásica es tan básica como otras teorías, digamos Electromagne-

tismo. Por consiguiente debe ser estudiada per se y con la ayuda de la Mecánica Cuántica si es que se desea entenderla en términos de microfísica estadística.

El programa que plantearemos es un poco más restringido pues sólo estudiaremos la materia que fluye en bulto y no toda la materia en bulto. Construiremos una teoría semifenomenológica que represente los flúidos.

Semifenomenológica porque trataremos con cantidades no-observables como el tensor de flujo de la densidad de momentum, por mencionar alguna y también porque las leyes que rigen la materia en bulto son diferentes de las que rigen las partículas constituyentes.

Pero, naturalmente, esperamos que sea posible demostrar que aquellas leyes son consecuencia de microleyes es decir que deberían ser obtenidas por procesos estadísticos aplicados al movimiento al azar de millones de átomos o moléculas.

El éxito de este último enfoque dependerá de la correcta formulación de la Mecánica del Continuum, del conocimiento que se tenga de microfísica, de la habilidad con que se la maneje y de saber qué promedios buscar.

Los fundamentos generales de la Mecánica del Continuum no suponen detalles de estructura, estado o constitución de los cuerpos que estudia; las propiedades internas se representan en bulto, pero localmente por vectores, tensores o escalares y aquí es cuando se hacen suposiciones especiales para dividirla en Mecánica Elástica y Mecánica de Flúidos, por no mencionar uniones aparentemente exogámicas como Termomecánica y Magnetohidrodinámica, que al final de cuentas siempre aparecen si es que se desea analizar todas las facetas de un macroevento.

Y la subdivisión puede continuar si es que se añaden suposiciones que especifiquen cada vez más la clase de material a estudiar.

Una de las ramas principales de la Mecánica del Continuum, la Mecánica de Flúidos, que trata del movimiento de gases y líquidos, es el motivo de este estudio. Rama que se creyó suficientemente desarrollada y no fue sino hasta la década de 1940 en que la humanidad se dio cuenta que no se conocía de ella lo suficiente, aun para propositos de ingeniería.

No había suficientes teoremas, la teoría existente no era capaz de explicar fenómenos de descubrimiento reciente y aun fenómenos conocidos de mucho tiempo atrás. Y ni siquiera pensó en superfluidez.

to y la Mecánica de Fluidos comenzó a ser estudiada profundamente pero no fue sino hasta la década del 50 en que se pensó en revisar sus fundamentos.

Este trabajo presenta esos fundamentos en su forma más general, con rigor matemático y organización lógica.

A. Conocimientos Previos.

Los conocimientos formales previos de la Mecánica de Fluidos están constituidos por la lógica corriente, semántica, álgebra, análisis, topología, geometría y todas las teorías presupuestas por esas disciplinas.

Los conocimientos factuales previos están constituidos por la protofísica.

La Mecánica de Fluidos no presupone ninguna teoría física especial y por consiguiente es una teoría física auto contenida. No presupone Mecánica de Partículas, aunque algunas veces se utilicen hipótesis corpusculares como fuente de inspiración.

Sin embargo presupone continuidad mecánica, es decir que existe masa y campo de velocidad en todo el espacio ocupado por el fluido (v. AF8).

La continuidad de los fluidos es real en el sentido que están compuestos de cuanta y campos y no son solamente una colección de partículas clásicas.

B Base Primitiva.

La Mecánica de Fluidos constituye un modelo simplificado, aunque muy complejo, de los fluidos como medios mecánicos continuos; modelo que es una representación, una imagen conceptual de los fluidos como un todo, en bulto, con volumen. Pero de ninguna manera niega que, en última instancia, haya partículas.

La base primitiva que tomaremos es:

$F = \{ f \}$ = el conjunto de todos los fluidos. F es una clase de referencia de la Mecánica de Fluidos, es decir que todo lo que dice esta discipli-

na es respecto de los miembros de F . Sin embargo, generalmente se hablará de modelos $m \in M$ de los flúidos reales $f \in F$ y con $m \stackrel{m}{=} f$.

$M = \{m\}$ = un conjunto de manifolds m . Donde cada m representa un flúido real f . Hay que notar que M representa o modela a F , i.e. $M \stackrel{m}{=} F$.

M es el referente inmediato y F el mediato. Distinción que debe hacerse siempre puesto que los referentes (flúidos en este caso) tienen estructura física.

E^3 = Espacio euclidiano tridimensional que representa el espacio físico y es tomado de la protofísica.

T = Tiempo; tomado de la protofísica.

$K = \{k\}$ = conjunto de sistemas de referencia.

$\{x\}$ = conjunto de mapeos cuyos valores representan posiciones de cuerpos.

$\{\rho\}$ = familia de campos escalares que representan la densidad de masa del cuerpo desde un punto de vista microfísico . Es pues un promedio local tomado sobre un elemento de volumen (v , def 1). Si se tomara promedios localmente en elementos de volumen cada vez mas pequeños, los valores de ρ comenzarían a oscilar tremendamente hasta que el concepto de densidad dejara de ser útil o de representar algo, y las fórmulas en que aparece no servirían de nada. No compete a la Axiomática de la Mecánica de Flúidos decir cuál es su extensión. Esa es tarea experimental.

Las densidades, que son conceptos locales , se prescriben y con base en ellas se calcula el comportamiento del flúido.

$\{f_b\}$ = una familia de campos vectoriales que representan la densidad de fuerza del cuerpo por unidad de masa.

$\{\mathcal{G}\}$ = una familia de campos tensoriales que representan esfuerzo interior. El tensor \mathcal{G} es una cantidad física no-observable de la Mecánica de Flúidos, que describe de un modo global el estado interno de un flúido que es lo que determina su comportamiento externo. Aunque no es observable directamente, es testable en forma indirecta y se manifiesta en el comportamiento del flúido.

Todos los conceptos arriba indicados son estudiados por la Matemática en su forma, lo cual hace de la Mecánica de Fluídos una ciencia matemática pero no una rama de ella. Con su ayuda pueden construirse todas las demás primitivas de la Mecánica de Fluídos.

C Conjunto de Conceptos C

Def 1. - Elemento de volumen de un fluído es una porción de éste infinitamente pequeña desde un punto de vista físico. La designaremos por p , entonces

$$p \stackrel{df}{=} \text{elemento de } f \in F$$

y como constituye parte de un cuerpo real tenemos que $p \in f$. Infinitamente pequeño en el sentido físico significa que un elemento de volumen (una partícula de fluído) aunque pequeño siempre contiene un enorme número de moléculas. Así, la partícula de fluído tiene un volumen mucho menor que el volumen del fluído f que estemos considerando, pero de dimensiones grandes comparadas con la separación intermolecular.

Cuando hablamos del desplazamiento de una partícula de fluído lo que hacemos es indicar el desplazamiento de ese gran número de moléculas.

Def 2. - Punto material es un elemento de un manifold que modela a un elemento de un fluído. Lo designaremos por b , entonces

$$b \stackrel{d}{=} \text{elemento de } m \in M, \text{ y } b \stackrel{m}{=} p$$

Un error muy común es confundir o bien tomar como sinónimo a b con p , sin considerar que b es un concepto matemático y como tal es formal, en tanto que p es un concepto físico y por ende factual y conocido sólo parcialmente.

Def 3. - Sean m_1 y m_2 el modelo de f_1 y f_2 respectivamente

Decimos que f_1 es parte propia de f_2 cuando $m_1 \subset m_2$

$$m_1 \stackrel{m}{=} f_1 \wedge m_2 \stackrel{m}{=} f_2 \implies f_1 \text{ es pp de } f_2 \text{ ssi } m_1 \subset m_2$$

Def 4. - El punto material que representa o modela a p da la posición de éste en un instante fijo, respecto de un sistema de referencia específico

$$b \stackrel{m}{=} p \implies \text{Pos. de } p \in f, \text{ en } t \Big|_k \stackrel{df}{=} \underline{x}(b, k, t)$$

Def 5. - La configuración del fluido es la imagen del manifold que lo modela bajo la función \underline{X} en un instante fijo

$$m \stackrel{m}{=} f \implies C(f, t) \stackrel{df}{=} \underline{X}(m, t)$$

La configuración y forma pueden tomarse como sinónimos si se aclara suficientemente lo que se desea expresar. Ambos se refieren a todo el fluido f modelado por m y no solamente a la parte exterior de f modelada por la frontera de m .

Es un concepto transexperimental puesto que para dar la forma de un fluido en en el instante t necesitaríamos un número infinitamente grande de medidas de posición tomadas en $\Delta t = 0$. Y eso es imposible experimentalmente.

Def 6. - Configuración de referencia es la configuración inicial del fluido en el instante inicial t_0

$$m \stackrel{m}{=} f \implies C_0(f) \stackrel{df}{=} \underline{X}_0(m) = \underline{X}(m, t_0)$$

Es pues una condición inicial.

Def 7. - El movimiento de un fluido es el conjunto de posiciones que ocupa en el tiempo.

$$m \stackrel{m}{=} f \implies \text{Mov. de } f \stackrel{df}{=}} \{ \underline{X}(m, t) \mid -\infty < t < \infty \}$$

También es un concepto transexperimental por razón semejante a la indicada en el concepto de configuración.

Def 8. - El volumen de un fluido f en un instante t es el volumen del manifold que lo representa en ese instante

$$m \stackrel{m}{=} f \implies V(f, t) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m, t)} d^3x \equiv \mathcal{V}(m, t)$$

Def 9. - Dos fluidos son distintos cuando no ocupan volumen común

$$m_1 \stackrel{m}{=} f_1 \wedge m_2 \stackrel{m}{=} f_2 \implies f_1 \text{ distinto de } f_2 \text{ ssi } \mathcal{V}(m_1 \cap m_2) = 0$$

Def 10. - Masa de un fluido

$$m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow M(f, t) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m, t)} \rho(\underline{x}) d^3x$$

Def 11. - Derivada material de un tensor, vector o escalar $\underline{\zeta}$

$$\dot{\underline{\zeta}} = \frac{d}{dt} \underline{\zeta} = \partial_t \underline{\zeta} \Big|_{\underline{x} = \text{cte}} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\zeta} = \partial_t \underline{\zeta} \Big|_{b \text{ fijo}}$$

$\frac{d}{dt}$ expresa la razón de cambio respecto del tiempo cuando con sideramos movimiento en el espacio y se puede expresar como

$$(\partial_t \text{ en posición fija} + \underline{v} \cdot \nabla)$$

Si deseamos averiguar la razón de cambio respecto del tiempo en un punto b fijo en el espacio, desaparecen los cambios espaciales y queda solamente ∂_t .

La razón es que $\frac{d}{dt}$ está compuesta de dos partes:

i) el cambio durante dt en un punto b fijo en el espacio, y

ii) la diferencia entre los valores del tensor separados un desplazamiento $d\underline{x}$ que el elemento de fluido se mueve en dt .

La definición anterior se puede aplicar por ejemplo a la posición para encontrar la aceleración $\underline{a} = \partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$, que da la razón por la cual la Mecánica de Fluidos no es una teoría lineal y consecuentemente es muy compleja no sólo de tratar sino de trabajar.

Def 12. - Velocidad lineal de un elemento de fluido p es $d\underline{X}/dt = \dot{\underline{X}} = \underline{v}$

$$b \stackrel{m}{=} p \Rightarrow \underline{v}(p) \stackrel{df}{=} \dot{\underline{X}}(b, k, t) = \underline{v}(b, k, t)$$

Def 13. - Vorticidad de un elemento de fluido p

$$b \stackrel{m}{=} p \Rightarrow \Omega(p) \stackrel{df}{=} \nabla \times \underline{v}(b, k, t)$$

Def 14. - Momentum lineal del fluido f

$$m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow \underline{p}(f) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m, t)} \rho(\underline{x}) \underline{v}(b, k, t) d^3x$$

Def 15. - Momentum angular del fluido f respecto de un punto fijo \underline{x}_0

$$m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow \underline{L}(f) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m,t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{v}(b, k, t) \varrho(\underline{x}) d^3x$$

Def 16. - El vector de esfuerzo es la fuerza por unidad de área en la frontera $\partial \underline{X}$ del fluido sobre el material encerrado adentro, con normal \hat{n} hacia afuera

$$\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \hat{n}$$

Def 17. - Fuerza resultante de contacto

$$m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow \underline{F}_C(f) \stackrel{df}{=} \oint_{\partial \underline{X}(m,t)} \underline{\mathcal{C}}(\underline{x}) d^2x = - \oint_{\partial \underline{X}(m,t)} p(\underline{x}) \hat{n} d^2x$$

Def 18. - Resultante de la densidad de fuerza del fluido

$$m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow \underline{F}_b(f) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m,t)} \underline{f}_b(\underline{x}) \varrho(\underline{x}) d^3x$$

Def 19. - Resultante de las fuerzas sobre el fluido

$$m \stackrel{m}{=} f == \underline{F}(f) \stackrel{df}{=} \underline{F}_C(f) + \underline{F}_b(f)$$

Def 20. - Torque sobre el fluido respecto de un punto fijo \underline{x}_0

$$m \stackrel{m}{=} f == \underline{N}(f) \stackrel{df}{=} \oint_{\partial \underline{X}(m,t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{\mathcal{C}}(\underline{x}) d^2x + \int_{\underline{X}(m,t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{f}_b(\underline{x}) \varrho(\underline{x}) d^3x$$

Def 21. - Un sistema de referencia $k \in K$ donde se cumplen los axiomas que siguen se llama inercial o galileano.

Algunos conceptos son locales mientras que otros son globales. Las integra- ciones, que nos dan conceptos globales, se toman respecto de una configura- cion representativa del fluido o sobre su frontera, que son objetos matemáti- cos ambos, y no se toma sobre el fluido en sí que es un objeto físico.

Al igual que las densidades, se prescriben otros conceptos locales y, a partir de ellos se calcula el comportamiento teórico del fluido el cual, una vez obte- nido, sirve de base al experimentador.

Y esos conceptos locales, que se emplean en las interfases, deben ser bien comportados i. e. suaves y continuos.

Además, debe hacerse notar que algunas de las definiciones anteriores pre- suponen, a su vez, algunos de los axiomas que siguen.

D Base Axiomática A

1. Axiomas Cronológicos.

AC1. - T es un intervalo de la línea real.

Este es un axioma estructural. Por su causa se adjudican a T todas las propiedades matemáticas del continuum de los números reales. Es decir que la teoría del tiempo universal es un modelo o una interpretación de la teoría matemática de los números reales

AC2. - Todo $t \in T$ se refiere a un instante

AC3. - La relación \leq que ordena a T significa "antes que" o "simultáneo con".

Los dos últimos axiomas son semánticos y dan significado a t .

2. Axiomas Geométricos.

AG1. - E^3 es el espacio euclidiano tridimensional.

AG2. - E^3 modela el espacio ordinario.

El primero es formal y el segundo semántico. Ambos podrían haber sido resumidos en uno y decir: el espacio físico es euclidiano tridimensional. Sin embargo esto es inconveniente pues no hace separación entre la suposición matemática y la interpretación física.

Cabría agregar aquí que, es perfectamente posible formular la Mecánica de Fluidos en un espacio no euclidiano lo cual posibilita su unión con la Teoría General de la Relatividad. Ello haría notar que la Mecánica de Fluidos no está ligada a una geometría especial. Pero, a no ser por esas dos anotaciones, ese tipo de formulación es innecesario. Nosotros nos mantendremos dentro de la formulación euclidiana y, es claro que, cualquier confirmación o refutación experimental de la Mecánica de Fluidos nada tiene que ver con la verdad o falsedad física de la Geometría Euclidiana.

3. Axiomas de Fluidos

AF1. - F es un conjunto numerable no vacío.

AF2. - Todo $f \in F$ es un fluido.

AF3. - $\{M\}$ es una familia de conjuntos m de puntos.

AF4.- Cada $m \in M$ es un manifold tridimensional diferenciable.

AF5.- $\forall f \in F$ existe $m \in M$ tq $m \stackrel{m}{\cong} f$ punto a punto.

Este axioma permite el mapeo del fluído f con el objeto conceptual m y consecuentemente $M \stackrel{m}{\cong} F$. En otras palabras, el modelo m nos dice cómo parece ser el fluído f .

AF6.- La función \underline{x} es continua y acotada $\forall \underline{x} \in \{\underline{x}\}$, $b \in m$, $k \in K$ y $t \in T$

AF7.- $\underline{x}(b, kt)$ representa la posición de un elemento de fluído $p \in f$ respecto del sistema de referencia k en el instante t .

Tenemos pues una composición de mapeos $\stackrel{m}{\cong}$ o \underline{x} .

$\stackrel{m}{\cong}$ sirve para mapear el fluído en el manifold m , y

\underline{x} mapea el manifold m , que es un objeto conceptual, sobre una región del espacio que es la configuración $\underline{X}(m)$ del fluído f , es decir que el modelo teórico es isomórfico a una región del espacio.

$$F \xrightarrow{\text{vía } \stackrel{m}{\cong}} M \xrightarrow{\text{vía } \underline{x}} C$$

Aquí hay cuerpos físicos (fluídos) en movimiento.

Acá hay conceptos

AF8.- $\forall \underline{x} \in \{\underline{x}\}$, $m \in M$, $t \in T$ la función $\underline{x}: m \longrightarrow \underline{X}(m, t)$ es biyectiva y continua.

La continuidad de la posición garantiza que aunque las posiciones cambien, los constituyentes p del fluído no cesan de existir en el espacio.

AF9.- $\forall \underline{x} \in \{\underline{x}\}$, $m \in M$, $t \in T$, la imagen $\underline{X}(m, t)$ es un conjunto compacto con frontera $\partial \underline{X}(m, t)$ seccionalmente continua.

AF10.- $\forall f \in F$, $t \in T$, $\exists \underline{x} \in \{\underline{x}\}$ tq $\underline{X}(m, t)$ representa el lugar ocupado por el fluído f representado por m .

AF11.- Toda $\varrho \in \{\varrho\}$ es una función continua y acotada de M al conjunto de los reales no negativos

$$\varrho: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

AF12. - Si $m \stackrel{m}{=} f$, entonces $\varrho(m, \underline{x}, t)$ representa la densidad de masa de f en \underline{x}, t .

Se han dado axiomas para la densidad puesto que ella (y no la masa) ha sido tomada como primitiva. Huelga decir que las primitivas elegidas no son mandatorias sino que pueden cambiar.

AF13. - $\forall f \in F$, si $m \stackrel{m}{=} f$ y $\underline{X}(m, t)$ es la imagen de m , entonces M es una función continua del volumen $\mathcal{V}(m, t)$ de m en t .

AF14. - $\forall f_1, f_2 \in F$ y diferentes, si $m_1 \stackrel{m}{=} f_1 \wedge m_2 \stackrel{m}{=} f_2$

$m_1 \cup m_2 \stackrel{m}{=} f_1 + f_2$, entonces $M(m_1 \cup m_2) = M(m_1) + M(m_2)$

AF15. - Si $m \stackrel{m}{=} f$, entonces $M(m)$ representa la masa del fluido f i.e. $D M(m)$ masa del fluido.

AF16. - Ley de conservación de masa. $\forall f \in F$, si $m \stackrel{m}{=} f \wedge \underline{X}(m), \underline{X}'(m)$ son dos configuraciones diferentes de f en un t dado, entonces las masas correspondientes son las mismas

$$M(m) = \int_{\underline{X}(m)} \varrho(x) d^3x = \int_{\underline{X}'(m)} \varrho(x') d^3x'$$

Este es un axioma global que se reformulará en forma local más adelante.

4. Axiomas Cinemáticos.

AK1. - K es un conjunto numerable no vacío contenido en el conjunto S de todos los sistemas físicos.

AK2. - La configuración de $k \in K$ es independiente del tiempo.

AK3. - $\forall k \in K \exists$ un sistema cartesiano de ejes $e = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ tal que $e \stackrel{m}{=} k$.

AK4. - Ningún $k \in K$ interactúa con un $f \in F$ que no sea parte de él.

AK5. - Sea $x' = A + Bx$ la representación de un cambio de sistema de referencia con A, B funciones del tiempo.

i) si \underline{v} es un vector que se refiere a $p \in f \in F$, y al cambiar de sistema se transforma en $\underline{v}' = B\underline{v}$, entonces

\underline{v} y \underline{v}' se refieren a la misma situación física.

ii) si \underline{S} es un tensor cartesiano de segundo rango que se refiere a $p \in f \in F$, y al cambiar de sistema se transforma en $\underline{S}' = B \underline{S} \tilde{B}$ donde \tilde{B} es la transpuesta de B , entonces

\underline{S} y \underline{S}' se refieren a la misma situación física.

Este axioma permite representar la misma situación física en cualquiera de las infinitas formas posibles.

Esas representaciones constituyen una clase de equivalencia y tratan de traslaciones y rotaciones del sistema de referencia. No representan cambio de sistema de coordenadas simplemente.

AK6. - $\forall \underline{x} \in \{\underline{x}\}$, $b \in m$, $k \in K$, $t \in T$ existen las derivadas $\dot{\underline{x}}$ y $\ddot{\underline{x}}$

AK7. - $b \stackrel{m}{=} p \wedge p \in f \Rightarrow \dot{\underline{x}}(b, kt) \wedge \ddot{\underline{x}}(b, k, t)$ representan la velocidad y aceleración, respectivamente, del elemento de fluido $p \in f$, relativas al sistema k en el instante t .

Hay que notar que no se pide continuidad de velocidad y aceleración (como se exigió continuidad de posición) para que pueda haber saltos en esas cantidades, condición necesaria en ciertas fronteras para poder representar fenómenos físicos.

5. Axiomas Dinámicos.

AD1. - Toda $\underline{f}_b \in \{\underline{f}_b\}$ es un campo vectorial real acotado sobre $M \times K \times E^3 \times T$.

AD2. - Todo $\underline{\mathcal{C}} \in \{\underline{\mathcal{C}}\}$ es un campo tensorial real acotado, de valencia $(2, 0)$ sobre $M \times K \times E^3 \times T$.

AD3. - $m \stackrel{m}{=} f \Rightarrow \underline{f}_b(m, k, \underline{x}, t)$ representa la densidad de fuerza por unidad de masa sobre el fluido f .

AD4. - $m \stackrel{m}{=} f \wedge b \stackrel{m}{=} p \Rightarrow \underline{\mathcal{C}}(m, k, \underline{x}, t)$ representa el esfuerzo en la partícula $p \in f$.

AD5. - Ley de Movimiento de Newton-Euler. $\forall f \in F$, $t \in T$, $\underline{\mathcal{C}} \in \{\underline{\mathcal{C}}\}$, $\underline{f}_b \in \{\underline{f}_b\}$, $\varrho \in \{\varrho\}$, $\exists k \in K$ tq $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$, donde \underline{p} es el momentum lineal del fluido f y \underline{F} es la resultante de las fuerzas sobre el fluido f .

AD6. - Ley de torque. $\forall f \in F$, $\varrho \in \{\varrho\}$, $\underline{f}_b \in \{\underline{f}_b\}$, $\underline{\mathcal{C}} \in \{\underline{\mathcal{C}}\}$, $t \in T$
 $\exists k \in K$ tq $\dot{\underline{L}} = \underline{N}$

Una vez matematizada la Mecánica de Fluidos permanecemos en este terreno hasta terminar los cálculos. Después tenemos que reinterpretar los resultados en términos físicos.

E. Desarrollo de algunas consecuencias.

1. Ecuación de Continuidad.

Cualquier elemento de un fluido (def 1) parece ser continuo cuando lo examinamos con nuestros ojos o con detectores visuales; en general, todo material aparece ser continuo ante cualquier detector que promedie efectos moleculares. Sin embargo, sabemos que cualquier substancia consiste de moléculas que se mueven en todas direcciones y hay evidencia de ello,

Así, todo elemento de volumen de un fluido contiene un gran número de moléculas más o menos independientes. Si consideramos un intervalo significativo de tiempo, muchas de esas moléculas bombardean la frontera del fluido y entran o salen de la región considerada siendo reemplazadas por otras que poseen propiedades similares. El resultado neto es transferencia de materia y de momentum.

Un análisis detallado del proceso considerando partículas individuales es sencillamente imposible; hay demasiadas moléculas. Sin embargo, a partir de la ley de conservación de masa escrita en forma global (AF 16) en unión con las hipótesis concernientes a la densidad (AF 11 y 12), junto con las definiciones de masa de fluido y de derivada material (Df 10 y 11) podemos obtener la ley de conservación de masa en forma diferencial es decir reformulada en forma local.

Consideremos un fluido cualquiera, compresible, f e F como un gas o un líquido fluyendo a través de una región del espacio fija en él. El flujo puede variar como una función del tiempo y, en un punto dado la densidad del fluido puede estar aumentando o disminuyendo.

Sean $m = f$, $\underline{X}(m, t)$ la configuración del fluido, $\partial \underline{X}(m, t)$ su frontera y $M(f, t)$ su masa.

Supongamos, además, que dentro de la frontera no existen fuentes ni sumideros de masa (es decir puntos por donde entra o se escapa masa) y que ésta fluye hacia afuera a través de la frontera por elementos de área d^2x a razón

$$\rho(\underline{x}) \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x$$

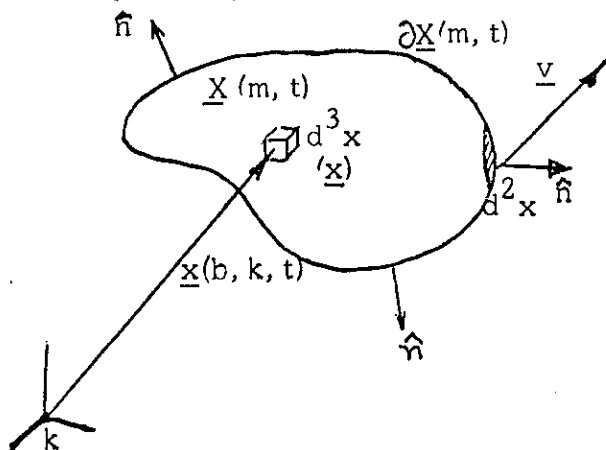
que es positiva puesto que el fluido sale y, además, \hat{n} es hacia afuera.

La masa de fluido que sale en la unidad de tiempo a través de $\partial \underline{X}(m, t)$, es

$$\frac{dM}{dt} = \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \rho(\underline{x}) \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x = \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot [\rho(\underline{x}) \underline{v}] d^3x$$

donde se utilizó el teorema de la Divergencia de Gauss.

Dentro de la frontera, fija en el espacio, disminuye la masa puesto que hay un flujo a través de ella y no existen fuentes, entonces



Configuración de un fluido y su frontera

$$\frac{dM}{dt} = \partial_t M = -\partial_t \int_{\underline{X}(m,t)} \rho(\underline{x}) d^3x = -\int_{\underline{X}(m,t)} \partial_t \rho(\underline{x}) d^3x$$

Igualando las dos expresiones obtenemos

$$\int_{\underline{X}(m,t)} \nabla \cdot [\rho(\underline{x}) \underline{v}] d^3x = -\int_{\underline{X}(m,t)} \partial_t \rho(\underline{x}) d^3x$$

Así $\int_{\underline{X}(m,t)} [\nabla \cdot \rho(\underline{x}) \underline{v} + \partial_t \rho(\underline{x})] d^3x = 0$, $\forall \underline{X}(m,t)$ puesto que no hubo

restricción para la configuración. Entonces

$$\partial_t \rho(\underline{x}) + \nabla \cdot [\rho(\underline{x}) \underline{v}] = 0 \quad (1.1)$$

Omitiendo en la escritura la dependencia de ρ con la posición, la ecuación de continuidad también se puede escribir

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (1.2)$$

$$(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.3)$$

Este resultado expresa que el flujo neto hacia afuera de la frontera es acompañado por una disminución de masa dentro del elemento de volumen. Es pues una expresión local para la conservación de masa. Por esta razón se llama ecuación de Continuidad. Diverger quiere decir "alejarse de" y la divergencia del vector $\rho(\underline{x}) \underline{v}$ da la razón a la cual sale masa del elemento de volumen localizado en el punto del espacio donde se calcula la divergencia.

Si el fluido es estable (v. definición en sec. 5) $\partial_t \rho = 0$ y la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \quad (1.4)$$

Si el fluido puede considerarse incompresible (v. def. en sec. 11) que equivale a decir que la densidad es constante y uniforme (esta es una ecuación de estado: $\rho = \text{constante y uniforme}$) entonces la ecuación de continuidad toma una forma más simple aun

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1.5)$$

La velocidad, como el campo magnético \underline{B} , tiene divergencia cero

Problema 1. Si la velocidad de un fluido, de densidad $\rho = \text{constante}$ y uniforme, es $\underline{v} = Kr^{-2} \hat{r}$ donde $K = \text{constante}$. Demuestre que la ecuación de continuidad es satisfecha para todos los puntos del espacio excepto el origen y que el flujo de masa a través de una superficie cerrada arbitraria que encierra el origen es $4\pi K\rho$.

$$\nabla \cdot \underline{v} = 3K (r^{-3} - r^{-3}) = 0 \quad \text{excepto para } r = 0$$

Así, la ecuación de continuidad es satisfecha para todos los puntos del espacio excepto el origen.

Calculemos ahora el flujo de masa

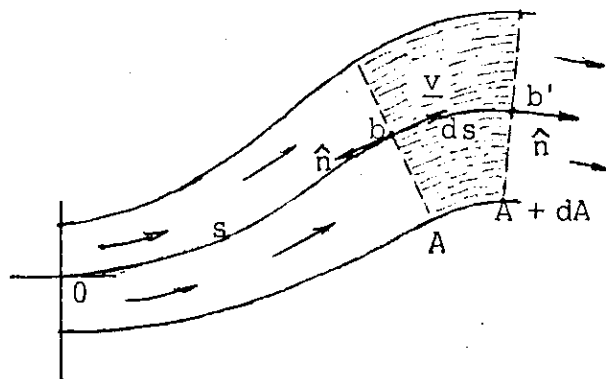
$$\oint_{\partial X(m, t)} \rho \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x = \oint_{\text{esfera}} \rho \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x = 2\pi\rho K \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi K\rho$$

Problema 2. Suponga un fluido moviéndose en un tubo de sección transversal variable A . Demuestre que la ecuación de continuidad puede escribirse

$$A \partial_t \rho + \partial_s (A \rho v) = 0$$

donde v es la rapidez del fluido en el punto b y s es la longitud del tubo hasta b .

Supongamos que la dimensión lineal de A es pequeña comparada con la longitud del tubo; esto permite suponer que \underline{v} y ρ no cambian apreciablemente en la sección A . En esas condiciones el flujo de masa que atraviesa A en la unidad de tiempo, en el instante t , es



Tubo de sección transversal variable

$$\partial_t m = \rho \underline{v} \cdot \hat{n} A = -\rho v A \quad (1)$$

y en la sección vecina $A + dA$ el flujo de masa es

$$\rho v A + \partial_s (\rho v A) ds \quad (2)$$

en el mismo instante t , de manera que el flujo neto es

$$-\partial_s (\rho v A) ds \quad (3)$$

Ahora bien, la masa entre las secciones A y $A + dA$ es

$$\rho A ds \quad (4)$$

y su variación temporal, o sea la masa que sale en la unidad de tiempo, es

$$-\partial_t(\rho A ds) = -A ds \partial_t \rho \quad (5)$$

y en ausencia de fuentes y sumideros

$$\partial_s(\rho v A) ds = -A ds \partial_t \rho$$

por lo que

$$A \partial_t \rho + \partial_s(\rho v A) = 0 \quad (6)$$

que es la ecuación de continuidad. Si el fluido es incompresible la ecuación se transforma en

$$\partial_s(vA) = 0 \quad (7)$$

o sea que $Q = \text{Gasto} = vA = \text{constante}$ en cada sección

Problema 3. Obtenga la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas r, θ, ϕ .

$$d\underline{s} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$$

ver apéndice 1

$$dq_1 = dr, dq_2 = d\theta, dq_3 = d\phi$$

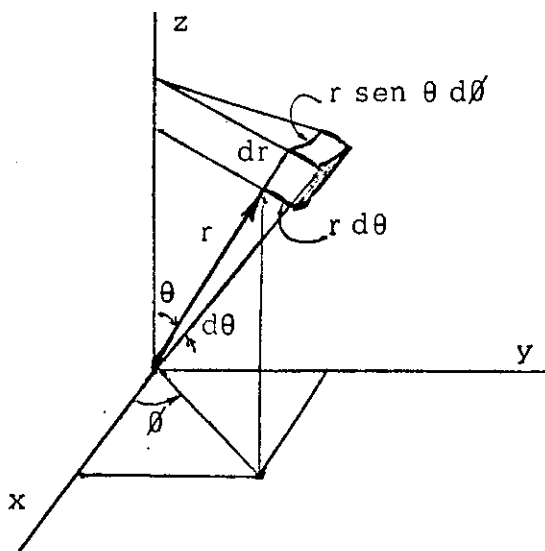
$$\underline{v} = v_j \hat{e}_j = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} + v_\phi \hat{\phi}$$

$$= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \sin \theta \dot{\phi} \hat{\phi}$$

La razón de flujo en el punto (r, θ, ϕ) en la dirección \hat{r} es

$$\rho \dot{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

y en $(r + dr, \theta, \phi)$ es



Elemento de volumen en coordenadas esféricas r, θ, ϕ

$$[\rho \dot{r} r^2 \sin \theta + \partial_r(\rho \dot{r} r^2 \sin \theta) dr] d\theta d\phi$$

de manera que el flujo neto es

$$\partial_r(\rho \dot{r} r^2 \sin \theta) dr d\theta d\phi$$

En las otras dos direcciones existen términos similares; en (r, θ, ϕ) en dirección $\hat{\theta}$

$$\rho r^2 \dot{\theta} \sin \theta dr d\phi$$

y en $(r, \theta + d\theta, \vartheta)$

$$[\rho r^2 \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \partial_{\theta}(\rho r^2 \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta) d\theta] dr d\vartheta$$

el flujo neto es

$$\partial_{\theta}(\rho r^2 \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta) dr d\theta d\vartheta$$

En (r, θ, ϑ) en dirección ϑ

$$\rho r^2 \operatorname{sen} \theta \dot{\vartheta} dr d\theta$$

y en $(r, \theta, \vartheta + d\vartheta)$

$$[\rho r^2 \operatorname{sen} \theta \dot{\vartheta} + \partial_{\vartheta}(\rho r^2 \operatorname{sen} \theta \dot{\vartheta}) d\vartheta] dr d\theta$$

el flujo neto es

$$\partial_{\vartheta}(\rho r^2 \operatorname{sen} \theta \dot{\vartheta}) dr d\theta d\vartheta$$

Sumándolos y dividiendo entre el elemento de volumen obtenemos el cambio temporal de la densidad

$$-\partial_t \rho = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} [\partial_r(\rho r^2 \dot{r} \operatorname{sen} \theta) + \partial_{\theta}(\rho r^2 \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta) + \partial_{\vartheta}(\rho r^2 \dot{\vartheta} \operatorname{sen} \theta)]$$

que es la ecuación de continuidad puesto que el lado derecho no es más que

$$\nabla \cdot \rho \underline{v}.$$

2. Ley de movimiento de Newton-Euler.

Para describir el movimiento de un fluido debemos dar sus propiedades en cada punto. Por ejemplo sus tres componentes de velocidad (lo que permite saber cómo se mueve en cada instante); debemos dar la variación de presión, densidad y temperatura de punto a punto y, de los campos eléctrico y magnético, si tal fuera el caso. Estaríamos entonces en el campo de la Magneto-hidrodinámica. Sin embargo, no consideraremos esas situaciones pues en el nivel puro de la Mecánica de Fluidos hay fenómenos muy interesantes y suficientemente complicados

Consideremos un volumen de fluido dentro de un campo gravitatorio \underline{g} constante y uniforme. La fuerza total que obra sobre él, de conformidad con las definiciones 16 a 19, es

$$m \underline{\ddot{x}} = \underline{F}(f) \stackrel{df}{=} \underline{F}_c(f) + \underline{F}_b(f)$$

De aquí en adelante omitiremos la dependencia de ρ, p, f_b , etc con la posición

$$\underline{F}(f) = - \oint_{\frac{\partial \underline{X}(m, t)}{\underline{X}(m, t)}} p \hat{n} d^2 x + \int_{\underline{X}(m, t)} \underline{f}_b \rho d^3 x$$

pero como $-\oint_{\frac{\partial \underline{X}(m, t)}{\underline{X}(m, t)}} p \hat{n} d^2 x = -\int_{\underline{X}(m, t)} \nabla p d^3 x$ y $\underline{f}_b = \underline{g} = \text{constante y uniforme}$

$$\underline{F}(f) = \int_{\underline{X}(m, t)} [-\nabla p + \underline{g} \rho] d^3 x + \underline{F}_{\text{viscosidad}} \quad (2.1)$$

Cuando no se toman en cuenta procesos de disipación de energía que pueden ocurrir en el fluido que se mueve, como consecuencia de la viscosidad que es fricción interna del fluido, ni intercambio de calor entre sus diferentes partes la ec (2.1) se reduce a

$$\underline{F}(f) = \int_{\underline{X}(m, t)} [-\nabla p + \underline{g} \rho] d^3 x$$

En ese caso la ecuaciones que deduciremos sólo son válidas para movimiento del fluido en que lo anterior puede ser supuesto sin conducir a error apreciable. Tales fluidos se llaman ideales.

Podemos ahora escribir la ley de Movimiento de Newton-Euler (AD5) para un elemento de fluido, igualando la fuerza $-\nabla p + \underline{g}\rho$ que actúa sobre él al producto de la masa por unidad de volumen, ρ , por la aceleración $\frac{d}{dt} \underline{v}$

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla p + \rho \underline{g}$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g}$$

y como $\frac{d}{dt} = \partial_t + \underline{v} \cdot \nabla$, queda

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} \quad (2.2)$$

La ausencia de ~~intercambio de~~ calor entre las diferentes partes del fluido y con los cuerpos que lo rodean (medio ambiente) significa que el movimiento es adiabático en todo el fluido.

Para no preocuparnos de cambios de temperatura bastaría suponer que está determinada por la presión y densidad en forma única en cada punto. Sin embargo, para profundizar algo más, tomaremos prestados de la Termodinámica algunos de sus conceptos para ampliar un tanto el alcance de las ecuaciones.

La condición de arriba de ausencia de intercambio de calor significa que la entropía de un elemento de volumen del fluido, $p \delta f$, es uniforme y constante y el movimiento se llama isoentrópico.

Sea s la entropía por unidad de masa. La condición adiabática es entonces $ds/dt = 0$, que por definición 11 también se puede escribir

$$(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) s = 0 \quad (2.3)$$

que describe el movimiento adiabático o isoentrópico de un fluido ideal.

Si consideramos nuevamente un fluido compresible fluyendo a través de una región del espacio, con flujo función del tiempo y suponemos

$m \equiv f$, $\underline{X}(m, t)$ la configuración del fluido, $\partial \underline{X}(m, t)$ su frontera y con ρ_s formamos

$$\int_{\underline{X}(m, t)} \rho_s d^3x$$

y escribimos su variación temporal, ~~procediendo igual que~~ para la ecuación de continuidad obtenemos

$$\partial_t \rho_s + \nabla \cdot \rho_s \underline{v} = 0 \quad (2.4)$$

que es la ecuación de continuidad para entropía y $\rho \underline{s}$ es el vector de flujo de densidad de entropía.

La ecuación de Newton-Euler la podemos escribir en forma ligeramente diferente si recordamos que

$$H = \text{Función de calor/ unidad de masa} = U + pV \quad (2.5)$$

$$dU = \delta Q - \delta W$$

$$ds = \delta Q / T \quad \text{y que}$$

$$\delta W = p dV$$

donde U = energía interna, p = presión, V = volumen, Q = cantidad de calor, W = trabajo y T = temperatura absoluta

$$dH = dU + p dV + V dp = T ds + V dp = V dp = dp / \rho$$

puesto que el flujo es isoentrópico y el volumen específico es $v = 1/\rho$

$$dH = dp / \rho \Rightarrow \nabla H = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{con lo que, finalmente, la ecuación}$$

de Newton-Euler puede escribirse

$$(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla H + \underline{g} \quad (2.6)$$

Si utilizamos la siguiente identidad vectorial

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \quad (2.7)$$

la ecuación de Newton-Euler puede ser re-escrita

$$\partial_t \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = -\nabla H + \underline{g} \quad (2.8)$$

Ahora bien, \underline{g} puede ser descrita por $-\nabla \phi$, con ϕ potencial escalar newtoniano que da la energía potencial por unidad de masa, $\underline{g} = -\nabla \phi$

$$\partial_t \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = -\nabla (H + \phi) \quad (2.9)$$

que al tomar rotor da

$$\partial_t (\nabla \times \underline{v}) - \nabla \times [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] = \underline{0} \quad (2.10)$$

donde se ha supuesto suficiente continuidad y tiene la ventaja de involucrar sólo velocidades

Para la resolución de problemas específicos, las ecuaciones de continuidad y de Newton-Euler deben ser complementadas con las condiciones iniciales y condiciones de frontera, que son hipótesis especiales.

La condición de frontera para un fluido ideal es simplemente que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie que lo limita debe ser

igual que la componente normal de la velocidad de esa superficie.

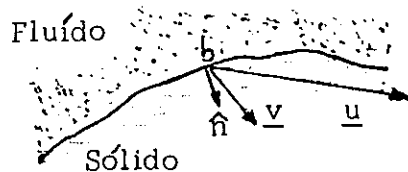
Sea \underline{v} la velocidad del fluido en el punto b y \underline{u} la velocidad del sólido en b . La condición es:

$$\underline{v} \cdot \hat{n} = \underline{u} \cdot \hat{n} \quad \text{i.e.} \quad v_n = u_n \quad (2.11)$$

Si la superficie que limita al fluido está en reposo entonces la condición se reduce simplemente a $v_n = 0$

Lo mismo en el caso de dos fluidos no miscibles en que las velocidades de

ambos, normales a la superficie de separación, deben ser iguales.



Superficie de separación entre fluido y sólido

Problema 4. Suponga una bureta llena de líquido de densidad ρ inclinada formando un ángulo θ con la vertical.

Si se abre la llave de repente, calcule

cuál es la aceleración del líquido

en el instante cero, i.e. dv/dt y

a qué valor cae la presión en un punto situado a una altura h debajo del nivel inicial, en ese mismo instante.

$$s = AB; \quad ds = BB'$$

La ecuación de Newton-Euler para el elemento de volumen encerrado en BB' es

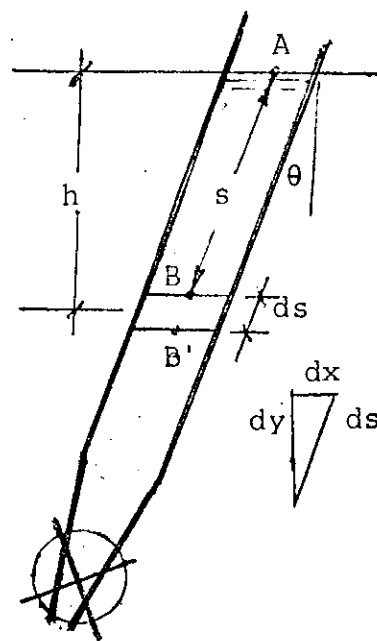
$$dv/dt = \partial_t v + v \partial_s v = - \frac{1}{\rho} \partial_s p + g \cos \theta \quad (1)$$

$$\partial_t v + \partial_s \frac{1}{2} v^2 = - \frac{1}{\rho} \partial_s p + g \frac{dy}{ds} \quad (2)$$

Integrando los dos lados respecto de s manteniendo el tiempo constante

$$s \partial_t v + \frac{1}{2} v^2 = - \frac{p}{\rho} + gy + f(t) \quad (3)$$

puesto que en todo instante $\partial_t v$ es igual para todos los puntos del líquido.



Bureta inclinada

En $t = 0$ y punto A: $s = 0$; $v = 0$; $p = p_{\text{atmosf.}} = p_a$; $y = 0$ con lo que la ecuación (3) queda

$$0 = -p_a/\rho + f(0) \quad (4)$$

En $t = 0$ y punto B: $s = l = \text{longitud de la bureta}$; $v = 0$; $p = p_a$ (en el instante en que se abre), $y = l \cos \theta$, con lo que la ecuación (3) queda

$$l \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = -p_a/\rho + g l \cos \theta + f(0) \quad (5)$$

restando (4) de (5):

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = g \cos \theta \quad (6)$$

consecuentemente

$$dv/dt = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} + (\underline{v} \cdot \nabla) v = g \cos \theta \quad (7)$$

desde que $v = 0$ en $t = 0$

En la ecuación (3) sustituycamos $s = h$, $\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = g \cos \theta$, $v = 0$, $t = 0$

$$h g \cos \theta = -p/\rho + gh + f(0) \quad (8)$$

reemplacemos $f(0) = p_a/\rho$ obtenida de ecuación (4)

$$h g \cos \theta = -p/\rho + gh + p_a/\rho$$

$$p - p_a = \rho gh (1 - \cos \theta) \quad (9)$$

3. Hidrostática.

Es la teoría de flúidos en reposo y su ley es que el esfuerzo (fuerza por unidad de área = presión) es siempre perpendicular a la superficie considerada. Si no lo fuera eso implicaría una fuerza de corte que dividida entre el área daría un esfuerzo de corte, no perpendicular, que produciría movimiento.

Eso no puede ocurrir puesto que el flúido está en reposo. Lo anterior es válido aun para flúidos viscosos.

Consideremos ahora flúidos ideales. La ecuación de Newton-Euler queda reducida a

$$\nabla p = \rho \underline{g} \quad (3.1)$$

que describe el equilibrio mecánico del flúido.

Si no hubiera fuerza externa, i. e. $\underline{g} = \underline{0}$, entonces $\nabla p = \underline{0}$, es decir que la presión sería uniforme en todo el flúido

$$\underline{g} = \underline{0} \Rightarrow p \text{ uniforme } \forall \text{ partícula } p \text{ é f}$$

Si $\underline{g} = -g\hat{z}$ entonces (3.1) da

$$\partial_x p = \partial_y p = 0 \wedge \partial_z p = -\rho g \quad (3.2)$$

Supongamos ahora que la densidad ρ es uniforme; esto sólo puede considerarse así cuando el volumen del flúido no se reduce apreciablemente por la fuerza externa, es decir, cuando la compresibilidad es despreciable.

Integrando (3.2) obtenemos

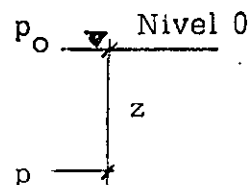
$$p = p_0 + \rho g z \quad (3.3)$$

donde p = presión en el punto considerado

z = altura entre el punto considerado

y el nivel donde se toma p_0

p_0 = presión en el nivel 0



Si el flúido tiene una superficie libre, digamos en $z = 0$, la presión es la misma en toda la superficie y ésta es el plano horizontal $z = 0$.

En grandes masas de flúido la densidad ya no se puede suponer uniforme, pero, si consideramos T uniforme, es decir igual temperatura en todos los puntos del flúido, o sea equilibrio térmico, la ecuación (3.1) puede ser tratada de la siguiente manera.

Recordemos que la energía libre F o potencial termodinámico de Gibbs viene dado por

$$F = U + pV - Ts \quad (3.4)$$

$$\therefore dF = dU + pdV + Vdp - Tds - sdT$$

$$dF = Vdp - sdT \quad (3.5)$$

$$dF = Vdp = dp/\varrho \quad (3.6)$$

donde se utilizaron las cantidades termodinámicas familiares ya indicadas anteriormente y se empleó la condición de equilibrio térmico.

Entonces tenemos que

$$\nabla F = \frac{1}{\varrho} \nabla p \quad (3.7)$$

y la ecuación (3.1) queda

$$\nabla F = \underline{g} \quad (3.8)$$

El campo gravitatorio es pues el gradiente del potencial termodinámico.

Como $\underline{g} = -g\hat{z} = -g\nabla z = -\nabla gz$ la ecuación (3.8) se transforma en

$$\nabla (F + gz) = \underline{0} \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow F + gz = \text{uniforme} \quad (3.10)$$

que no es más que la condición de equilibrio termodinámico.

Como un ejemplo supongamos un fluido, como nuestra atmósfera, en equilibrio mecánico en el campo \underline{g} . De (3.1)

$$\varrho = -\frac{1}{g} \partial_z p \quad (3.11)$$

Como hemos supuesto g uniforme, la densidad es sólo función de la altura, desde que $p = p(z)$ únicamente.

Una simple aplicación de la ecuación de estado de un gas nos conduce a que la temperatura es, también, sólo una función de la altura. Entonces, cuando hay equilibrio mecánico y \underline{g} es uniforme tenemos

$$p = p(z), \quad \varrho = \varrho(z) \quad \text{y} \quad T = T(z)$$

Si, como sucede generalmente, la temperatura es diferente en puntos que están a la misma altura, entonces el equilibrio mecánico es imposible.

La ecuación (3.1) también puede servirnos para obtener una idea razonable de la variación de presión con la altura. Supongamos una columna vertical de aire, de sección transversal A , en equilibrio térmico y mecánico.

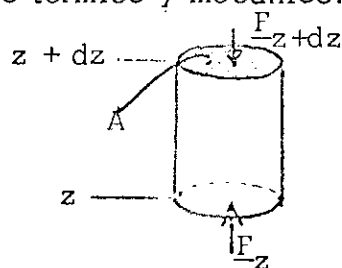
Aplicando la ecuación de estado

$$pV = NkT \quad (3.12)$$

$$p = nkT \quad (3.13)$$

donde $n = N/V$, molec/vol

Si conocemos n sabremos p y viceversa puesto que k y T son constantes.



El equilibrio mecánico requiere que

$$\underline{F}_{z+dz} - \underline{F}_z = \underline{W} = Nmg = nVm\underline{g}$$
, con $m =$ masa de una molécula de determinada clase, por ej. O_2 , H_2 , A , u otra.

$$\begin{aligned} (p_{z+dz} - p_z) A &= n (Adz) m (-g) \\ dp &= - nmg dz \end{aligned} \quad (3.14)$$

Combinando (3.13) y (3.14) obtenemos

$$dp/p = dn/n = - mg dz / kT \quad (3.15)$$

que es la ecuación diferencial que nos indica como varían la presión, el número de moléculas o la densidad con la altura.

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} n &= n_0 \exp(-mgh/kT) \\ p &= p_0 \exp(-mgh/kT) \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde n_0 y p_0 son el número de moléculas y la presión en $h = 0$ que puede ser elegido en cualquier parte.

Como otro ejemplo podríamos considerar una gran masa de fluido en equilibrio mecánico, sin movimiento macroscópico, cuyas partículas se mantienen juntas por acción gravitatoria

Sea ϕ el potencial escalar newtoniano del campo gravitatorio del fluido.

La ley de Gauss para gravitación establece que

$$\nabla \cdot \underline{g} = -4\pi G \xi \quad (3.17)$$

donde $\underline{g} \stackrel{d}{=} \underline{\text{campo gravitatorio que produce el fluido}}$

$G \stackrel{d}{=} \text{constante de gravitación universal}$

$\xi \stackrel{d}{=} \text{densidad del fluido}$

Pero
$$\underline{g} = -\nabla\phi \quad (3.18)$$

que al combinarla con (3.17) da

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\xi \quad (3.19)$$

La fuerza sobre una masa ξ es

$$\underline{f}_b = \xi \underline{g} = -\xi \nabla\phi = \nabla p \quad (3.20)$$

Donde en la última igualdad se utilizó la ecuación de Newton-Euler con $\underline{v} = \underline{0}$.

La ecuación (3.20) es simple en algunos casos, sin solución en otros, por

ejemplo cuando la densidad ρ varía con la posición en forma arbitraria, pues entonces no hay manera de lograr balance para las fuerzas. El fluido no puede estar en equilibrio y hay corrientes de convección.

Si dividimos la ecuación (3.20) entre ρ y tomamos divergencia

$$\nabla^2 \phi = - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \quad (3.21)$$

$$\therefore \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = - 4\pi G \rho \quad (3.22)$$

La solución del problema requiere tratamiento de la ecuación de Poisson. Hay un caso en que la solución puede obtenerse en forma relativamente simple, cuando tanto ρ como p son funciones de una sola variable independiente. Por ejemplo cuando el fluido no rota, en que dependen únicamente de r .

La ecuación (3.21) en coordenadas esféricas toma la forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dU}{dr} \right) = - 4\pi G \rho(r) \quad (3.23)$$

4. Ausencia de Corrientes de Convección.

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico sin estar en equilibrio térmico; la ecuación $\nabla p = \rho \underline{g}$ que no es más que la condición de equilibrio mecánico puede ser satisfecha aunque la temperatura no sea constante dentro del fluido, y entonces cabe hacerse la siguiente pregunta: ¿Es estable ese equilibrio? La respuesta es no, por la aparición de corrientes de convección en el fluido que tienden a igualar la temperatura.

Busquemos la condición que se requiere para que el equilibrio sea estable. Se llama condición de ausencia de convección y se puede deducir como sigue. Consideremos un elemento de volumen de fluido a altura z , con volumen específico $V(p, s)$, donde p y s son la presión de equilibrio y la entropía de equilibrio a altura z respectivamente.

Supongamos que una partícula de fluido se desplaza verticalmente hacia arriba una pequeña porción dz y que su volumen específico se vuelve $V(p', s)$ donde p' es la presión de equilibrio a altura $z + dz$ y la entropía es la misma puesto que suponemos desplazamiento adiabático. Para que el equilibrio sea estable es necesario que la fuerza sobre la partícula tienda a regresarla a su posición original. Esto sólo puede ocurrir si la partícula es más pesada que el elemento de volumen que desplaza en su nueva posición $z + dz$. Este volumen desplazado es $V(p', s')$ donde s' es la entropía de equilibrio en $z + dz$. Lo anterior quiere decir que la condición de estabilidad es

$$V(p', s') - V(p', s) > 0$$

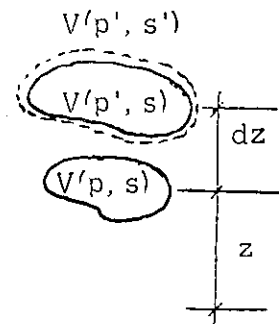
En otras palabras $V(p', s)$ debe ser más denso que $V(p', s')$ para poder regresar a su posición inicial, i. e. $V(p', s')$ debe ser mayor que $V(p', s)$, entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.1)$$

Para aclarar esta ecuación hagamos un poco de Termodinámica. Tomemos diez cantidades termodinámicas importantes: $p, V, T, F, H, A, s, U, Q$ y W , y las cantidades $c_p = (Q/T)_p$ y $c_v = (Q/T)_V$ que pueden ser encontradas en función de las anteriores.

Supongamos que x, y, z, w pertenecen al conjunto de las diez cantidades termodinámicas citadas. Queremos encontrar las derivadas de la forma $(\partial x / \partial y)_z$

Hay diez elecciones posibles para x , nueve para y , ocho para z lo que da un total de 720 derivadas posibles.



Supongamos además que

$$x = f_1(w, z) \quad \therefore \quad dx = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z dw + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w dz \quad (4.2)$$

$$y = f_2(w, z) \quad \therefore \quad dy = \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z dw + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_w dz \quad (4.3)$$

Si $z = \text{constante}$ los segundos términos del lado derecho desaparecen. Dividiendo (4.2) entre (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z &= \frac{(\partial x / \partial w)_z}{(\partial y / \partial w)_z} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z &= \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Al elegir $x = V$, $z = p$, $y = T$, $w = s$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (4.5)$$

Consideremos $Q = Q(T, p)$ y $dQ = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_T dp$

$$dQ = c_p dT \quad (4.6)$$

porque el segundo término del lado desaparece por ser constante la presión.

Dividiendo entre T

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c_p}{T} dt = ds \implies \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \quad (4.7)$$

que substituído en ecuación (4.5) da

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (4.8)$$

que permite escribir (4.1)

$$\frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.9)$$

como tanto T como c_p son positivas, la ecuación anterior se reduce a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.10)$$

En la mayoría de las sustancias $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$ porque se expande con el aumento de temperatura; entonces la condición de estabilidad queda

$$\frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.11)$$

es decir que la entropía debe aumentar con la altura.

Por otro lado, como $s = [T(z), p(z)]$ podemos escribir la derivada

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0 \quad (4.12)$$

Donde se usaron las substituciones

de ec (4.7) $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}$ y de (3.5) $dF = Vdp - s dT$, que es diferencial total, exacto o completo obtenemos

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Además (3.2) $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{V}$ combinada con (4.12) da

$$\frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} > \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(-\frac{g}{V}\right) \quad (4.13)$$

$$\therefore \frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

que es la condición de ausencia de corrientes de convección

La convección puede ocurrir si la temperatura decrece al aumentar la altura y si la magnitud del gradiente de temperatura es mayor que

$$\frac{g}{c_p} \frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

En un gas ideal a presión constante la condición de ausencia de convección se vuelve

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p} \quad (4.15)$$

pues el resto de la desigualdad es igual que 1.

5. Ecuación de Bernoulli.

Retornaremos a la ecuación de movimiento limitando nuestro estudio al caso de flujo estable.

Flujo estable es aquel en que la velocidad de las partículas del fluido y la densidad no cambian con el tiempo; es decir, \underline{v} y ρ son funciones de la posición solamente

$$\underline{v}(\underline{r}) = \text{constante} \quad \text{y} \quad \rho(\underline{r}) = \text{constante} \quad (5.1)$$

de manera que

$$\partial_t \underline{v} = 0 \quad \text{y} \quad \partial_t \rho = 0 \quad (5.2)$$

entonces la ecuación de Newton-Euler

$$(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla H + \underline{g} \quad \text{se reduce a}$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla H + \underline{g} \quad \text{que con la identidad}$$

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} \quad \text{se transforma en}$$

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = -\nabla H + \underline{g} \quad (5.3)$$

En el flujo estable toda partícula de fluido que se mueve es siempre reemplazada por una nueva partícula que se mueve con la misma velocidad que la primera. Si tomáramos fotografías de la velocidad, siempre serían iguales, El campo \underline{v} es pues un campo estático.

Conviene aquí introducir el concepto de líneas de flujo. Supongamos que sabemos que en el instante t la velocidad de cada $p \in f$ es \underline{v} . Como $b \stackrel{m}{=} o$ y $m \stackrel{m}{=} f$, tracemos, en cada p en el instante t , una curva C tal que la dirección de la tangente a C en b coincida con la dirección de \underline{v} de p . Entonces la curva C se llama línea de flujo. Además, su número por unidad de área es proporcional a la magnitud de la velocidad. Esas líneas son similares a las líneas de campo electrostático o magnetostático, por ejemplo.

La tangente a una línea da la dirección de la velocidad de todas las partículas que pasan por el punto considerado con el transcurso del tiempo.

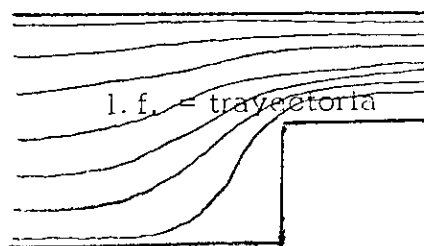
La velocidad de las partículas de fluido en el instante t es $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$; en coordenadas cartesianas el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (5.4)$$

determina las líneas de flujo en ese instante

Como ya se dijo, cuando el flujo es estable las líneas de flujo no varían con el tiempo y entonces siempre coinciden con las trayectorias de las partículas.

En flujo turbulento las líneas de flujo cambian con el tiempo por lo que una línea de flujo en un instante dado no representa la trayectoria de una partícula y las tangentes a ella dan las direcciones de las velocidades de las partículas en varios puntos del espacio en el instante considerado,



Líneas de flujo en flujo estable

en tanto que las tangentes a la trayectoria dan la dirección de la velocidad de las partículas en diferentes puntos y diferentes instantes.

Se puede usar una fotografía de tiempo para visualizar las líneas de flujo en el caso estable en tanto que debe ser empleada una "instantánea" en el flujo turbulento.

En el caso de un líquido las partículas de fluido se pueden visualizar agregando cristales de permanganato de potasio o una suspensión de polvo de aluminio muy fino e iluminando el fluido; en el caso de un gas se emplean partículas de humo.

Consideremos una línea de flujo con \hat{l} un vector unitario tangente a ella y tomemos el producto escalar de \hat{l} con ecuación (5.1)

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 \cdot \hat{l} - [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] \cdot \hat{l} = - \nabla H \cdot \hat{l} + \underline{g} \cdot \hat{l}$$

$$\underline{g} = -g \hat{z} = -g \nabla z \implies$$

$$- \underline{g} \cdot \hat{l} = -g \frac{\partial z}{\partial l} = - \frac{\partial (gz)}{\partial l}, \text{ entonces}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial l} = - \frac{\partial H}{\partial l} - \frac{\partial (gz)}{\partial l}$$

$$\therefore \partial_l \left(\frac{1}{2} v^2 + H + gz \right) = 0 \quad (5.5)$$

Hay que notar que $[\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] \perp \hat{l}$ y su producto escalar es cero.

La ecuación (5.3) significa que para un pequeño desplazamiento a lo largo de una línea de flujo, es decir en dirección de la velocidad, la cantidad entre paréntesis no cambia

$$\frac{1}{2} v^2 + H + gz = \text{constante a lo largo de una línea de flujo} \quad (5.6)$$

Esa es la ecuación de Bernoulli.

En general, la constante puede ser distinta para diferentes líneas de flujo, pero como en flujo estable los desplazamientos son a lo largo de una línea de flujo, la constante tiene el mismo valor a lo largo de todos los puntos de ella.

Si el flujo ocurre fuera del campo gravitatorio se omite el término gz y la ecuación queda

$$\frac{1}{2} v^2 + H = \text{cte. a lo largo de l.f.} \quad (5.7)$$

6 Flujo de Energía.

Consideremos un fluido que se mueve con flujo isoentrópico; dentro de él tomemos un elemento de volumen d^3x , fijo en el espacio, para averiguar como cambia con el tiempo la energía del fluido contenido en el volumen.

Sea $u \stackrel{d}{=} \text{densidad de energía por unidad de volumen} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U$

donde $U \stackrel{d}{=} \text{densidad de energía por unidad de masa}$

Como d^3x es fijo, el cambio de energía viene dado sólo por $\partial_t u$

$$\partial_t u = \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho U \right)$$

Calculemos por partes.

$$\text{Primero } \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = \frac{1}{2} v^2 \partial_t \rho + \underline{v} \cdot \partial_t \underline{v}$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot \rho \underline{v} - \underline{v} \cdot \nabla p - \rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

donde se usaron las ecuaciones de Continuidad y de Newton-Euler para sustituir $\partial_t \rho$ y $\partial_t \underline{v}$

pero $\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = \frac{1}{2} (\underline{v} \cdot \nabla) v^2$ y $\nabla p = \rho (\nabla H - T \nabla s)$, entonces

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot \rho \underline{v} - \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \nabla v^2 - \rho \underline{v} \cdot (\nabla H - T \nabla s)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot \rho \underline{v} - \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) + \rho T \underline{v} \cdot \nabla s$$

finalmente

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot \rho \underline{v} - \rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \quad (6.1)$$

pues se considero flujo isoentrópico.

En segundo lugar consideremos $\partial_t (\rho U)$; para ello empleemos las siguientes relaciones termodinámicas

$dU = T ds - p dV$ pero como $V = 1/\rho$, $dV = -d\rho/\rho^2$ con lo que

$dU = T ds + p \frac{d\rho}{\rho^2}$, y además $H = U + pV = U + p/\rho$, entonces

$$\begin{aligned} d(\rho U) &= U d\rho + \rho dU = H d\rho - p V d\rho + \rho T ds - \rho p dV \\ &= H d\rho - p V d\rho + \rho T ds + p V d\rho \\ &= H d\rho + \rho T ds \end{aligned}$$

$$\therefore \partial_t \rho U = H \partial_t \rho + \rho T \partial_t s = H \partial_t \rho$$

pues se consideró flujo isoentrópico

Con el uso de la ecuación de continuidad la ecuación anterior queda

$$\partial_t \varrho U = -H \nabla \cdot \varrho \underline{v} \quad (6.2)$$

combinando (6.1) y (6.2)

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho U \right) = - \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \nabla \cdot \varrho \underline{v} - \varrho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho U \right) = - \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \varrho \underline{v} \right] \quad (6.3)$$

Para obtener el significado físico de esta ecuación integremos en la configuración del fluido

$$\partial_t \int_{\underline{X}(m, t)} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho U \right) d^3x = - \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \varrho \underline{v} \right] d^3x \quad (6.4)$$

y apliquemos el Teorema de la Divergencia de Gauss

$$\partial_t \int_{\underline{X}(m, t)} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho U \right) d^3x = - \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \varrho \underline{v} \right] \cdot \hat{n} d^2x \quad (6.5)$$

El lado izquierdo es la razón de cambio temporal de la energía en un volumen dado y el lado derecho es la cantidad de energía que fluye a través de la frontera de la configuración

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \varrho \underline{v} = \text{vector de flujo de densidad de energía} \quad (6.6)$$

es decir energía que pasa en la unidad de tiempo por unidad de área perpendicular a la velocidad.

Transformemos un poco la ecuación (6.5) con la ayuda de

$$H = U + pV = U + p/\varrho$$

$$- \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \varrho \underline{v} \right] \cdot \hat{n} d^2x = - \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) \varrho \underline{v} \right] \cdot \hat{n} d^2x - \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} p \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x \quad (6.7)$$

ecuación en que se ve que $\frac{1}{2} v^2 + U$ es energía cinética más interna, por unidad de masa, que atraviesa la frontera de la configuración en la unidad de tiempo y el último término del lado derecho es trabajo por unidad de tiempo que la fuerza de contacto hace sobre la superficie de la configuración.

7. Flujo de Momentum.

Analicemos, al igual que para flujo de energía, un fluido que se mueve con flujo isoentrópico y dentro de él consideremos un elemento de volumen fijo en el espacio.

Sean $m \stackrel{m}{=} \rho$ y $b \stackrel{m}{=} p$, con $p \in f$; el momentum del fluido por unidad de volumen $\stackrel{df}{=} \rho \underline{v}$.

Determinemos su razón de cambio temporal $\partial_t \rho \underline{v}$. En componentes:

$$\partial_t \rho v_i = \rho \partial_t v_i + v_i \partial_t \rho \quad (7.1)$$

De la ecuación de continuidad $\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0$ obtenemos

$$\partial_t \rho = -\partial_i \rho v_i \quad (7.2)$$

y de la de Newton-Euler $(\partial_t + \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$

$$\partial_t v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p - v_j \partial_j v_i \quad (7.3)$$

que substituídas en (7.1) dan

$$\partial_t \rho v_i = -\partial_i p - \rho v_j \partial_j v_i - v_i \partial_i \rho v_i = -\partial_i p - \partial_j \rho v_i v_j$$

$$\partial_t \rho v_i = -\partial_j (\delta_{ij} p + \rho v_i v_j) = -\partial_j \tilde{\pi}_{ij} \quad (7.4)$$

donde se uso $\partial_i p = \partial_j \delta_{ij} p$ (7.5)

y $\tilde{\pi}_{ij} \stackrel{df}{=} \delta_{ij} p + \rho v_i v_j$ (7.6)

que es el tensor de flujo de la densidad de momentum y se ve que es simétrico. Para obtener el significado físico de la ecuación (7.4) integramos en la configuración del fluido

$$\partial_t \int_{\underline{X}(m,t)} \rho v_i d^3x = - \int_{\underline{X}(m,t)} \partial_j \tilde{\pi}_{ij} d^3x \quad (7.7)$$

Al utilizar la formula de Green queda

$$\partial_t \int_{\underline{X}(m,t)} \rho v_i d^3x = - \oint_{\partial \underline{X}(m,t)} \tilde{\pi}_{ij} da_j \quad (7.8)$$

Por simplicidad de escritura hemos substituído da_j por $(d^2x)_j$

El lado izquierdo es la razón de cambio temporal de la componente i del momentum del fluido en la configuración $\underline{X}(m,t)$ y el lado derecho es el flujo de

esa componente de momentum, en la unidad de tiempo, a través de la frontera de la configuración.

$\tilde{\mathcal{K}}_{ij} da_j$ es pues la i -ésima componente del momentum que fluye a través del elemento de superficie da , en la unidad de tiempo.

Al escribir $da_j = n_j da$ queda $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} n_j da$ y entonces vemos que $\tilde{\mathcal{K}}_{ij} n_j$ es el flujo de la componente i del momentum por unidad de área en la unidad de tiempo.

$$\hat{\mathcal{K}}_{ij} n_j = \delta_{ij} p n_j + \zeta v_i v_j n_j = p n_i + \zeta v_i v_j n_j \quad (7.9)$$

que puede ser escrita en notación vectorial

$$p \hat{n} + (\underline{v} \cdot \hat{n}) \zeta \underline{v} \quad (7.10)$$

Ese vector da el flujo de momentum en dirección y sentido de \hat{n} es decir en una superficie perpendicular a \hat{n} y de él puede verse que si lo tomamos paralelo a \underline{v} , sólo la componente longitudinal de momentum es transportada en esa dirección y su magnitud es $p + \zeta v^2$; en tanto que si \hat{n} es perpendicular a la velocidad, sólo la componente transversal de momentum es transportada y su magnitud es p .

El flujo de momentum (que es un vector) está dado por un tensor, el tensor de flujo de densidad de momentum $\hat{\mathcal{K}}_{ij}$, en tanto que el flujo de energía (que es escalar) está gobernado por un vector, el vector de flujo de densidad de energía $(\frac{1}{2} v^2 + H) \zeta \underline{v}$

8. Conservación de la Circulación.

Supongamos un flujo ideal que se mueve y la velocidad de sus partículas es \underline{v} . La circulación del campo de velocidad es

$$\text{Circulación} = \oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} \quad (8.1)$$

donde la trayectoria T debe ser tomada siempre dentro del fluido.

El teorema de Stokes aplicado a la circulación de \underline{v}

$$\oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_S \nabla \times \underline{v} \cdot \hat{n} \, d^2x \quad (8.2)$$

permite interpretar la circulación por unidad de área, para una trayectoria infinitesimal, como el doble de la velocidad angular de un elemento de fluido.

Investiguemos ahora que le ocurre a la circulación de \underline{v} cuando consideramos una trayectoria T que se mueve en el espacio ocupado por el fluido.

Las partículas de fluido se mueven y la trayectoria t las acompaña. Para averiguar que le sucede a la circulación debemos tomar d/dt y no solamente ∂_t puesto que estamos considerando su movimiento en el espacio y no lo que ocurre en un punto fijo.

Para evitar confusión designemos diferenciación respecto del espacio con δ ,

entonces

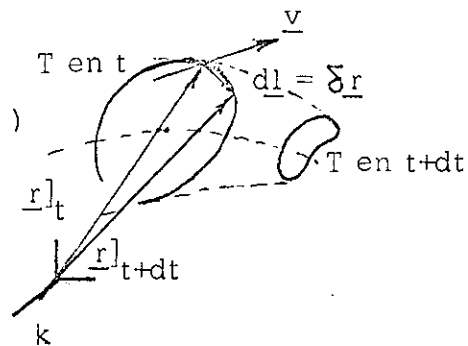
$$\frac{d}{dt} \oint_T \underline{v} \cdot \delta \underline{r} = \oint_T \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \delta \underline{r} + \oint_T \underline{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \underline{r} \quad (8.3)$$

El primer término del lado derecho da el cambio de la circulación por cambios en la velocidad y el segundo por cambios de forma de la trayectoria.

$$\text{Pero } \underline{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \underline{r} = \underline{v} \cdot \delta \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v} \cdot \delta \underline{v} = \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Por lo que $\oint_T \underline{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \underline{r} = \oint_T \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = 0$ porque es integral cerrada de un

diferencial total.



Ademas, la ecuación (2.6) establece que para un flujo isoentrópico

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla H + \underline{g} \quad (2.6)$$

entonces

$$\oint_T \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \delta \underline{r} = \oint (-\nabla H + \underline{g}) \cdot \delta \underline{r} \quad (8.4)$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_T \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \delta \underline{r} = \int_S \nabla \times (-\nabla H + \underline{g}) \cdot \hat{n} d^2x = 0$$

con lo que queda demostrado que los dos términos del lado derecho de (8.3) desaparecen. Luego

$$\frac{d}{dt} \oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = 0 \quad (8.5)$$

y

$$\oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = \text{constante} \quad (8.6)$$

en un fluido ideal.

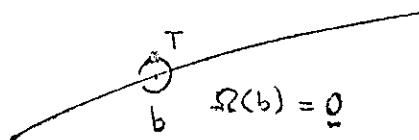
La ecuación de Newton-Euler es la clave de la deducción pues presupone que $s = \text{constante}$. Si el flujo no es isoentrópico la deducción no es válida. Por otro lado, las densidades de fuerza que intervienen deben ser conservativas para que su rotor sea cero.

9. Flujo Potencial.

Sea un fluido ideal con flujo estable en el cual consideramos una línea de flujo en la que sabemos que la vorticidad es cero en algún punto.

Tracemos una trayectoria infinitesimal cerrada alrededor del punto y que atrape la línea. Por el teorema de Stokes

$$\oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_S \nabla \times \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x \quad (9.1)$$



Y como la trayectoria es alrededor de b con $\underline{\Omega}(b) = \underline{0}$, con el uso de la definición 13 podemos concluir que

Trayectoria infinitesimal T alrededor de un punto b con $w(b) = 0$

$$\oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = 0 \text{ alrededor de } b \quad (9.2)$$

Con el transcurso del tiempo la trayectoria T se mueve con el fluido pero siempre encierra la misma línea de flujo.

Por la ecuación (8.6) sabemos que la circulación es constante y por la (9.2) que es cero; luego, como debe mantenerse constante seguirá siendo cero en todos los puntos de la línea de flujo.

Si el flujo no es estable, en vez de considerar una línea de flujo, debemos tomar la trayectoria de la partícula y llegamos al mismo resultado.

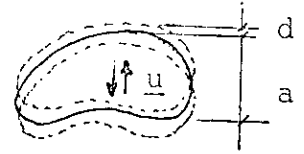
Un flujo para el cual la vorticidad $\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} = \underline{0}$ para todos los puntos del espacio ocupados por el fluido se llama flujo potencial o irrotacional; en contraste con aquel en que la vorticidad no es cero en todos los puntos del espacio, que se llama rotacional.

En nuestra deducción debemos recordar algo muy importante, ya indicado en la sección 8, y es que la trayectoria cerrada T debe ser tomada siempre dentro del fluido. Por ejemplo, una línea de flujo que pasa junto a un cuerpo sólido no permite que se haga alrededor de ella una trayectoria cerrada que la atrape puesto que del lado del sólido no hay fluido. Así, nuestra deducción no es válida para una línea de flujo que roza a un sólido. No obstante esto, el estudio de flujo potencial con sólidos presentes es de mucha utilidad si los sólidos tienen la forma sugerida por las líneas de flujo, i. e. si son aerodinámicos puesto que la turbulencia se reduce a un mínimo.

Otro caso importante es el de oscilaciones pequeñas de un cuerpo sumergido en un fluido, es decir cuando la amplitud a es pequeña comparada con la dimensión lineal d del sólido, $a \ll d$, en que podemos considerar que el flujo es potencial en primera aproximación.

Estimemos, en este caso, el orden de magnitud de los términos de la ecuación de Newton-Euler. Para ello hagamos las siguientes consideraciones:

El orden de magnitud de \underline{v} , a distancias muy cortas del cuerpo, es determinado por la magnitud de la velocidad \underline{u} del cuerpo y su variación temporal estará fijada por la frecuencia f , así, la magnitud de $\partial_t \underline{v}$ es del orden de la magnitud de $|\underline{u} f|$ pero $f \approx \omega \approx u/a$, entonces $|\partial_t \underline{v}| \approx |u^2/a|$



Oscilación de un sólido en un fluido con $a \ll d$

Por otro lado, los cambios significantes de \underline{v} ocurren en una distancia del tamaño del cuerpo (i.e d), así, la variación espacial de \underline{v} es del orden de u/d , de modo que

$$|(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}| \approx u^2/d$$

Pero $a \ll d \implies u^2/a \gg u^2/d$, de manera que en la ecuación de Newton-Euler podemos desprestigiar el término $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$ y queda solamente

$$\partial_t \underline{v} = -\nabla H + \underline{g} \tag{9.2}$$

tomando rotor

$$\left. \begin{aligned} \partial_t \nabla \times \underline{v} &= \underline{0} \implies \nabla \times \underline{v} = \text{cte} \\ \langle \underline{v} \rangle_{\text{temporal}} &= \underline{0} \text{ en movimiento oscilatorio} \end{aligned} \right\} \implies \nabla \times \underline{v} = \underline{0} \tag{9.3}$$

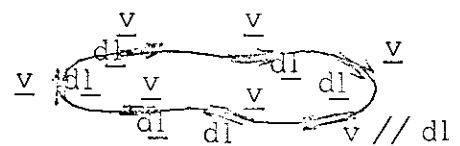
Hagamos notar algunas propiedades del flujo potencial:

La ley de conservación de circulación se obtuvo para flujo isoentrópico y para obtener la condición de flujo potencial (circulación cero) hicimos uso de aquella , consecuentemente un flujo puede ser potencial sólo si es isoentrópico. De lo contrario, aunque en algún instante hagamos la vorticidad igual que cero para todo punto del espacio, esta condición no se mantendrá, en general, para instantes posteriores.

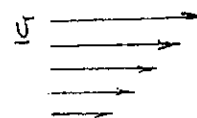
Por el teorema de Stokes $\oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_S \nabla \times \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x = \underline{v} \cdot d\underline{l} = 0 =$

y por flujo potencial $\nabla \times \underline{v} = \underline{0}$ no existen líneas de flujo cerradas.

Si existieran líneas de flujo cerradas la circulación no podría ser cero puesto que la velocidad sería paralela a la línea de flujo en todos los puntos y obtendríamos una contradicción.



En un movimiento rotacional la circulación no es cero, en general; en este caso, puede haber líneas cerradas. Sin embargo, se debe tener presente que la existencia de líneas cerradas no es una condición necesaria para flujo rotacional puesto que puede haberlo con líneas abiertas



Líneas de flujo abiertas con velocidad creciente dan $\oint \underline{v} \cdot d\underline{l} \neq 0$

Cualquier campo vectorial con rotor cero puede ser expresado como el gradiente de un campo escalar

$$\nabla \times \underline{v} = 0 \Rightarrow \exists \psi \text{ tq } \underline{v} = \nabla \psi \quad (9.5)$$

ψ se llama potencial de velocidad

Las componentes de velocidad son $v_x = \partial_x \psi$, $v_y = \partial_y \psi$, $v_z = \partial_z \psi$ (9.6)

y como las líneas de flujo vienen dadas por ecuación (5.2)

esas curvas cortan ortogonalmente a las superficies

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = 0 \quad (9.7)$$

y las superficies $\psi(x, y, z, t) = \text{const.}$ se llaman equipotenciales.

Las ecuaciones (5.2) y (9.7) muestran que en todos los puntos las equipotenciales son cortadas ortogonalmente por las líneas de flujo.

Si tomáramos $\underline{v} = -\nabla \psi$, el signo negativo es una convención y cuando así se usa, garantiza que el flujo ocurre de potenciales altos a potenciales bajos.

Tomemos la ecuación de Newton-Euler en su forma (2.9)

$$\partial_t \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = -\nabla (H + \phi)$$

reemplacemos $\underline{v} = \nabla \psi$

$$\nabla \left(\partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + H + \phi \right) = 0 \quad (9.8)$$

consecuentemente

$$\partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + H + \phi = f(t) \quad (9.9)$$

que es una primera integral de las ecuaciones de flujo potencial, donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo, que puede ser igual a cero sin pérdida de generalidad.

Puesto que $\underline{v} = \nabla \psi$ (i.e. derivada espacial de ψ), podemos agregar a ψ cualquier función del tiempo.

Hagamos

$$\psi_1 = \psi + \int f(t) dt \quad (9.10)$$

reemplacémosla en ec (9.9) y obtenemos cero del lado derecho; luego omitimos el subíndice 1 y queda

$$\partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + H + \phi = 0 \quad (9.11)$$

Además, si en (9.9) suponemos que ψ es independiente del tiempo i. e. $\partial_t \psi = 0$, $f(t) = \text{constante}$ en todo el fluido, entonces se transforma en

$$\frac{1}{2} v^2 + H + \phi = \text{const. en todo del fluido} \quad (9.12)$$

que es la ecuación de Bernoulli.

Hay que hacer notar una diferencia muy importante entre las ecs (9.12) y (5.4). Esta última es la ecuación de Bernoulli para cualquier tipo de flujo y su constante se mantiene a lo largo de una línea de flujo pero con diferentes valores, en general, para distintas líneas, en tanto que la (9.12) es la ecuación de Bernoulli para flujo potencial y la constante se mantiene para todo el fluido.

El término ϕ que aparece en la (9.12) es el potencial escalar newtoniano que da la energía potencial por unidad de masa

La ecuación de Bernoulli no es más que una manera de escribir el principio de conservación de energía. Como todos los teoremas de conservación, da una gran cantidad de información aun sin resolver ecuaciones en forma detallada. Es tan importante que daremos otra manera de obtenerla.

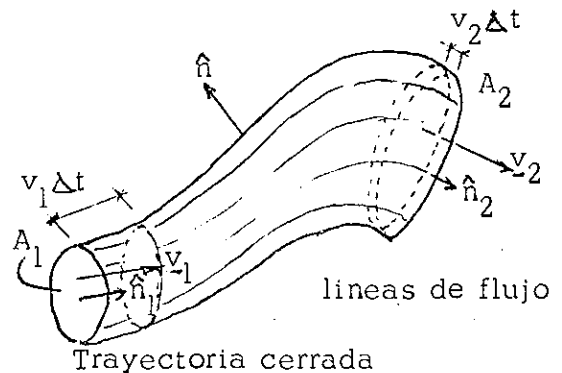
Si trazamos líneas de flujo por todos los puntos de una trayectoria cerrada en el fluido obtenemos un tubo de flujo. Como las paredes del tubo están formadas por líneas, el fluido no puede entrar ni salir a través de ellas; sólo por los extremos. Designemos con A_1 y A_2 a las secciones transversales inicial y final del tubo donde todas las demás cantidades son ρ_1, v_1, H_1 y ρ_2, v_2, H_2 respectivamente. Por continuidad (i. e. conservación de masa)

$$\int_{\underline{X}(m, t)} \partial_t \rho \, d^3x = - \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot \rho \underline{v} \, d^3x = - \oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \rho \underline{v} \cdot \hat{n} \, d^2x$$

donde $\underline{X}(m, t)$ es la configuración del fluido en el tubo y $\partial \underline{X}(m, t)$ su frontera.

Si exigimos que $\partial_t \rho = 0$, obtenemos

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (9.13)$$



La velocidad es inversamente proporcional al área si la densidad permanece uniforme y constante.

Ahora calculemos ΔW_p el trabajo neto hecho por la presión que es igual al cambio de energía del sistema

Sean E_2, E_1 la energía por unidad de masa en los puntos 2 y 1 respectivamente

$$\Delta m = \text{masa transportada} = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\Delta W_p = p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = (E_2 - E_1) \Delta m$$

dividiendo toda la ecuación entre Δm

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = E_2 - E_1 \quad (9.14)$$

o sea que

$$E_2 + \frac{p_1}{\rho_1} = E_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = \text{cte.} \quad (9.15)$$

Ahora bien

$$E = \frac{1}{2} v^2 + U + gz \quad (9.16)$$

donde $\frac{1}{2} v^2$ es la energía cinética, U la energía interna, gz energía potencial gravitatoria, todas por unidad de masa, entonces

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz + U = \text{cte} \quad (9.17)$$

que es la ecuación de Bernoulli.

Problema 5. Las componentes de velocidad de un fluido incompresible son $(3Ar^2 \sin \theta, Ar^3 \cos \theta, 0)$, con $A = \text{cte.}$

Demuestre que el flujo es potencial y encuentre las ecuaciones de las líneas de flujo.

Para ver si el flujo, es potencial debemos averiguar si la vorticidad es cero es decir evaluar $\nabla \times \underline{v}$. Utilizando coordenadas esféricas:

$$d\underline{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$\nabla \times \underline{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ 3Ar^2 \sin \theta & Ar^4 \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

de modo que el flujo es potencial

Sea $\psi(r, \theta, \phi)$ el potencial de velocidad, entonces las componentes de velocidad son

$$v_r = \partial_r \psi = 2Ar^{-3} \cos \theta; \quad v_\theta = \partial_\theta \psi = Ar^{-3} \sin \theta; \quad v_\phi = \partial_\phi \psi = 0$$

$$\begin{aligned} d\psi &= \partial_r \psi dr + \partial_\theta \psi d\theta + \partial_\phi \psi d\phi \\ &= 3Ar^2 \sin \theta dr + Ar^3 \cos \theta d\theta + 0 d\phi \end{aligned}$$

entonces $\psi = Ar^3 \sin \theta$

Las líneas de flujo están dadas por

$$\frac{dr}{3Ar^2 \sin \theta} = \frac{r d\theta}{Ar^3 \cos \theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{0}$$

$$d\phi = 0$$

$$dr = 3 \operatorname{tg} \theta d\theta$$

Integrando, las ecuaciones de las líneas de flujo son

$\phi = \text{cte}$, que indica que las líneas caen en planos que pasan por el eje de simetría $\theta = 0$, y

$$r = 3 \ln \sec \theta$$

10 Flujo Rotacional.

La condición necesaria y suficiente para que el flujo sea potencial es que la vorticidad sea cero; si no lo es, el flujo se llama rotacional.

Por definición 13

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} \quad (10.1)$$

Una línea de vorticidad es aquella en que la tangente en cada uno de sus puntos da la dirección del vector vorticidad.

Si las componentes cartesianas de $\underline{\Omega}$ son $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, entonces las ecuaciones de las líneas de vorticidad están determinadas por

$$\frac{dx}{\Omega_1} = \frac{dy}{\Omega_2} = \frac{dz}{\Omega_3} \quad (10.2)$$

Si trazamos líneas de vorticidad por todos los puntos de una trayectoria cerrada en el fluido formamos un tubo de vorticidad.

Sean $\underline{X}(m, t)$ la configuración del tubo con frontera $\partial \underline{X}(m, t)$ que podemos suponer formada por $\partial \underline{X}_1$ el área lateral y $\partial \underline{X}_2, \partial \underline{X}_3$ dos secciones transversales del tubo, con normales \hat{n}_1, \hat{n}_2 y \hat{n}_3 respectivamente. Entonces

$$\int_{\partial \underline{X}(m, t)} \underline{\Omega} \cdot \hat{n} d^2 x = \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot \underline{\Omega} d^3 x = 0 \quad (10.3)$$

puesto que $\nabla \cdot \nabla \times \underline{v} \equiv 0$, así

$$\int_{\partial \underline{X}_1} \underline{\Omega} \cdot \hat{n}_1 d^2 x + \int_{\partial \underline{X}_2} \underline{\Omega} \cdot \hat{n}_2 d^2 x + \int_{\underline{X}_3} \underline{\Omega} \cdot \hat{n}_3 d^2 x = 0$$

como la primera integral es cero por condición de ortogonalidad

$$(\underline{\Omega}_2 \cdot \hat{n}_2) \partial \underline{X}_2 + (\underline{\Omega}_3 \cdot \hat{n}_3) \partial \underline{X}_3 = 0 \quad (10.4)$$

en una primera aproximación. Ecuación que muestra la continuidad del flujo de vorticidad.

A $|\underline{\Omega} \cdot \hat{n}| \partial \underline{X}$ se le llama intensidad del tubo de vorticidad y un tubo con

$$|\underline{\Omega} \cdot \hat{n}| \partial \underline{X} = 1$$

se llama tubo de vorticidad unitaria.

Supongamos una configuración cualquiera $\underline{X}(m, t)$, no necesariamente configuración de un tubo. La

$$\oint_{\partial \underline{X}(m, t)} \underline{\Omega} \cdot \hat{n} \, d^2x = \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot \underline{\Omega} \, d^3x = 0 \quad (10.5)$$

muestra que la intensidad entrante de todos los tubos en $\partial \underline{X}$ es igual que la intensidad saliente. Dicho de otra manera, las líneas de vorticidad y los tubos de vorticidad son cerrados; no se originan o terminan en puntos internos del fluido pero pueden iniciarse o terminar en la frontera del mismo.

Además, en general,

$$\text{Circulación} = \oint_T \underline{v} \cdot d\underline{l} = \int_S \underline{\Omega} \cdot \hat{n} \, d^2x \quad (10.7)$$

puesto que $\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$

11. Flujo incompresible.

En una gran mayoría de casos el flujo puede ser considerado incompresible, es decir, que la densidad del fluido es uniforme y constante. No existen pues expansiones o compresiones apreciables en el fluido. En estos casos decimos que el fluido y el flujo son incompresibles.

Entonces las ecuaciones de la mecánica de fluidos se simplifican muchísimo; la ecuación de continuidad se reduce a

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (11.1)$$

puesto que la variación temporal de la densidad es cero, $\partial_t \rho = 0$, y por ser ρ uniforme sale del operador y la ecuación puede ser dividida entre la densidad.

Y en la ecuación de Newton-Euler la densidad puede ser puesta dentro del operador nabra por ser uniforme

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \underline{g} \quad (11.2)$$

o mejor aun, sólo en términos de la velocidad

$$\partial_t (\nabla \times \underline{v}) - \nabla \times [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] = \underline{0} \quad (11.10)$$

que junto con

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (11.2)$$

y con

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} \quad (11.3)$$

constituyen el sistema fundamental de ecuaciones de la dinámica de fluidos para un fluido incompresible.

La función de calor por unidad de masa $H = U + p/\rho$ se transforma en

$$H = p/\rho \quad (11.4)$$

puesto que U es constante ya que $dU = T ds - p dV = 0$ pues tanto s como $V = 1/\rho$ son constantes.

La ecuación de Bernoulli se simplifica a

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte} \quad (11.5)$$

De ella se puede concluir que para puntos de igual altura z o para flujo con campo gravitatorio cero, la presión máxima ocurre en puntos donde la velocidad es cero. Tales puntos reciben el nombre de puntos de estancamiento y generalmente están en la parte frontal del cuerpo que se desplaza dentro del fluido. Si v_0 y p_0 son la velocidad y presión en un lugar muy lejano al punto de estancamiento, la magnitud de la presión máxima es

$$p_{\max} = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \quad (11.6)$$

Por otra parte el vector de flujo de densidad de energía queda

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \underline{v} \quad (11.7)$$

El sistema de ecuaciones (2.10), (11.2) y (11.3) se vuelve particularmente sencillo si, además, el flujo es potencial puesto que se reduce a (10.2) y, como ya vimos en la sección 9

$\nabla \times \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \nabla \psi$, que con $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ da la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (11.8)$$

que debe ser complementada con las condiciones de frontera indicadas en la sección 2.

Por ecuación (9.10) sabemos que $\partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + H + \phi = f(t)$ y si el flujo es incompresible H puede ser simplificada y la ec. queda

$$\partial_t \psi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (11.9)$$

Es necesario tener un criterio adecuado para saber cuándo considerar que un flujo puede ser tratado como incompresible. Para obtenerlo supongamos un cambio de presión adiabático Δp que produce el cambio de densidad

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \Delta p$$

De conformidad con la ec. de Bernoulli un cambio de presión en flujo estable es del orden de ρv^2

$$\Delta p \cong \rho v^2$$

y como

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2$$

donde c es la velocidad del sonido (ver apéndice 2)

$$\Delta \rho = \rho v^2 / c^2$$

Como el fluido puede ser considerado como incompresible cuando $\Delta \rho / \rho \ll 1$ vemos que la condición necesaria de incompresibilidad es que la velocidad del fluido debe ser mucho menor que la del sonido

$$v \ll c \quad (11.10)$$

En flujo turbulento debe cumplirse otra condición. Sean T y L un intervalo de tiempo y una longitud del orden de tiempos y distancias en las cuales la velocidad y la presión experimentan cambios que pueden ser considerados significativos. Entonces los términos dv/dt y $(-1/\rho) \nabla p$ de la ecuación de Newton-Euler pueden ser escritos v/T y $p/\rho L$ respectivamente y

$$\frac{v}{T} = \frac{p}{\rho L} \quad \text{y} \quad \Delta p = \frac{\rho L v}{T}$$

con lo que

$$\Delta \rho = \frac{\rho L v}{T c^2} \quad (11.11)$$

Comparemos ahora magnitudes de los términos de la ecuación de continuidad

$$\partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

pero recordando que deseamos condición de incompresibilidad y por ello podemos suponer que

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll \frac{\rho v}{L}$$

Al reemplazar $\Delta \rho$ en la ec (11.11) queda

$$L/c \ll T \quad (11.12)$$

El cumplimiento de las condiciones (11.10) y (11.12) garantiza incompresibilidad del fluido.

L/c puede interpretarse como el intervalo de tiempo que necesita una onda de sonido para caminar una distancia L. Si ese tiempo es mucho más pequeño que aquel en que las características del flujo cambian apreciablemente el fluido es incompresible.

Problema 6 Utilice la definición de vorticidad para un fluido que se mueve con velocidad $\underline{v}(x, y, z, t)$ y demuestre que si es no-viscoso, incompresible y de densidad uniforme, dentro del campo gravitatorio \underline{g} , la vorticidad satisface la ecuación

$$\partial_t \underline{\Omega} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\Omega} = (\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{v} \quad (1)$$

y explique el significado de cada término

La ecuación de Newton-Euler establece que

$$\partial_t \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \emptyset$$

tomando rotor de ambos lados

$$\partial_t \underline{\Omega} - \nabla \times [\underline{v} \times \underline{\Omega}] = \underline{0}$$

pero

$$\nabla \times [\underline{v} \times \underline{\Omega}] = \underline{v} \cdot \nabla \underline{\Omega} - \underline{\Omega} \cdot \nabla \underline{v} + (\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{v} - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\Omega}$$

además

$$\nabla \cdot \underline{\Omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) \equiv 0$$

y $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, por continuidad de fluido incompresible, entonces

$$\partial_t \underline{\Omega} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\Omega} = (\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{v} \quad (2)$$

o bien

$$\frac{d \underline{\Omega}}{dt} = (\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{v}$$

Así, el primer término de la ecuación (2) indica la razón de cambio temporal (local) de $\underline{\Omega}$; $\underline{v} \cdot \nabla \underline{\Omega}$ da la razón de cambio de $\underline{\Omega}$ debida al movimiento del fluido y $(\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{v}$ la razón de cambio temporal total de $\underline{\Omega}$ (su derivada material).

Para flujo estable $\partial_t \underline{\Omega} = \underline{0}$ y entonces la razón de cambio es solamente $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\Omega}$.

Problema 7 Determine la forma de la superficie de un fluido incompresible sujeto a un campo gravitacional uniforme, contenido en un recipiente cilíndrico que gira respecto de su eje vertical z con velocidad angular constante $\underline{w} = w \hat{z}$.

El fluido rota como un sólido, es decir, cada partícula tiene la misma velocidad angular. El tipo de vórtice que se forma se llama forzado.

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \underline{w} \times \underline{r} \\ &= w \hat{z} \times \underline{r} = w \hat{z} \times (x \hat{x} + y \hat{y}) \\ &= (-wy, wx, 0)\end{aligned}$$

Comprobemos continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-wy) + \frac{\partial}{\partial y}(wx) = 0 \quad (1)$$

Como $\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0$ y $\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} = \underline{0}$ el flujo es estable

Calculemos la vorticidad

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -wy & wx & 0 \end{vmatrix} = 2w \hat{z} \neq 0 \quad \text{por lo que es rotacional} \quad (2)$$

Las ecuaciones de las líneas de flujo son

$$dx / -wy = dy / wx = dz / 0 \quad (3)$$

que después de integradas dan

$$x^2 + y^2 = \text{const} \quad y \quad z = \text{const} \quad (4)$$

Ahora utilicemos la ecuación de Newton-Euler

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g}$$

$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} = \underline{0}$ por lo que ese término se elimina. Aplicando la ecuación en dirección tangencial a la trayectoria circular horizontal de las partículas vemos que como $v = wr = \text{cte}$, para un radio dado

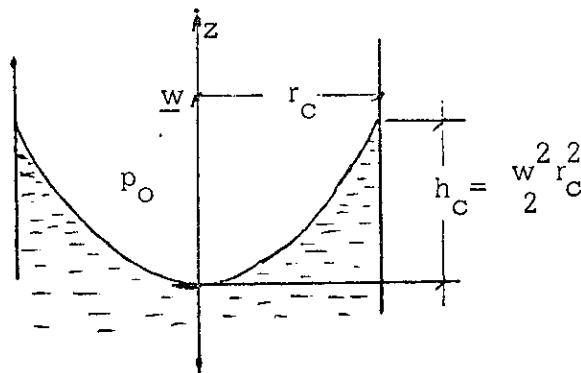
$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \Rightarrow p = \text{cte} \quad \text{a lo largo de una trayec-}$$

toria i. e. a lo largo de una circunferencia horizontal. (5)

En dirección vertical del eje z

$$\frac{\partial}{\partial z} p = -\rho g \Rightarrow p = p_0 + \rho g z \quad (6)$$

o sea que las condiciones hidrostáticas prevalecen a lo largo de ese eje.



Debe notarse que la presión en cualquier punto sólo depende de su profundidad respecto de la superficie libre.

Y en la dirección radial

$$-w^2 r = -\frac{1}{\rho} \partial_r p$$

por lo que
$$p = \frac{1}{2} \rho w^2 r^2 + \text{cte} \quad (7)$$

si $r = 0$ entonces $p = p_0 =$ presión atmosférica, y

$$p = \frac{1}{2} \rho w^2 r^2 + p_0 \quad (8)$$

Al elegir el plano horizontal que pasa por $r = 0$ y tomar la presión manométrica en vez de la absoluta obtenemos

$$h = \frac{p}{\rho} = \frac{\rho w^2}{2} r^2 \quad \text{i.e.} \quad h \propto r^2 \quad (9)$$

con lo que queda demostrado que las superficies isóbaras son paraboloides de revolución.

Problema 8 Un fluido ideal incompresible se mueve en forma estable alrededor de un cilindro fijo de radio a con su eje en dirección z ; las trayectorias de las partículas son circunferencias horizontales con centro en el eje z y su velocidad es $\underline{v}(r) = \frac{a}{r} \hat{\theta}$

Demuestre que el flujo es irrotacional

$$\nabla \times \underline{v} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & \hat{z} \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

Si la superficie del fluido está a presión atmosférica y el origen 0 se elige tal que en la superficie libre $z = 0$ cuando $r = a$, demuestre que la ecuación de la superficie es

$$2gz = 1 - a^2 r^{-2}$$

La ecuación de Newton-Euler establece que en flujo estable

$$(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g}$$

que en componentes nos da

en dirección $\hat{\theta}$:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \partial_\theta p \implies p = \text{cte a lo largo de una lín de flujo;}$$

en dirección vertical (igual que ec. (6) del problema 7)

$$p = p_0 + \rho gz$$

o sea que prevalecen las condiciones hidrostáticas a lo largo de este eje; y en dirección radial

$$-\rho w^2 r = -\partial_r p$$

$$\rho a^2 r^3 dr = dp \therefore p = -\frac{1}{2} \rho a^2 r^{-2} + A$$

$r = a \implies$ presión es la atmosférica y $A = p_0 + \rho/2$

$$p = \frac{\rho}{2} (1 - a^2 r^{-2}) + p_0$$

Si elegimos $z = 0$ en $r = a$ y tomamos presión manométrica en vez de absoluta

$$\rho gz = \frac{1}{2} (1 - a^2 r^{-2})$$

$$2gz = 1 - a^2 r^{-2}$$

Problema 9 Investigue si el movimiento especificado por $\underline{v} = \frac{K^2 (x\hat{y} - y\hat{x})}{x^2 + y^2}$

con $K = \text{const}$ es posible para un fluido incompresible.

Encuentre las líneas de flujo y las superficies equipotenciales. Determine también si es potencial y, en su caso, encuentre el potencial de velocidad.

Para ver si es posible investiguemos si la ecuación de continuidad es satisfecha. Como, en efecto, $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, tal tipo de flujo es posible.

Como la velocidad no es una función del tiempo, el flujo es estable; las líneas de flujo vienen dadas por

$$dx/v_x = dy/v_y = dz/v_z$$

$$\text{o sea por } x dx + y dy = 0 \quad y \quad dz = 0 \quad (1)$$

que integradas dan

$$x^2 + y^2 = \text{cte} \quad y \quad z = \text{cte} \quad (2)$$

Las líneas de flujo son circunferencias horizontales concéntricas

Encontremos la vorticidad

$$\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{K^2 y}{x^2 + y^2} & \frac{K^2 x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \hat{x} + 0 \hat{y} + \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \hat{z}$$

que es cero, por consiguiente el flujo es potencial y existe ψ tq $\underline{v} = \nabla \psi$

o sea

$$v_x = -\frac{K^2 y}{x^2 + y^2} = \partial_x \psi \quad (3)$$

$$v_y = \frac{K^2 x}{x^2 + y^2} = \partial_y \psi \quad (4)$$

$$v_z = 0 = \partial_z \psi \quad (5)$$

La primera integración da

$$\psi(x, y) = -K^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + f(y)$$

$$\partial_y \psi = f'(y) + \frac{K^2 x}{x^2 + y^2} \quad (6)$$

Al comparar (5) y (6) vemos que $f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = \text{cte}$ constante que puede hacerse cero pues carece de importancia

$$\psi = -K^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (7)$$

Y las superficies equipotenciales son planos perpendiculares al plano xy , todas contienen al eje z y son radiales i. e. perpendiculares a las líneas de flujo.

Su intersección con el plano xy viene dada por

$$x = ky, \quad k = \text{cte} \quad (8)$$

Problema 10 Una esfera de radio a se mueve con velocidad \underline{u} en un fluido ideal incompresible. Determine el flujo potencial alrededor de la esfera.

El problema es idealizado pues estamos exigiendo que el fluido sea incompresible, no viscoso y potencial, con lo que las ecuaciones se reducen a

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \times \underline{v} = \underline{0}, \quad \text{que permite usar} \quad \nabla^2 \psi = 0$$

Un ejemplo real de este problema vendría dado por una esfera que cae dentro de un fluido con velocidad mediana; no muy pequeña para evitar la consideración de fuerzas viscosas ni muy grande para que no exista turbulencia.

Deseamos encontrar una expresión para $\underline{v}(r, \theta)$, de modo que busquemos ψ resolviendo la ecuación de Laplace.

La solución puede expresarse formalmente como

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = & A_0 + A_1 r \cos \theta + A_2 r^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \quad (1) \\ & + C_0 r^{-1} + C_1 r^{-2} \cos \theta + C_2 r^{-3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned}$$

donde las A y las C son constantes arbitrarias.

La velocidad lejos de la esfera es cero, entonces todas las A son cero. El término con r^{-1} sólo sería posible si la esfera fuera fuente o sumidero, consecuentemente $C_0 = 0$.

Por linealidad de la ecuación de Laplace y de las condiciones de frontera ψ debe depender de \underline{u} linealmente, entonces no pueden aparecer en la solución términos con $\cos^2 \theta$ y potencias de orden superior, lo que descarta las C desde C_2 en adelante.

La única solución posible es entonces

$$\psi(r, \theta) = C_1 r^{-2} \cos \theta, \quad r \geq a \quad (2)$$

$$\text{La condición de frontera en } r = a \text{ es } v_n = u_n \quad \text{i.e.} \quad \underline{v} \cdot \hat{n} = \underline{u} \cdot \hat{n} \quad (3)$$

donde $\hat{n} \parallel \hat{r}$; así

$$[\nabla \psi]_{\text{comp en } \hat{n}} = \underline{u} \cdot \hat{n}$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \hat{n} \cdot \hat{n} \Big|_{r=a} = -2 C_1 r^{-3} \cos \theta \Big|_{r=a} = -2 C_1 a^{-3} \cos \theta = u \cos \theta$$

$$\therefore C_1 = -\frac{ua^3}{2}$$

y finalmente

$$\psi(r, \theta) = -\frac{ua^3}{2r^2} \cos \theta = -\frac{a^3}{2r^2} \underline{u} \cdot \hat{n}, \quad r \geq a \quad (5)$$

que también puede expresarse como $\psi(r, \theta) = \frac{a^3}{2} \underline{u} \cdot \nabla r^{-1}$ (6)

y la velocidad

$$\underline{v} = \nabla \psi = \left(\frac{a^3}{2} \underline{u} \cdot \nabla \right) \nabla r^{-1} = \frac{a^3}{2r^3} [3(\underline{u} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \underline{u}] \quad (7)$$

que da las componentes de la velocidad en dirección paralela a \underline{u} y radial y, en la cual se procedió como sigue

$$\underline{v} = \nabla \psi = \frac{a^3}{2} \nabla (\underline{u} \cdot \nabla r^{-1}) = \frac{a^3}{2} (\underline{u} \cdot \nabla) \nabla r^{-1} + (\nabla r^{-1} \cdot \nabla) \underline{u} + \underline{u} \times (\nabla \times \nabla r^{-1}) + \nabla r^{-1} \times (\nabla \times \underline{u})$$

los tres últimos términos del lado derecho son cero y sólo queda

$$\underline{v} = \frac{a^3}{2} (\underline{u} \cdot \nabla) \nabla r^{-1} \quad \text{i.e.} \quad v_j = \frac{a^3}{2} (u_i \partial_i) \partial_j r^{-1}$$

pero $\partial_j r^{-1} = -r_j / r^3$, entonces

$$v_j = -\frac{a^3}{2} u_i \partial_i (r^{-3} r_j) = -\frac{a^3}{2} u_i [(\partial_i r^{-3}) r_j - r^{-3} \partial_i r_j]$$

$$= -\frac{a^3}{2} \left[\left(\frac{3 u_i r_j}{r^5} \right) r_j - \frac{u_j \delta_{ij}}{r^3} \right] = \frac{a^3}{2} \left[\frac{3 (u \cdot r)}{r^5} r_j - \frac{u_j}{r^3} \right] \Rightarrow$$

$$\underline{v} = \frac{a^3}{2r^3} [3 (\underline{u} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \underline{u}] \quad (8)$$

Es claro que $\psi(r, \theta) = \frac{ua^3}{2r^2} \cos \theta$ también puede servir para encontrar las

componentes de velocidad en coordenadas esféricas

$$\underline{v} = \nabla \psi(r, \theta) = \partial_r \psi \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \psi \hat{\phi}$$

donde el último término se hace cero puesto que \underline{v} no depende de ϕ por la simetría de la esfera

$$\underline{v} = \frac{a^3}{2r^3} [2 (\underline{u} \cdot \hat{r}) \hat{r} + u \sin \theta \hat{\theta}] \quad (9)$$

que da las componentes radial y tangencial.

La fórmula (6) también puede expresarse como

$$\psi(r, \theta) = \underline{B} \cdot \nabla r^{-1} \quad (10)$$

donde \underline{B} es un vector constante. Esa es la forma general que toma el potencial de velocidad.

12 Fuerza sobre un cuerpo sólido en flujo potencial

El problema de un cuerpo sólido de volumen V_0 moviéndose con velocidad constante \underline{u} en un fluido en reposo es exactamente igual que el de un cuerpo en reposo rodeado de un fluido que se mueve con velocidad $-\underline{u}$. Nosotros resolveremos el primero suponiendo un sistema de referencia pegado al cuerpo y que se mueve con él.

En flujo potencial de fluido incompresible e ideal es válida la ecuación de Laplace y su solución general para el caso que analizamos es

$$\psi = a r^{-1} + \underline{B} \cdot \underline{r}^{-1} + \text{términos despreciables} \quad (12.1)$$

puesto que buscamos soluciones que se hagan cero a distancias muy grandes del cuerpo ya que el fluido está allí en reposo. Una vez encontrado ψ podemos calcular \underline{v} para un instante dado.

a y \underline{B} son independientes del sistema de referencia elegido.

Si suponemos que

$$\psi = a r^{-1} \quad (12.2)$$

entonces

$$\underline{v} = -a r^{-2} \hat{r} \quad (12.3)$$

Con esa velocidad calculemos el flujo de masa a través de una superficie cerrada, digamos una esfera de radio R

$$\text{Flujo total} = \oint_{\text{esf}} \underline{v} \cdot \hat{n} d^2x = \oint_{\text{esf}} \underline{v} \cdot \hat{r} d^2x = \oint_{\text{esf}} -a r^{-2} \hat{r} \cdot \hat{r} d^2x = -a \oint_{\text{esf}} d^2x = -a 4\pi R^2 = -4\pi a R^2 \quad (12.4)$$

pero sabemos que para flujo incompresible el flujo a través de cualquier superficie cerrada es cero, luego $a = 0$, con lo que ψ debe ser

$$\psi = \underline{B} \cdot \nabla r^{-1} = -r^{-2} \hat{r} \cdot \underline{B} \quad (12.5)$$

y la velocidad

$$\underline{v} = \nabla \psi = \nabla (\underline{B} \cdot \nabla r^{-1}) = (\underline{B} \cdot \nabla) \nabla r^{-1} \quad (12.6)$$

pues el resto de términos se hacen cero ya que \underline{B} es constante y $\nabla \times \underline{r} = \underline{0}$

$$\underline{v} = \frac{3(\underline{B} \cdot \hat{r})\hat{r} - \underline{B}}{r^3}$$

ver demostración en problema 10. El vector \underline{B} depende de la forma del cuerpo y de su velocidad y, sólo puede ser determinado resolviendo la ecuación de Laplace para todos los puntos fuera del cuerpo (no sólo a grandes distancias) y tomando en cuenta las condiciones de frontera

La energía cinética del fluido que se mueve alrededor del cuerpo es

$$K = \frac{1}{2} \int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x \quad (12.7)$$

donde $\underline{X}(m, t)$ es el volumen del fluido, es decir, todo el espacio menos el volumen del cuerpo. $K = \text{cte}$ para fluido incompresible.

Para evaluar la integral consideremos primero una esfera de radio R y volumen V centrada en el cuerpo y luego hagamos que R tienda al infinito

$$v^2 \equiv u^2 + (\underline{v} + \underline{u}) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \quad (12.8)$$

Tomemos la integral

$$\int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x = \int_{\underline{X}(m, t)} u^2 d^3x + \int_{\underline{X}(m, t)} (\underline{v} + \underline{u}) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) d^3x \quad (12.9)$$

$\underline{X}(m, t)$ es el volumen de la esfera menos el volumen V_0 del cuerpo.

La primera integral es $u^2 (V - V_0)$ y en la segunda haremos uso de las transformaciones siguientes

$$(\underline{v} + \underline{u}) = \nabla(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \text{ puesto que } \underline{v} = \nabla\psi \text{ y } \nabla(\underline{u} \cdot \underline{r}) = \underline{u}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r})(\underline{v} - \underline{u})] &= \nabla \cdot [(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \underline{v}] - \nabla \cdot [(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \underline{u}] \\ &= \nabla(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \cdot \underline{v} + (\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \nabla \cdot \underline{v} - \nabla(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \cdot \underline{u} - (\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \nabla \cdot \underline{u} \\ &= \nabla(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r}) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) = (\underline{v} + \underline{u}) \cdot (\underline{v} - \underline{u}) \end{aligned}$$

$$\int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x = u^2 (V - V_0) + \int_{\underline{X}(m, t)} \nabla \cdot [(\psi + \underline{u} \cdot \underline{r})(\underline{v} - \underline{u})] d^3x \quad (12.10)$$

$$\int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x = u^2 (V - V_0) + \int_{\underline{X}(m, t)} (\psi + \underline{u} \cdot \underline{r})(\underline{v} - \underline{u}) \cdot \hat{n} d^2x \quad (12.11)$$

donde se usó el Teorema de la Divergencia de Gauss y $\partial \underline{X}(m, t)$ es la frontera que limita a $\underline{X}(m, t)$ es decir la superficie exterior S de la esfera y la superficie S_0 del cuerpo.

En la superficie S_0 del cuerpo $v_n = u_n$ por condición de frontera y esto hace que la integral allí sea cero. En la integral en S sustituimos $\psi = \underline{B} \cdot \nabla r^{-1}$

$$\text{y } \underline{v} = \frac{3(\underline{B} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \underline{B}}{r^3}$$

$$\int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x = u^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + \int_S \left(-\frac{\underline{B} \cdot \hat{r}}{r^2} + \underline{u} \cdot \hat{r} \right) \left(\frac{3(\underline{B} \cdot \hat{r})\hat{r} - \underline{B}}{r^3} - \underline{u} \right) \hat{r} r^2 d\Omega \quad (12.12)$$

donde se usó la definición de ángulo sólido y $\hat{r} \parallel \hat{n}$

El integrando queda

$$\left[-\frac{3(\underline{B} \cdot \hat{r})^2 \hat{r}}{r^5} + \frac{(\underline{B} \cdot \hat{r})\underline{B}}{r^5} + \frac{(\underline{B} \cdot \hat{r})\underline{u}}{r^2} + \frac{3(\underline{B} \cdot \hat{r})(\underline{u} \cdot \hat{r})\hat{r}}{r^3} - \frac{(\underline{u} \cdot \hat{r})\underline{B}}{r^3} - (\underline{u} \cdot \hat{r})\underline{u} \right] \cdot \hat{r} r^2$$

despreciamos términos que se harán cero cuando R tienda al infinito y cancelando se simplifica a $3(\underline{B} \cdot \hat{r})(\underline{u} \cdot \hat{r}) - (\underline{u} \cdot \hat{r})^2 r^3$

$$\int_{\underline{X}(m, t)} v^2 d^3x = u^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + \int_S [3(\underline{B} \cdot \hat{r})(\underline{u} \cdot \hat{r}) - (\underline{u} \cdot \hat{r})^2 R^3] d\Omega \quad (12.13)$$

$$= u^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - V_0 \right) + 4\pi \underline{B} \cdot \underline{u} - \frac{4\pi}{3} u^2 R^3 = 4\pi \underline{B} \cdot \underline{u} - V_0 u^2$$

debemos recordar que la integración sobre Ω es equivalente a promediar en todas las direcciones de $\hat{n} = \hat{r}$ y multiplicar por 4π

$$(\underline{B} \cdot \hat{r})(\underline{u} \cdot \hat{r}) = \frac{1}{3} \delta_{ij} B_i u_j = \frac{1}{3} \underline{B} \cdot \underline{u}$$

$$y \quad (\underline{u} \cdot \hat{r})^2 = \frac{1}{3} u^2$$

finalmente la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} \int_{\underline{X}(m, t)} \rho v^2 d^3x = \frac{1}{2} \rho (4\pi \underline{B} \cdot \underline{u} - V_0 u^2) \quad (12.14)$$

La naturaleza general de la dependencia del vector \underline{B} de la velocidad \underline{u} se puede deducir fácilmente del hecho que la ecuación es lineal en ψ y las condiciones de frontera también, además de ser estas últimas también lineales en \underline{u} ; entonces \underline{B} debe depender linealmente de \underline{u} i. e. $\underline{B} = C \underline{u}$ (12.15) Entonces, la energía cinética es una función del cuadrado de las componentes de la velocidad (ec 12.14) y se puede escribir

$$K = \frac{1}{2} m_{ij} u_i u_j \quad (12.16)$$

donde m_{ij} es el tensor de masa inducida que es simétrico y constante, cuyas componentes se pueden calcular a partir de las de \underline{B} .

Ahora bien, la variación temporal del momentum, de conformidad con AD5, es la fuerza que actúa sobre el fluido

$$\dot{\underline{P}} = \underline{F} \quad (12.17)$$

$$d\underline{P} = \underline{F} dt \quad (12.18)$$

Multiplicando escalarmente por la velocidad \underline{u}

$$\underline{u} \cdot d\underline{P} = \underline{F} \cdot \underline{u} dt = \underline{F} \cdot d\underline{r} = dW_{\text{externo}} = dK_{\text{almacenada}}$$

$$dK = \underline{u} \cdot d\underline{P} \quad (12.19)$$

y la componente i del momentum es

$$\underline{P} \cdot \underline{e}_i = \nabla K \cdot \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{1}{2} m_{ij} u_i u_j \right) = m_{ij} u_j \quad (12.20)$$

A partir de (12.14) podemos ahora obtener una expresión para el momentum total del fluido

$$K = \frac{1}{2} (4\pi\varrho \underline{B} \cdot \underline{u} - \varrho V_0 u^2)$$

$$\underline{B} \cdot \underline{u} = B_i u_i = C u_i u_i = C u_i^2 = C u^2$$

$$\frac{\partial(\underline{B} \cdot \underline{u})}{\partial u_i} = 2 C u_i = 2 B_i \quad (12.21)$$

y como $u^2 = u_i^2$

$$\frac{\partial u^2}{\partial u_i} = 2 u_i \quad (12.22)$$

entonces

$$P_i = \nabla K_i = \frac{1}{2} (4\pi 2B_i - V_0 2u_i)$$

$$\underline{P} = 4\pi\varrho \underline{B} - \varrho V_0 \underline{u} \quad (12.23)$$

da el momentum total del fluido.

El momentum transmitido por el cuerpo al fluido es $d\underline{P}/dt$ es decir que la fuerza del cuerpo sobre el fluido es

$$\underline{F}_{\text{cuerpo-fluido}} = d\underline{P}/dt \quad (12.24)$$

y, evidentemente, la fuerza que el fluido hace sobre el cuerpo es

$$\underline{F}_{\text{fluido-cuerpo}} = - d\underline{P}/dt \quad (12.25)$$

Su componente paralela a \underline{u} se llama fuerza de arrastre o simplemente arrastre y su componente perpendicular empuje.

Consideremos un cuerpo oscilando bajo la acción de una fuerza externa \underline{F} , que el fluido es incompresible y se mueve alrededor del cuerpo en flujo potencial. La fuerza externa \underline{F} debe ser igual que la derivada material del momentum del sistema fluido-cuerpo. El momentum del sistema es la suma del momentum del

cuerpo más el del fluído

$$M \underline{u} + \underline{P} \quad (12.26)$$

y la fuerza

$$M \frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{P}}{dt} = \underline{F}_{\text{ext}} \quad (12.27)$$

que en componentes

$$M \frac{du_i}{dt} + m_{ij} \frac{du_j}{dt} = F_i \quad (12.28)$$

$$\frac{du_j}{dt} (M \delta_{ij} + m_{ij}) = F_i \quad (12.29)$$

que es la ecuación de un cuerpo moviéndose en un fluido ideal

Supongamos ahora un fluído que ejecuta oscilaciones por causas ajenas a un cuerpo que está sumergido en él. El fluído mueve al cuerpo y le imprime una velocidad \underline{u} .

Sea \underline{v} la velocidad del fluído sin considerar la perturbación que introduce el cuerpo y supongamos que \underline{v} varía sólo ligeramente en distancias del orden de la dimension lineal del cuerpo; entonces \underline{v} se puede suponer uniforme en el volumen ocupado por el cuerpo.

Si el cuerpo fuera siempre acarreado por el fluído, i. e. $\underline{v} = \underline{u}$, la fuerza que actuaría sobre él sería igual a la que actuaría sobre el mismo volumen de fluído, cuyo momentum es $\rho V_0 \underline{v}$ y por consiguiente la fuerza sobre él es $\rho V_0 \frac{d\underline{v}}{dt}$.

La realidad es que el cuerpo no es acarreado siempre con el fluído sino que hay movimiento relativo entre ambos, que tiene por consecuencia que el fluído adquiere momentum adicional que es $m_{ij} (u_j - v_j)$ y cuya derivada material, con signo cambiado, da la fuerza adicional sobre el cuerpo, que es $-m_{ij} \frac{d(u_j - v_j)}{dt}$.

Sumadas dan la fuerza total sobre el cuerpo que es igual, por consiguiente a la derivada material del momentum del cuerpo

$$\frac{d}{dt} (M u_i) = \rho V_0 \frac{dv_i}{dt} - m_{ij} \frac{d(u_j - v_j)}{dt} \quad (12.30)$$

Integrando y ordenando

$$(M \delta_{ij} + m_{ij}) u_j = (\rho V_0 \delta_{ij} + m_{ij}) v_j \quad (12.31)$$

ecuación que determina la velocidad del cuerpo a partir de la del fluído; la constante de integración es cero puesto que $\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{u} = \underline{0}$

Problema 11 Obtenga la ecuación de movimiento de una esfera de radio a y densidad ρ_e que ejecuta oscilaciones en un fluido ideal de densidad ρ .

Comparando ec (12.5) $\psi = \underline{B} \cdot \nabla r^{-1}$ con ec (6) del problema 10

$\psi = \frac{a^3}{2} \underline{u} \cdot \nabla r^{-1}$ vemos que

$$\underline{B} = \frac{a^3}{2} \underline{u} \quad (1)$$

De conformidad con ec (12.23) el momentum total de la esfera es

$$\underline{P} = 4\pi\rho\underline{B} - \rho V_0 \underline{u} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \underline{u}$$

que en componentes da (v. ec 12.20)

$$P_i = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \delta_{ij} u_j = m_{ij} u_j \quad (2)$$

por lo que
$$m_{ij} = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \delta_{ij} \quad (3)$$

y la fuerza que el fluido hace sobre ella, de ec (12.25), es

$$\underline{F}_{fl-esf} = -d\underline{P}/dt = -\frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{d\underline{u}}{dt} \quad (4)$$

que es fuerza interna del sistema.

Y la ecuación de movimiento (12.29) queda

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \left(\rho_e + \frac{1}{2}\rho \right) \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{F} \quad (5)$$

El término entre paréntesis se llama densidad virtual y $\frac{1}{2}\rho$ es la densidad inducida.

Problema 12 Considere la misma esfera del problema anterior puesta en oscilación por el fluido y calcule su velocidad

De ec (12.31)
$$\underline{u} = \frac{3\rho}{2\rho_e + \rho} \underline{v}$$

de la que se puede ver que

$$\rho_e > \rho \quad \Rightarrow \quad u < v \quad \text{y la esfera se atrasa en tanto que}$$

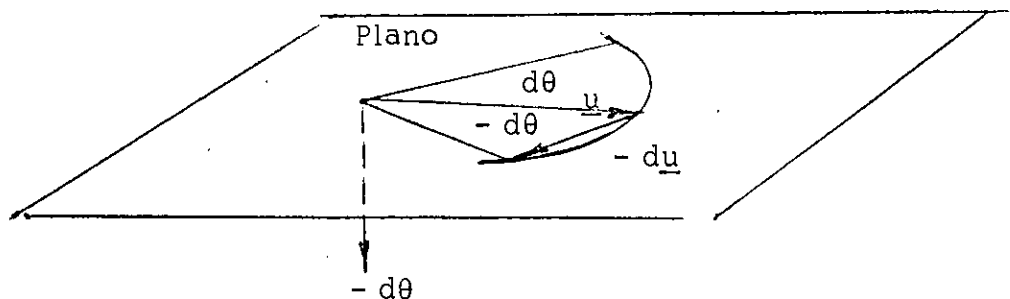
$$\rho_e < \rho \quad \Rightarrow \quad u > v \quad \text{y la esfera se adelanta al fluido.}$$

Problema 13 Obtenga el torque de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se mueve dentro de un fluido, en función del vector \underline{B}

sea E la energía y \underline{N} el torque; sabemos que

$$dE = \underline{N} \cdot d\theta = \underline{P} \cdot d\underline{u}$$

donde $d\theta$ es un giro infinitesimal y $d\underline{u}$ el cambio correspondiente en velocidad. En vez de girar el cuerpo $d\theta$ y obtener las nuevas componentes de m_{ij} , giramos todo el fluido un ángulo $-d\theta$, respecto del cuerpo, y obtenemos su cambio correspondiente en velocidad $-d\underline{u}$



$-d\underline{u} = -d\theta \times \underline{u}$; note que $-d\theta$ es perpendicular al plano determinado por \underline{u} y $-d\underline{u}$

$$\underline{N} \cdot d\theta = -\underline{P} \cdot d\underline{u} = -d\theta \times \underline{u} \cdot \underline{P} = -\underline{u} \times \underline{P} \cdot d\theta$$

$$\underline{N} = \underline{P} \times \underline{u}$$

Substituyendo \underline{P} de la ec (12.23)

$$\underline{N} = 4\pi\eta \underline{B} \times \underline{u}$$

13 Viscosidad

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de los fluídos sin considerar la viscosidad. En esta sección discutiremos el flujo tomando en cuenta ese fenómeno. Queremos pues estudiar el comportamiento real de los fluídos.

Primero describiremos cualitativamente ese comportamiento para adquirir una idea de cómo es.

La ecuación de Newton-Euler, ec (2.2) fue obtenida sin considerar el efecto de la viscosidad que ya se mencionó en (2.1). Cuando lo tomamos en cuenta la ecuación queda

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = - \frac{1}{\rho(x)} \nabla p(x) + \underline{g} + \frac{f_{visc}}{\rho(x)} \quad (13.1)$$

donde el último término es el que corrige la ecuación.

Cuando estudiábamos el flujo de un fluído ideal alrededor de un cuerpo sólido la condición de frontera era que

$$v_n \text{ fluido} = v_n \text{ superficie} \quad (2.11)$$

y no teníamos ninguna razón para evitar que el fluído tuviera una componente tangencial de velocidad. No tomamos en cuenta la posibilidad de existencia de una fuerza de corte entre la superficie y el fluído. Fuerza que existe y obliga a que la componente tangencial de velocidad sea cero exactamente en la superficie del sólido. Esa fuerza de corte es la atracción intermolecular entre el fluído y el sólido que obliga a que la capa del fluído inmediatamente adyacente al sólido quede en reposo y se adhiera a su superficie.

Este es un hecho experimental comprobado en todas las circunstancias posibles, aunque no resulte evidente per se.

Debemos pues modificar nuestra teoría para que esté acorde con el hecho experimental que en todos los fluídos ordinarios las partículas de fluído contiguas a la superficie del sólido tienen velocidad cero relativa a esa superficie.

En condiciones estáticas las fuerzas de corte son cero; pero cuando aun no se ha alcanzado el equilibrio esas fuerzas existen y la viscosidad describe las fuerzas de corte existentes en el fluído que se mueve.

Para describirla supongamos dos superficies planas sólidas paralelas con fluido entre ellas. Imaginemos una de las superficies en reposo y la otra moviéndose con rapidez v_0 respecto de la primera.

La viscosidad dinámica η se define

$$\eta = \frac{\tilde{\sigma}_s}{v_0/d} = \begin{array}{l} \text{esfuerzo de corte} \\ \text{deformación unit.} \end{array} \quad (13.2)$$

donde $\tilde{\sigma}_s$ = esfuerzo de corte

$$= \text{fuerza de corte por unidad de area} = F_s/A \quad (\text{v. def 16})$$

v_0 y d aparecen indicadas en la figura y su cociente es la deformación unitaria del fluido al corte.

En forma diferencial

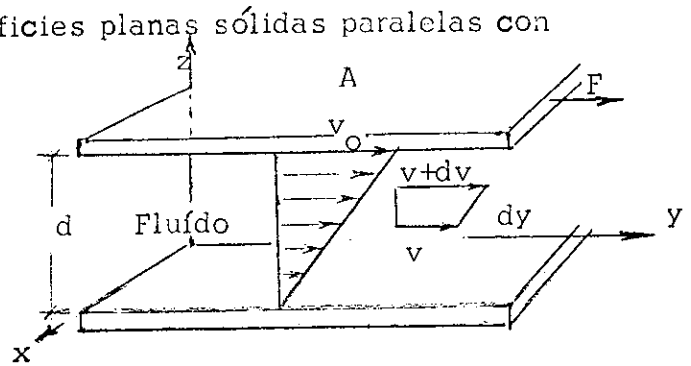
$$\eta = \frac{dF/dA}{\frac{\partial v}{\partial z} dy} \quad (13.3)$$

Si η es constante entonces el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria.

Al considerar \underline{F}_s y \underline{v} en dirección arbitraria sobre el plano xy se puede escribir la viscosidad dinámica en una forma mas general

$$\eta = \frac{\tilde{\sigma}_{xy}}{\frac{\partial v}{\partial x} y + \frac{\partial v}{\partial y} x} \quad (13.4)$$

y, como \underline{F} y \underline{v} pueden estar en una dirección cualquiera, hay expresiones similares para $\tilde{\sigma}_{xz}$ y $\tilde{\sigma}_{yz}$.



Deformación de un fluido producida por fuerza constante de corte.

Problema 14 Calcule la distribución de velocidad de un líquido que está dentro de dos cilindros largos concéntricos de radios a y b que giran con rapidez v_a y v_b respectivamente, ambas en el mismo sentido, y el torque sobre una superficie cilíndrica de radio r , $a < r < b$

Por la simetría del problema podemos suponer que el flujo es siempre tangencial y que $v = v(r)$

Consideremos una partícula de fluido en posición \underline{r} con

$$\underline{v}(r) = \underline{\omega}(r) \times \underline{r} \quad (1)$$

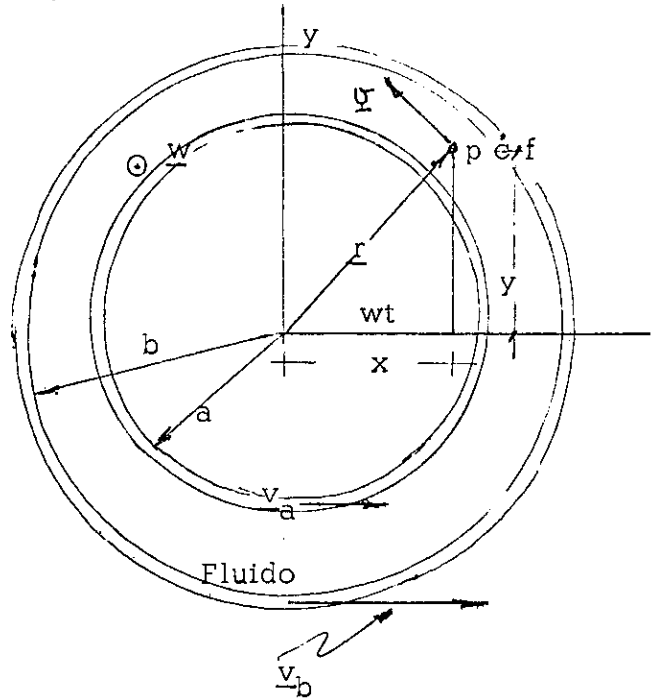
$$\underline{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$= r \cos wt \hat{x} + r \sin wt \hat{y}$$

$$\dot{x} = -rw \sin wt = -wy \quad (2)$$

$$\dot{y} = rw \cos wt = wx \quad (3)$$

de ec (13.4) tenemos



Fluido dentro de dos cilindros concéntricos que giran

$$\mathcal{C}_{xy} = \eta \left[\frac{\partial(wy)}{\partial x} - \frac{\partial(wx)}{\partial y} \right] = \eta \left[x \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (4)$$

cuando $y = 0$, $x = r$ y la ec (4) queda

$$\mathcal{C}_{xy}(y = 0) = \eta r \frac{dw}{dr} \quad (5)$$

Cuando w no cambia con r la rotación se llama uniforme y el fluido gira como un sólido (v problema 7), $dw/dr = 0 \implies \mathcal{C}_{xy} = 0$. No hay esfuerzo de corte. Hay que notar que como la orientación del eje x es arbitraria, puede obligarse a que $y = 0$ en cualquier punto de modo que el esfuerzo dado por la ecuación (5) es el valor en cualquier parte.

El torque puede ser calculado por

$$\underline{N}(f) \stackrel{df}{=} \int_{\underline{X}(m, t)} (\underline{x} - \underline{x}_0) \times \underline{\tau}(\underline{x}) d^2x$$

$$(\underline{x} - \underline{x}_0) = \underline{r} ; \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}_{-xy}$$

y el torque respecto del eje z y a distancia r

$$N_z(f) = \int_{X(m,t)} r^2 \eta \frac{dw}{dr} d^2x = 2\pi r^3 \eta L \frac{dw}{dr} \quad (6)$$

w aunque no uniforme es constante, de modo que no hay aceleración angular, lo que indica que el torque total sobre una cáscara cilíndrica de espesor dr debe ser cero, es decir, que el torque a distancia r debe ser balanceado por el torque a distancia $r + dr$, o, en resumen, el torque debe ser independiente de r . Para ello es necesario en ec (6) que

$$r^3 \frac{dw}{dr} = K = \text{cte.}$$

e integrando

$$\int_{w_b}^{w_a} dw = K \int_a^b r^{-3} dr$$

$$w_b - w_a = \frac{K}{2} (a^{-2} - b^{-2}) \quad \text{con lo que}$$

$$K = \frac{2 a^2 b^2 (w_b - w_a)}{b^2 - a^2}$$

y el torque es

$$N = \frac{4\pi\eta L a^2 b^2 (w_b - w_a)}{b^2 - a^2} \quad (7)$$

toda la fracción es constante y el torque es proporcional a la diferencia de velocidades angulares.

A veces es conveniente usar la viscosidad específica o viscosidad cinética que se define

$$\nu = \eta / \rho$$

14 Ecuaciones para flujo viscoso

Ahora deseamos ecuaciones generales para el fluido viscoso, que tomen en cuenta el efecto de disipación de energía que ocurre durante el movimiento y que afecta sus características.

El fenómeno se debe a fricción interna (viscosidad) y a conducción térmica.

Para obtenerlas hay necesidad de incluir términos adicionales en las ecuaciones del movimiento de un fluido ideal.

Podemos ver de la deducción de la ecuación de continuidad que ella es válida sea el fluido viscoso o no, de modo que no requiere modificación y queda siempre

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \quad (14.1)$$

La ecuación de Newton-Euler

$$\rho \partial_t \underline{v} + (\rho \underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\nabla p + \underline{g} \quad (2.2)$$

si requiere la adición del término indicado en (13.1).

Hemos visto en la sección 7 que

$$\partial_t \rho v_i = -\partial_j \pi_{ij} \quad (7.4)$$

donde $\pi_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} \rho p + \rho v_i v_j$ = tensor de flujo de la densidad de momentum representa una transferencia de momentum completamente reversible que se debe únicamente al transporte mecánico de la masa de las partículas de fluido de un lugar a otro y a las fuerzas de presión.

La viscosidad, que es fricción interna, es causada por transferencia irreversible de momentum de lugares donde la velocidad es alta a lugares donde es baja.

La ecuación de movimiento de un fluido viscoso se obtiene agregando al tensor de flujo de densidad de momentum de un fluido ideal un nuevo término

$-\mathcal{E}'_{ij}$ (tensor de esfuerzo viscoso) que da esa transferencia irreversible de momentum. Redefinimos entonces

$$\pi_{ij} = \rho p \delta_{ij} + \rho v_i v_j - \mathcal{E}'_{ij} = \tilde{\pi}_{ij} + \rho v_i v_j \quad (14.3)$$

que es el tensor de flujo de densidad de momentum de un fluido viscoso y donde

$$\hat{\zeta}_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} \tilde{\zeta}'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (14.4)$$

es el tensor de esfuerzo que da la transferencia de momentum que no se debe a la parte de momentum acarreado por la masa que se mueve.

La forma general de $\tilde{\zeta}'_{ij}$ se puede obtener razonando de la siguiente manera. La fricción interna ocurre en un fluido, como ya vimos en la sección 13, cuando diferentes partículas se mueven con distintas velocidades y hay, por consiguiente, movimiento relativo entre sus varias partes.

En una primera aproximación supondremos que $\tilde{\zeta}'_{ij}$ es una función lineal de las derivadas espaciales de la velocidad. Por otro lado, no puede haber términos de $\tilde{\zeta}'_{ij}$ independientes de la velocidad puesto que para $\underline{v} = \text{cte}$ debe desaparecer. Hay que hacer notar que para rotación uniforme también desaparece (v. problema 7)

Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial_j v_i$ que se reducen a cero cuando $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$, por consiguiente $\tilde{\zeta}'_{ij}$ debe tener solamente combinaciones simétricas de esas derivadas.

El tensor más general de rango dos que satisface el razonamiento anterior es

$$\tilde{\zeta}'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \eta' \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \delta_{ij} \quad (14.5)$$

donde el fluido se ha supuesto isotrópico para que η y η' puedan ser escalares.

El último término del lado derecho agrega $\eta' \partial_p v_p$ a todos los términos diagonales $\tilde{\zeta}'_{ii}$ del tensor de esfuerzo viscoso. Debe notarse que $\partial_p v_p = \nabla \cdot \underline{v}$ de manera que si el fluido es incompresible este término desaparece; tiene que ver pues con fuerzas internas de compresión y la viscosidad queda determinada sólo por η .

η es la viscosidad dinámica ya descrita antes, que también se llama viscosidad de corte o primer coeficiente de viscosidad.

Para determinar la fuerza de viscosidad por unidad de volumen, $\underline{f}_{\text{visc}}$, encontramos la resultante sobre un elemento cúbico de volumen de fluido, tomando las fuerzas en las seis caras un par cada vez. Obtenemos entonces diferencias que dependen de las derivadas espaciales del esfuerzo, o sea, de las segundas derivadas espaciales de la velocidad.

La componente de la fuerza de viscosidad por unidad de volumen en dirección i es

$$f_{i \text{ visc}} = \partial_j \tau'_{ij} = \partial_j [\eta (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \eta' \partial_l v_l \delta_{ij}] \quad (14.6)$$

Las cantidades η y η' son funciones de la presión y la temperatura. En general, p y T no son uniformes en el fluido por lo que η y η' tampoco lo son, así que no pueden salir del operador; sin embargo, cuando cambian en forma insignificante con la posición se pueden tomar como uniformes y en ese caso

$$f_{i \text{ visc}} = \eta \partial_{jj} v_i + \eta \partial_{ji} v_j + \eta' \partial_i \nabla \cdot \underline{v}$$

$$f_{i \text{ visc}} = \eta \nabla^2 v_i + \eta \partial_{ij} v_j + \eta' \partial_i \nabla \cdot \underline{v}$$

donde se supuso que $\partial_{ij} = \partial_{ji}$ por suficiente continuidad

$$f_{i \text{ visc}} = \eta \nabla^2 v_i + (\eta + \eta') \partial_i \nabla \cdot \underline{v} \quad (14.7)$$

que en nomenclatura vectorial se escribe

$$\underline{f}_{\text{visc}} = \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) \quad (14.8)$$

y da la fuerza de viscosidad por unidad de volumen.

Se ve en ella que aparecen términos $\nabla (\nabla \cdot \underline{v})$ y $\nabla \cdot \nabla \underline{v} = \nabla^2 \underline{v}$ que dan la forma más general de combinaciones de segundas derivadas que pueden ocurrir en una ecuación vectorial.

Podría pensarse por que no apareció un término $\nabla \times \nabla \times \underline{v}$ pero basta recordar que es igual que $\nabla^2 \underline{v} - \nabla (\nabla \cdot \underline{v})$ o sea una combinación lineal de los términos que aparecen en (14.8). Hemos demostrado pues, que un fluido tiene sólo dos coeficientes de viscosidad.

Ahora podemos completar nuestra ecuación general para el movimiento de un fluido real

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \underline{v} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \underline{v}) \quad (14.9)$$

que es la ecuación de Navier-Stokes

Si utilizamos nuevamente la identidad dada por ec (2.7) podemos escribir

$$\partial_t \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \underline{v} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \underline{v})$$

que tomando rotor queda

$$\partial_t (\nabla \times \underline{v}) - \nabla \times [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \underline{v}) \quad (14.10)$$

que es muy similar a la ecuación (2.10)

$$\partial_t (\nabla \times \underline{v}) - \nabla \times [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v})] = 0$$

pero ahora con la complicación del término del lado derecho; sin embargo desapareció de ella la presión.

Si por un momento en la ecuación (14.10) nos olvidamos del término central queda una ecuación de difusión para el campo de vorticidad $\underline{\Omega} = \nabla \times \underline{v}$; el término del lado derecho garantiza que la vorticidad se difunde en el fluido.

La ec (14.10) debe complementarse con las condiciones de frontera que, como se indicó en la sec 13 , ahora son

$$v_t \text{ fluido} = v_t \text{ superficie}$$

$$v_n \text{ fluido} = v_n \text{ superficie}$$

Si la superficie está en reposo ambas componentes son cero y si se trata de fluidos no miscibles ambas son iguales.

Problema 15 A partir del tensor de flujo de densidad de momentum para un fluido real calcule la fuerza por unidad de área que el fluido hace sobre la pared del sólido que lo contiene.

La fuerza que actúa sobre un elemento de superficie es exactamente el flujo de momentum a través de ese elemento

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{ij} da_j &= (\rho v_i v_j - \tilde{\mathcal{T}}_{ij}) n_j da \\ &= (\rho v_i v_j - \tilde{\mathcal{T}}'_{ij} + p \delta_{ij}) n_j da \end{aligned} \quad (1)$$

pero $\underline{v} = \underline{0}$ en la superficie por lo que la fuerza por unidad de área es

$$\left(\frac{F}{A}\right)_i = -\tilde{\mathcal{T}}_{ij} n_j = -\tilde{\mathcal{T}}'_{ij} n_j + p n_i \quad (2)$$

donde el elemento de área se consideró en un sistema de referencia en el cual está en reposo y, la normal \hat{n} es hacia afuera del fluido i. e. hacia adentro del sólido.

Nótese que esa fuerza es exactamente el negativo del tensor de la definición 16 que da la fuerza sobre el fluido en la frontera de éste.

15 Disipación de energía en fluido compresible

Por causa de la viscosidad hay disipación de energía mecánica que se transforma en calor.

La energía cinética de un fluido incompresible es

$$K(f) = \frac{1}{2} \int_{\underline{X}(m,t)} v^2 d^3x \quad (15.1)$$

Tomemos dentro de él un volumen fijo en el espacio y calculemos el cambio temporal de la energía del fluido contenido en el volumen

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho v_i \partial_t v_i \quad (15.2)$$

y substituyamos $\partial_t v_i$ tomada de la ecuación de Navier-Stokes

$$\partial_t v_i = -v_j \partial_j v_i - \frac{1}{\rho} \partial_i p + \frac{1}{\rho} \partial_j \tau'_{ij}$$

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho v^2 = -\rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} - \underline{v} \cdot \nabla p + v_i \partial_j \tau'_{ij}$$

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho v^2 = -\rho (\underline{v} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\tau}') - \tau'_{ij} \partial_j v_i \quad (15.3)$$

donde $\underline{v} \cdot \underline{\tau}'$ es un vector con componentes $v_i \tau'_{ij}$. Y puede reescribirse

$$\partial_t \frac{1}{2} \rho v^2 = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{\tau}' \right] - \tau'_{ij} \partial_j v_i \quad (15.4)$$

puesto que divergencia de \underline{v} es cero; la expresión entre corchetes es precisamente el vector de flujo de densidad de energía. El término $\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \underline{v}$ corresponde a un fluido ideal y $\underline{v} \cdot \underline{\tau}'$ da la transferencia de energía debida a la fricción interna y que fluye por la superficie, como veremos en un momento y el último término, que también se debe a fricción interna ocurre dentro del propio volumen. Esto se aclara integrando en la configuración del fluido y aplicando el Teorema de la Divergencia de Gauss a la primera parte

$$\partial_t \int_{\underline{X}(m,t)} \frac{1}{2} \rho v^2 d^3x = - \oint_{\partial \underline{X}(m,t)} \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) \rho \underline{v} - \underline{v} \cdot \underline{\tau}' \right] \cdot \hat{n} d^2x - \int_{\underline{X}(m,t)} \tau'_{ij} \partial_j v_i d^3x \quad (15.5)$$

Al extender la integración a un volumen infinito, o bien a un volumen encerrado queda nada más el último término

$$\dot{K}(f) = - \int_{\underline{X}(m,t)} \mathcal{E}'_{ij} \partial_j v_i d^3x \quad (15.6)$$

ya que el primero se reduce a cero por ser $v(\infty) = 0$ y $v_n \text{ superf.} = 0$.

Para un fluido incompresible

$$\mathcal{E}'_{ij} \partial_j v_i = \eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \quad (15.7)$$

donde se usó (14.5). La ecuación anterior puede reescribirse

$$\mathcal{E}'_{ij} \partial_j v_i = \frac{1}{2} \eta (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 \quad (15.8)$$

y substituída en (15.6) da

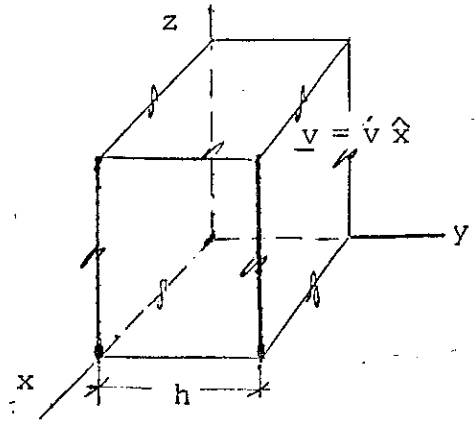
$$K(f) = - \frac{1}{2} \eta \int_{\underline{X}(m,t)} (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 d^3x$$

como la integral siempre es positiva y la disipación de energía es una disminución de energía mecánica, podemos concluir que $\eta > 0$ siempre.

Problema 16 Considere un fluido incompresible, de viscosidad η entre dos planos; uno el plano xz y el otro a distancia h paralelo a xz moviéndose con velocidad $\underline{u} = u \hat{x}$. Calcule la distribución de velocidades y la fuerza sobre los dos planos.

Todo el flujo es en dirección de \hat{x} y las cantidades sólo dependen de y .

La ecuación de continuidad es satisfecha idénticamente y de la de Navier-Stokes



Flujo en x entre dos planos verticales

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \underline{v} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \underline{v})$$

obtenemos $\frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow p = \text{cte}$

y $\frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \Rightarrow v = Ay + B$ para flujo estable

$y = 0 \Rightarrow B = 0$, puesto que $v(y = 0) = 0$

$y = h \Rightarrow A = u/h$ puesto que $v(y = h) = u$

así, la distribución de velocidades es lineal

$$v = \frac{u y}{h}$$

Utilizando ec (2) problema 15 $(\frac{F}{A})_i = -\tilde{\sigma}_{ij} n_j = -\tilde{\sigma}'_{ij} n_j + p n_i$

vemos que la fuerza por unidad de área sobre el plano xz es

$$\tilde{\sigma}'_{yx} = \eta \frac{dv}{dy} = \eta u/h, \text{ tangencialmente y } p \text{ normal } y,$$

sobre el plano $y = h$ es $-\eta u/h$ tangencial y p normal.

Problema 17 Considere un fluido incompresible con flujo estable entre dos planos fijos separados una distancia h y un gradiente de presión en dirección del flujo.

Elijamos las coordenadas como en el problema anterior con el flujo en dirección y sentido de \hat{x} .

La velocidad depende de y por lo que la ecuación de Navier-Stokes da

$$\frac{dp}{dy} = 0 \quad y \quad \eta \frac{d^2 v_x(y)}{dy^2} = \frac{dp}{dx}$$

La primera implica que p depende de y o sea que es uniforme para una z dada, a través de los dos planos.

Integrando la segunda ecuación obtenemos

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} y^2 + A y + B \quad (1)$$

$$v_x(y=0) = 0 \implies B = 0$$

$$v_x(y=h) = 0 \implies A = -\frac{h}{2\eta} \frac{dp}{dx}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad (2)$$

que da una distribución parabólica

Y la velocidad máxima, que por simetría ocurre en $y = h/2$

$$v_{\max} = -\frac{1}{8\eta} \frac{dp}{dx} h^2 \quad (3)$$

hay que notar que la presión va decreciendo con x , lo que hace $\frac{dp}{dx} < 0$ y la velocidad máxima es positiva como era de esperarse.

La ec (2) prob 15 $-\hat{\mathcal{E}}_{ij} = -\hat{\mathcal{Z}}'_{ij} n_j + p n_i$ junto con ec (14.5)

$\hat{\mathcal{E}}'_{ij} = \eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$, para fluido incompresible puesto que desapareció el segundo término del lado derecho de (14.5), da la fuerza de fricción por unidad de área

$$\left(\frac{F}{A}\right) = -\eta \partial_y v_x = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h)$$

Para $y=0$ es $-\frac{h}{2} \frac{dp}{dx}$, ahí que recordar que n_y es hacia la izquierda en $y=0$ (hacia afuera del fluido). Para $y=h$ es $-\frac{h}{2} \frac{dp}{dx}$, n_y es hacia la derecha

Problema 18 Encuentre la distribución de velocidad y el gasto para el flujo estable de un fluido incompresible en un tubo de sección circular uniforme de radio R.

La velocidad del fluido es claramente $\underline{v} = v_x(y, z) \hat{x}$ si elegimos el flujo en dirección y sentido de \hat{x} .

La ecuación de continuidad es satisfecha idénticamente.

De la ecuación de Navier-Stokes

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underline{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \underline{v} + \frac{(\eta + \eta')}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \underline{v})$$

y de $\nabla_x(\nabla_x \underline{v}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla^2 \underline{v}$, obtenemos

$$\underline{0} = -\left\{ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta}{\rho} [\partial_{yy} v_x(y, z) + \partial_{zz} v_x(y, z)] \right\} \hat{x} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} \hat{y} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \hat{z} \quad (1)$$

$\therefore \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0 \implies$ presión constante en la sección transversal del tubo, y

$$\frac{dp}{dx} = -\eta [\partial_{yy} v_x(y, z) + \partial_{zz} v_x(y, z)] \quad (2)$$

que nos permite concluir que $dp/dx = \text{constante}$ a lo largo del tubo y podría, es claro, escribirse

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} \quad (3)$$

donde $\Delta p = \text{cambio de presión entre inicio y fin del tubo}$ y L su longitud. La ecuación (2) no es más que

$$\nabla^2 v = -\frac{1}{\eta} \frac{\Delta p}{L} \quad (4)$$

que ahora puede ser reescrita en coordenadas cilíndricas y donde, por simetría, sólo aparece el primer término

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v) = -\Delta p / \eta L \quad (5)$$

que integrada dos veces da

$$v = -\frac{\rho}{4\eta L} r^2 + A \ln r + B \quad (6)$$

Sabemos que la velocidad en el centro es finita, luego $A = 0$ y $v(r=R) = 0 \Rightarrow B = \frac{\Delta p}{4\eta L} R^2$, de manera que

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (7)$$

que demuestra que la velocidad es parabólica a través del tubo.

Y el gasto no es más que

$$Q = \int_{\text{sec. tsv.}} v(r) d^2x = \frac{\pi \Delta p}{2\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} R^4$$

y la masa de fluido que pasa en la unidad de tiempo por la sección transversal es

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\pi \Delta p}{8\nu L} R^4 \quad (9)$$

donde $\nu = \eta/\rho$

F. Consideraciones finales

Hay físicos que piensan que la axiomatización es más recompostura y reordenamiento que trabajo original de investigación. Los matemáticos no piensan así; ellos consideran que la axiomatización de las teorías matemáticas es trabajo original puesto que ella pone en relieve las ideas esenciales y las relaciones lógicas en una teoría, clarifica y purifica las ideas involucradas en ella y facilita su desarrollo posterior.

Otros creen que la axiomatización es estéril pues consideran que la reconstrucción de lo ya conocido no conduce al descubrimiento de nuevas leyes y que los nuevos problemas son resueltos aplicando y extendiendo teorías, no reorganizándolas. Eso es verdadero en cierta medida, pero no hay que olvidar que la axiomatización en sí es una novedad que exhibe características y rasgos desconocidos, que permanecían escondidos y que en sí, facilita la expansión y la crítica de la teoría así como su reemplazo. Más aún, esta objeción carece de importancia por cuanto que la Axiomática no pretende encontrar nuevas leyes sino albergarlas en un contexto adecuado.

Aunque la axiomatización no haga más poderosa y amplia a la Mecánica de Fluidos si la hace más exacta, de modo que sus deficiencias y méritos se pueden conocer mejor y consecuentemente, cualquier discusión dentro de ese contexto será fructífera en vez de estéril o irritante.

Uno de los peligros más comunes y sutiles de las teorías no axiomatizadas son las suposiciones escondidas, las suposiciones tácitas o coas que no se establecen explícitamente sino que están implícitas en la situación analizada y que, en nuestra actividad diaria, las damos por hechas sin darnos cuenta.

Los que dicen que la Axiomatización restringe, amarra o impide el desarrollo de la Mecánica de Fluidos o de cualquier otra teoría están equivocados, pues es todo lo contrario. La Axiomatización muestra en forma explícita las suposiciones, hace más fácil obtener consecuencias

así como la crítica y la evaluación de la teoría. Si una teoría no sirve, su Axiomatización lo pone de manifiesto de manera inequívoca pero si, por el contrario, posee gérmenes valiosos, los protege de contaminación perniciosas y permite dejar libre su crecimiento.

Que unos creen que la axiomatización es autoritaria y se aterran de la palabra axioma, sólo manifiestan ignorancia de la etimología de la palabra y de su significado presente. $\alpha\ \xi\omega\mu\alpha$ vocablo griego como *postulatum* palabra latina significan requerimiento. Pero de ninguna manera esto quiere decir que sean absolutos, evidentes per se, evidentes por estar basados en hechos empíricos, en la observación, intuición o sentido común, o libres de crítica; todo lo contrario, cuando escribimos un enunciado y lo dignificamos con el nombre de axioma no pedimos que quién lo lea lo tome como verdad absoluta, sino que lo examine a fondo, lo critique y lo considere como punto de partida, no que lo acepte ciegamente. La Axiomática invita a la crítica y al diálogo.

Que la Axiomática de la Mecánica de Fluídos es limitada. Claro, cualquier teoría lo es y, más si no está axiomatizada.

Que la Axiomatización no nos dice cómo verificar la Mecánica de Fluídos. También es cierto, pero las limitaciones de una herramienta no la hacen inútil. Que no nos instruya en cómo usar la teoría y dónde testarla es más una ventaja que un defecto, es un signo de generalidad.

Los conceptos básicos del sistema axiomático de la Mecánica de Fluídos son definidos y analizados; sus características aparecen en las definiciones, que se entienden ahora como una clase de análisis y clarificación. Pero, debe tenerse presente siempre que, la Axiomatización de la Mecánica de Fluídos es una Axiomatización física, es decir factual. No ignora el contenido físico pues no es un procedimiento completamente formal sino que interpreta al formalismo, a través de los axiomas semánticos que trazan el perfil factual de la teoría. El contenido de esos axiomas siempre permanece algo difuso o vago pero se debe a que poseen calidad de verdad factual.

En cuanto a la ubicación pedagógica de la Axiomática de la Mecánica de Fluidos, creemos que no es para el principiante, pues éste debe conocerla primero y después ordenarla. Una exposición axiomática prematura conduce siempre a incomprensión y aburrimiento. Debe tenerse presente siempre sus limitaciones pedagógicas y psicológicas. El primer enfoque de la enseñanza de la Mecánica de Fluidos debe tener un balance juicioso de intuitividad y axiomática y siempre es necesario enseñarla de una manera coherente con su estado actual de evolución y relegar a segundo plano su desarrollo histórico. Un segundo enfoque debe ser más axiomático para evitar traslapes, desaciertos y malcomprensiones, y sólo puede realizarse cuando el estudiante posea bastante conocimiento de la materia, suficiente sofisticación matemática y tenga habilidad y gusto por el pensamiento abstracto. En general, el enfoque axiomático debe tratarse en la parte final de un pensum de licenciatura o a nivel de graduado, pero, aun allí puede ser un error descartar un enfoque intuitivo (que por intuitivo no es necesariamente erróneo o desordenado). Y ese enfoque axiomático debe ir siempre acompañado de un análisis crítico del sistema axiomático pues de lo contrario sería nada más una presentación dogmática. Por otro lado, la crítica permite la introducción de un poquito de metodología, otro poquito de filosofía y otro de historia. Y ya que esto se hace siempre, mejor que sea en forma explícita y a la luz de la Axiomática.

Para establecer la estructura de una teoría de la Mecánica de Fluidos es necesario ordenarla y separar sus conceptos básicos e hipótesis básicas, como se hizo al principio. Además, debe tomarse en cuenta que existen varios tipos de principios generales que sirven para construir su Axiomática:

- a) aquellos que la modelan pero no aparecen en ella como los principios de covariancia,
- b) los que aparecen en ella como axiomas o teoremas, y
- c) los que no aparecen en ella y equivocadamente se cree que no intervienen para nada (p. ej. el principio de Mach)

pero no debe pensarse que hay técnicas rígidas para construir la teoría. Hay ciertas reglas que ayudan, siempre que la teoría no sea muy compleja pero su aplicación exitosa requiere un conocimiento claro de las formulaciones intuitivas de la teoría así como de su aplicación a numerosos ejemplos.

Para determinar el significado de las ideas fundamentales de la Mecánica de Fluídos lo primero es reconocer cuáles son esas ideas, cuyo significado vienen a esclarecerlo los postulados, la matemática y la experiencia (i. e. el test de la teoría).

Debe evitarse la introducción de entes superfluos que no aparezcan en las fórmulas y confundir el significado de un símbolo con las operaciones que sirven para testar la verdad de los enunciados en que el símbolo aparece.

La axiomatización de la Mecánica de Fluídos no elimina la controversia (debemos recordar que la crítica es la esencia de la investigación) pero si puede hacer ver qué controversia es inútil y enfocar la atención en lo fundamental y ayudar a clarificar significados.

La Mecánica de Fluídos, aun axiomatizada, como cualquier teoría física, no es autosuficiente para proveer el método para testarla. Su test requiere el empleo de otras teorías físicas. Tan pronto comenzamos a trabajar con fluídos y a manejar sus ecuaciones, aun a nivel general, aparece un número de variables no mecánicas, temperatura, constante dieléctrica, etc. Entonces, la Mecánica de Fluídos debe ampliarse para dar lugar a efectos termomecánicos o electromecánicos. En breve, como cualquier otra teoría, la Mecánica de Fluídos es incompleta en el sentido que ella sola no puede explicar totalmente un macroevento, puesto que los macroeventos tienen muchas facetas.

Usualmente el análisis de las ideas físicas no se realiza dentro de un contexto fijo ni las discusiones tienen lugar normalmente dentro de un contexto axiomático. De esa manera nada se puede concluir puesto que es perfectamente posible que un concepto sea definido en un sistema e indefinido en otro. De igual manera puede haber un enunciado que sea hipótesis en una teoría y deducido en otra. De modo que el análisis en un contexto abierto es necesariamente inexacto e incompleto, puede relegar a segundo término las ideas básicas y colocar en primer plano nociones sin mayor importancia y, en todo caso, nunca puede exhibir en forma exacta el significado de un símbolo. Para ello es necesario poseer un sistema axiomático que sea minucioso.

Las ventajas de una presentación Axiomática de la Mecánica de Fluídos podrían resumirse así:

Al exhibir todas las suposiciones, permite al científico intrépido tratar de eliminar algún axioma y ver qué pasa. Desaparecerán algunos teoremas otros se modificarán pero al final puede surgir una nueva teoría.

Permite recordar más información. Los psicólogos experimentales han demostrado que es mucho más fácil recordar un cuerpo bien organizado del conocimiento que un conjunto de items que aparentemente no están ligados. El proceso de organización permite ordenar la misma cantidad de información de la Mecánica de Fluídos en forma más compacta y por consiguiente es más fácil de recordar.

Todas las presuposiciones son reconocibles claramente y pueden ser mantenidas bajo control; se les puede criticar o corregir.

No se pierde de vista a los referentes de la teoría puesto que los enunciados de la Mecánica de Fluídos axiomatizada se hacen con todo detalle y mantienen claro que se refieren a sistemas reales, los fluídos, y evitan interpretaciones arbitrarias. En una presentación axiomática uno sabe siempre qué está tratando.

El significado se asigna sistemáticamente, consistentemente y en forma literal y no en forma errática, inconsistente o metafórica. Las analogías se reducen a un mínimo lo que evita ambigüedad.

Si se han indicado explícitamente ^{los sup.} y el lenguaje de la teoría está amparado por la lógica y la matemática esto facilita el descubrimiento de nuevos teoremas que hacen crecer a la teoría.

Cómo el contexto no es abierto el uso de primas no autorizadas es relativamente fácil de detectar y queda restringido. Y, por otro lado, las demostraciones sin importancia se evitan, por innecesarias o porque no significan nada en el contexto de la teoría.

Se evita el racionalismo utópico puesto que no hay porque tratar de definir cada concepto ni demostrar cada enunciado. Un racionalismo auténtico acepta, al menos temporalmente, un conjunto de axiomas y de enunciados no demostrados que permiten justificar el resto. Claro que no se aceptan como dogmas de fe, su justificación existe pues en cooperación con otras premisas producen teoremas que explican o predicen algo.

VII APENDICES

A Apendice 1. Análisis Vectorial

Algunas formulas en las que intervienen operadores diferenciales.

- 1 $\nabla(\theta + \phi) = \nabla\theta + \nabla\phi$
- 2 $\nabla\theta\phi = \theta\nabla\phi + \phi\nabla\theta$
- 3 $\nabla\cdot(\underline{F} + \underline{G}) = \nabla\cdot\underline{F} + \nabla\cdot\underline{G}$
- 4 $\nabla\times(\underline{F} + \underline{G}) = \nabla\times\underline{F} + \nabla\times\underline{G}$
- 5 $\nabla(\underline{F}\cdot\underline{G}) = (\underline{F}\cdot\nabla)\underline{G} + (\underline{G}\cdot\nabla)\underline{F} + \underline{F}\times(\nabla\times\underline{G}) + \underline{G}\times(\nabla\times\underline{F})$
- 6 $\nabla\cdot\phi\underline{F} = \phi\nabla\cdot\underline{F} + \underline{F}\cdot\nabla\phi$
- 7 $\nabla\cdot(\underline{F}\times\underline{G}) = \underline{G}\cdot\nabla\times\underline{F} - \underline{F}\cdot\nabla\times\underline{G}$
- 8 $\nabla\times\phi\underline{F} = \phi\nabla\times\underline{F} + \nabla\phi\times\underline{F}$
- 9 $\nabla\times(\underline{F}\times\underline{G}) = \underline{F}\nabla\cdot\underline{G} - \underline{G}\nabla\cdot\underline{F} + (\underline{G}\cdot\nabla)\underline{F} - (\underline{F}\cdot\nabla)\underline{G}$
- 10 $\nabla\times\nabla\times\underline{F} = \nabla(\nabla\cdot\underline{F}) - \nabla^2\underline{F}$

Identidades vectoriales integrales.

Sean p un campo escalar y \underline{G} un campo vectorial

$$1 \quad \oint_T p \, d\underline{l} = \int_S \hat{n} \times \nabla p \, d^2x$$

$$2 \quad \oint_T d\underline{l} \times \underline{G} = \int_S (\hat{n} \times \nabla) \times \underline{G} \, d^2x$$

Donde T es una trayectoria cerrada que limita la superficie S , como en el Teorema de Stokes

$$3 \quad \oint_S p \, \hat{n} \, d^2x = \int_V \nabla p \, d^3x$$

$$4 \quad \oint_S \hat{n} \times \underline{G} \, d^2x = \int_V \nabla \times \underline{G} \, d^3x$$

Donde S es una superficie cerrada que limita el volumen V , como en el Teorema de la Divergencia de Gauss

$$5 \quad \oint_S \underline{F} (\underline{G} \cdot \hat{n}) \, d^2x = \int_V \underline{F} (\nabla \cdot \underline{G}) \, d^3x + \int_V (\underline{G} \cdot \nabla) \underline{F} \, d^3x$$

Demostrar que $\nabla \times \underline{v} = 2 \underline{w}$

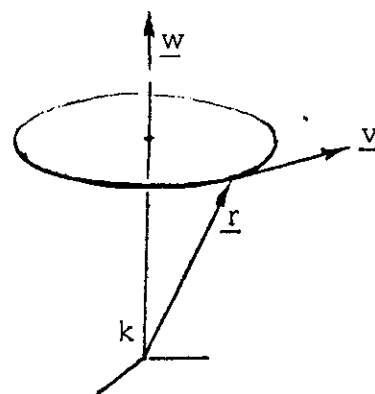
De la figura puede verse que

$$\underline{v} = \underline{w} \times \underline{r}$$

entonces

$$\nabla \times \underline{v} = \nabla \times (\underline{w} \times \underline{r})$$

En componentes



$$\begin{aligned} [\nabla \times (\underline{w} \times \underline{r})]_i &= \delta_{ijk} \partial_j \delta_{klm} w_l r_m \\ &= \delta_{kij} \delta_{klm} \partial_j w_l r_m \\ &= [\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}] (r_m \partial_j w_l + w_l \partial_j r_m) \\ &= r_j \partial_j w_i - r_i \partial_j w_j + w_i \partial_j r_j - w_j \partial_j r_i \\ &= (r \cdot \nabla) w_i - r_i (\nabla \cdot w) + 3 w_i - w_i \end{aligned}$$

Entonces

$$\nabla \times \underline{v} = (r \cdot \nabla) \underline{w} - \underline{r} (\nabla \cdot \underline{w}) + 2 \underline{w}$$

tomando el limite cuando $\underline{r} \rightarrow \underline{0}$ queda

$$\nabla \times \underline{v} = 2 \underline{w} \quad \text{o bien} \quad \underline{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{v}$$

Demostrar que

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

El primer miembro en componentes

$$\left(\frac{1}{2} \nabla v^2 \right)_i = \frac{1}{2} \partial_i v_j v_j = \frac{1}{2} (v_j \partial_i v_j + v_j \partial_i v_j) = v_j \partial_i v_j$$

y el segundo

$$\begin{aligned} [\underline{v} \times (\nabla \times \underline{v}) + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}]_i &= \delta_{ijk} v_j \delta_{klm} \partial_l v_m + v_j \partial_j v_i \\ &= \delta_{kij} \delta_{klm} v_j \partial_l v_m + v_j \partial_j v_i \\ &= [\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}] v_j \partial_l v_m + v_j \partial_j v_i \\ &= v_j \partial_i v_j - v_j \partial_j v_i + v_j \partial_j v_i = v_j \partial_i v_j \end{aligned}$$

QED

Nombre del sistema de
coordenadas:

	Cartesianas	Esféricas	Cilíndricas
q_1	x	r	r
q_2	y	θ	ϕ
q_3	z	ϕ	z
h_1	1	1	1
h_2	1	r	r
h_3	1	r sen θ	1

$$\nabla \psi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_1 (h_2 h_3 A_1) + \partial_2 (h_3 h_1 A_2) + \partial_3 (h_1 h_2 A_3)]$$

$$\nabla \times \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_1 \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \partial_1 \psi \right) + \partial_2 \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \partial_2 \psi \right) + \partial_3 \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \partial_3 \psi \right)]$$

B Apendice 2

Demostración que velocidad del sonido $= c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s}$

Una onda de sonido es un movimiento oscilatorio de pequeña amplitud en un fluido compresible.

Al considerar pequeñas amplitudes sabemos que el término $(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$ de la ecuación de Newton-Euler es despreciable y que la presión y la densidad pueden ser escritas

$$p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho'$$

donde p_0 y ϱ_0 son los valores de equilibrio y p' , ϱ' sus variaciones que cumplen con $p' \ll p_0$, $\varrho' \ll \varrho_0$

La ecuación de continuidad $\partial_t \varrho + \nabla \cdot \varrho \underline{v} = 0$, hasta variaciones de primer orden puede escribirse

$$\partial_t \varrho' + \varrho_0 \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

y la de Newton-Euler $\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p$, dentro de la misma aproximación se reduce a

$$\partial_t \underline{v} = -\frac{1}{\varrho_0} \nabla p'$$

En flujo adiabático un pequeño cambio de presión está relacionado con un pequeño cambio de densidad por la ecuación

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \varrho'$$

Reemplazando ϱ' en la ecuación de continuidad obtenemos

$$\partial_t p' + \varrho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (1)$$

Introduzcamos el potencial de velocidad recordando que $\underline{v} = \nabla \psi$; de la ec. de Newton-Euler obtenemos

$$\partial_t \psi = -\frac{1}{\varrho_0} p'$$

que substituida en (1) da

$$\partial_{tt}\psi - \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s \nabla^2 \psi = 0$$

que no es más que la ecuación de onda

$$\partial_{tt}\psi - c^2 \nabla^2 \psi = 0$$

por lo que

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s}$$

VIII BIBLIOGRAFIA

- APFEL, R. E. : The tensile strenght of liquids, Scientific American, Dic 1972, vol 227, número 6.
- BETH, E. W. : The foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1959.
- BORN, M. : Natural Philosophy of Cause and Chance, Clarendon Press, Oxford, 1949.
Physics in my generation. Pergamon Press, Londres y N. York, 1956.
- BRADBURY, T. C. : Theoretical Mechanics, John Wiley & Sons Inc, Londres y N. York, 1968
- BARITHWAITE, R. B. : Scientific explanation, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.
- BRIDGMAN, P. W. : The Logic of Modern Physics. Mcmillan Co., N. York, 1927.
- BUNGE, M. : The Myth of Simplicity , Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963
Foundations of Physics, Springer-Verlag, N. York Inc, 1967
Philosophy of Physics, D. Reidel Pub. Co, Boston, 1973
- BYRON, F. W. Jr., FULLER, R. W. : Mathematics of Classical and Quantum Physics, Vol 1, Addison Wesley Pub. Co., Reading Mass, 1969.
- CHORLTON, F. : Textbook of Fluid Dynamics, D. Van Nostrand Co. Ltd., Princeton, N. J., 1967
- COPI, I. M. : Introducción a la lógica, Eudeba, Bs Aires, 1967.
- DUFFEY, G. H. : Theoretical Physics, Houghton Mifflin Co, Boston, 1973.
- FRANK , P. : Foundations of Physics, The Univ. Of Chicago Press, Chicago, 1946.
Filosofía de la Ciencia, Herrero Hnos. Suc. S. A., México, 1957.
- FEYNMAN, R., LEIGHTON, R. B., SANDS, M. : The Feynman Lectures on Physics, vol 2, Addison Wesley Pub. Co. Inc. Reading, Mass, 1964.

- HORIE, Y. : Characteristics of Compressible Fluids and the effects of heat conduction and viscosity, AJP vol 38, núm. 2, feb. 1970.
- LASS, H. : Vector and Tensor Analysis, Mc Graw Hill Book Co. Londres, 1950.
- LANDAU, L. D. , LIFSHITZ, E. M. : Fluid Mechanics, Pergamon Press, Londres, 1959.
- LIPSC HUTZ, S. : General Topology, Schaum Pub. Co., N. York, 1965.
- MARGENAU, H. , MURPHY, G. M. : The Mathematics of Physics and Chemistry, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, 1967.
- Mac PHEE, H. J. : Re " Reality in Physics" by Richard Siegel, AJP, vol 41/11, nov. 1973.
- MACH, E. : The Science of Mechanics, 4a edición (1883). La Salle (Ill.) 1942.
- MEYER, R. E. : Introduction to Mathematical Fluid Dynamics, Wiley-Interscience, 1971.
- NOLL, W. : A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media. Arch. Rational Mech. Anal. 2, 197, 1958.
- RICE, S. A. : Properties of Simple Liquids, The Science Teacher, col 35, número 5, mayo 1968.
- REIF, F. : Fundamentos de Física Estadística y Térmica, Mc Graw Hill Book Co, N. York, 1968.
- SACRISTAN, M. : Introducción a la Lógica y al Análisis Formal, Ediciones Ariel, Barcelona, 1969.
- SCHAFF, W. L. : Basic Concepts of Elementary Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., N. York, 1967.
- SHLEGEL, R. : Reality in Physics: A Class Discussion, AJP, vol 40/11, nov 1972.
- SOMMERFELD, A. : Mechanics of Deformable Bodies, vol 2, Academic Press, N. York, 1971.
- STANLEY, R. C. : Resource Letter MPF - 1 : Mechanical Properties of Fluids, AJP, vol 42/6, jun. 1974.
- STREETER, V. L. : Mecánica de Fluidos, Libros Mac-Graw Hill, Mex. 1966