Universidad del Valle de Guatemala

Facultad de Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemáticas

Álgebras de caminos de Leavitt

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR

Juan Fernando Valdés Cruz

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

GUATEMALA

2013

Álgebras de caminos de Leavitt

Universidad del Valle de Guatemala

Facultad de Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemáticas

Álgebras de caminos de Leavitt

TRABAJO DE GRADUACIÓN PRESENTADO POR

Juan Fernando Valdés Cruz

PARA OPTAR AL GRADO ACADÉMICO

DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

GUATEMALA

2013

Vo.Bo.:

Dr. Juan Francisco Escamilla

Tribunal Examinador:

MA. Nancy Zurita

Dr. Roberto Molina

Dr. Juan Francisco Escamilla

Fecha de aprobación:

Guatemala, 13 de junio de 2013

En memoria de Nancy Cruz.

Índice de contenido

Lista de figuras

Nota del autor.

Deseo dar un agradecimiento especial a Sergio López-Permouth, de la Universidad de Ohio, quien sirvió como asesor del trabajo de graduación, por su hospitalidad durante la visita del autor a la universidad durante junio y julio de 2012. También le agradezco por su motivación e iniciativa que hicieron posible este trabajo, al igual que a las personas que ayudaron a mejorar el manuscrito, para las que no incluyo una lista porque podría no estar completa. Por otro lado deseo agradecer a Gene Abrams, quien fue siempre muy atento en responder dudas sobre el tema, y a los estudiantes de matemáticas de la Universidad de Ohio que me acompañaron durante la visita. Doy un agradecimiento especial a Juan Escamilla, quien comentó y mejoró la exposición del documento.

Este trabajo ha expandido mis conocimiento sobre la matemática, así como me ha proveído de una perspectiva de la trayectoria profesional que tiene un profesional en matemáticas. Ha sido una experiencia muy gratificante y alentadora completarlo. Reconozco la influencia que ha tenido Sergio López en mi gusto por el álgebra. También quiero reconocer la influencia que mi prima, Nancy Cruz, tuvo en mí. Ella fue una investigadora muy dedicada, su trabajo estaba relacionado a la inmunología.

Finalmente, quiero dar un cálido agradecimiento a Raúl González de Paz, Roberto Molina, José Manuel Carías, Ricardo Barrientos, Nancy Zurita, Juan Ponciano, Michael Morales, cuya ayuda fue invaluable para realizar este trabajo en LaTeX, y Adrián Licht, del cuerpo de profesores de la Universidad del Valle. También agradezco a los estudiantes de matemáticas y física de la universidad, a mis compañeros, a mis hermanos José Rodrigo y Javier Alejandro, por su compañía y su amistad, y a mis padres por su apoyo.

Prefacio.

El documento presente se elaboró como trabajo de graduación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle de Guatemala. El tema de las álgebras de Leavitt es un nuevo en la matemática. La definición de éstas es reciente, de los últimos años y se ha mostrado mucha actividad en su investigación. Presentamos una introducción al estudio de las álgebras de caminos de Leavitt y tratamos de guiar y motivar al lector a un estudio más avanzado de éstas. Los requisitos son mínimos y pedimos que el lector esté familiarizado con el álgebra abstracta, siendo ideal para introducir el tema a estudiantes de pregrado. Es para los estudiantes que este texto ha sido escrito.

El trabajo consiste su mayor parte en una traducción, adaptada para la presentación que escogimos, para hacer el contenido accesible a cualquier lector. El documento original está titulado *Leavitt Path Algebras, history and first structural results*, escrito por Gene Abrams, parte de un taller para estudiantes de postgrado de matemáticas sobre álgebras de caminos, impartido en Málaga, España, en julio de 2006. No hacemos más esfuerzo en citar alguna fuente particular, a través de la traducción, más de lo ya hecho por Gene Abrams.

Las propiedades algebraicas del álgebra de caminos de Leavitt, $L_K(E)$, sobre un campo arbitrario K son estudiadas. A través del documento damos ejemplos y cálculos básicos, incluso muy sencillos. Trabajamos las condiciones para la simplicidad en el primer capítulo y luego clasificamos algunos tipos de álgebras de caminos de Leavitt, entre estas, las puramente infintas simples, las finito dimensionales y otras en el segundo capítulo. Finalizamos éste con una sección donde mencionamos las direcciones que ha tomado la investigación actual.

He incluido dos apéndices donde se trata el teorema de Wedderburn Artin, y un poco de teoría de anillos y módulos. La presentación del teorema es extensa y hubiéramos irrumpido la continuidad de la presentación. Sobre el otro apéndice, he recolectado parte de las definiciones y resultados que son útiles a través del texto. En particular es esperado que el lector se intente familiarizar con la teoría de módulos, e incluímos de manera muy breve un repaso de ésta. Con sus dos capítulos, el documento presenta nada más que una introducción al tema diseñada para principiantes.

Resumen.

El trabajo presente es una introducción al tópico de las álgebras de caminos de Leavitt. En su mayor parte he traducido la presentación hecha por Gene Abrams, titulada *Leavitt Path Algebras: History and First Structural Results.* Esta introducción pretende una presentación autocontenida y adaptada para los no especialistas y principiantes. La tesis está dividida en tres capítulos. En el primer capítulo se presentan los primeros pasos, incluyendo ejemplos y cálculos triviales. El segundo capítulo presenta el Teorema de Simplicidad. El tercer capítulo revisa la clasificación de las álgebras de Leavitt, incluyendo: simples y puramente infintas, finito dimensionales, localmente finitas y casi no infinitas. Sobre estos últimos dos tipos, existe la equivalencia de la propiedad casi no infinito, con ser graduado y simple y graduado y casi no infinito, dado que $L_K(E)$ sea localmente finito. Para este caso exhibo una prueba, donde el resultado fue obtenido citando un caso más general por Gene Abrams. Finalmente, localmente finito es provado equivalente a la condición noethereiana. Se incluyen dos apéndices; el segundo esta dedicado a la presentación del teorema de Wedderburn Artin, como ha sido presentado de manera maravillosa por Bhattacharya, Jain y Nagpaul en su libro *Basic Abstract Algebra.*

Referencia Principal:

(1) Abrams, Gene. 2006. *Chapter 3, Leavitt Path Algebras: History and first structural results*, pág. 85- 140. Incluido en *Graph Algebras: Bridging the gap between algebra and analysis. Notes from the "Workshop in Graph Algebras", Málaga, Spain, July 2006.* [Versión electrónica, diciembre 2006] University of Málaga Press, 2007.

Abstract.

The present work is an introduction to the topic of Leavitt Path Algebras. It is submitted partial fullfilment of the degree awarded, Licenciatura en Matemáticas. I have in large part translated the lecture notes by Gene Abrams, printed with the title *Leavitt Path Algebras: HIstory and First Structural Results.* This introduction aims a self contained presentation adapted for non specialists and beginners. The thesis is divided in three chapters. In the first chapter includes the first steps into the algebras, with examples and trivial calculations. The second chapter presents the proof of The Simplicity Theorem. Last, the third chapter reviews several differentiated types of Leavitt Path Algebras, including: simple and purely infinite, finite dimensional, locally finite and just infinite. Regarding the last two types, there is the equivalence of just infinite, with being graded simple and graded just infinite, given that $L_K(E)$ is locally finite. For this case I exhibit a proof of my own, where previously the result was obtained by citing a more general case by Gene Abrams. Finally, locally finite is proven equivalent to noetherian. There are included two appendices; the second one is devoted to the Wedderburn Artin Theorem, as greatly presented by Bhattacharya, Jain, and Nagpaul in their book Basic Abstract Algebra.

Main reference:

(1) Abrams, Gene. 2006. *Chapter 3, Leavitt Path Algebras: History and first structural results*, pág. 85- 140. Incluido en *Graph Algebras: Bridging the gap between algebra and analysis. Notes from the "Workshop in Graph Algebras", Málaga, Spain, July 2006.* [Electronic version, December 2006] University of Málaga Press, 2007.

I Introducción a las álgebras de caminos de Leavitt.

En esta sección nos dedicamos a explorar las álgebras de caminos de Leavitt. Hacemos los primeros ejemplos y probamos las primeras propiedades. Hacemos algunos cálculos sencillos en este objeto que es nuevo para nosotros.

1.1 Álgebras de caminos.

Empezaremos con el concepto de grafo diridigo, y unos ejemplos. Luego podremos ver qué es un álgebra de caminos.

Definición. (*Grafo dirigido*) Un grafo dirigido es una terna $E = (E_0, E_1, r, s)$ donde E_0 y E_1 son conjuntos contables, r y s son funciones de E_1 a E_0 ($r, s : E_1 \to E_0$). Llamamos a los elementos de E_0 los vértices de E y a los elementos de E_1 las aristas de E.

Las funciones r y s nos sirven para describir las aristas del grafo dirigido. Para un elemento $e \in E_1$, decimos que la arista e viene de $s(e)$(es la fuente de e) y va hacia $r(e)$(es el rango de e). También se puede decir que $s(e)$ emite e y $r(e)$ recibe a e.

Definición. (*Finito por filas*) Un grafo dirigido es finito por filas si $s^{-1}(v)$ es finito para todo $v \in E_0$. Para finito por columnas sustituimos $r^{-1}(v)$ en la definición.

Ejemplo.

- Sea E un grafo con vértices $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ y aristas $\{y_1, y_2, ...\}$. Definamos r y s por $r(y_i) = x_0$, $s(y_i) = x_i$. Para cada $x_i \in E_1 - \{x_0\}$, $|s^{-1}(x_i)| = 1$. ¿Cuántos elementos hay en $s^{-1}(x_0)$?[1] Este grafo es finito por filas aunque E_0 y E_1 no sean finitos.

[1]El conjunto es vacío.

- Consideremos ahora el grafo $E = (E_0, E_1, r, s)$ definido por $E_0 = \{x_0, x_1\}$ y aristas y_n tales que $s(y_n) = x_0$ y $r(y_n) = x_1$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $s^{-1}(x_0) = \{y_1, y_2, ...\}$, no es finito. Veamos que $s^{-1}(x_1) = \emptyset$. Este grafo no es finito por filas.

Llamaremos a una secuencia de aristas $p = e_{i_1} \cdots e_{i_n}$ un camino si $r(e_{i_j}) = s(e_{i_{j+1}})$ o si $p = v$, por ahora. Describimos brevemente alguno grafos finitos:

1. Conexo El grafo E es conexo si el grafo no dirigido correspondiente, el obtenido al olvidar la orientación de las aristas, es conexo. Sea $S \subset E_0$ y

$$C(S) = \{v \in E_0 : v \in r^{-1}(S), s^{-1}(S)\}.$$

   Al tomar un elemento cualquiera de $v \in E_0$, definimos la secuencia de conjuntos $S_0 = \{v\}$, $S_1 = S_0 \cup C(S_0)$, y en general $S_n = S_{n-1} \cup C(S_{n-1})$. Si

$$E_0 = \cup_{n>0} S_n,$$

   entonces el grafo E es conexo. Si el grafo es finito para un $m > 0$, $S_m = S_{m+1}$.

2. Infinito El grafo E es infinito si $E_0 \cup E_1$ es infinito (sólo usaremos infinito contables).

3. Con ciclos El grafo E tiene un ciclo si para al menos un vértice v podemos encontrar una secuencia de aristas(un camino p) que nos llevan de regreso a v (en particular podríamos encontrar p para todos los vértices en ese mismo ciclo).

4. Árboles El grafo E es un árbol si es un grafo conexo sin cíclos. Requeriremos al grafo E que exista un vértice v tal que $E_0 = \{r(p)$:p es un camino y $s(p) = v\}$ y que no tenga ciclos para llamarlo un árbol, denotado por $T(v)$.

Definimos el grado de salida de un vértice como $outdeg(v) = |r^{-1}(v) \cup s^{-1}(v)|$. A veces se le llama el *Primer teorema de la Teoría de Grafos* al siguiente teorema.

Teorema 1.1 *Para un grafo finito, la suma de los grados de un grafo es igual a dos veces la suma del númuero de aristas.*

Demostración. Sea $S = \sum_{v \in E_0} outdeg(v)$. Por cada arista e, $r(e)$ y $s(e)$ aumentan por 2 a S, así $S = 2|E_1|$. También el número de vértices de grado impar es par. ∎

Ahora damos algunos ejemplos especiales de grafos (adaptados a grafos dirigidos):

1. Grafo complementario (Notación E^*) Sea E un grafo. Denotemos por r_E, s_E las funciones asociadas al grafo E. Definamos otro grafo E^* con el mismo conjunto E_0 y el mismo conjunto E_1, pero $r_{E^*}(e) = s_E(e)$ y $s_{E^*}(e) = r_E(e)$. Llamaremos a E^* el grafo complementario.

2. n-Cíclo (Notación C_n) Es un grafo con n elementos con un ciclo entre sus vértices; para el conjunto $E_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, y $E_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $r(v_i) = v_{i+1}$, $s(e_i) = v_i$ si $i < n$ y para n, $s(e_n) = v_n$, $r(e_n) = v_1$.

3. Trayectoria (Notación R_n) Es el grafo que consta de una secuencia de aristas que conecta los n vértices sin completar un ciclo. Podemos usar el mismo grafo descrito anteriormente sin la arista e_n.

4. Grafo inducido ($\langle S \rangle$) El grafo inducido por un subconjunto $S \subset E_0$ estará relacionado con los ideales graduados del álgebra de caminos de Leavitt. Lo veremos luego.

Enunciamos ahora un teorema. Para esto usamos dos definiciones, de las cuales ya habíamos usado una en los ejemplos, la trayectoria. Un camino de v a v' es una secuencia de n aristas e_i tales que $s(e_1) = v$ y $r(e_n) = v'$, denotado $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_n}$. Si caminamos de v a v' y quitamos los ciclos en el camino obtenemos una trayectoria entre esos vértices, así:

Teorema 1.2 *Un camino de v a v' contiene al menos una trayectoria de v a v'.*[2]

[2] Un vértice es *per se* una trayectoria.

Asumiremos por ahora que los grafos que trabajamos son finitos por filas ($|s^{-1}(v)|$ es finito para todo $v \in E_1$). Pasamos a definir el álgebra de caminos para un grafo. Pero antes, definimos álgebra y álgebra libre.

Definición. (*Álgebra*) Un álgebra sobre un campo K o una $K-$álgebra, es un conjunto no vacío, junto con tres operaciones, llamadas adición(denotadas por $+$), multiplicación(denotada por la yuxtaposición) y la multiplicación escalar(también denotada por yuxtaposición o por '$\cdot$'), tales que se cumplen las siguientes propiedades:

1. A es un espacio vectorial sobre K bajo la adición y multiplicación escalar. (Por eso necesitamos que A sea un grupo aditivo, y por lo tanto $0_A \in A$.)

2. A es un anillo(en algunos casos se requiere la identidad pero no lo haremos).

3. Si $\alpha \in K$ y $a, b \in A$ tenemos que:

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b). \tag{1.1}$$

Por anillo entendemos un anillo con producto asociativo, no necesariamente con unidad y no necesariamente conmutativo.

Ejemplo. Consideremos las matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$ sobre $\mathbb{R}$. Estas son un álgebra donde la multiplicación escalar se define por $\alpha a = \sum_{i,j} \alpha a_{i,j}$ y la adición de matrices se considera como usual, $a + b = \sum_{i,j}(a_{ij} + b_{ij})$. Finalmente la multiplicación de matrices es asociativa y no conmutativa, y es cerrada; tomemos dos matrices a y b, $ab = c \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Esta álgebra tiene identidad $I_{n\times n}$. No podemos tomar las matrices $m \times n$, con $m \neq n$ porque necesitamos la asociatividad de la operación, por lo que las álgebras de matrices requieren que estas sean cuadradas siempre. La base del álgebra de matrices son las matrices con entrada 1 en cada posición, entonces esta base tiene n^2 elementos.

Hemos definido un álgebra, ahora definiremos el álgebra libre de X sobre K:

Definición. (*Álgebra libre*) Sea $X = \{x_i\}_{i \in I}$ un conjunto. Tomemos el conjunto $X \cup \{0\}$ y definamos un producto asociativo sobre este de manera que $(X \cup \{0\}, \cdot)$ es un semigrupo. Llamemos una cadena a una secuencia finita de elementos multiplicados, $x_{i_1} \cdots x_{i_j} \cdots x_{i_n}$. El producto cumplirá la relación siguiente: si la cadena contiene al cero el producto es cero. Definamos de manera natural un espacio vectorial con base X sobre K. Si el grupo abeliano de vectores es dotado del producto asociativo que describimos, compatible con el producto con K, obtenemos un álgebra. El álgebra libre generada por X sobre el campo K es la $K-$ álgebra que tiene al anillo formal $X \cup \{0\}$ cuyo producto es la concatenación de monomios.

Definición. La función delta de Kronecker, $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{1, 0\}$, se define como:

$$\delta(i,j) = \delta_{i,j} = 1 \text{ si } i = j, \tag{1.2}$$

$$\delta_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j. \tag{1.3}$$

Definición. (*Álgebra de caminos de K sobre el grafo E*) Sea K un campo y E un grafo dirigido. El álgebra de caminos(abreviada AC) sobre un grafo E esta definida como el álgebra libre $K[E_0 \cup E_1]$ con las relaciones:

PA1 $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$ para cada v_i, $v_j \in E_0$.

PA2 $e_i = e_i r(e_i) = s(e_i) e_i$ para cada $e_i \in E_1$.

Denotamos a la AC de K sobre E como $A_K(E)$. Podemos escribir a los elementos del álgebra libre $A_K(E)$ como sumas formales $\sum_i \alpha_i x_i$, donde α_i es un elemento del anillo y x_i será un camino finito sobre el grafo, y casi todo $\alpha_i = 0_K$. Es decir que sólo finitos $\alpha_i \neq 0_K$. El anillo $A_K(E)$ es asociativo, no necesariamente con unidad, no necesariamente conmutativo. Hacemos ahora un ejemplo. Para eso consideremos el siguiente grafo:

Como nuestro interés en este momento es simplemente observar qué objeto algebraico sea crea a partir del grafo, podemos usar un campo sencillo para tomar un ejemplo. Así escojamos $B = (\{0,1\}, +, \cdot) \sim Z_2$. Calculemos algunas relaciones,

Figura 1.1: Grafo R_2.

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{\quad e \quad} \bullet_{v_2}$$

multiplicaremos los elementos del álgebra de acuerdo a las reglas anteriores. Bueno, si no conocíamos qué significa el álgebra libre generada por E sobre el campo B, lo ilustraremos con un ejemplo. Calculamos

$$\begin{aligned}
v_1v_2 = &\ \delta_{1,2}v_1 = &\ 0,\\
v_2v_1 = &\ \delta_{2,1}v_2 = &\ 0,\\
v_1v_1 = &\ \delta_{1,1}v_1 = &\ v_1,\\
v_2v_2 = &\ \delta_{2,2}v_2 = &\ v_2,\\
e = &\ er(e) = &\ ev_2 = s(e)e = v_1e.
\end{aligned}$$

En la última línea usamos la regla PA2 de la definición para la multiplicación por aristas y en las anteriores PA1. Veamos que $r(e)e = r(e)s(e)e = (r(e)s(e))e = (0)e = 0$, mientras $er(e) = ev_2 = e$. El álgebra de caminos es no conmutativa. También:

$$e^2 = er(e)s(e)e = 0 \tag{1.4}$$

$$v_2e = v_2s(e)e = v_2v_1e = 0 \tag{1.5}$$

$$ev_1 = er(e)v_1 = ev_2v_1 = 0. \tag{1.6}$$

Ahora agregamos que, escogimos B por conveniencia. El inverso aditivo de los elementos de $A_B(R_2)$ son ellos mismos, pues si $v \in E$ tenemos que $v+v = (1+1)v = 0 \cdot v = 0_A$. Los elementos de $A_B(R_2)$ son $e, v_1, v_2, 0$ únicamente.

Podemos definir $A_B(R_2)$ como el álgebra no conmutativa sobre B de cuatro variables $\{x, y, z, 0\}$ tales que:

1. x, y, 0 son idempotentes,

2. el 0 y z son nilpontentes, con $z^2 = 0$,

3. $xz = z$, $zy = z$,

4. y también $xy = yx = zx = yz = 0$.

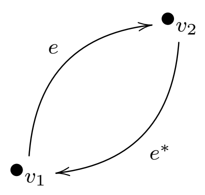
Por un momento tomemos el grafo con un bucle c en v, i.e. la fuente de c es su rango. Denotemos este grafo por E. Entonces $A_K(E)$ tiene tres elementos $\{c, v, 0\}$. Las potencias de c, c^n son distintas a cero y v es una unidad en ambos lados, $vc = cv = c$, $v^2 = v$. El ideal $\langle c \rangle$ es un ideal bilateral de ambos lados. En este ejemplo $A_K(E)$ tiene un ideal maximal.[3] Enriqueceremos más la estructura al considerar el grafo E^*. Tomaremos ambos grafos juntos, y unimos el grafo E con su grafo complementario E^*. Así llegamos a la siguiente definición:

Definición. (*Grafo extendido*) Sea E un grafo. Entonces definamos el grafo $\widehat{E} = (E_0, E_1 \cup (E_1)^*, r', s')$ uniendo E y E^*, donde $E_1^* = E_1' = \{e_i^* : e_i \in E_1\}$. Llamaremos a las aristas de E reales y a las de E^* fantasmas. Usaremos las funciones r_E, s_E y r, s_{E^*} para distinguir las funciones r, s del grafo E y E^*. La funciones r' y s' del grafo $\widehat{E}$ están dadas por:

$$\begin{aligned} r\big|'_{E_1} &= r, & s\big|'_{E_1} &= s, \\ r'(e_i^*) &= s(e_i), & s'(e_i^*) &= r(e_i). \end{aligned}$$

Continuemos el ejemplo para $A_B(\widehat{R_2})$.

Figura 1.2: Grafo extendido $\widehat{R_2}$.



Agregamos $E_1^* = \{e^*\}$. Éste también cumple que $e^* = ev_1 = v_2e^*$, al usar PA2. Los productos ee^*, e^*e son distintos de cero. Regresando al álgebra $A_B(R_2)$, notemos

[3] Por ideal maximal entenderemos un ideal maximal bajo la contención pero propio y distinto de cero.

que hay divisores de cero ($v_1 v_2 = 0$) y $v_1 + v_2$ es la unidad. En $A_B(\widehat{R_2})$ tenemos estas mismas relaciones, pero además hemos agregado un elemento y las concatenaciones de e^* y e de tamaño finito son distintas a cero y elementos de $A_B(\widehat{R_2})$.

1.2 Álgebras de caminos de Leavitt.

Introducimos las álgebras que trataremos por el resto del documento.

Definición. (*Álgebra de caminos de Leavitt*) Sea K un campo y E un grafo finito por filas. El álgebra de Leavitt de E con coeficientes en K esta definido como el álgebra de caminos sobre el grafo $\widehat{E}$ (abreviada ACL) con las dos relaciones siguientes:

CK1 $e_i^* e_j = \delta_{i,j} r(e_j)$[4] para todo $e_j \in E_1$ y $e_i^* \in (E_1)^*$,

CK2 $v_i = \sum_{\{e_j \in E_1 : s(e_j) = v_i\}} e_j e_j^*$ para cada $v_i \in E_0$ que no sea un pozo[5].

El álgebra es denotada por $L_K(E)$, o simplemente por $L(E)$ cuando se sobreentiende el campo K en el contexto. [6] La no conmutatividad se aprecia viendo que $e^* e = v = ee^*$ solamente si e empieza y termina en el mismo vértice y si e tiene como fuente a v, que es rebuscado. Las sumas de CK2 son siempre finitas. Esto es porque $s^{-1}(v)$ siempre es finito, para las aristas reales. La suma se toma sobre las aristas reales y no sobre las aristas fantasmas. ¿Será el grafo extendido de un grafo finito por filas, finito por filas?

Ejemplo. *Si un E finito por filas entonces el grafo complementario es finito por columnas.*

[4] Hemos usado aquí e_i^* para algún e_i. Al extender el grafo cada arista real, del grafo original, tiene una arista fantasma asociada. Es muy importante la enumeración de las aristas y vértices en el grafo original, pues de esta depende la numeración de las aristas fantasmas en el grafo extendido; la enumeración es intrínseca al cálculo de las operaciones de $L_K(E)$. No es importante que índice se le atribuye a e_i, es decir es indistinto al orden, pero si la correspondencia de $e_i^* \sim e_i$.

[5] Con pozo queremos decir $v_i \in E_0$ y que $s^{-1}(v_i) = \emptyset$ en el grafo original. Se dice que un grafo es disconexo si hay algún par de vértices para los que no existe un camino entre ellos. Hay dos casos para un pozo, este esta aislado y hace el grafo disconexo o simplemente hay aristas que llegan a él pero no que salen de él, i.e. v no es fuente de ninguna arista.

[6] Leavitt estudió las álgebras de tipo de módulo (m,n). Discutimos las álgebras de tipo (1,n) más adelante. Resulta que las álgebras de caminos de Leavitt son una clase de álgebras más grande.

Consideremos el grafo definido por los vértices $E_0 = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ y aristas $E_1 = \{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $s(e_i) = x_i$, $r(e_i) = x_0$. Este grafo lo habíamos considerado previamente y es finito por filas. Pero $|r^{-1}(x_0)| = \infty$, entonces $|(s')^{-1}(x_0)| = \infty$ al considerar las aristas fantasmas. Así E' no es finito por filas y $\widehat{E}$ tampoco. El grafo complementario no es finito por filas aunque el grafo original lo sea. La condición que necesaria para que E^* sea finito por filas es que E sea finito por columnas, que son condiciones independientes.[7]

Consideremos el grafo que habíamos dibujado para calcular $A_B(E)$. Queremos identificar $L_B(E)$ para comparar el mismo ejemplo. Observaremos otros ejemplos para $L_K(E)$ en otro momento. El grafo extendido que considerábamos hace un momento era el grafo de dos vértices v_1, v_2, estos unidos por una arista e con fuente v_1 y rango v_2, y la arista e^*. Tenemos las nuevas relaciones:

$$e^*e = \delta_{1,1}r(e) = r(e) = v_2, \tag{1.7}$$

$$v_1 = ee^*. \tag{1.8}$$

Habíamos obtenido que v_1 y v_2 son idempotentes anteriormente y por aparte ahora estos se pueden expresar con e^* y e multiplicándose. Hay un tipo de vértices que no podremos convertir a combinaciones lineales de $e_je_j^*$, que serán los pozos.

Concluimos esta sección describiendo el ACL del ejemplo, para eso hacemos otros cálculos sobre $L_B(E)$. Ambas aristas son nilpotentes, $e^2 = 0$, $(e^*)^2 = 0$. Encontramos que:

1. Las aristas y el 0 son nilpotentes.

2. Los vértices son idempotentes, i.e. $v_i^n = v_i$.

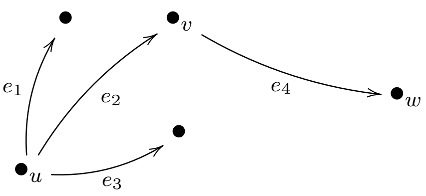
3. Podemos escribir $v_1 = ee^*$ y $v_2 = e^*e$.

4. Multiplicar $v_1e^* = e(e^*e^*) = 0$ y $v_2e = e^*(ee) = 0$. También $ev_1 = 0$ y $e^*v_2 = 0$. Falta considerar $e^*v_1 = e^*$ y $ev_2 = e$ por PA1. Igualmente $v_1e = e$ y $v_2e^* = e^*$.

[7]Dejamos la prueba para el lector.

5. De lo anterior los elementos que necesitamos para generar el álgebra son e^*e y ee^* y los demás se obtienen operando estos. Los elementos son $L_B(E)$ =\{v_1, v_2, e, e^*, 0_L\} con las operaciones como las calculamos previamente.

Figura 1.3: Grafo para ejemplo trabajado.



Hacemos un ejemplo más. Acostumbraremos dibujar $\widehat{E}$ según convenga. Usando CK1 y CK2 en el grafo de la figura 1.3 se obtienen:

$$\begin{aligned} u &= e_1e_1^* + e_2e_2^* + e_3e_3^*, \\ v &= e_2^*e_2 = e_4e_4^*, \\ 0 &= e_2^*e_1, \\ w &= e_4e_4^*. \end{aligned}$$

1.2.1. Primer Teorema de $L_K(E)$.

A partir de este momento asumiremos siempre que el grafo E que estudiamos es un grafo extendido, que tiene sus aristas reales y sus aristas fantasmas. Hemos llamado un camino a una secuencia de aristas de E_1.

Definición. (Extensión de la definición de un camino) Un camino en un grafo v a v' es una secuencia de aristas $e_1, \cdots, e_n$ tales que $s(e_1) = v$ y $r(e_n) = v'$. La secuencia nula que empieza en v y términa en v es también una caminata, así la trayectoria de v a si mismo es v. Nos referimos, dada un camino p, a $s(p)$ y $r(q)$ como al inicio y final del camino, a v y v' correspondientemente.

Si multiplicamos dos monomios en $L_K(E)$ obtenemos otro monomio, el monomio pq^* es un camino también en $\widehat{E}$. Si multiplicamos varios monomios $\alpha_1\beta_1^* \cdots \alpha_n\beta_n^*$, también son un camino. Dado un elemento arbitrario $\sum_i a_i x_i$, podemos encontrar los caminos x_i que generan a $L_K(E)$ como un espacio vectorial. Es decir, solo ciertos caminos x_i son distintos de cero en $L_K(E)$.

Teorema 1.3 *Primer Teorema de las Álgebras de camino de Leavitt. Podemos escribir $L_K(E)$ como el álgebra generada como espacio vectorial por el conjunto de monomios*

$$G = \{pq^* : \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son caminos tales que } r(p) = r(q)\},$$

i.e. $L_K(E) = span(G)$.

Demostración. Escribamos primero un elemento arbitrario del álgebra $\alpha = \sum_i a_i x^{n_i}$ donde x^{n_i} es un monomio elevado a alguna potencia y la suma tiene finitos monomios. Un monomio es la multiplicación de aristas reales, fantasmas y vértices. Lo que indica el teorema es que estos monomios sólo son caminos reales multiplicados por caminos fantasmas, estos últimos a la derecha siempre. Establezcamos el resultado probando que:

1. Un monomio tiene caminos reales a la izquierda solamente y caminos fantasmas a la derecha solamente. En efecto, si una arista fantasma, digamos e_r^*, está a la izquierda de una real usamos CK1 para obtener

$$\begin{aligned} x^{n_i} &= e_i \cdots e_r^* e_j e_l \cdots e_s^* \cdots e_m^* \\ &= e_i \cdots (e_r^* e_j) e_l \cdots e_s^* \cdots e_m^* \\ &= e_i \cdots (e_r^* e_j) e_l \cdots e_s^* \cdots e_m^* \\ &= e_i \cdots (\delta_{r,j} r(e_j)) e_l \cdots e_s^* \cdots e_m^*. \end{aligned}$$

Miramos que si $\delta_{r,j} = 0$ el monomio es cero. En otro caso tenemos el vértice $e_j^* e_j = r(e_j)$ en el camino real. Para el caso donde hay una arista real dentro del camino fantasma también usamos CK1 y obtenemos las mismas opciones. El monomio es cero si son distintos los fuentes y rangos consecutivos, o se absorbe por CK1.

2. Un monomio tiene multiplicados un camino (real o fantasma) y no dos caminos distintos(dentro de su parte real o de su parte fantasma). Si tenemos dentro del monomio dos caminos distintos multiplicados es fácil ver que para un camino p y q distintos, $pq = pr(p)s(q)q = 0$ si $r(p) \neq s(q)$. Ya sean reales o fantasmas, p y q^* deben tener por producto un camino. Como pq^* no puede anularse, eso quiere decir que $r(p) = s(q^*)$ es decir $r(p) = s(q)$. ∎

Cada elemento $x \in L_K(E)$ se escribe como $x = \Sigma_i \alpha_i p_i q_i^*$. El conjunto de monomios no es base del espacio vectorial pues CK2 es una relación de dependencia lineal. Sin embargo, se puede probar que los elementos $E^* = \{p$, p es un camino en el grafo no extendido$\}$, es un conjunto linealmente independiente. A partir de este último teorema, observamos que los monomios de la forma x^2 si el monomio esta formado por aristas reales solamente o por aristas fantasmas solamente. De otra manera, $x^2 = 0$. Por CK1, para cualquier camino p, tenemos que $p^*p = s(p) = v$. Estudiamos ahora el caso especial de algunos grafos. Hemos llamado bucle a una arista que cumple que $r(e) = s(e)$.

Proposición 1.4 *Si e es una arista de $L_K(E)$:*

1. *si e no es bucle entonces e es nilpotente, i.e. $e^2 = 0$;*
2. *si e es un bucle y $v = r(e) = s(e)$, $v^n e = ev^n = e$, y también*
3. *$ev^n e = e^2$.*

Demostración. Calculamos cada inciso:

1. Usemos PA2 para $e^2 = ee = er(e)s(e)e = e(0)e = 0$; dado que $r(e) \neq s(e)$.

2. Es la propiedad PA2 para e.

3. Usando la misma propiedad podemos incluir entre ee el vértice v multiplicado por sí mismo tantas veces como queramos. Así $ev^n e = ev^{n-1} e = \cdots = e^2$. ∎

Eso termina la prueba. Recordemos que sólo trataremos álgebras de caminos sobre grafos extendidos. Estas relaciones se cumplen para las aristas reales y fantasmas de $A_K(E)$, y en particular de $L_K(E)$. A continuación estudiamos los grafos

C_n y R_n. Definamos el grafo R_n, con n vértices, de tal manera que $r(e_i) = v_{i+1}$ y $s(e_i) = v_i$ para $i = 1, .., n-1$,(por de la manera en que enumeramos el grafo) para las aristas reales. En C_n también se cumple para n con $v_{n+1} = v_1$. La relación par las aristas fantasmas es $r(e_i^*) = v_i$ y $s(e_i^*) = v_{i+1}$.

Proposición 1.5 *Para $v \in E_0$ de C_n tenemos que $v_i = e_i e_i^* = e_{i-1}^* e_{i-1}$. Si el grafo es R_n y v es el primer o último vértice, sólo una de las dos igualdades se cumple(ver la figura 1.2.2.2). Para un camino p, en $L(R_n)$ y $L(C_n)$, $pp^* = v$. Si $e_i e_i^* = v_i$ para cada arista e_i en p, también $pp^* = v$.*

Demostración. La ecuación $v_i = e_i e_i^*$ esta dada por CK2. Para escribir el vértice v_i con las arista real que llega a él, e_{i-1} usamos CK1, que da $v_i = \delta_{i,i} r(e_{i-1}) = e_{i-1}^* e_{i-1}$.

Para ver que $pp^* = v$, sea $p = e_1 \cdots e_n$. Calculando directamente:

$$\begin{aligned} p^*p &= e_n^* \cdots e_1^* e_1 \cdots e_n = v \text{ porque se absorben para cualquier } E \text{ y } p \in L(E), \\ pp^* &= e_1 \cdots e_n e_n^* \cdots e_1 = v \text{ por la hipótesis se absorben.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 1.6 *En $L(R_n)$ la multiplicación de una arista real y una fantasma es cero o es un vértice. Multiplicar un vértice por una arista (real o fantasma) da resultado cero u otra arista real o fantasma.*

Demostración. Escribimos primero $e_i e_j^* = e_i r(e_i) r(e_j) e_j^*$. Entonces $e_i e_j^* = 0$ si $i \neq j$. En otro caso, $e_i e_i^* = v_i$ es un vértice. Consideramos ahora $e_j^* e_i = \delta_{i,j} r(e_i)$ por la regla CK1. Tenemos la igualdad a $r(e_i) = v_{i+1}$ o a cero.

Multiplicamos los vértices. Escojamos v_i y una arista fantasma cualquiera. Calculamos $v_i e_j^* = v_i r(e_j) e_j^* = v_i v_{j+1} e_j = (\delta_{i,j} v_i) e_j$. Si $i = j+1$ entonces $v_i e_i = e_j^*$ y sino es cero. Por el otro lado, $e_j^* v_i = e_j^* s(e_j) v_i = e_j v_j v_i = e_j(\delta_{j,i} v_j)$. Este producto es cero o es e_j^*. La propiedad que usamos fue PA2, que sirve igual para las aristas reales. Entonces $e_j v_i$ da cero si $i \neq j+1$ y da e_j si $i = j+1$. El otro producto es $v_i e_j$ es cero si $i \neq j$ y e_j si $i = j$. Estos son todos los casos. $\blacksquare$

Concluimos que las cadenas son solamente de aristas reales o fantasmas si son de más de un elemento.

Escribimos el resultado de multiplicar a $b \in L(R_n)$ por una otro elemento por la izquierda. Se acostumbra denotar la multiplicación por un elemento con un mapeo, digamos $\Psi_I[a]$ donde $\Psi_I[a](b) = ba$, y usamos el mapeo para indicar la multiplicación por la derecha de un elemento $b \in R$ por a. La multiplicación por la izquierda la denotaríamos por $\Psi_I[a]$. Estos mapeos no son iguales a menos que la estructura, o en este caso el álgebra $L(E)$, sea conmutativa. Tomaremos Ψ_a para denotar la multiplicación por la izquierda en $L(E)$ de un elemento por a y no usaremos la otra multiplicación por ahora. Usaremos por facilidad otra letra para denotar $\Psi_R[a]$, escojamos Φ_a. Notemos que no son homomorfismos de anillos, ya que $\Phi_a(xy) = axy \neq axay = \Phi_a(x)\Phi_a(y)$. En este momento queremos ver cual es el kernel para Ψ_a en $L_K(R_n)$.[8] Sin intención de un abuso del lenguaje llamaré kernel al conjunto que mapea Ψ_a a cero. Nuestro objetivo será probar la siguiente proposición, para la que multiplicaremos exhaustivamente con Ψ_a:

Teorema 1.7 *El conjunto generador de $L_K(R_n)$ tiene n^2 elementos,*

$$\dim_K(L_K(R_n)) = n^2.$$

Lema 1.8 *(Multiplicación de aristas reales en R_n) El kernel de Φ_{e_j} donde e_j es una arista real de $L_K(R_n)$ está formado por las cadenas de elementos de $L(R_n)$ tal que el primer elemento a la izquierda es una arista fantasmas e_i^* con $i \neq j$, vértices v_i y aristas reales e_i con $i + 1 \neq j$.*

Demostración. Consideremos 3 subconjuntos para hacer la prueba por casos, primero consideramos las aristas reales, las aristas fantasmas y los vértices. Sólo estos necesitamos por el lema. Para el caso de tener varas aristas multiplicadas, reales o fantasmas(no mezcladas) sólo importa el primer elemento a la izquierda; este caso no existe para los vértices. Tal vez hagamos parte de los cálculos ya hechos en la prueba del lema aquí otra vez, pero nos servirá para ver el uso del homomorfismo Φ_a.

[8]El homomorfismo Ψ_a es solamente un mapeo. En el apéndice dos usamos este mismo mapeo para ilustrar un isomorfismo de anillos, en particular, de R a $Hom_R(R, R)$ un R-módulo izquierdo visto como anillo.

1. Vértices: Si tomamos $\Phi_{e_j}(v_i) = e_j v_i = e_j r(e_j) v_i$. Entonces por la última propiedad $r(e_j) = v_{j+1}$ entonces $e_j v_{j+1} v_i = 0$ si $i \neq j+1$. De otra manera son iguales y $e_j r(e_j) v_i = e_j v_i^2 = e_j v_i = v_i$.

2. Aristas fantasmas: $\Phi_{e_i}(e_j^*) = e_i e_j^* = e_i r(e_i) r(e_j) e_j^*$. Entonces $e_i e_j^* = 0$ si $i \neq j$. En otro caso, $e_i e_i^* = v_i$ es un vértice.

3. Aristas reales: $\Phi_{e_i}(e_j) = e_i e_j = e_i r(e_i) s(e_i) e_j$. Miramos que $r(e_i) s(e_j) = v_{i+1} v_j = \delta_{i+1,j} v_{i+1}$, si es cero todo el producto es cero; si no es cero son el mismo vértice y el producto es de la forma $e_i e_{i+1}$. Es importante que el producto es cero si no es de la forma anterior, lo usaremos más tarde.

Lema 1.9 *(Multiplicación de aristas fantasmas en R_n). El kernel de Ψ_{e_i} esta formado por los elementos de $L(E)$ tal que el primer elemento a la izquierda es una arista real e_j con $i \neq j$, o una arista fantasma e_j^* o un vértice v_j con $i \neq j$.*

Demostración. Tomamos casos de nuevo.

1. Vértices: $\Psi_{e_i^*}(v_j) = e_i^* s(e_i) v_j = e_i^*(v_i v_j) = e_i^*(\delta_{i,j})$. Entonces este es cero si $j \neq i$. De otra manera el resultado es e_i^*.

2. Aristas fantasmas: $\Psi_{e_i^*}(e_j^*) = e_i^* s(e_i) r(e_j) e_j^* = e_i (v_i v_{j+1}) e_j^* = \delta_{i,j+1} e_i^* e_j^*$. Por lo tanto el producto es cero si $j+1 \neq i$. De otra manera obtenemos un elemento de la forma $e_{j+1}^* e_j^*$.

3. Aristas reales: $\Psi_{e_i^*}(e_j) = e_i^* e_j = \delta_{i,j} r(e_j)$ es cero o es un vértice(este lo habíamos hecho en el lema 1.6). Es cero si $i \neq j$.

Lema 1.10 *(Multiplicación de vertices en R_n). El kernel de Ψ_{v_i} está dado por los vértices distintos de v_i, las aristas e_j con $i \neq j$, y las aristas fantasmas e_j^* con $j \neq i+1$.*

La demostración es similar. Cuando no da cero, multiplicar un vértice por la arista que lo tiene como fuente, e_i resulta en e_i. Lo mismo sucede con las aristas fantasmas, pero esta es la arista fantasma que surge de él, ya que $e_i^* = s(e_i^*) e_i = v_{i+1} e_i^*$, esta seria la arista fantasma del que une al vértice anterior con v_i. Hemos descrito la multiplicación en $L(R_n)$ calculando todas estas posibilidades. No necesitamos usar el homomorfismo Φ_b ya que, por ejemplo, $\Psi_b(a) = ae_j = \Phi_a(b)$. Encontramos un resultado interesante al hacer los cálculos anteriores. Los elementos de $L(R_n)$ son los vértices y las cadenas finitas de aristas reales, o cadenas finitas de aristas fantasmas de la siguiente forma:

1. $e_i e_{i+1} \cdots e_{i+n}$,

2. $e^*_{i+n} e^*_{i+n-1} e^*_{i+n-2} \cdots e^*_i$.

Por ejemplo $e_2e_3e_4$ pero no $e_2e_3e_5$. La última cadena vale cero. Consideremos el ejemplo de $L(R_8)$. Ésta álgebra tiene las 7 aristas fantasmas $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_6^*, e_7^*\}$. Consideramos todas las cadenas posibles descendentes que se pueden tomar de este conjunto para encontrar los elementos que se expresan como cadenas de estos fantasmas. Intentamos contar el número de cadenas. Es inmediato que $L(R_8)$ y en general de R_m tiene el mismo número de cadenas de aristas reales que fantasmas. Podemos tomar 7 cadenas de un elemento, 6 de dos elementos, 5 de tres elementos, 4 de cuatro elementos, 3 de 5 elementos, 2 de seis elementos, 1 de siete elementos. Tenemos que R_{n+1} tiene $n+1$ vértices y $2\sum_{i \leq n} i$ caminos reales y fantasmas, entonces

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + (n+1) = 2\frac{(n+1)n}{2} + (n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

elementos en $L_K(R_{n+1})$. Como n+1 es el número de vértices, hemos probado el teorema 1.7, como deseamos. ∎

Revisemos que se cumpla el teorema sobre generadores, $L_K(R_n)$ es el generado lineal de estos n^2 elementos. Los elementos de la forma $p_1 \cdots p_n q_1^* \cdots q_m^*$ donde hay aristas reales y fantasmas, deben ser vértices, restan las cadenas de sólo reales y sólo fantasmas.

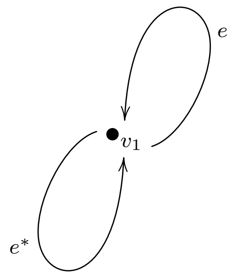
1.2.1.1. El álgebra $L(E)$ como un cociente de un álgebra $A(E)$. Me interesa que en esta sección se mencionen ideas importantes sobre las álgebras estudiadas y su construcción. Para esto consideremos el grafo extendido de un grafo dirigido E y su álgebra de caminos. En el álgebra de caminos de Leavitt se identifica a el rango de e, $r(e)$, con e^*e. Este camino toma la arista fantasma y regresa por la real. Para cada camino fantasma, si regresamos por el mismo camino real obtenemos el inicio del camino, $p^*p = r(p)$. De hecho, los caminos que existen(los monomios distintos a cero) en $A(E)$ son los que quedan concatenados en el grafo, son caminos "posibles", mientras que caminos disjuntos son monomios cuyo producto es cero. La identificación de CK1, $r(e) - e^*e = 0$, es equivalente tomar el álgebra de caminos A haciendo $A' = A/\langle r(e) - e^*e \rangle$. Lo mismo hacemos cuando escribimos CK2, tomamos $A'/\langle \{\sum_i e_i e_i^* - v\} \rangle$ donde la suma va sobre e_i tal que $s(e_i) = v$. Para obtener el vértice inicial $s(e)$ necesitamos todas las aristas que salen de él, y regresar en cada monomio por la correspondiente fantasma, y sumarlas. De hecho, la misma álgebra de caminos es un cociente sobre el álgebra libre generada con E, con las relaciones inducidas por E. Las relaciones de $L_K(E)$ se originan del álgebra de Cuntz $\mathcal{O}(n)$, un álgebra C^*.

1.2.2. Ejemplos.

1.2.2.1. Álgebra de polinomios de Laurent. Consideremos el ejemplo dado por el grafo E con $E_0 = \{v\}$ y $E_1 = \{e\}$, un bucle. Al tomar el grafo extendido tenemos, que $E_1 = \{e, e^*\}$, y estos son bucles. Consideremos cualquier campo K. En este caso $L_K(E)$ es el álgebra generada por e y e^*. Podemos tomar las potencias irreducibles de las aristas. Sin embargo al combinarlas $ee^* = e^*e = v$. Siempre tenemos que v es idempotente y que $ev = ve = e$, $e^*v = ve^* = e$. Entonces v funciona como unidad.

Tomemos el anillo formal $K[x, x^{-1}]$ dado por generado algebráicamente por x y x^{-1} sobre un campo K. Entonces el anillo tiene los polinomios escritos como $\sum_n a_n x^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $a_n \neq 0$ sólo para finitos n. Como una observación, K es subanillo de el álgebra al tomar $x^0 = xx^{-1} = 1$, y por lo tanto $K(1) \subset K[x, x^{-1}]$. Queremos probar que este es isomorfo al álgebra descrita en el párrafo anterior. Al mapear $e \to x$, $e^* \to x^{-1}$ define el isomorfismo de $L_K(E)$ hacia L, por lo que $L_K(E) \cong L$ para cualquier K como queríamos. El homomorfismo está bien dado, es congruente con que $v = ee^* = e^*e \to x(x^{-1}) = x^{-1}(x) = 1$, está bien definido para todos los elementos de $L_K(E)$.

Figura 1.4: Grafo para $K[x, x^{-1}]$.



1.2.2.2. Álgebra de matrices $M_n(K)$. Deseo mostrar el ejemplo en detalle. Recordemos que $L_K(R_n)$ tiene n^2 elementos en su base al igual que las álgebras de matrices. Continuemos mostrando el ejemlo de R_3. Trataremos de escribir para dos elementos de $L_K(E)$, a y b, el tercer elemento $c = ab$ en términos de la base. La ecuación para los coeficientes de c en los elementos de la base considerando si tuviésemos un vértice, una arista real y una arista fantasma, de nuevo. La base del álgebra para $L(R_3)$ como encontramos anteriormente son los nueve elementos $\{v_1, v_2, v_3, e_1, e_2, e_1e_2, e_1^*, e_2^*, e_2^*e_1^*\}$. Usemos los cálculos anteriores; escribamos

$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_8e_2^* + a_9e_3^*e_2^*;$$
$$b = b_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + b_8e_2^* + b_9e_3^*e_2^*.$$

Entonces para c el coeficiente que acompaña a

1. El vértice v_1 es:

$$\begin{aligned} \alpha_{v_1}v_1 &= a_1b_1v_1v_1 + a_{e_1}b_{e_1^*}e_1e_1^* + a_{e_1e_2}b_{e_2^*e_1^*}(e_1e_2)(e_2^*e_1^*) \\ &= (a_1b_1 + a_{e_1}b_{e_1^*} + a_{e_1e_2}b_{e_2^*e_1^*})v_1 \end{aligned}$$

2. Arista real e_1:

$$\begin{aligned} \alpha_{e_1}e_1 &= a_{e_1^*}b_2e_1^*v_2 + a_{v_1}b_{e_1}v_1e_1 + a_{e_1e_2}b_{e_2^*}(e_1e_2e_2^*), \\ &= (a_{e_1^*}b_2 + a_{v_1}b_{e_1} + a_{e_1e_2}b_{e_2^*})e_1, \end{aligned}$$

3. Arista fantasma:

$$\begin{aligned}\alpha_{e_2^*}e_2^* &= a_{e_2^*e_1^*}b_{e_1}(e_2^*e_1^*)(e_1) + a_{e_2^*}b_{v_2}e_2^*v_2 + a_{v_3}b_{e_2^*}v_3e_2^*,\\ &= (a_{e_2^*e_1^*}b_{e_1} + a_{e_2^*}b_{v_2} + a_{v_3}b_{e_2^*})e_2^*,\end{aligned}$$

4. Cadena de aristas reales:

$$\alpha_{e_1e_2}e_1e_2 = (a_{v_1}b_{e_1e_2} + a_{e_1}b_{e_2} + a_{e_1}b_{e_2} + a_{e_1e_2}b_{v_3})e_1e_2,$$

5. Cadena de aristas fantasma:

$$\alpha_{e_2^*e_1^*}e_2^*e_1^* = (a_{e_2^*e_1^*}b_{v_1} + a_{e_2^*}b_{e_1^*}e_2^*e_1^* + a_{v_3}b_{e_2^*e_1^*})e_2^*e_1^*,$$

donde en cada caso las demás multiplicaciones son cero. Revisemos aquí qué multiplicaciones son las que quedan en cada caso. Para cadenas de aristas, al igual que para las aristas, se usa PA2 para obtener la cadena. En otro caso, tomemos la multiplicación de un vértice por la arista de manera que convenga, reescrito usando las cadenas y el vértice como $e_ie_i^*$ o al revés si es el último vértice. Con los vértices funciona de manera sencilla si no son el primero ni el último, ya que $v_i = v_i^2 = e_ie_i^* = e_{i-1}^*e_{i-1}$, los coeficientes que quedan acompañándolo son los que acompañan a estos productos. En el otro caso usamos CK1 o CK2, la relación tiene una forma más complicada. En las ecuaciones escribimos el primer vértice, donde la cadena más larga de vértices multiplicada es $e_1e_2\cdots e_ne_n^*\cdots e_2^*e_1^*$ y cada $e_ie_i^* = v_i$. Pero este es el rango de e_{i-1} y la fuente de e_{i+1}^* y se absorbe hasta restar v_1. Como resultado tenemos el vértice, porque tenemos un camino multiplicado por el mismo camino fantasma pp^* obteniendo el vértice que es fuente de p. Falta el caso para el último vértice. Para el último se obtiene un producto como

$$v_n = e_{n-1}^*e_{n-2}^*\cdots e_1^*e_1\cdots e_{n-2}e_{n-1} = e_{n-1}^*e_{n-2}^*\cdots e_i^*v_ie_i\cdots e_{n-2}e_{n-1},$$

donde se absorben los vértices de en medio igual que en el primer vértice, esta vez usando la relación CK1 para ir reemplazando por v_i.

Hagamos unas observaciones. La base del álgebra es de n^2 elementos, tenemos el mismo número de coeficientes distintos a cero en la multiplicación de elementos arbitrarios, que escriben el coeficiente nuevo de uno de los elementos. El número es n, donde cada sumando es la multiplicación de los coeficientes de algún elemento de la base, en el caso de arriba es 3. Por otro lado $\sum_i v_i$ es idempotente. Queremos mapear $L_K(R_3)$ al álg ebra de matrices de 3×3 sobre K. ¡Necesitamos una unidad!

Figura 1.5: Al tomar $K = \mathbb{R}$ con el grafo R_5, $L_{\mathbb{R}}(R_5) \cong M_5(\mathbb{R})$.

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet_{v_3} \xrightarrow{e_3} \bullet_{v_4} \xrightarrow{e_4} \bullet_{v_5}$$

Teorema 1.11 *Si E es finito entonces $L_K(E)$ tiene unidad.*

Demostración. Tenemos una pista para empezar. Recordemos que en el ejemplo que calculamos previamente, para el álgebra de polinomios de Laurent, el vértice funciona como unidad. Sólo un vértice para un grafo de dos vértices no puede funcionar como unidad ya que $v_i v_j = 0$ si i, j son distintos. Tomemos $s = \sum_i v_i$ como habíamos dicho antes. Para los vértices este elemento cumple como unidad, ya que al multiplicar por cualquier lado a un vértice, se aniquilan los distintos y queda este al cuadrado (pero los vértices son idempotentes). Para algúna arista, real o fantasma, multiplicamos sin pérdida de generalidad por el lado derecho. Tenemos $es = e$ ya que se aniquila cualquier término con $er(e)v_i$ excepto en el que se pueda aplicar PA1, es decir el rango de e es v_i si este es real, o su fuente si fuera fantasma. Sólo un vértice cumple esto y tiene que encontrarse como sumando en s. Funciona de igual manera por el lado izquierdo. Entonces $\sum_i v_i$ es unidad de $L(E)$. ∎

Continuamos con el ejemplo. Entonces la unidad mostrada también es unidad en $L(R_n)$. Debemos poner los vértices en la diagonal, es decir $v_i \to (i, i)$ es la imagen bajo el mapeo que buscamos de éstos; (i, j) es la entrada i-j en la matriz $n \times n$. Esto nos ayuda a definir la posición del resto. Tenemos en la diagonal n elementos, y en la diagonal de arriba un elemento menos. Si se observara los cálculos anteriores podemos ver que hay n-1 aristas reales e_i. Estas caben en la diagonal superior. Hay n-2 cadenas de aristas de la forma $e_ie_{i+1} \neq 0$, estas caben en la diagonal siguiente, y así. Pondremos las fantasmas en las diagonales de abajo, en orden siempre. Mapeamos $e_i \to (i, i+1)$ y $e_i^* \to (i+1, i)$. Esto define bien la posición del resto. Si multiplicamos las matrices, encontraríamos que e_ie_{i+1} queda en la posición $(i+1, i+2)$ y la cadena $e_i^*e_{i-1}^*$ queda en $(i+2, i+1)$, es el elemento mismo en la transpuesta. Estas posiciones son las que esperábamos. Ilustramos el mapeo de $L(R_3)$ y $L(R_4)$ poniendo el elemento del el álgebra en la posición que se le asignaría en la matriz. Quedan así:

$$\begin{bmatrix} v_1 & e_1 & e_1e_2 \\ e_1^* & v_2 & e_2 \\ e_2^*e_1^* & e_2^* & v_3 \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} v_1 & e_1 & e_1e_2 & e_1e_2e_3 \\ e_1^* & v_2 & e_2 & e_2e_3 \\ e_2^*e_1^* & e_2^* & v_3 & e_3 \\ e_3^*e_2^*e_1^* & e_3^*e_2^* & e_3^* & v_4 \end{bmatrix}.$$

Hay una simetría más. Mencione antes que pareciera que e_1e_2 corresponde en la transpuesta a la misma posición que $e_2^*e_1^*$. ¿Podríamos pensar en asociar estos elementos? Lo haremos luego.

1.2.2.3. Álgebra de Leavitt $L(1, n)$. Sea $E_0 = \{v\}$. Para $L(1, n)$ tomemos el conjunto de bucles $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ con $n \geq 2$. Entonces $L(E)$ es $L(1, n)$. Esta álgebra tiene dos propiedades interesantes. Es simple y es puramente infinta. Estudiaremos esto en detalle en el capítulo 2.

Además, es infinita dimensional. Un bucle siempre genera potencias $\{b, b^2, b^3, \dots\}$ que son linealmente independientes. Un ejemplo importante para las álgebras de Leavitt son las álgebras que tienen un tipo de módulo (1,n). Llamamos tipo de módulo a el número más pequeño n para el que ${}_RR^m \cong_R R^n$, donde m es el mínimo para el que el isomorfismo de R-módulos puede suceder. Introducimos un concepto muy importante en los módulos que Leavitt quiso estudiar. Los módulos sin NIB, sin número invariante de base, existen y las álgebras que Leavitt encontró con esta propiedad están dentro de la clase de álgebras de caminos de Leavitt. En particular nos interesa el ejemplo $L(1, n)$. Para ilustrar la propiedad sin NIB, digamos que

L(1,3) cumple que

$$L(1,3) \cong I_1 \oplus I_2 \oplus I_3, \text{ tal que } I_i \cong L(1,3).$$

El isomorfismo es de R-módulos derechos, donde $R = L(1,3)$. Esto es explicado en más detalle en el apéndice 1.

Motivación. Queremos responder la pregunta, ¿si E_0 es infinito, podemos encontrar una cadena de ideales infinita en $L(E)$, i.e. que $L(E)$ falle en ser noetheriano, o artiniano? Si E es infinito hay un conjunto contable infinito de vértices $\{v_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ que permiten escribir infinitos idempotentes:

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} v_i; \qquad f_n^2 = f_n.$$

tales que las siguientes dos cadenas son infinitas:

$$f_1R \subset f_2R \subset \cdots \subset f_nR \subset \cdots \text{ es ascendente y}$$
$$(1-f_1)R \supset (1-f_2)(1-f_2)R \supset \cdots \supset (\Pi_{i=1}^{n}(1-f_i))R \supset \cdots \text{ descendiente.}$$

Las inclusiones se dan en la primera de manera fácil de ver, y en la segunda se obtienen como consecuencia de la primera cadena. Sin embargo la segunda cadena no funciona en las álgebras de caminos de Leavitt porque si E es infinito, ¡$L(E)$ no tiene unidad! En el caso que E sólo tiene un vértice, $v \sim 1$ y tampoco funciona. Pero todavía no sabríamos si contiene una cadena descendente infinita.

Si $L_K(E)$ tiene una cadena infinita E puede ser finito. Sólo necesitamos encontrar un grafo finito con L(E) base infinita. El grafo para $L(1,n)$ es un vértice con n bucles, $n \geq 2$. Para cualquiera de los bucles p, el conjunto $\{p^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente y es parte de la base de $L(1,n)$. Este grafo muestra un álgebra de Leavitt que tiene base infinita y el grafo es finito. Mostraremos luego que $L(1,2) \cong L(1,2) \oplus L(1,2)$. Algo curioso es cómo el homomorfismo dado no cambia el tamaño de la base. Sigue siendo infinita contable, pero es muy especial en el sentido algebraico. Como primera consecuencia obtenemos que el ideal derecho $I_{1,1} \cong L(1,2)$ en el isomorfismo $L(1,2) \cong I_{1,1} \oplus I_{1,2}$ hace que $I_{2,1} \subsetneq L(1,2)$, un ideal propio de $I_{1,1}$, contenga de nuevo otro ideal $I_{2,1}$ isomorfo a L(1,2). Entonces $\{I_{j,1}\}$ es una cadena descendente, como $I_{n,1} \subsetneq I_{n-1,1}$, infinita.

Recordamos del curso de álgebra que un anillo para el que sus cadenas ascendentes de ideales son todas finitas se llama **notheriano**. Hemos probado que si $L(E)$ no es finito dimensional no es noetheriano. Tampoco es **artiniano**. Un anillo es artiniano si todas sus cadenas descendentes de ideales son finitas. Para un anillo no conmutativo se hace la distinción de ser noetheriano(o artiniano) por la izquierda(o por la derecha). Es posible ser noetheriano(o artiniano) solamente por la izquierda y por la derecha no, o bien por ambos lados. La distinción no es posible para anillos conmutativos. Se puede probar que un anillo artiniano con unidad es noetheriano, referimos al lector al apéndice 1. Luego veremos que si E es finito y acíclico $L_K(E)$ es artiniano y noetheriano.

Hemos argumentado que $L(1,2)$ no es artiniano. Esto no permite concluir que no es noetheriano por la derecha, pues aunque $L(1,2)$ tiene unidad estas condiciones son independientes. Resulta que $L(1,2)$ es simple.[9] Así, a pesar de no ser artiniano por la derecha, es artiniano por ambos lados. Probamos que $L(1,2)$ tiene tipo de módulo $(1,2)$ para finalizar la sección. El homorfismo que usamos es un homomorfismo de módulos, y por convención escribimos la acción del escalar $r \in R$ en la izquierda y la del homomorfismo ϕ por la derecha, para el R-módulo izquierdo ${}_RR$, con $R = L(1,2)$.

Teorema 1.12 *Sea R un anillo. Es equivalente que ${}_RR \cong_R R^n$, i.e. tiene tipo (1,n), a que existan elementos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tales que $x_iy_j = \delta_{i,j}1_R$ y $\sum_i y_ix_i = 1_R$.*

Demostración. Haremos la prueba para el caso de $L(1,2)$, y para $L(1,n)$ se hace de manera similar.

($\leftarrow$). Supongamos que existen elementos $\{x_i\}_i$ y $\{y_i\}_i$ que cumplen las relaciones dadas, los usaremos para crear un homomorfismo invertible de $\varphi :_R R \to_R R^2$.

[9]Ver el captítulo 2 para más sobre este ejemplo.

Tenemos dos elementos x_1, x_2 y y_1, y_2 que cumplen:

$$x_1 y_1 = 1_R = x_2 y_2;$$
$$x_1 y_2 = 0 = x_2 y_1;$$
$$y_1 x_1 + y_2 x_2 = 1_R.$$

Este homomorfismo φ lo escribiremos como una matriz 1×2 actuando por la derecha. El inverso φ^{-1} actúa también por la derecha. Escribimos $[ar] \in_R R$ para la matriz 1×1 y definimos φ:

$$\varphi([ar]) = [ar][y_1, y_2] = [ary_1, ay_2] = a[ry_1, ry_2]. \tag{1.9}$$

Notemos que $\varphi(x_1 + x_2) = [1, 1]$. El inverso, φ^{-1} se definiría así:

$$\varphi^{-1}([a, b]) = [a, b][x_1, x_2]^t = ax_1 + bx_2. \tag{1.10}$$

Veamos que:

$$\varphi^{-1}\varphi([r]) = \varphi^{-1}([ry_1, ry_2]) = ry_1x_1 + ry_2x_2 = r(y_1x_1 + y_2x_2) = r. \tag{1.11}$$

($\rightarrow$). Probamos que si hay un isomorfismo deben existir x_1, y_1, x_2, y_2 con las relaciones dadas. Para esto, si el mapeo es de R-módulos, pueden verse como homomorfismos representados por la mutliplicación de matrices. Aplicamos a un vector $[a, b]$, $\varphi\varphi^{-1}$ y $\varphi^{-1}\varphi$ a $[r]$ para derivar las relaciones:

$$\varphi\varphi^{-1}[a, b] = \varphi(ax_1 + bx_2) = [(ax_1 + bx_2)y_1, (ax_1 + bx_2)y_2] = [a, b]. \tag{1.12}$$
$$\varphi^{-1}\varphi[r] = \varphi^{-1}[ry_1, ry_2] = r(y_1x_1 + y_2x_2) = r. \tag{1.13}$$

De la última ecuación se deriva $\sum_i y_i x_i = 1_R$. De la ecuación 1.12, usando que se cumple para cualquier a, b, escogiendo apropiadamente obtenemos $ax_1y_1 + bx_2y_1 = a \rightarrow x_1y_1 = 1_R, x_2y_1 = 0$. Es similar el otro caso, y $x_2y_2 = 1_R$, $x_1y_2 = 0$. ■

II Simplicidad de $L_K(E)$.

En este capítulo trabajeremos el camino que nos lleva a la prueba del Teorema de Simplicidad. Para esto, crearemos un método para concluir la simplicidad de $L_K(E)$, donde, con la ayuda del mapeo de involución, lograremos dar las condiciones suficientes y necesarias para que $L_K(E)$ sea un álgebra simple.

2.1 Método para la Simplicidad de $L(E)$.

Un anillo es simple si no tiene ideales propios distintos de cero. Un grupo es simple si no tiene subgrupos normales. Los ideales y los subgrupos normales son los kernels de un homomorfismo de anillos o de grupos. La estructura que consideramos para las álgebras es más complicada. Podemos enunciar que un álgebra es simple si todos sus homomorfismos tienen kernel $\{0\}$ ó $L_K(E)$. En particular esto quiere decir que dentro de los endomorfismos(mapeos de $L_K(E)$ a $L_K(E)$) están los automorfismos y el mapeo cero solamente. Esto indica que no hay una $K-$álgebra isomorfa a un cociente de $L_K(E)$ distinta de cero y de ella misma.

Definición. Una $K-$álgebra $\mathcal{A}$ es simple si los cocientes de $\mathcal{A}$ son solamente el cero y la misma álgebra.

Ejemplo. El álgebra de polinomios de Laurent $K[x, x^{-1}]$ no es simple.

Demostración. Consideremos el ideal $\langle 1 + x \rangle$ de $K[x, x^{-1}]$. Asumamos por el absurdo que éste no es propio. Así la ecuación $p(1 + x) = 1$ con $p \in K[x, x^{-1}]$ debe tener solución. Si p es un polinomio sobre x únicamente, $\deg(p(1+x)) \geq 1$, ya que x no es nilpotente, y $\deg(1) = 0$, no puede ser. Escribamos $p = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i = \sum_i a_i x^i$, así

$$\sum_i a_i x^i(1+x) = \sum_i (a_i + a_{i-1})x^i = 1, \tag{2.1}$$

$$a_0 + a_{-1} = 1, \tag{2.2}$$

$$a_i + a_{i-1} = 0 \to a_i = -a_{i-1} \forall i \neq 1. \tag{2.3}$$

Tomando el menor $-k < 0$ de los coeficientes a_{-k} disinto de cero, y $K > 0$ el mayor de los coeficientes distinto de cero obtenemos

$$a_{-k}x^{-k} + (a_{-k+1} + a_{-k})x^{-k+1} + \cdots + (a_0 - a_{-1}) + (a_1 + a_0)x + \cdots + (a_K + a_{K-1})x^K = 1.$$

Entonces $a_{-k}, a_{-k+1}, \cdots, a_{-1} = 0$. Desarrollando la ecuación resulta en que $a_0 = 1$, $a_{2i+1} = -1$, $a_{2i} = 1$, para $i = 1, \ldots, K$, y

$$(1 - x + x^2 \cdots + (-1)^K x^K)(1+x) = 1 + (-1)^K x^{K+1} = 1, \tag{2.4}$$

una contradicción. ■

Un ciclo en un grafo cumple que es un camino μ que tiene $s(\mu) = r(\mu)$, termina donde empieza, y $s(\mu_i) \neq s(\mu_j)$ para $i \neq j$, es decir que se pasa por cada vértice sólo una vez.

Definición. Una salida de un ciclo es una arista e tal que $e \neq \mu_i$ para un ciclo $\mu = \mu_i \ldots \mu_n$ y $s(e) = s(\mu_i)$ para algún i.

Definición. *(CP(v) y CSP(v))* Un camino cerrado en v es un camino $\mu = \mu_1 \ldots \mu_n$ con $\mu_j \in E_1$ y $s(\mu) = r(\mu) = v$. El conjunto de caminos en v lo denotamos por $CP(v)$. Un camino cerrado simple es un $c \in CP(v)$ tal que $s(\mu_i) \neq v$ para cada $i > 1$. Denotamos por $CSP(v)$ el conjunto de estos caminos.

Observación. Es bueno notar que un ciclo es un camino cerrado simple en cada uno de sus vértices, pero no cada camino cerrado simple en v es un ciclo. Un camino cerrado simple en v puede visitar varias veces algunos de sus vértices. Por otro lado, cada camino cerrado simple es un camino cerrado, pero no al revés.

Definición. *(grado)* El grado de un polinomio es el grado máximo de sus monomios. El grado de un monomio es el número de elementos que lo representa en la base dada por el primer teorema sobre los generadores $\{pq^* : p, q \text{ son caminos en } E\}$.

Lema 2.1 *(Producto de caminos cerrados simples)*

1. *Sean $\mu, \nu \in CSP(v)$. Entonces $\mu^*\mu = \delta_{\mu,\nu}v$.*

2. *Para cada $p \in CP(v)$ existe un único $c_1, \ldots, c_m \in CSP(v)$ tal que $p = c_1 \cdots c_n$.*

Demostración. Probemos (1). Asumamos que α y β son caminos arbitrarios y escribamos $\alpha = e_i \cdots e_{i_\sigma}$ y $\beta = e_j \cdots e_{j_r}$.

Caso 1. $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$. (es decir que $i_\sigma = j_r$), pero $\alpha \neq \beta$. Sea $b \geq 1$ el primer subíndice de la primer arista tal que α y β son diferentes. Esto quiere decir que $e_{i_a} = e_{j_a}$ para $a < b$ pero $e_{i_b} \neq e_{j_b}$. Entonces al multiplicar $\alpha^*\beta$ tenemos las mismas aristas que se vuelven vértices y se abosrben hasta que podemos agrupar $e_{i_b}e_{j_b}$ que son cero, entonces el producto es cero.

Caso 2. $\alpha = \beta$. Todos se absorben excepto el último vértice, dando $\alpha^*\beta = r(\alpha) = r(\beta) = v$.

Caso 3. Tomemos $\mu, \nu \in CSP(v)$ con $\deg(\mu) < \deg(v)$. Sea $\nu = \nu_1\nu_2$ donde $\deg(\nu_1) = \deg(\mu)$, y $\deg(\nu_2) > 0$. Si $\mu = \nu_1$ tenemos que $v = r(\mu) = r(\nu_1) = r(\nu_2)$, pero esto contradice que $\nu \in CSP(v)$ porque pasaría por v, entonces el caso 1 aplica y $\mu^*\nu_1\nu_2 = \mu^*\nu = 0$. Si escogiéramos $\deg(\mu) > \deg(\nu)$ se intercambian roles. Esto termina la prueba de 1.

Para 2. Escojamos $p = e_{i_1} \cdots e_{i_n} \in CP(v)$. Sea $T = \{t \in \{1, \ldots, n\} : r(e_{i_t}) = v\}$. y listemos $t_1 < \cdots < t_m = n$ los elementos de T. Usamos T para enumerar las veces que $p \in CP(v)$ pasa por v y lo podemos descomponer en caminos cerrados simples. Entonces $c_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_{t_1}}$ y $c_j = e_{i_{t_{j-1}}} \cdots e_{i_{t_j}}$ para $j > 1$ son estos caminos cerrados simples, elementos de $CSP(v)$. Probemos la unicidad. Asumamos que podemos descomponer a p en dos maneras en caminos cerrados simples, $c_1 \cdots c_r$ y $d_1 \cdots d_r$. Multipliquemos c_1^* en la izquierda y usemos el primer inciso del lema para obtener:

$$0 \neq vc_2 \cdots c_r = c_1^* d_1 \cdots d_s,$$

entonces $c_1 = d_1$ o el producto sería cero. Pero se absorbe $v = s(c_2)$ en el producto y se puede argumentar por inducción que $c_i = d_i$. ∎

Otro argumento para la parte dos puede ser que como cada camino simple cerrado, cada dos descomposiciones de p en caminos simples cerrados tienen el mismo número de elementos del conjunto R porque dependen de p y no de la descomposición. Entonces cada una de estas trayectorias debe ser igual (o de hecho no serían la misma trayectoria en total). El resultado es propio de la teoría de grafos y no del álgebra pero miramos como se prueba usando un argumento en $L(E)$. Así eso fue lo más importante en la prueba anterior.

Definición. *(grado de retorno RD)* El grado de retorno RD en un vértice v de $p \in CP(v)$. es el número $m \geq 1$ de la descomposición de p en caminos cerrados simples. Entonces $CSP(v)$ es el subconjunto de $CP(v)$ con grado 1. Denotamos este número como $RD(p) = RD_v(p) = m$. Podemos extender la noción a vértices poniendo que $RD_v(v) = 0$

Definición. *(Extensión de la definición de RD)* El grado de retorno de una combinación lineal distinta a cero de la forma $\sum k_s p_s$ con $p_s \in CP(v) \cup \{v\}$ y $k_s \in K - \{0_K\}$ como $RD(\sum k_s p_s) = \max\{RD(p_s)\}$.

Lema 2.2 (Caminos cerrados con salidas) *Para un grafo E los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *Cada ciclo tiene una salida.*

2. *Cada camino cerrado tiene una salida.*

3. *Cada camino cerrado simple tiene un salida.*

4. Para cada $v_i \in E_0$, si $CSP(v_i) \neq \emptyset$ existe un $c \in CSP(v_i)$ que tiene una salida.

Demostración. Probemos primero la equivalencia entre las primeras tres implicaciones.

($2 \to 1$). Si cada camino cerrado tiene una salida, en particular cada ciclo tiene una salida.

($1 \to 3$). Si en particular el camino cerrado es un ciclo, por hipótesis se cumple el resultado. Así consideremos un camino cerrado simple que no es un ciclo, y podemos separar de él una trayectoria cerrada en v, y ésta debe tener una salida. Entonces el camino tiene una salida.

($3 \to 2$). Si cada camino cerrado simple en v tiene una salida, cada camino cerrado en v tiene una salida(porque por el teorema anterior cada uno de estos esta compuesto por uno o más caminos simples en v).

Falta la equivalencia a la cuarta condición.

($3 \to 4$). Como $CSP(v_i)$ no es vacío por hipótesis cada uno de sus elementos tiene una salida. ($4 \to 2$). Por contraposición escogemos que existe un camino cerrado simple μ que no tiene una salida. Debemos concluir que existe un v tal que cada camino cerrado simple en v no tiene una salida. Este camino simple sin salidas μ puede incluir un ciclo para varios de los vértices donde pasa, sin hacer necesario que μ sea un ciclo. Escojamos un vértice v dentro de uno de estos ciclos, el cual no puede tener ninguna salida. De hecho, ningún camino cerrado simple en v tiene una salida, por lo que todos los caminos cerrados simples en v están en μ(que en el caso de v, μ es un camino cerrado sin salida.) Escojamos una trayectoria cerrada μ_1 contenida en μ de v. Entonces cada camino cerrado simple hace una trayectoria cerrada de algún vértice que este en μ_1 a otro vértice distinto de v que esta en μ_1 que no tiene salidas porque μ no tiene salidas. Entonces ningún $c \in CSP(v)$ puede tener salidas. ∎

En la prueba, una salida de $c_1 \in CSP(v)$ hace una salida para μ, al igual que $\mu_1 \neq \mu$ hace una salida de μ, es decir $\mu = \mu_1$ es un ciclo sin salida como lo dice el inciso 1. Pasemos ahora a definir un preorden $\geq$ en el grafo E de la siguiente manera:

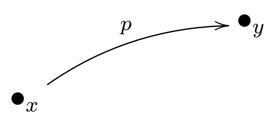
$$v \geq w \longleftrightarrow v = w, \text{ o si existe un camino } \mu \text{ con } s(\mu) = v, r(\mu) = w.$$

Notemos que $v \geq v$, si $v \geq w$ no implica que $w \geq v$ y que es transitivo. Claro, si hay un camino de v a w, y otro de w a z entonces $v \geq w$ y $w \geq z$, pero también componen un camino de v a z y así $v \geq z$. Si $v \geq w$ diremos que v se conecta a w.

Definición. *(Hereditario y Saturado)* Diremos que un subconjunto $h \subset E_0$ es hereditario si $v \in H$ y $v \geq w$ implica que $w \in H$. Diremos que H es saturado si cuando $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ y $\{r(e) : s(e) = v\} \subset H$ entonces $v \in H$.

Esto quiere decir que H es saturado si para cualquier vértice v en E, si todos los rangos $r(e)$ de las aristas que tienen como fuente a v, $s(e) = v$, están en H, entonces v también está en H. Ambos conceptos refieren a elementos de $H \cap E_0$ y las aristas(los caminos) sirven para definir las relaciones. Usaremos $\mathcal{H}$ para denotar la familia de conjuntos hereditarios y saturados de E_0, y $\mathcal{H}_E$ cuando necesitemos explicitar la dependencia de E.

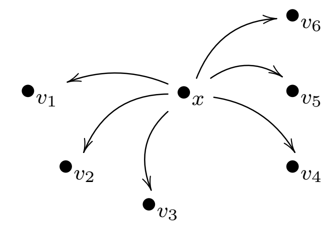
Figura 2.1: Hereditario. Si $x \in H$ implica que $y \in H$.



Lema 2.3 (Lema de conjuntos hereditarios y saturados) *Sea J un ideal de $L_K(E)$, entonces $J \cap E_0$ es un subconjunto hereditario y saturado de E_0.*

Demostración. Probemos primero que el conjunto es hereditario, luego que es saturado.

Figura 2.2: Saturado. Si cada v_i está en H implica que $x \in H$.



Hereditario. Por inducción. Supongamos que $v \in J$. Si $v \geq w$ y la trayectoria tiene una arista $e \in J$, y $w = e^*e$ por CK1, que significa que e^*ve, entonces $w \in J$. Asumimos por inducción que si $v \geq w$ y la trayectoria de w a v tiene n aristas concluimos que $w \in J$. Tomamos ahora z tal que $v \geq z$ y la trayectoria de v a z tiene $n+1$ elementos, es decir SPG que la trayectoria pasa de z a w a través de e_z y sigue la trayectoria de w a v que tiene elementos en J. Pero de nuevo se hace como el primer paso, $z = e_z^* w e_z \in J$ y en consecuencia $J \cap E_0$ es hereditario.

Saturado. Usamos CK2. Tomamos v tal que $\{r(e) : s(e) = v\} \subset J$. Tenemos que todos los rangos de las aristas que tienen como fuente a v están en J, $r(e_j)$ para la siguiente suma está en J, y

$$v = \sum_{e_j \in E_1 : s(e_j) = v} e_j e_j^* = \sum_{e_j \in E_1 : s(e_j) = v} e_j r(e_j) e_j^* \in J. \quad \blacksquare$$

Proposición 2.4 (Salidas reducen grado) *Sea E un grafo con la propiedad que cada ciclo tiene una salida. Si $\alpha \in L_K(E)$ es un polinomio solamente en aristas reales con* $\deg(\alpha) > 0$, *entonces existe $a, b \in L_K(E)$ tal que $a\alpha b \neq 0$ es un polinomio en sólo aristas reales y* $\deg(a\alpha b) < \deg(\alpha.)$

Demostración. Sea $\alpha = \sum_{e_i \in E_1} e_i \alpha_{e_i} + \sum_{v_l \in E_0} k_l v_l$, donde α_{e_i} son polinomios en sólo aristas reales, y $\deg(\alpha_{e_i}) < \deg(\alpha) = m$. En la ecuación anterior tomamos esta forma para α donde factorizamos por la izquierda e_i y de otra manera tenemos v_l multiplicado por alguna constante de K. Buscamos el resultado tomando casos, y luego lo haremos de nuevo para los casos faltantes. La prueba esta hecha de manera que se separan casos, y se procede a ilustrar un algoritmo que termina. Esto es para los incisos 1 y 2 de B.2. En el inciso 3 se entra de nuevo al proceso.

Caso A. Tenemos que $k_l = 0 \to \sum_{v_l \in E_0} k_l v_l = 0$. Entonces si $\alpha \neq 0$ hay al menos un i_0 tal que $e_{i_0}\alpha_{e_{i_0}} \neq 0$. Supongamos que $b \in L(E)$ tal que $\alpha b = \alpha$. Entonces $a = e^*_{i_0}$ da $e^*_{i_0}\alpha b = \alpha_{e_{i_0}} \neq 0$ es un polinomio de aristas reales y de grado menor a m por la reescritura inicial.

Caso B. Hay algún $k_{l_0} \neq 0$. Podemos escribir:

$$v_{l_0}\alpha v_{l_0} = k_{l_0}v_{l_0} + \sum_{p \in CP(v_{l_0})} k_p,\ k_p \in K.$$

Este siempre es un polinomio sólo en aristas reales y no es cero porque $k_{l_0} \neq 0$. Usamos $CP(v_{l_0})$ porque son los únicos restantes al multiplicar el vértice. Pueden pasar dos cosas:

Caso B.1. $\deg(v_{l_0}\alpha v_{l_0}) < \deg(\alpha)$. Ya encontramos a y b con $a = b = v_{l_0}$.

Caso B.2. $\deg(v_{l_0}\alpha v_{l_0}) = \deg(\alpha) = m > 0$. Por lo tanto existe un $p_0 \in CP(v_{l_0})$ tal que $k_{p_0}p_0 \neq 0$. Entonces por el Lema 2.1 de Productos de Caminos Cerrados podemos escribir p_0 en su descomposición de elementos de $CSP(v_{l_0})$, $p_0 \neq c_1 \cdots c_\sigma$, $\sigma \geq 1$. Ahora usemos el lema 2.2 de Caminos Cerrados con Salidas para encontrar un $c_{s_0} \in CSP(v_{l_0})$ que tenga una salida e_{i_0}. Eso quiere decir que e_{i_0} tiene la misma fuente que alguno de los elementos de c_{s_0} pero su rango esta fuera de él. Construyamos una trayectoria $z = e_{i_1} \cdots e_{i_{j-1}} e_{i_0}$, que recorre los elementos de este camino cerrado hasta su salida. Entonces $c^*_{s_0} z = 0$ porque las aristas comunes se absorben y queda $e^*_{i_j} e_{i_0} = 0$ porque la fuente de e_{i_j} es distinta de la fuente de e_{i_0} (Usaremos esto después). El primer lema nos permite escribir

$$v_{l_0}\alpha v_{l_0} = k_{l_0}v_{l_0} + \sum_{c_s \in CSP(v_{l_0})} c_s \alpha^{(1)}_{c_s}$$

donde $\gamma = RD(v_{l_0}\alpha v_{l_0}) > 0$, y $\alpha^{(1)}_{c_s}$ son polinomios sólo en aristas reales que tienen $RD(\alpha^{(1)}_{c_s}) < \gamma$. Aquí hemos usado la definición extendida de RD y la desigualdad $RD(\alpha^{(1)}_{c_s}) < \gamma$ se debe a que hemos factorizado un c_s a la par de cada polinomio, que es posible por la escritura inicial de α. Recordando que $c_{s_0} \in CSP(v_{l_0})$ y que los productos de caminos disjuntos son cero, al multiplicar por $c^*_{s_0}$ resulta que:

$$c^*_{s_0}(v_{l_0}\alpha v_{l_0}) = k_{l_0}c^*_{s_0}v_{l_0} + \sum_{c_s\in CSP(v_{l_0})} c^*_{s_0}c_s\alpha^{(1)}_{c_s} = k_{l_0}c^*_{s_0} + \alpha^{(1)}_{c_{s_0}}.$$

Caso 1. Primero el caso especial de $\alpha^{(1)}_{c_{s_0}} = 0$. Entonces $a = c^*_{s_0}$ y $b = c_{s_0}$ permiten $RD(a(v_{l_0}\alpha v_{l_0})b) = 0 < \gamma$.

Caso 2. Tenemos que $\alpha_{c_{s_0}} \neq 0$ pero $RD(\alpha_{c_{s_0}}) = 0$. Usemos z el camino con salida con $c^*_{s_0}$. Obtenemos

$$z^*c^*_{s_0}(v_{l_0}\alpha v_{l_0})z = z^*(k_{l_0}c^*_{s_0} + k^{(2)}v_{l_0})z = 0 + k^{(2)}v_{l_0} \neq 0,$$

tiene $RD(z^*c^*_{s_0}(v_{l_0}\alpha v_{l_0})z) = 0 < \gamma$, donde la segunda igualdad usa que $RD(\alpha_{c_{s_0}}) = 0$, i.e. es un vértice.

Caso 3. Tenemos que $RD(\alpha^{(1)}_{c_{s_0}}) > 0$. Esto implica que $0 < RD(\alpha_{c_{s_0}}) < \gamma$ entonces $\gamma \geq 2$. Repitamos el proceso para $\alpha^{(1)}_{c_{s_0}}$, podemos escribir

$$\alpha^{(1)}_{c_{s_0}} = k^{(2)}v_{l_0} + \sum_{c_s\in CSP(v_{l_0})} \alpha^{(2)}_{c_s},$$

y procedemos de manera análoga a multiplicar por $c^*_{s_0}$ y tomar los casos 1 y 2. Repítase hasta lograr el resultado. Debemos justificar porqué el proceso termina. En cada paso el tercer caso sólo sucede decrementando el $RD(\square)$, i.e. produce elementos $\alpha^{(n)}_{c_{s_0}}$ de grado menor al anterior, y como γ es finito se reduce en algún momento a cero. Por lo tanto el algoritmo tiene a lo más γ pasos. Los elementos que produzcan el $RD(\square) = 0$ deben de ser A y B tal que $RD(A(v_{l_0}\alpha v_{l_0})B) = 0$ entonces $\bar{a} = Av_{l_0}$ y $\bar{b} = v_{l_0}B$ son los elementos que buscamos. ∎

Aplicando este resultado obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 2.5 *Sea $\alpha \in L(E)$ un polinomio en sólo aristas reales. Sea E un grafo con la propiedad que cada ciclo tiene una salida. Entonces existen $a, b \in L(E)$ tal que $a\alpha b \in E_0$.*

Corolario 2.6 *Sea E un grafo donde cada ciclo tiene una salida. Si J es un ideal de $L(E)$ y contiene un polinomio distinto de cero sólo en aristas reales entonces $E_0 \cap J \neq \emptyset$.*

El segundo colorario se mira más interesante. En la sección donde introducimos la involución podremos decir lo mismo sobre aristas fantasmas, precisamente:

Corolario 2.7 *Sea $\alpha \in L(E)$ un polinomio en sólo aristas fantasmas. Sea E un grafo con la propiedad que cada ciclo tiene una salida. Entonces existen $a, b \in L(E)$ tal que $a\alpha b \in E_0$.*

Corolario 2.8 *Sea E un grafo donde cada ciclo tiene una salida. Si J es un ideal de $L(E)$ y contiene un polinomio distinto de cero sólo en aristas fantasmas entonces $E_0 \cap J \neq \emptyset$.*

Si $L_K(E)$ es simple deberíamos de esperar que el grafo E sea conexo. En caso que no un vértice aislado $\langle v \rangle$ genera un ideal propio (porque es un conjunto hereditario y saturado no trivial). Podría ser conveniente que cada ciclo tenga una salida. Si eso sucede, y podemos reducir el grado de cualquier polinomio, tal vez lo podemos llevar al conjunto de vértices. Estos vértices estarían en $J \cap E_0$, y de no ser así, el polinomio podría ser irreducible y polinomios de menor grado podrían no estar en J. Además, por la proposición de **conjuntos hereditarios y saturados** deberíamos pensar que si hay un subconjunto H hereditario y saturado propio de E_0, éste es la intersección no trivial de un ideal con E_0. Por lo que surge el otro requerimiento que no exista ningún subconjunto H hereditario y saturado propio de E_0.

El siguiente resultado es una herramienta para poder concluir la simplicidad. A este primer resultado de simplicidad le llamaremos el **método de simplicidad.** Necesitamos la definición que lo precede:

Definición. Un anillo tiene unidades locales si para todo $A \subset R$, A finito, existe un idempotente e tal que $A \subset eRe$. Es equivalente que exista un conjunto de idempotentes $\{t_\alpha\}_\alpha$ tales que, para $x \in R$, hay algún $t_\alpha = t$, para el que $xt = tx = x$.

Proposición 2.9 *Si un ideal J contiene cada conjunto de unidades locales para un álgebra A con unidades locales entonces $J = A$.*

Demostración. Sea $S \subseteq A$ un subconjunto finito arbitrario de A. Entonces J tiene un conjunto de unidades para S. En particular tiene unidades $\{t_\alpha\}_\alpha$, donde J tiene la unidad de S y también de cada elemento (sino contradice la hipótesis). Ahora, consideremos el conjunto de unidades para los elementos de S, $\{t_{\alpha_s}\}_{s\in S}$. Si $t_{\alpha_s} \in J \to t_{\alpha_s}s = s \in J$ porque J es un ideal bilateral. ∎

Lema 2.10 *Sea E_0 infinito, entonces $L_K(E)$ no tiene unidad, pero es un álgebra con unidades locales (específicamente, el conjunto de sumas de distintos elementos de E_0).*

Demostración. Sea $S \subseteq L_K(E)$, un subconjunto finito de $L_K(E)$. El conjunto S es una colección de elementos de la forma $\sum_i p_i q_i^* \in L_K(E)$. Sea

$$N := \{v \in E_0 : v = s(p) \text{ o } v = s(q), pq = p_i q_i \text{ para } \alpha = \sum_i p_i q_i^* \in S\}.$$

Entonces $\{v_i\}_{v\in N}$ es un conjunto de unidades locales para S, y $\{v_i\} \in L_K(E)$. ∎

Teorema 2.11 (Método de simplicidad) *Sea E un grafo donde*

1. *Cada ciclo tiene al menos una salida, y*
2. *No hay un conjunto hereditario y saturado propio distinto de $\emptyset$.*

Si J es un ideal propio distinto de cero que contiene un polinomio sólo en aristas reales o sólo en aristas fantasmas entonces $J = L_K(E)$.

Demostración. Obtenemos para un ideal propio distinto de cero J, $J \cap E_0 = H$ es un subconjunto hereditario y saturado y es no vacío por el último corolario. Como $v_i \in J$ sabemos que $H \neq \emptyset$, así $H = E_0$. Si E_0 es finito el ideal contiene la unidad que implica que $J = L_K(E)$. Si E_0 es infinito tiene unidades locales, y la única posibilidad es que $J = L_K(E)$ por el lema anterior, $\therefore L_K(E)$ es simple. ∎

La proposición anterior da una manera de concluir la simplicidad de las álgebras, dado que se den las condiciones que J tenga el polinomio sólo en aristas reales o fantasmas. Es importante recordar que, al igual que para los anillos, el kernel de un homomorfismo de álgebras es un ideal, pero una subálgebra no necesariamente es el kernel de un homomorfismo.

2.1.1. Involución de $L(E)$.

Definimos una involución para el álgebra $L(E)$.

Definición. Una involución en una $K-$álgebra $\mathcal{A}$ es un mapeo $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tal que

1. $a^{**} = a \quad (\forall a \in A)$,
2. $(ka + lb)^* = \bar{k}a^* + \bar{l}\,b^* \quad (\forall a, b \in \mathcal{A}, k \in K)$,
3. $(ab)^* = b^*a^*$,

donde $\bar{k}$ denota la involución del campo K. Requeriremos una involución en el campo donde el mapeo $k \to \bar{k}$ cumple las mismas relaciones anteriores.

En el contexto de álgebras $\mathbb{C}^*$ el mapeo de involución es la conjugación. Para un campo con involución a veces se asume que el mapeo positivo definido, en el sentido que

$$\sum_i c_i\bar{c_i} = 0 \to c_i = 0. \tag{2.5}$$

No hemos puesto nuestra atención sobre K y no lo haremos, el mapeo es lineal si $\bar{k} = k$, y el inciso (3) siempre se cumple por la conmutatividad. El elemento $\bar{k}$ es llamado adjunto de k y también llamamos a a^* el adjunto de a para $a \in \mathcal{A}$. Si $J \subset \mathcal{A}$ entonces el adjunto de J es J^*. En caso que un ideal cumpla que $J^* = J$ se llamará autoadjunto.

Proposición 2.12 *El mapeo en $L_K(E)$, $x \to \overline{x}$, definido por*

$$\overline{k_i v_i} = k_i v_i \ \textit{para}\ k_i \in K \ \textit{y}\ v_i \in E_0 \tag{2.6}$$

$$\overline{kpq^*} = kqp^*. \tag{2.7}$$

es un mapeo de involución al extenderlo linealmente a $L_K(E)$.

Demostración. Notemos únicamente que $\overline{\alpha\beta^*} = \beta\alpha^* \neq 0$ si $\alpha\beta^* \neq 0$ ya que $r(\alpha) = r(\beta)$, así la condición $a^{**} = a$ y $(ab)^* = b^*a$ se cumplen siempre. Hemos asumido la linealidad. ∎

En $L_K(E)$ sucede que:

1. La involución transforma un polinomio de sólo aristas reales a un polinomio de sólo aristas fantasmas.

2. Si J es un ideal de $L(E)$ también lo es $\overline{J}$. Al multiplicar $\alpha\beta^* \in J$, digamos $p\alpha\beta^*q^* \in J$ distinto de cero, entonces $q\beta\alpha^*p^* \in \overline{J}$; el resto es claro. Podría ser que para un ideal bilateral propio $\overline{J} \neq J$.

Desvío un poco la discusión haciendo el comentario que la involución sí es autoadjunta en las álgebras-C^*. Pensemos que un operador en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre los números complejos puede enviarse a su operador adjunto a través de un mapeo de involución. En este caso el álgebra de operadores podría tener ideales autoadjuntos. En $\mathcal{H}$ hay elementos autoadjuntos también. Buscaremos en $L(E)$ algo similar a una familia autoadjunta de operadores de $\mathcal{H}$, sin embargo no un operador autoadjunto, pues no requeriremos en $L(E)$ que $\overline{\alpha\beta^*} = \alpha\beta^*$. De hecho no tendría objeto pedir eso. Implica que $\beta = \alpha$ y $\alpha\alpha^*$ es cero o un vértice. Sí hace sentido sin embargo pedírselo a un ideal. Veremos un ejemplo de un ideal autoadjunto y de uno no autoadjunto antes de terminar la sección.

Llevemos nuestra atención a los operadores de proyección de $\mathcal{H}$. Un operador de proyección es idempotente, i.e. cumple $P^2 = P$, son como los vértices. Un operador de proyección T puede ser usado para definir la restricción de un operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ en el subespacio $P(\mathcal{H})$, tomando PTP. En $L(E)$ un idempotente P, suma finita de algunos vértices, hace a $P(L(E))P$ una subálgebra asociada al subgrafo, justo como PTP es un endomorfismo de $P(\mathcal{H})$. En $\mathcal{H}$ el espacio $Im(T) \subset P(\mathcal{H})$ es invariante bajo T, un operador del álgebra de operadores del subespacio, como multiplicar por P no altera los elementos de la subálgebra. Las álgebras-C^* de grafos guardan conexiones con las álgebras de Banach, y también con las álgebras de caminos de

Leavitt.[1] Sin embargo, no es nuestro objetivo discutir eso. Regresemos a considerar un ideal invariante bajo la involución.

Un ideal es autoadjunto si $J = \overline{J}$. Queremos investigar si los ideales de $L_K(E)$ no siempre cumplen ser autoadjuntos. Regresemos a eso.

Ejemplo. *El álgebra $K[x, x^{-1}]$ tiene ideales autoadjuntos e ideales no autoadjuntos.*

El ideal generado por $1 + x$ es autoadjunto. El mapeo se define $x \to x^{-1}$, y en consecuencia $x^{-1} \to x$. Si $\langle 1 + x \rangle$ es autoadjunto, es el mismo ideal que el generado por $\overline{1 + x} = 1 + x^{-1}$. Es suficiente ver que $x(1 + x^{-1}) = x + 1$.

Sin embargo, los ideales generados por $f = 1 + x^2 + x^3$ y $\overline{f} = 1 + x^{-2} + x^{-3}$ son distintos. Sino podemos considerar un elemento arbitrario p, $p \notin K$, tal que $pf = \overline{f}$, i.e.

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=m}^{n} a_i x^i, \quad m, n \in \mathbb{Z}; && (2.8) \\ pf &= \sum_{m}^{n} a_i (x^i + x^{i+2} + x^{i+3}) = 1 + x^{-2} + x^{-3}, && (2.9) \\ &= \sum_{m}^{n} a_i x^i + \sum_{m+2}^{n+2} a_{i-2} x^i + \sum_{m+3}^{n+3} a_{i-3} x^i = 1 + x^{-2} + x^{-3}. && (2.10) \end{aligned}$$

Usando que el grado mayor del lado derecho es cero obtenemos que $n + 3 = 0$, da $n = -3$ y $a_n x^{n+3} = a_n = 1$. De la misma manera obtenemos que $m = -3$ pero así $p \in K$, que contradice la elección de p. ∎

Se puede probar que los ideales generados por vértices serán autoadjuntos, pero por lo anterior esos no son todos.

2.2 Teorema de Simplicidad.

Debemos usar la herramienta que obtuvimos en la sección anterior para argumentar la simplicidad en $L(E)$. Solamente si tenemos un polinomio en sólo aristas reales (o sólo en aristas fantasmas) podemos usar el método de simplicidad. De acuerdo a

[1] En la última sección del capítulo 3 mencionamos más sobre esto.

la discusión tenemos que las condiciones para la simplicidad son dos. Probaremos que estas condiciones son una caracterización. La estrategia de la prueba es la que sigue. Para probar la simplicidad usaremos casos. Para el converso debemos probar que si $L_K(E)$ no es simple debemos poder probar que hay un ciclo con salida o que hay un conjunto hereditario y saturado propio de E_0.

Teorema 2.13 (Teorema de Simplicidad) *Sea E un grafo finito por filas. Entonces el álgebra de caminos de Leavitt es $L_K(E)$ es simple sí y sólo sí satisface las siguientes condiciones.*

1. *Los únicos subconjuntos hereditarios y saturados de E_0 son $\emptyset$ y E_0.*[2]
2. *Cada ciclo en E tiene una salida.*

Demostración. ($\leftarrow$). Primero asumamos que (1) y (2) son ciertas y mostraremos que $L_K(E)$ es simple.

Supongamos que J es un ideal no trivial de $L_K(E)$ distinto de cero. Escojamos $0 \neq \alpha \in J$ representable como un elemento en mínimo grado en aristas reales. Si el mínimo grado es cero, α es un polinomio sólo en aristas fantasmas, por lo que el Método de Simplicidad aplica y $J = L_K(E)$, lo que termina este caso.

Podemos suponer por ahora que el grado en aristas reales es al menos (1), en consecuencia:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{m} e_{i_n}\alpha_{e_{i_n}} + \beta$$

donde $m \geq 1$, $e_{i_n}\alpha_{e_{i_n}} \neq 0$ para todo n, y cada $\alpha_{e_{i_n}}$ es representable como un elemento de grado menor que el de α en aristas reales, porque así lo permite la reescritura. Por último β es un polinomio sólo en aristas fantasmas, que podría ser cero.

Primero supongamos que v es un pozo en E. Podemos asumir que $v\beta = 0$, por la siguiente consideración. Multipliquemos la ecuación mostrada por v en la izquierda tal que $v\alpha = v\sum_{n=1}^{m} e_{i_n}\alpha_{e_{i_n}} + v\beta$. Como v es un pozo tenemos que $ve_{i_n} = 0$ para cualquier n. Obtenemos $v\alpha = v\beta \in J$. Como $v\beta \neq 0$ esto daría un elemento distinto

[2] En particular, E es conexo.

de zero en J sólo en aristas fantasmas, por el Método de Simplicidad podemos concluir que $J = L_K(E)$ y obtendríamos el resultado.

Para una arista arbitraria $e_j \in E_1$, tenemos dos casos:

Caso 1. $j \in \{i_1, \ldots, i_m\}$. Escribamos $e_j^*\alpha = \alpha_{e_j} + e_j^*\beta \in J$. Si este elemento es distinto de cero sería representable como un elemento de menor grado en ejes reales que α, pero eso no puede suceder porque lo hemos asumido desde el comienzo. Debe ser así cero, y por lo tanto al despejar $\alpha_{e_j} = -e_j^*\beta$, por lo que también $e_j\alpha_{e_j} = -e_je_j^*\beta$ porque e_j no anula ningún lado.

Caso 2. $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$. Entonces $e_j^* = \alpha_{e_j} + e_j^*\beta \in J$ como es un ideal y $e_j^*e_{i_n} = 0$. Podría ser $e_j^*\beta$ cero, pero en otro caso tenemos un elemento de J en sólo aristas fantasmas, por lo que $J = L_K(E)$ y hemos terminado por el Método de Simplicidad. Podemos asumir así que $e_j^*\beta = 0$, y en particular $-e_je_j^*\beta = 0$ al multiplicar.

Defínase $S_1 = \{v_j \in E_0 : v_j = s(e_{i_n}) \text{ para algún } 1 \leq n \leq m\}$ y $S_2 = \{v_{k_1}, \ldots, v_{k_t}\}$ donde $\sum_i v_{k_i}\beta = \beta$. Sabemos que existe S_2 porque $L(E)$ tiene unidades locales. Por otro lado S_1 tiene todo los elementos de E_0 tales que son elementos de la suma en CK2 y están en la expresión inicial de α. Si ponemos $w \in E_0 - S_2$ obtenemos $w\beta = 0$. No hay pozos en S_1 y podemos asumir que no hay pozos en S_2. Sea $S = S_1 \cup S_2$. Entonces $(\sum_{v \in S} v)\beta = \beta$.

Con los últimos cálculos trataremos de obtener queα debe ser cero, contradiciendo que hemos escogido a $\alpha \neq 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{n=1}^{m} e_{i_n}\alpha_{e_{i_n}} + \beta = \sum_{n=1}^{m} -e_{i_n}(e_{i_n}^*\beta) + \beta \qquad \text{por el caso 1,} \\
&= \sum_{n=1}^{m} -e_{i_n}e_{i_n}^*\beta - \left(\sum_{j \neq i_n, s(e_j) \in S} e_je_j^* \right) \beta + \beta \\
&= -\left(\sum_{v \in S} v \right) \beta + \beta. \\
&= -\beta + \beta = 0.
\end{aligned}$$

donde, en el segundo paso usamos que $e_je_j^*\beta = 0$ que agregamos porque esas aristas no tienen fuente ningún elemento $s(e_{i_n})$, como no hay pozos aplicamos luego CK2 en cada vértice de S y eso debe ser unidad local como hemos usado anteriormente.

Eso termina la primera parte de la prueba. La siguiente implicación tiene dos partes, pues debemos verificar que con cada una de las dos condiciones que falle $L(E)$ no es simple. Primero haremos la prueba mostrando que hay un ideal no trivial y en el otro caso se trabaja una generalización de que $K[x, x^{-1}]$ tiene un ideal trivial de cierta forma esperada.

$\rightarrow$. ($L_K(E)$ *tiene un conjunto hereditario y saturado* H *propio y no vacío*). Construyamos un mapeo entre álgebras de Leavitt que falle ser un isomorfismo.

Paso 1. Construir el grafo

$$F = (F_0, F_1, r_F, s_F) = (E_0 - H, r^{-1}(E_0 - H), r\big|_{E_0 - H}, s\big|_{E_0 - H}).$$

Paso 2. Probar que F esta bien definido. Se debe revisar que $s_F(F_1) \cup r_F(F_1) \subset F_0$, y ningún vértice se sale del cascarón. Sí sucede que $r_F(F_1) \subseteq F_0$ porque así es por definición. Probemos que si e es una arista de F_1 entonces $s(e) \in F_0$. Sino estará en H y como $s(e) \geq r(e)$ entonces $r(e) \in H$, que contradice que $e \in F_1$.

Paso 3. Construyamos un homomorfismo de K-álgebras $\phi : L_K(E) \rightarrow L_K(F)$. Mandemos a través de ϕ los vértices y aristas a ellos mismos si no están en H y a cero los elementos de H(pues en particular podemos hacer el ideal no trivial cero) y eso da una buena definición de ϕ. En particular el $Ker(\phi)$ está dado por los vértices que están en H, los caminos tal que su rango y fuente están en H. Necesitamos verificar que ϕ se puede extender a un homomorfismo de álgebras. Revisamos que las propiedades de $L(E)$ se mantienen y que es posible extender ϕ a un homomorfismo $\phi : L_K(E) \rightarrow L_K(F)$ apropiadamente.

PA1. $\phi(v_i)\phi(v_j) = \delta_{ij}\phi(v_i)$. Consideraremos varios casos. Tomemos que $v_i, v_j \notin H$. Entonces $\phi(v_i)\phi(v_j) = v_i v_j = \delta_{ij} v_i = \delta_{ij}\phi(v_i)$. Si sólo un vértice no ésta en H el mapeo dea cero. Esto quiere decir que son distintos coincidiendo con δ_{ij}. En caso que $v_i, v_j \in H$, tenemos que $\phi(v_i)\phi(v_j) = 0 = \delta_{ij}\phi(v_i)$.

PA2. Mostremos primero que $\phi(s(e))\phi(e) = s(e)e = e = \phi(e)$. El primer caso es cuando $r(e) \notin H$. Entonces $s(e) \notin H$ por la condición hereditaria y $\phi((s(e))\phi(e) = s(e)e = e = \phi(e)$. Para el caso que $r(e) \in H$, tenemos que $\phi(s(e))\phi(e) = 0 = \phi(e)$. Es similar para el otro lado con $\phi(e)\phi(r(e)) = \phi(e)$, y lo mismo con las aristas fantasmas. Se pueden usar los mismos casos.

CK1. $\phi(e_i^*)\phi(e_j) = \delta_{ij}\phi(r(e_i))$. Consideremos que $r(e_i), r(e_j) \notin H$. Entonces $\phi(e_i^*)\phi(e_j) = e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j) = \delta_{ij}\phi(r(e_i))$. En caso de que uno de los dos no está en H, sin pérdida de generalidad $e_j \notin H$, entonces $j \neq i$ y $\phi(e_i^*)\phi(e_j) = 0 = \delta_{ij}\phi(r(e_j))$. En caso que ambos $e_j, e_i \notin H$ el mapeo es cero e igual funciona.

CK2. Probaremos que $\phi(v - \sum_{e_i:s(e_i)=v} e_i e_i^*) = 0$ para todos los vértices $v \in E_0$ que no son pozos. Consideraremos los casos en que $v \in H$ y $v \notin H$.

Caso $v \in H$. Porque H es hereditario, si la fuente de la arista es v el rango está en H. Así

$$\phi\left(v - \sum_{e_i:s(e_i)=v} e_i e_i^*\right) = \phi(v) - \sum_{e_i:s(e_i)=v} \phi(e_i)\phi(e_i^*) = 0 - 0 = 0.$$

Caso $v \notin H$. Asumimos que v no es un pozo. Si v es un pozo CK2 no se da. Existe algún $e_i \in E_1$ tal que $s(e_i) = v$ pero $r(e_i) \notin H$, por la condición saturada. Si $r(e_i) \notin H$, entonces $\phi(e_i)\phi(e_i^*) = e_i e_i^*$. Si el rango de e_i es un elemento de H, $\phi(e_i)\phi(e_i^*) = 0$. En el grafo F, v sólo es fuente de las aristas e_i tales que $r(e_i) \notin H$ en el grafo original. Esto da que

$$\phi\left(\sum_{e_i \in E:s(e_i)=v} e_i e_i^*\right) = \sum_{e_i \in E:s(e_i)=v} \phi(e_i)\phi(e_i^*) = \sum_{e_i \in F:s(e_i)=v} e_i e_i^*.$$

Por lo tanto

$$\phi\left(v - \sum_{e_i \in F_1:s(e_i)=v} e_i e_i^*\right) = v - \sum_{e_i \in F_1:s(e_i)=v} e_i e_i^* = 0.$$

Para finalizar la prueba notamos que H es no vacío, $ker(\phi) \neq \{0\}$. También

$E_0 - H$ es no vacío, y $ker(\phi) \subset L(E)$ es un ideal propio.

Me parece importante notar que para los vértices en E que no están en H, y que tienen aristas que lo conectan a H, digamos e, con $s(e) = v \notin H$ y $r(e) \in H$. Entonces $\phi(e^*e) = \phi(r(e)) = 0$. La suma de CK2 en F no queda desvirtuada, pues hemos argumentado que si $v \notin H$ no hay vértice para $r_F(\phi(e))$, $\phi(e) = 0$. Este grafo F resultante lo llamamos el grafo cociente, $E/H = F$, que es el álgebra resultante $L(E)/\langle H\rangle$.

$\rightarrow$. (*No salidas significa no es simple).* Esta prueba como habíamos dicho generaliza la idea que $\langle 1+x\rangle = \big\langle v+l\big\rangle$, donde l es el bucle, es un ideal no trivial en $K[x, x^{-1}]$. La prueba se basa en que v no puede estar en el ideal generado, tomando el rol que previamente hizo 1. El ideal es principal, digámosle $\big\langle\alpha\big\rangle$.

De hecho hagamos $\alpha = v+p$, este debería ser un ideal no trivial porque $v \in \langle\alpha\rangle$, donde asumimos que en E hay un ciclo sin salida, de manera que v es la base de ese ciclo y $CSP(v) = \{p\}$. Escribamos $p = e_{i_1} \cdots e_{i_\sigma}$, como el ciclo no tiene salida, al igual que en el grafo R_n, tenemos la relación $s(e_{i_j}) = e_{i_j}e^*_{i_j}$ de CK2 con la suma usando un sólo término. Esto implica que $pp^* = v$ por el lema que probamos en la sección que discutimos el grafo C_n.

Ahora supongamos por el absurdo que $v \in \big\langle\alpha\big\rangle$. Escribamos con polinomios mónicos distintos a cero, $a_n, b_n \in L(E)$ y $c_n \in K$,

$$v = \sum_{n=1}^{m} c_n a_n \alpha b_n \in \big\langle\alpha\big\rangle.$$

Como $v\alpha v = \alpha$ (porque $v(v+p)v = v^3 + vpv = v+p$), podemos asumir que $va_nv = a_n$ y $vb_nv = b_n$. Esto es por que α cumple la igualdad dada y porque en nuestra ecuación $v(v)v = v$ también, y podemos distribuir v en cada término de la suma así, y usar que α absorbe v. Los términos no pueden ser disintos de cero porque alteraría la ecuación, que no tiene sentido. Tenemos $v = \sum_n c_n(va_nv)\alpha(vb_nv)$ es igual a la ecuación dada.

De hecho para cada a_n(y b_n respectivamente) existe un entero $u(a_n) \geq 0$ (respectivamente $u(b_n) \geq 0$) tal que $a_n = p^{u(a_n)}$, o $a_n = (p^*)^{u(a_n)}$ (y lo mismo para b_n, respectivamente). Queremos concluir que ésta es la forma de los elementos a_n, b_n. Si tuvíeramos ese resultado ya, la prueba va como a continuación.

Supongamos que $a_n = xy*$, pero si x, y son potencias de el camino p o su fantasma $p*$ notemos que $p^n(p^*)^m = p^{n-m}$ o $(p^*)^{m-n}$ o v dependiendo si $n > m$, $m > n$ o $m = n$ respectivamente. Pero esto permite reescribir el polinomio como $\sum_n c_n a_n \alpha b_n = \alpha P(p, p^*)$, porque notemos que p y p^* conmutan con p, p^*, v y así con α. De hecho $P(p, p)$ tiene la "forma" de un polinomio de Laurent,

$$P(p, p) = k_{-m}(p^*)^m + \cdots + k_0 v + \cdots k_n p^n.$$

La prueba sigue como hicimos previamente, al ver que $K[x, x^{-1}]$ tiene a $\langle 1 + x \rangle$ como un ideal no trivial propio. Usando el argumento sobre el elemento de menor grado multiplicamos $\alpha P(p, p^*) = v$ y obtenemos que m_0 el mayor m al que $k_{-m_0} \neq 0$ en $P(p, p^*)$ es $m_0 = 0$. El argumento en n el mayor tal que $k_n \neq 0$ da también que $n = 0$, pero así $P(p, p^*)$ es constante y la ecuación es inconsistente, pues $k_0 v = k_0 \alpha$ y $\alpha \neq v$.

Pasamos a asegurar que de hecho a_n y b_n tienen la forma especificada. Escojamos a_1, y asumamos que $a_1 = e_{k_1} \cdots e_{k_c} e^*_{j_1} \cdots e^*_{j_d}$ con $c, d \geq 1$; de otra manera estaremos en el caso que resolvemos a continuación. Tenemos que a_1 empieza y termina en v por lo discutido antes ($v a_1 v = a_1$). Podemos considerar elementos: $g = \min\{z : r(e^*_{j_z}) = v\}$ and $f = \max\{z : s(e_{k_z}) = v\}$, y concentrémonos en la subcadena de a_1, $a'_1 = e_{k_f} \cdots e_{k_c} e^*_{j_1} \cdots e^*_{j_g}$.

Primero, como $v = r(e^*_{j_g}) = s(e_{j_g})$ y e_{i_1} es la única arista que sale de v, entonces $e_{j_g} = e_{i_1}$. Como $s(e_{j_{g-1}}) = r(e^*_{j_{g-1}}) = s(e^*_{j_g}) = r(e_{j_g}) = r(e_{i_1}) = s(e_{i_2})$, y de nuevo la única arista que sale de $s(e_{i_2})$ es e_{i_2} y $e_{j_{g-1}} = e_{i_2}$. El proceso debe terminar antes que nos quedemos sin aristas de p, dado que por nuestra escogencia de g, debe ser que $v \notin \{r(e^*_{j_z}) : z < g\}$. En particular existe un $\gamma < \sigma$ tal que $e^*_{j_1} \cdots e^*_{j_g} = e^*_{i_\gamma} \cdots e^*_{i_1}$.

De la misma manera podemos usar estas ideas para encontrar que $\delta < \sigma$ tales que $e_{k_f} \cdots e_{k_c} = e_{i_1} \cdots e_{i_\delta}$. Entonces $a'_1 = e_{i_1} \cdots e_{i_\delta} e^*_{i_\gamma}$. Pero no puede ser que $\delta \neq \gamma$ porque eso resultaría en que $a_1 = 0$ contrario a lo asumido, por lo que $\delta = \gamma$. Pero en este caso $a_1 = p_0 p_0^*$ para alguna subtrayectoria p_0 de p y usando el argumento de CK2 que mencionamos anteriormente daría que $p_0 p_0^* = v$.

Obtenemos $a_1 = e_{k_1} \cdots e_{k_f - 1} e^* j_{g+1} c \dots e_{j_d}^* = xy*$ como habíamos mencionado, donde $x, y \in CPS(v)$, es decir $x = p$ o $x = p^*$ si $c \geq 1$, $d = 0$. En otro caso tenemos que $x = c^{(1)} \cdots c^{\nu}$ con $c^{\mu} \in CSP(v)$, que es lo que decíamos anteriormente: x, y^* son potencias de p y p^* dando la forma deseada para a_n y b_n. ∎

En la prueba, en esta última parte, verificamos que a_n, b_n no pueden ser distintos de p^n, $(p^*)m$ o v. Cualquier otro elemento de $L(E)$ es anulado por la multiplicación por v en ambos lados a menos que sea uno de los tres elementos mencionados. Los monomios mónicos deben ser alguna potencia de estos tres elementos sin ninguna otra opción.

III Más sobre las álgebras de caminos de Leavitt.

En el tercer capítulo del documento avanzaremos más en la clasificación de la familia de álgebras de caminos de Leavitt. Descubriremos más de las álgebras simples del capítulo dos en la primera sección, estudiaremos más las álgebras finito dimensionales en la sección dos, y encontraremos cuáles son las álgebras que son noetherianas al final. Deberemos investigar antes las álgebras de caminos de Leavitt que admiten una graduación por $\mathbb{Z}$. Claro, relacionaremos siempre estas propiedades al grafo E.

3.1 Simples y puramente infintas.

Presentamos primero una definición para considerar en $L_K(E)$ si el álgebra es infinito dimensional:

Definición. Sea e un idempotente. Un idempotente e es infinito si eR es isomorfo, como un R-módulo derecho, a un sumando directo propio de sí mismo. Es decir, si $eR \cong R_1$, donde $eR \cong R_1 \oplus R_2$ para un anillo R entonces e es infinito.

Siempre que hablamos de módulos lo usual es especificar si M es un R-módulo derecho R_R o derecho R_R. Estos módulos podrían ser distintos, por ejemplo, considerando el álgebra de matrices. En la definición de idempotente infinito, hemos usado a R como módulo sobre sí mismo. [1]

Definición. (Puramente infinito) R es un módulo puramente infinto si cada ideal derecho distinto de cero de R contiene un idempotente infinito.

Vamos a tratar de describir las álgebras puramente infintas que son simples, y esta será la meta por ahora. Empezaremos por ver cuáles no son puramente infintas.

[1] Ver el apéndice 1 para más sobre módulos.

Lema 3.1 (Finito sin ciclos es Finito dimensional) *Sea E un grafo finito y acíclico. Entonces $L(E)$ es finito dimensional.*

Demostración. Como el grafo es finito por filas, la condición E es finito sin ciclos es equivalente a que E^* es finito($E^* := \{p : p$ es un camino en $E\}$). Por el primer teorema de $L_K(E)$, el álgebra está generada por un conjunto finito de elementos, $\therefore$ es de dimensión finita. ∎

Consideremos $L(1, n)$, que será puramente infinto. El grafo E para estas álgebras es de un vértice con $n \geq 2$ bucles. En este caso $vL(E) = L(E)$ y $L(E)$ es un ideal derecho. Concluimos que debe suceder que $L(E)$ es isomorfo a un sumando propio de si mismo. Esto es imposible para un espacio vectorial de dimensión finita.

Lema 3.2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si V se descompone en una suma directa $V = T \oplus S$ de subespacios vectoriales y $V \cong T$ entonces $S \cong 0$.*

Lema 3.3 *Si $L_K(E)$ tiene un idempotente infinito $L_K(E)$ no es finito dimensional como espacio vectorial.*

Demostración. Asumamos lo contrario, que $L_K(E)$ sea finito dimensional. Si $eL(E) \cong T_1 \oplus S_1$ y $eL(E) \cong T$, sabemos que $S = 0$ por 3.2, ya que $\dim_K(eL(E)) \leq \dim_K(L_K(E))$. Asumamos que $\dim_K(eL(E)) \geq 1$. Si permitimos que $eL(E)$ tenga un idempotente infinito, $eL(E) \cong T_1$. Pero así $T_1 \cong T_2 \oplus K_2$ y también $eL(E) \cong T_1 \cong T_2$. Podemos continuar y encontramos una cadena infinita $T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ de ideales derechos de $L_K(E)$. Esta debe ser estacionaria, por lo que $T_i = eL(E)$ y $S = 0$; de otra manera $T_{\dim_K(L(E))} = 0 \to \dim_K(eL(E)) = 0$, que sería imposible. ∎

Lema 3.4 (anterior). *(Deseo escribirlo usando la contrapuesta) Si $L_K(E)$ es finito dimensional entonces es $L_K(E)$ es un anillo artiniano y no es isomorfo a un sumando directo de si mismo.*

Si $L_K(E)$ no es isomorfo a un sumando directo de si mismo, es equivalente a que $L_K(E)$ no contiene idempotentes infinitos por el lema 3.6 que veremos más adelante.

Lema 3.5 (Proposición sobre grafos sin ciclos) *El grafo E es acíclico si y sólo si $L_K(E)$ es la unión de una cadena de álgebras de dimensión finita.*

Demostración. $\rightarrow$. Asumamos primero que E no tiene ciclos. Si E es finito el lema 3.1 da el resultado porque $L_K(E)$ es finito dimensional. Supongamos ahora que E es infinito, renombremos los vértices de E_0 como una secuencia $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$. Podemos definir una secuencia de subgrafos $\{F_i\}$ de E de la siguiente manera. Tomemos $F_i = (F_0^i, F_1^i, r, s)$ donde $F_0^i := \{v_1, \ldots, v_i\} \cup r(s^{-1}(\{v_1, \ldots, v_i\}))$ y $F_1^i := s^{-1}(\{v_1, \ldots, v_i\})$, y r, s, están inducidos de E. Es decir, r y s son las funciones restringidas al conjunto de vértices. Los vértices en F_i son los primeros i vértices con los rangos de las aristas que tienen fuente a v_i. Las aristas en F_i son las que tienen como fuente a cualquiera de $\{v_j\}_{j\leq i}$.

Para cualquier $i > 0$, verifiquemos que $L(F_i)$ es una subálgebra de $L_K(E)$. Deseamos probar que $L_K(E) = \cup_i L(F_i)$. El álgebra $L(F_i)$ es finito dimensional porque no tiene ciclos para cada F_i, porque E no tiene ciclos y F_i es finito, donde la conclusión es posible por el lema y eso completaria la prueba.

En efecto $L(F_i)$ es subálgebra: Podemos construir $\varphi_i : L(F_i) \rightarrow L(E)$ un homomorfismo de álgebras sobre K en la siguiente manera (miraremos que CK1 y CK2 lo permiten). Consideremos primero un pozo en F_i, que no necesita ser un pozo en E. No tenemos CK2 para este vértice. Si v no es un pozo en F_i, existe una arista $e \in F_1^i$, que tiene como fuente algún v_j, $j = 1, \ldots, i$. Esto asegura que todas las aristas que salen de los $\{v_i\}$ están en F_i, y todos los sumandos de CK2 para v están en $L(F_i)$, al igual que en $L(E)$. Para CK1 notamos que $e_s^* e_s = r(e)$ cumple para $L_K(E)$, y en particular si e está en $L(F_i)$, está su rango y también cumple allí. Es claro que PA1 y PA2 cumplen.

Esto hace a $\varphi(L(F_i))$ una subálgebra. Notemos que $Ker(\varphi_i) = 0$ y además $Im(\varphi_i) \subsetneq Im(\phi_{i+1})$ para cada i. Cada mapeo es inyectivo y la contención de las subálgebras es justo como deseada. Podemos referirnos a la subálgebra $Im(\varphi_i) = L(F_i)$, pues son la misma.

Por construcción, cada vértice de e_0 está en F_i para algún i; es más, cada arista e tiene $e \in F_1^j$ donde $s(e) = v_j$. Al escoger algún elemento en $L_K(E)$, y lo sumamos o multiplicamos, sabemos que esos elementos y su producto o suma están en algún $L(F_i)$. Precisamente eso queremos decir con que $L(E) = \cup_{i=1}^{\infty} L(F_i)$.

($\leftarrow$). (Contraposición) Sea $p \in E^*$ un ciclo. El conjunto $\{p^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es un conjunto linealmente independiente infinito.[2] Pero p no está en un subálgebra finito dimensional, por lo que L(E) no se puede escribir como deseado. ∎

En este momento aprovechamos para analizar el ejemplo natural de $L(E)$, que $L(1, n)$ es puramente infinto para $n \geq 2$. Mostraremos el caso particular de $L(1, 2)$. Requeriremos un lema sobre anillos puramente infintos que provee una caracterización. Antes necesitamos otro resultado.

Lema 3.6 *Sea R un anillo tal que $R = T \oplus S$, dos ideales propios. Existen dos idempotentes $t, s \in R$ tales que $T = tR$ y $S = sR$.*

Demostración. Notemos que si $R = T \oplus S$ en una descomposición en suma directa y R tiene unidad, $1 = t + s$ en la descomposición. Tomemos $t = 1 - s$, y multiplicando por t, $(1 - s) = (1 - s)t + (1 - s)s \in Rt$. La suma es directa entonces $(1 - s)s = 0$, i.e. $s = s^2$. El mismo argumento da $t = t^2$. Si $t = 1 - s$, obtenemos $ts = (1 - s)s = s - s^2 = 0$, igualmente para st. ∎

Si R no posee divisores de cero y $R = T \oplus S$ entonces $T = 0$ ó $S = 0$.

Lema 3.7 *Sea R un anillo y sea $e \in R$ un idempotente. Entonces e es infinito si y sólo si hay un idempotente f en R y elementos $x, y \in R$ tales que*

$$e = xy, \quad f = yx, \qquad \text{y también} \quad fe = ef = f \neq e.$$

Demostración. ($\rightarrow$). Supongamos que $e = e^2$ es infinito. Escribamos $eR = fR \oplus gR$, distintos de cero. Por hipótesis hay un isomorfismo $\phi : eR \to fR$ de módulos. como $f \in eR$ es un idempotente, tenemos que $f = ef$, al multiplicar $ef = f =$

[2] El conjunto E^* es el conjunto de todos los caminos en el grafo E.

$f^2 + gf$. De igual manera $g = eg$. Debemos concluir que $fg = 0$. De la ecuación anterior $f = f^2 + gf \to f - f^2 = gf \in fR \cap gR = \{0\}$, entonces $fg = 0$. Como $g \neq 0$, $f \neq e$.

Usando el isomorfismo, sabemos que hay un $x \in eR$ tal que $\phi(x) = f$, lo mismo para $\phi(e) = y$. Para un homomorfismo de módulos derechos tenemos que $\phi(st) = \phi(s)t$ porque podemos extraer los escalares por la derecha. Tenemos que

$$yx = \phi(e)x = \phi(ex) = \phi(x) = f.$$

Es más,

$$\phi(xy) = \phi(x)y = fy = y = \phi(e) \to xy = e.$$

($\leftarrow$). Si los elementos x, y, f, g, e, con las relaciones dadas, tomemos $e = f + g$ y multiplicando obtenemos $eR \subseteq fR + gR$. También $fR + gR = efR + (e - ef)R \subseteq R$, por lo que $eR = fR + gR$. En cada caso la suma es directa. Si suponemos que $fs = gt \in fR \cap gR$ para $s, t \in R$ entonces $fs = f^2 s = fgt = (fe - f^2)t = 0$, al usar que $f^2 = f = fe$. Obtuvimos que $fR \cap gR = 0$, por lo tanto $eR = fR \oplus gR$.

Definamos ahora $\phi : eR \to fR$ de la siguiente manera: $\phi(xyr) = yxyr, \forall r \in R$. Deseamos que ϕ sea el isomorfismo, probamos que es un monomorfismo y un epimorfismo. Recordemos que $xy = e$, como antes. Si $\phi(xyr) = 0$ entonces $yxyr = 0$, por lo que $xyr = er = e^2 = xyxyr = 0$. Al tomar $r \in R$ arbitrario implica que $r = 0$, ϕ es inyectivo. Dado $yxr \in fR$ tenemos que $\phi(xyxr) = yxyxr = f^2 r = fr$, por lo tanto es sobre también. ∎

Ejemplo. $L(1,2)$ **es puramente infinto.** Supongamos $E_0 = \{v\}$ y $E_1 = \{e, s\}$, ambos bucles. Debemos mostrar que cada ideal eR es isomorfo contiene un idempotente infinito. Queremos ver que

$$eL(1,2) = fL(1,2) \oplus gL(1,2) \to eL(1,2) \cong fL(1,2)$$

para algún $e^2 = e \in I \subsetneq L(1,2)$, un ideal derecho.

Listemos primero los ideales de $L(1,2)$, usemos $R = L(1,2)$. Estos son eR, sR,

ee^*R, ss^*R. Para los fantasmas y para v tenemos que

$$e^*R = e^*(eR), s^*R = RvR = R.$$

Luego $\{eeR, eeeR, \dots\}$ y así. También para $\{sR, ssR, \dots\}$. Notemos que eR y ee^*R contienen un idempotente infinito. De hecho $ee^*R = ee^*(eR) = eR$.

ee^*R. Escribamos, como $1 \sim v = ee^* + ss^*$. Multipliquemos por la izquierda e y por la derecha e^* para obtener $ee^* = ee^*e^* + ess^*e$. Pidamos al lector que verifique que ee^*, eee^*e^* y ess^*e^* son idempotentes. Además son idempotentes ortogonales, i.e. $(eee^*e^*)(ess^*e^*) = 0$. También $ee^* = (ee^*e^*)e$ y el otro idempotente es $eee^*e^* = e(ee^*e^*)$. Llamemos $x = e$ y $y = ee^*e^*$. Mostramos que ee^*R tiene idempotentes $z = ee^*$, tal que $z = xy$, $f = yx$, y $z = f + g$, donde $g = ess^*e = ee^* - eee^*e^*$. Ahora si tomamos $z = f + g$ y $zR = fR + gR$ hemos probado que ee^* es un idempotente infinito. Así $ee^*R \cong eee^*e^*R$.

vR También tenemos que $vR = R$. También, ee^*R y ss^*R son infinito dimensionales como módulos y al multiplicar R en la ecuación $v = ee^* + ss^*$ tenemos $R = ee^*R + ss^*R$. Estos elementos también son ortogonales, $ee^*ss^* = 0$ y son idempotentes. Ahora $x = e^*$, $y = e$. Tenemos que v es otro idempotente infinito. Para s y ss^* podemos hacer igual que para ee^*R.

e^nR. Para cualquier cadena $e^nR = e^n(e^*)^nR$, de largo n en su parte real, tomemos el elemento $(e)(e^n(e^*)^ne^*) \in e^n(e^*)^nR$. Observemos que $y = e$ y $x = e^n(e^*)^ne^*$ cumplen las mismas funciones que antes. De hecho $z = (e^n)(e^*)^n = xy$ y $f = yx$ dan $g = z - f$ otro idempotente y $zR = fR + gR$, $zR \cong fR$.

Otros. Faltan s^n, ss^*R. Podemos replicar los argumentos anteriores.

Dado un ideal derecho arbitrario, tR con $t \in L_K(E)$, notemos que $t = \sum_i \alpha_i s_i$ de algunos de los elementos anteriores para los que verificamos que s_iR contiene un idempotente infinito. Entonces $tR = \sum_i \alpha_i s_i = \oplus_{i'} s_{i'}R$ para algunos $\{s_{i'}\}_{i'}$, algún subconjunto de $\{s_i\}_i$. Con un $s_{i'}R$ que contenga un idempotente infinito la suma también contendrá uno, pero habíamos probado ya que cada sumando contiene uno. Con esto hemos probado que todos los ideales derechos de $L(1,2)$ contienen un idempotente infinito. Por lo tanto $L(1,2)$ es puramente infinto y tiene tipo de módulo 2, ya que $L(1,2) \cong L(1,2)^2$. Así como el ideal $ee^*R \cong R$, este es isomorfo a un ideal propio de él mismo. Cada sumando de estos es isomorfo a uno de sus propios sumandos *ad infinitum*.

Agreguemos que, al ver $L(1,2)$ es curioso que CK1, $e^*e = v$ y ee^* idempotente, con $v - ee^*$ otro idempotente ss^*, usando CK2, es muy similar a $xy = e$, $yx = f$, $e - f = g$ de la última proposición. En parte podemos recordar que $L_K(E)$ está construida para tratar de generalizar las álgebras de Leavitt, en particular $L(1,n)$, que son puramente infintas simples. Por otro lado, si $L_K(E)$ es finito dimensional no puede tener idempotentes infinitos.

El argumento del lema siguiente responde la siguiente pregunta. ¿Qué pasa si es la unión límite de álgebras de dimensión finita? Consideremos el ideal $eL(E)$ con $e = \sum_{i=1}^{t} v_i$. El ideal sólo tiene los caminos que empiezan en algún sumando de e. Claro, $eL(E)e$ es de dimensión finita. ¿Por qué $eL(E)$ no contiene un idempotente infinito? Pues podríamos pensar que los idempotentes de $eL(E)$ son únicamente las combinaciones de la suma $\sum_{i=1}^{t} v_i$, que son finitas.

Ejemplo. $A = K[x, x^{-1}]$ **es NIB y no es puramente infinto** Notemos que A solamente tiene un idempotente y es el 1. También sabemos que 1 no es infinito y A es conmutativo. Por lo que no es directamente infinito ni puramente infinto. Como es libre y conmutativo tiene NIB.[3]

Lema 3.8 (Acíclico significa sin idempotentes infinitos) *Supongamos que A es la unión de subálgebras de dimensión finita (por la proposición 3.5 es equivalente a que E no tenga ciclos). Entonces A no es puramente infinto, de hecho A no tiene idempotentes infinitos.*

Demostración. Basta mostrar que A no tiene idempotentes infinitos. Supongamos que $e = e^2 \in A$ es infinito. Así eA tiene un sumando directo propio isomorfo a eA,

[3]Ver la prueba en el apéndice 1.

por definición. Escribamos $eA \cong T \oplus S$. Esto da $e = g + h$, $g \in T$ y $h \in S$. Cada uno de estos elementos es idempotente.

Usando la hipótesis tenemos que los elementos usados en el lema, x, y, h, e, g, están en alguna subálgebra de dimensión finita B de A, porque $A = \cup_n A_n$. El álgebra de menor dimensión B que contiene a estos elementos debe existir, i.e. hay un álgebra de dimensión finita con un idempotente infinito. Siempre podemos construir el isomorfismo para un sumando de eB repitiendo el proceso. Esto da una cadena descendente infinita de ideales derechos. Como la cadena es descendiente, B tiene un ideal derecho no artiniano, una contradicción. ■[4]

Lema 3.9 (Salidas dan vértices) *Sea E un grafo con la propiedad de que cada ciclo tiene una salida. Para cada elemento distinto de cero $\alpha \in L(E)$ existen $a, b \in L(E)$ tales que $a\alpha b \in E_0$.*

Demostración. Refiramos al converso de la prueba del teorema 2.13, el Teorema de Simplicidad. Se debe ajustar la multiplicación como sea necesario para obtener un vértice. Asumimos que E tiene un ciclo con salida, en particular $v \notin < v + p >$. Para estos elementos $a, b \in L(E)$ que hagan $a\alpha b \in E_0$ no existen porque para los demás vértices en E se anula $< v + p >$.

De tener salidas podemos encontrar a, b dentro de $< F_0 >$ donde F_0 sea el conjunto de vértices por que camina α. ■

Definición. (Cerradura saturada y hereditaria). Definamos para cualquier subconjunto de $X \subset E_0$, $G(X)$ una función de E_0 a E_0 tal que le asigna a cada X el conjunto hereditario y saturado más pequeño que contiene a X. Es decir $G(X) = \cap_{X \subset H_\sigma} H_\sigma$, donde H_σ es hereditario y saturado.

Proposición 3.10 *Podemos escribir $G(X)$ como $G(X) = \cup_n G_n$ donde G_n se define inductivamente por $G_{n+1} = S(G_n) \cup H(G_n) \cup G_n$; S, H también son funciones de E_0 a E_0 definidas como sigue:*

[4] En el apéndice mostramos algunas propiedades básicas de los anillos artinianos.

- $H(X) := \{v \in E_0 : r(s^{-1}(X)) \subset X\}$ *es el conjunto que se obtiene por 1 aplicación de la condición hereditaria en* X.

- $S(X) := \{v \in E_0 : \emptyset \neq \{r(e) : s(e) = v\} \subset X\}$. *Es el conjunto que se obtiene al aplicar la condición de saturado a los elementos de* X.[5]

Demostración. En la definición decimos que la cerradura saturada y hereditaria es el conjunto H hereditario y saturado más pequeño que contiene a estos vértices. Falta asegurar dos cosas, que G(X) es hereditario y saturado y que para cualquier conjunto hereditario y saturado que contenga a H, llamémoslo H', $H \subseteq H'$. Obtenemos $H = G(X)$.

Es claro que si $G(X)$ es hereditario y contiene a G_n debe contener a G_{n+1}, para cada n. Por lo tanto $\cup_n G_n \subseteq G(X)$. Tomemos ahora $G(X)$. Para ver que es saturado escojamos un vértice de E tal que todos los rangos de sus aristas están en $G(X)$. Por construcción estos rangos están en algún G_s, y $v \in G_{s+1}$. Tomemos ahora un $v \geq w$, con $v \in G(X)$. Hay un camino de s aristas que va de v hacia w. Esto significa que si $v \in G(X)$ entonces $v \in G_m \to w \in G_{m+s}$. Esto justifica que $\cup_n G_n$ es hereditario y saturado, forzosamente $G(X) \subseteq \cup_n G_n$. Por lo tanto $G(X)$ es hereditario y saturado y $G(X) = \cup_n G_n$. ∎

Definamos los siguientes subconjuntos de E_0:

$$\begin{aligned} ,V_0 &= \{v \in E_0 : CSP(v) = \emptyset\} \\ V_1 &= \{v \in E_0 : |CSP(v)| = 1\}, \\ V_2 &= E_0 - (V_0 \cup V_1). \end{aligned}$$

Lema 3.11 (V_1 es vacío) *Si* $L(E)$ *es simple el conjunto* $V_1 = \emptyset$.

Demostración. Supongamos lo contrario. Si existe un $v \in V_1$ quiere decir que $CSP(v) = \{p\}$. Por supuesto, p es un ciclo. Por el teorema de simplicidad podemos

[5] Aplicar H(v) añade los vértices w a los que v se conecta. Aplicar S(X) añade los vértices w para los que $H(w)$ da siempre vértices ya en el conjunto X, pues aplicar $H(w)$ debería de ser un elemento de X. Con H se avanza, y con S se retrocede.

encontrar una salida e para p. Trataremos de buscar una contradicción. Si A es el conjunto de vértices por los que camina p entonces $r(e) \notin A$. Consideremos para nuestro propósito $G(X)$ con $X = \{r(e)\}$. Así $G(X)$ es no vacío y claro, hereditario y saturado por construcción.

De hecho por el Teorema de Simplicidad $G(X) = E_0$. Encontremos $n = \min\{m : A \cap G_n \neq \emptyset\}$, este sería el mínimo de la secuencia $\{G_n\}_n$ de los que está en A. Supongamos que $w \in A \cap G_n$. Mostremos primero que hay un camino del rango de e al vértice w, i.e. $r(e) \geq w$. Como $r(e) \notin A$, $n > 0$ y $w \in H(G_{n-1}) \cup S(G_{n-1}) \cup G_{n-1}$. Porque n es mínimo tenemos que $w \notin G_{n-1}$, quedan dos opciones. Supongamos que $w \in S(G_{n-1})$, de manera que $\emptyset \neq \{r(e) : s(e) = w\} \subseteq G_{n-1}$. Como w está en el ciclo p, existe f en E_1 una arista tal que $r(f) \in A$ y $s(f) = w$. En ese caso $r(f) \in A \cap G_{n-1}$ es un vértice de A que es elemento de G_{n-1} que contradice la minimalidad de n. La única posibilidad es que $w \in H(G_{n-1}$, lo que significa que existe una arista con rango w y fuente un vértice en G_{n-1}, escrito $e_1 \in E_1$ tal que $r(e_1) = w$ y $s(e_1) \in G_{n-1}$.

Repitamos el proceso para $w_1 = s(e_1)$. Se puede repetir el argumento, pues es necesario revisar únicamente que $\{r(e) : s(E) = w_1\} \subseteq G_{n-2}$, y tendríamos $w = r(e_1) \in G_{n-2}$, que es absurdo por la minimalidad de n. Así $w_1 \in H(G_{n-2})$ y podemos continuar el proceso.

Contrúyase un camino $q = e_n \cdots e_2 e_1$ con $r(q) = w$ y $s(q) = r(e)$, que es posible por que avanzamos descendiendo hasta G_0 que es X por construcción. Así concluimos que $s(e) \geq w$, y hay un ciclo basado en w que contiene a la arista e, porque $w \in A$ y $s(e) \in A$. Como e no está en p el ciclo nos permite afirmar que $|CSP(w)| \geq 2$, pero también porque $v \in p$ de manera que $|CSP(v)| \geq 2$, lo que contradice la definición de V_1. ∎

Proposición 3.12 **(V_0 concluye No puramente infinto)** *Supóngase que $w \in E_0$ tiene la propiedad que, para cada $v \in E_0$, con $w \geq v$ entonces $v \in V_0$. El álgebra esquinada $wL(E)w$ no es puramente infinta.*

Definición. Consideremos el grafo $H = (H_0, H_1, r, s)$ definido por $H_0 := \{v : w \geq$

$v\}$, $H_1 := s^{-1}(H_0)$, y r, s inducidos por E. H es un grafo, en efecto, verifiquemos que $r(s^{-1}(H)) \subset H_0$. Tomemos $z \in H_0$ y $e \in E_1$ tal que e tenga como fuente a z, i.e. $s(e) = z$. Entonces $w \geq z$ y así $w \geq z = s(e) \geq r(e)$ también, y $r(e) \in H_0$. Así es claro que H es hereditario y esta bien definido. Al grafo H como construido aquí le llamaremos siempre el **árbol** de w.

Otra manera de definir el árbol de v es considerar el conjunto de caminos μ tal que $s(\mu) = v$. Para todos los caminos, infinitos o finitos en el grafo E, μ, que cumplen esto ponemos $T(v) = \{\mu : s(\mu) = v\}$.

Demostración. *(V_0 es no puramente infinto)* Tomemos el árbol de w. Si usamos que H no tiene ciclos podemos concluir que $L(H)$ es una subálgebra de $L_K(E)$ así como hicimos para la proposición de Acíclicos. De hecho L(H) por la proposición es la unión de subálgebras finitamente dimensionales, y no así contiene idempotentes infinitos. Como $wL(H)w$ es una subálgebra de L(H), ésta en particular tampoco contiene idempotentes infinitos y no puede ser puramente infinta.

De hecho $wL(H)w = wL(E)w$. En efecto, dado $\alpha = \sum_i p_i q_i^* \in L(E)$, entonces $w\alpha w = \sum p_{i_j} q_{i_j}^*$ donde $s(p_{i_j}) = w = s(q_{i_j})$ o el sumando es cero. Pero así $p_{i_j}, q_{i_j} \in L(H)$ porque H es hereditario y contiene a todos los caminos que tienen como fuente w. Entonces $wL(E)w$ no es puramente infinto porque cada subálgebra de L(H) es subálgebra de $L_K(E)$. ∎

Con motivo a discusión introducimos dos conceptos para comparar anillos. Digamos que un R-módulo A es menor que un R-módulo B respecto a $<_1$ si hay un homomorfismo inyectivo de A hacia B. Digamos que A es menor que B respecto a $<_2$ si hay un epimorfismo de B hacia A. Resulta que estas nociones son interesantes porque no son triviales. Por ejemplo:

- Existe $\phi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ inyectivo y $\mathbb{Z}_2 <_1 \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. También $\mathbb{Z}_2 <_2 \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

- Definamos $\rho : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_2$, entonces ρ es cero si es homomorfismo, aunque $\mathbb{Z}_2$ tenga un elemento menos, no encontramos un homomorfismo sobreyectivo.

Tampoco encontramos $\rho : \mathbb{Z}_n \to Z$ distinto de cero, aunque sabemos que existe $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ sobreyectivo. Los ordenes $<_1$ y $<_2$ son independientes.

Las dos nociones están relacionadas a tratar de crear una noción de grande en álgebra. En particular esto es posible en módulos si se piensa de qué módulo es tan grande por ejemplo, tal que cada mapeo de un módulo M hacia otro no puede ser inyectivo. Eso se confronta inmediatamente al mapear M hacia $M \oplus M$, obtenemos $M <_1 M \oplus M$. Sin embargo, ¿qué pasaría si los únicos mapeos inyectivos que se logran de M hacia otro módulo, tienen como contradominio un módulo de la forma $M \oplus R$? Estos módulos serían maximales en cierta manera respecto a $<_1$, y sucede lo mismo con $<_2$. Esto motiva la definición de inyectividad y proyectividad en módulos:

Un **módulo inyectivo** E es un módulo tal que para cada módulo cualquiera N y para cualquier monomorfismo $f : E \to N$, existe un submódulo L de N tal que $N = f(E) \oplus L$.

Un **módulo proyectivo** P es un módulo tal que para cada epimorfismo $g : N \to P$ el kernel K de g es un sumando directo de N, es decir $N \cong Ker(g) \oplus P$. Miramos que eso de hecho sucede con los espacios vectoriales.

Estas definiciones son importantes en nuestra discusión para distinguir que los espacios vectoriales tienen un lugar entre estos módulos. En particular cualquier espacio vectorial es un módulo proyectivo, y también inyectivo. Esto sucedería si $L(E)$ es finito dimensional, caso en que cumpliría las condiciones de cadenas. Una de las propiedades que es de utilidad es lograr concluir cuando $L_K(E)$ es noetheriano o artiniano. ¿Qué pasaría si $M \cong M \oplus M$? Si $R_1 <_1 R_2$ y $R_2 <_1 R_1$, bajo un isomorfismo de anillos y ambos son finitos de seguro son isomorfos. ¿Pasaría lo mismo con un isomorfismo de módulos? Si $L(1, n) = R$, entonces $R <_1 eR$, donde eR es uno de los ideales en $R = \oplus_{i=1}^{n} e_i R$, que es isomorfo a R como un R-módulo derecho, y R no es artiniano. Si la base del álgebra es finita como espacio vectorial es seguro que $L(E)$ es proyectiva e inyectiva como módulo. ¿Podría $L(1, n)$ ser autoinyectivo? Buscar los módulos inyectivos o proyectivos sobre éste anillo podría resultar complicado.

La conclusión deseada de la discusión es ilustrar por que es especial que el álgebra $L(1, n)$ sea puramente infinto. Continuemos notando que $L(1, n)$ es sumando directo de sí mismo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición. (directamente infinito). Un R-módulo M derecho es directamente infinito si M es isomorfo a un sumando directo de si mismo, i.e. $M \cong M' \oplus N$ y $M \cong M'$.

Resulta que $L(1, n)$ es directamente infinito. Para que un módulo puramente infinto sea directamente infinito necesitamos que uno de los ideales derechos que contienen un idempotente infinito e, cumpla que $eM = M$. Esto no necesariamente es cierto, pues necesitamos que tenga unidad. Si M es directamente infinito tampoco implica que M sea puramente infinto, estas propiedades son independientes. En esta sección clasificaremos cuándo $L_K(E)$ es simple y puramente infinto, pero no cuándo es puramente infinto.

La siguiente proposición está fuera del marco de las álgebras de caminos de Leavitt. De hecho, es un teorema de la teoría de anillos que necesitamos usar. Esta provee una descripción de como funcionan estas álgebras puramente infintas y simples en general, y nos ayudará en esta sección. Sin embargo no exhibimos la prueba. Para el lector curioso el detalle técnico que usa descansa en una propiedad de una famosa equivalencia de categorías de módulos, los retículos de ideales de dos anillos son isomorfos si los anillos son equivalentes en sentido de Morita. Definimos en 2.1 los anillos con unidades locales.

Proposición 3.13 (Descripción multiplicativa de los anillos simples puramente infintos) *Sea A un anillo con unidades locales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es simple y puramente infinto.*

2. *wAw es simple y puramente infinto para cada idempotente distinto de cero $w \in A$.*

3. *A es simple, y existe un idempotente distinto de cero $w \in A$ para el que wAw es simple y puramente infinto.*

4. *A no es un anillo de división, y A tiene la propiedad que para cada par de elementos distintos de cero α, β existen elementos $a, b \in A$ tales que $a\alpha b = \beta$.*

5. *A es simple, y para cada A-módulo P, distinto de cero, proyectivo y finitamente generado, cada submódulo distinto de cero C de P contiene un sumando directo T de P, para el que T es directamente infinito(respecto a C).*

Demostración. Referimos al lector a Aranda Pino, Gonzalo (2005), proposición 4.1.4.

Teorema 3.14 (Simple y puramente infinto) *Sea E un grafo. Entonces $L(E)$ es puramente infinto simple si y sólo si E tiene las siguientes propiedades (en particular necesitamos las que garantizan la simplicidad):*

1. *El grafo E no tiene conjuntos hereditarios y saturados distintos de $\emptyset$ y E_0.*

2. *Cada ciclo de E tiene una salida.*

3. *Cada vértice se conecta a un ciclo.*

Demostración. ($\leftarrow$). Asumamos que las tres condiciones son verdaderas. Las primeras dos son las condiciones del teorema de simplicidad entonces $L_K(E)$ es simple. Por la descripción multiplicativa de los anillos simples puramente infintos es suficiente mostrar que $L_K(E)$ no es un anillo de división y que para $\alpha, \beta \in L(E)$ existen $a, b \in L(E)$ tales que $a\alpha b = \beta$. Las condiciones 2 y 3 juntas dan que $|E_1| > 1$. Esto significa inmediatamente que $L_K(E)$ no tiene divisores de cero así que no es un anillo de división.

Usaremos los lemas que trabajamos en esta sección en los siguientes párrafos. Usemos la proposición 3.9, Salidas dan Vértices, para encontrar $\bar{a}\bar{b} \in L(E)$ tales que $\bar{a}\alpha\bar{b} = w \in E_0$. Usemos la condición 3 para encontrar un $v \in V_0$, pues w se conecta a un ciclo, sea v un vértice de este. Hay dos opciones, w=v o existe un camino p tal que $r(p) = v$ y $s(p) = w$. Escojiendo $a' = b' = v$ en el primer caso, y $a' = p^*$, $b' = p$ el el otro, estos satisfacen que $a'wb' = v$.

Apliquemos el Lema 3.11 V_1 es vacío da resultado que $v \in V_2$, podemos tomar dos caminos cerrados simples en v, p y q distintos. Para $m > 0$ denotemos por c_n al camino cerrado $p^{m-1}q$,

$$c_m^* c_n = q^*(p^{m-1})^* p^{n-1} q = \delta_{mn} v$$

donde si $m \neq n$ se anula como $c_m^* c_n$ esta en una componente graduada, ésta es la componente cero. Pues $\deg(c_n^*) = -\deg(c_n)$. En la componente cero tenemos que el producto es v o es cero.

Ahora consideremos cualquier vértice $v_l \in E_0$. Como $L_K(E)$ es simple, existen $\{a_i, b_i \in L(E) | 1 \leq i \leq t\}$ tal que $v_l = \sum_{i=1}^t a_i v b_i$, que están en el ideal generado por v. Pero al definir $a_l = \sum_{i=1}^t a_i c_i^*$ y $b_l = \sum_{j=1}^t c_j b_j$, tenemos

$$a_l v b_l = \left(\sum_{i=1}^t a_i c_i^* \right) v \left(\sum_{j=1}^t c_j b_j \right) = \sum_{i=1}^t a_i c_i^* v c_i b_i = v_l. \tag{3.1}$$

Hemos escrito ahora cualquier vértice de $L_K(E)$. Tomemos ahora s una unidad local por la izquierda para β (i.e., $s\beta = \beta$), y escribir $s = \sum_{v_l \in S} v_l$ para algún conjunto finito de vértices S, el adecuado. Tomemos $\tilde{a} = \sum_{v_l \in S} a_l c_l^*$ y $\tilde{b} = \sum_{v_l \in S} c_l b_l$ obtenemos

$$\tilde{a} v \tilde{b} = \sum_{v_l \in S} a_l c_l^* v c_l b_l = \sum_{v_l \in S} v_l = s. \tag{3.2}$$

Finalmente, poniendo $a = \tilde{a} a' \bar{a}$ y $b = \bar{b} b' \bar{b} \beta$, tenemos que $a\alpha b = \beta$ como se desea.

$(\rightarrow)$. Supongamos que $L_K(E)$ es simple y puramente infinto. Por el teorema de simplicidad podemos concluir las condiciones 1 y 2. Por el absurdo, si 3 no se satisface existe un vértice $w \in E_0$ tal que para cada camino p que lo tenga como fuente, y $v \in p$ entonces v no puede tener un ciclo. Esto es $w \geq v$ implica $v \in V_0$ porque $CSP(v) = \emptyset$. Esta condición es precisamente la condición del la proposición

V_0 concluye $wL(E)w$ no es puramente infinto, donde w es un idempotente. Esta es una contradicción por la condición 2 de la Descripción multiplicativa de los anillos simples puramente infintos. ∎

El resultado último concluye en la siguiente dicotomía. Si $L_K(E)$ es un álgebra simple pueden suceder dos cosas. Cada vértice se comunica a un ciclo(que por la última proposición L((E) es simple y puramente infinta), o no sucede que cada vértice se conecta a un ciclo. Pero resulta que así no hay ciclos en E. Esto es porque $L_K(E)$ es simple y los únicos conjuntos saturados y hereditarios son triviales, bueno digamos que es E_0. Si hay un ciclo en E cada vértice debe conectarse a él (siguiente lema), contrario a lo asumido. Pero así si $L_K(E)$ no es simple y puramente infinto, E es acíclico y $L_K(E)$ es simple, debe ser la unión (unión límite) de anillos de matrices de dimensión finita por otra proposición anterior de esta sección; esas son las únicas dos opciones.

Antes de pasar a la prueba proponemos una nueva manera de encontrar la cerraduar hereditaria y saturada $G(X)$. Usaremos $T(v)$ para denotar el árbol de v. Extendamos la definición a un conjunto arbitrario $X \subseteq E_0$. Proponemos que $T(X) = \cup_{x\in X} T(x)$. Notemos que $T(x)$ es el conjunto hereditario más pequéno que contiene a X (puede escribirse como $\cup_n H_n$ de aplicar la condición hereditaria). La cerraduar hereditaria y saturada de X, G(X) está dada por:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \cup_n \Lambda_n(X) \text{ donde:} \\
\Lambda_0(x) &= T(X), \\
\Lambda_n(X) &= \Lambda_{n-1}(X) \cup \{y \in E_0 \big| s^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ y } r(s^{-1}(y)) \subset \Lambda_{n-1}(X)\}, \;\; n \geq 1.
\end{aligned}$$

Esta nueva manera de escribir $G(X)$ resulta de lo siguiente. El conjunto hereditario más pequeño que contiene a X es $T(X)$. No necesitamos considerar los árboles de vértices añadidos al aplicar la condición saturada. La condición saturada se obtiene al aplicar Λ_n con $n > 0$. Al igual que en $G(X)$ se aplica infinitas veces. De hecho $G(X) = \cup_n \Lambda_n(X) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(X)$. Se puede aplicar la condición saturada en virtud de la condición hereditaria, i.e. $S(T(v))$ es hereditario también y $S(T(X))$.

El vértice es agregado si todos los rangos de las aristas que lo tienen como fuente están en H, si agregamos v tenemos todos los caminos que surgen de él de tamaño uno, y como $T(X)$ es hereditario, $\Lambda_n(X)$ también lo es. Concluimos que están todos los caminos que surgen del vértice v agregado de aplicar la S. Esto da la nueva escritura de $G(X)$.

Es útil la nueva escritura porque podemos tomar $T(X)$, y aplicar la condición saturada al argumentar y construir $G(X)$. Expresemos el resultado como $G(X) = S(T(X)) = G(T(X))$.

Lema 3.15 *Sea $L_K(E)$ es simple, si hay un ciclo en E entonces cada vértice se conecta a él.*

Demostración. Supongamos que E tiene un ciclo. Escojamos un vértice tal que v no se conecta a un ciclo. Entonces $\{v\}$ es un subconjunto de E_0 que hará que fallen las condiciones del teorema de simplicidad:

Debemos concluir que la cerraduar hereditaria y saturada $G(\{v\}) \neq E_0$. Calculamos $G(T(\{v\})$, que da el mismo resultado. Si $w \in c$ el ciclo al que v no se conecta, el rango $r(e)$ de la arista e con fuente w en el ciclo no esta nunca en G_n, i.e. $r(e) \notin G_n$ y no se pueden obtener aplicando condición saturada S. No podemos obtener los vértices que están en el ciclo por completo porque estos no se obtienen previamente al aplicar H. ∎

Corolario 3.16 *Sea $L_K(E)$ simple, entonces se cumplen las condiciones del teorema de simplicidad y hay dos opciones:*

1. *El grafo E tiene ciclos, cada vértice se conecta a un ciclo y $L_K(E)$ es puramente infinto o en otro caso*

2. *el grafo E no tiene ciclos y $L_K(E)$ es la unión límite de álgebras de dimensión finita.*

3.2 Finito dimensionales.

En esta sección encontraremos de un resultado bastante curioso. Dos grafos no isomorfos pueden resultar en álgebras de caminos de Leavitt isomorfas. Hemos visto ejemplos de álgebras de caminos de Leavitt que no tienen NIB(número invariante de base). Por ejemplo, es importante ver que el anillo de polinomios de Laurent no es simple, tiene una base infinita pero es NIB. Es nuestro objetivo ahora mostrar varias distinciones que se pueden hacer dentro de la clase de álgebras de caminos de Leavitt. En esta sección identificaremos las álgebras de caminos de Leavitt finito dimensionales, y haremos algo más. Hay diferentes familias de grafos que pueden generarlas. Identificaremos dos familias generadoras mínimales como meta final. Hay más de estas ya expuestas en la literatura.

Proposición 3.17 (Grafos que dan ACL's finito dimensionales) *El álgebra de caminos de Leavitt $L_K(E)$ es una K-álgebra finito dimensional si y sólo si E es finito y sin ciclos.*

Demostración. Si E tiene infinitos vértices estos serían un conjunto infinito linealmente independiente en $L_K(E)$. Lo mismo si E contiene un ciclo, las potencias de el ciclo p también son un conjunto linealmente independiente infinito. Conversamente, si E es finito y acíclico hay un conjunto finito de caminos en E. Como $\{pq^*\}$ generan $L_K(E)$ el resultado se obtiene. ∎

Ejemplo. El grafo lineal orientado R_n no tiene ciclos y tampoco conjuntos hereditarios saturados triviales. Por la proposición anterior, $L_K(R_n)$ es finita dimensional, y además simple. Es congruente con que $L_K(R_n) \cong M_n(K)$, como hemos visto.

Con esta información a la mano, veremos que las únicas álgebras de Leavitt sobre K que son de dimensión finita son isomorfas a sumas directas de anillos de matrices de dimensión finita sobre K. Con esto en mente producimos a continuación dos colecciones distintas de grafos conexos, de los que módulo ideales de dimensión uno, surgen todas las álgebras de caminos de Leavitt finito dimensionales.

Con dimensión de un ideal queremos decir la dimensión del ideal como espacio vectorial sobre K. Denotemos para cualquier espacio vectorial V sobre K la dimensión de V sobre K como $\dim_K(V)$. Miramos a continuación que las únicas álgebras que son finito dimensionales son isomorfas a sumas directas finitas de álgebras de matrices de dimensión finita sobre el cuerpo(o campo) K.

Definición. Un álgebra está graduada por $\mathbb{Z}$ si se puede escribir como $L(E) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$, donde $A_n = L_K(E)_n$ es un K espacio vectorial (subgrupo) y para cada elemento está definida impícitamente la función de grado para cada $x \in L(E)$, $\deg(x)$, por $\deg(x) = n \leftrightarrow x \in A_n$. El subgrupo $L_K(E)_n$ se llama la comonente homogénea de $L(E)$ de grado n. Se debe cumplir que $A_n A_m \subset A_{n+m}$. Esto es,

$$L_K(E)_n L_K(E)_m \subseteq L_K(E)_{n+m} \text{ para cada } n, m \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

La graduación de $L(E)$ se define como $\deg(pq^*) = \deg(p) - \deg(q^*) \in \mathbb{Z}$, donde el grado de un camino real o fantasma es el número de aristas que lo componen. Es claro que la graduación está bien definida.

También podemos graduar un álgebra por un grupo arbitrario G, y obtenemos la condición $A_{g_1} A_{g_2} \subseteq A_{g_1 \times g_2}$ y $A = \oplus_{g\in G} A_g$.

De hecho $L(E)$ siempre tiene la graduación. Esto es consecuencia del primer teorema de $L(E)$. Siempre que multipliquemos dos caminos $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*)$ tenemos que $\beta^* = \gamma^*$ y el producto es $\alpha\delta^*$, o de otra manera es cero. Tenemos $\deg(\alpha) - \deg(\beta) + \deg(\gamma) - \deg(\delta) = \deg(\alpha) - \deg(\beta)$, porque $\deg(\beta) = \deg(\gamma)$, y la graduación es buena. Denotemos por $|p|$ el largo de p. La graduación pq^* toma valores $|p| - |q| \in \mathbb{Z}$.

El primer ejemplo que miramos de un álgebra con una graduación es $R[x]$ para cualquier anillo. Resulta que el anillo de polinomios tiene una graduación dada por $\deg(p(x))$, y claro $\deg(pq(x)) = \deg(p(x))\deg(q(x))$ para $A_n = \{p(x) : \deg(p(x)) = n\}$ es una graduación.

Definición. Un ideal $I \lhd R$ de un anillo con graduación R es graduado si $I = \oplus_n (I \cap R_n)$, donde $R = \oplus_n R_n$, y $n \in \mathbb{Z}$.

Definición. Sean $R = \oplus_n R_n$ y $S = \oplus_n S_n$, anillos graduados por $\mathbb{Z}$. Un homomorfismo de anillos $\phi : R \to S$ es graduado por $\mathbb{Z}$ si $\phi(R_n) \subseteq S_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición. Un vértice es aislado si no es el rango o fuente de alguna arista.

Lema 3.18 *Si $I \subseteq L_K(E)$ es graduado por $\mathbb{Z}$ el ideal $I \lhd L_K(E)$ es generado por un conjunto de vértices. Así $I = \langle I \cap L_K(E)_0 \rangle = \langle I_0 \rangle$.*

Demostración. Escribamos $L_K(E) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} L_K(E)_n$. Tomemos un elemento $x = \Sigma_k \alpha_k x_k$ donde podemos asumir que $x_k \in L_K(E)_0$ para cada k. También podemos asumir que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $j \neq i$. De hecho $x_k = r(\alpha_k)$. Podemos multiplicar

$$x_i = \alpha_i^* \Sigma_k \alpha_k x_k = \alpha_i^*(x) \in L_K(E)_0.$$

Si $x_i \in L_K(E)_n I_0$, por lo tanto $I_n = L_K(E)_n I_0$. Podemos argumentar de manera similar que $I_{-n} = I_0 L_K(E)_{-n}$. Como I es un ideal graduado, $I = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n$, es el ideal generado por I_0. ∎

De hecho, la contrapuesta al lema es fácil de ver, así:

Teorema 3.19 *Un ideal $I \lhd L_K(E)$ es graduado si y sólo si es generado por idempotentes.*

Ejemplo. El ideal $\langle 1 + x\rangle$ de $K[x, x^{-1}]$ no es graduado. De hecho el álgebra no tiene ideales graduados porque el único idempotente es 1.

Para la siguiente proposición asumiremos que un ideal de una dimensión es graduado.

Lema 3.20 *Si I es un ideal de $L_K(E)$ para el cual $\dim_K(I) = 1$, I es generado por un vértice aislado. Claro, I es graduado.*

Demostración. Como $\dim_K(I) = 1$ podemos tomar el elemento generador $x \in I$. Si $\alpha x \neq x$ (o $x\alpha \neq x$) para $\alpha \in L(E)$ entonces $\dim_K(I) > 1$. Necesariamente x debe ser un vértice, ya que multiplicando por una arista con fuente v, u otro vértice, obtenemos otro elemento linealmente independiente y en consecuencia $\dim_K(I) > 1$, mostramos los casos.

Caso 1. El ideal I es generado por vértices. Como ya argumentamos, $\alpha x = x = x\alpha$, o es cero, para $\alpha \in L(E)$, entonces $x = v$ un vértice aislado.

Caso 2. El ideal I no contiene vértices. Podría ser generado por,

Caso 2A. Polinomios en caminos pq^*, que no son polinomios en $CP(v)$. Es tos ideales no tienen sólo un elemento.

Caso 2B. Polinomios con elementos en $CP(v)$. Tenemos que $\alpha \in CP(v)$ debe ser que $\alpha = c_{i_1} \dots c_{i_n} c^*_{j_1} \dots c^*_{j_n}$. Multiplicar $c^*_{i_1}\alpha \neq 0$.

Caso 2C. Tal vez si tomamos polinomios en $p(c, c^*)$ donde $p \in CSP(v)$. Hemos visto que este polinomio conmuta con c, c^*, v; es similar a polinomio de Laurent. Si tomamos $p \neq p^2 \neq 0$, este es distinto de cero por lo siguiente. Escribimos

$$p = k_{-m}(c^*)^m + \cdots + k_0 v + \cdots + k_n c^n.$$

Si $k_0 \neq 0$, debe ser que $k_{-m}k_0(c^*)^m \neq 0$, porque K no tiene divisores de cero. De otra manera $k_0 = 0$. Algún $k_{-m}, \dots, k_i, \dots k_n$ es distinto de cero. Debe ser que p es suma de más de un monomio, sino $p^2 \neq 0$ y es distinto de p.

Si $(c^*)^m$ y c^n tienen coeficiente distinto de cero, su producto es distinto de cero. También si fueran dos potencias del camino cerrado simple, reales o fantasmas ambas. Podríamos pensar que tal vez se cancela con otra potencia que sume lo mismo, observando que hay infinitos m,n tales que $m + n = k$. Deben haber finitas de estas sumas para $p(c, c^*)$. Esto permite concluir que alguna de las combinaciones sume distinto de k y para los demás, y ese elemento, para alguna potencia $c^s(c^*)t$, k_{s-t} es distinto de cero; $\therefore p^2 \neq 0$.

Así v es aislado y $\{v\} \in \mathcal{H}$, es un ideal propio y graduado de $L_K(E)$. ∎

Proposición 3.21 (de ideales de una dimensión) *El álgebra $L_K(E)$ contiene un ideal graduado de dimension 1 si y solamente si E tiene un vértice aislado.*

Demostración. Sea $J \subset L(E)$ un ideal de una dimensión. Si esta graduado, $J = \langle H \rangle$ para algún subconjunto H de E_0. De hecho $H = \{v\}$, de otra manera contiene dos elementos linealmente independientes. Si v no es aislado J contiene un elemento más (al menos una arista e tiene $s(e) = v$ o $r(e) = v$). Pero así J tiene un elemento que no tiene grado cero, pues al multiplicar e, e^* no se anula una de las multiplicaciones y este elemento no tiene grado cero. De esa manera $\dim(J) > 1$, por lo que v es aislado. Para el converso es claro que $< v >$ es un ideal de una dimensión si v es aislado. ∎

Veremos a continuación dos proposiciones . Una de ellas es un teorema de mucha utilidad. El teorema de unicidad graduada lo atribuimos a Mark Tomforde, que usa el lema 3.18. En Tomforde (2007) él prueba con el teorema que los ideales autoadjuntos de $L_K(E)$ serán solamente los generados por los elementos de $\mathcal{H}$. Antes de ver este resultado, miramos una proposición curiosa sobre los ideales de $L(E)$. Como $I \subseteq L(E)$ es una subálgebra también, podemos considerar los ideales de I. Pero estos ideales son los mismos que los de $L(E)$.

Lema 3.22 *Usaremos ahora $\mathcal{H}$ para denotar los conjuntos hereditarios y saturados de E. Un ideal es graduado si y sólo si es generado por un elemento $h \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Consideremos un ideal graduado I. Éste es generado por un conjunto de vértices por 3.18. Entonces $I \cap E_0 \neq \emptyset$ y $I \cap E_0 \in \mathcal{H}$ por un lema previo, el lema 2.3. Para el converso recordemos que $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(E_0)$. ∎

Corolario 3.23 *El retículo de ideales graduados de $L_K(E)$ es isomorfo al retículo de elementos de $\mathcal{H}$.*

Corolario 3.24 *Si un ideal I de $L(E)$ es no graduado, $I \cap E_0 = \emptyset$. En particular $I \neq L(E)$.*

Ejemplo. El ideal $\langle v + l \rangle$ de $K[x, x^{-1}]$ es no graduado. Es un hecho muy interesante que la condición, cada ciclo tiene una salida, es equivalente a que $I \cap E_0 \neq \emptyset$. Si hay ideales no graduados, son generados por elementos de la forma mostrada, con $v + \sum_i g^i$, donde g es un ciclo con base en v, y no debería de tener salidas.

Proposición 3.25 *Sean I, J ideales graduados. Si $J \lhd L_K(E)$ e $I \lhd J$ entonces $I \lhd L_K(E)$.*

Demostración. Como J es graduado J es generado por un conjunto de vértices. Es más, es generado por un conjunto hereditario y saturado, digamos h_J. Sea h_I el conjunto de vértices que genera a I. Debe ser que $h_I \subseteq h_J$. Pero como $h_J \in \mathcal{H}_E$, y $h_I \in \mathcal{H}_{E_J}$, h_I tiene que ser hereditario y saturado también en el grafo E. De otra manera $S_E(h_I) \neq h_I$ o $H_E(h_I) \neq h_I$ en E. Pero el elemento agregado está en h_J porque h_I es hereditario y saturado en E_J, esto significa que h_J no pertence al retículo $\mathcal{H}_E$, una contradicción. Por lo tanto $h_I \in \mathcal{H}_E$, y $I \lhd L_K(E)$. ∎

Este siguiente lema también se debe a Tomforde.

Lema 3.26 *Sea R un anillo con unidades locales. Si $J \lhd I$ y $I \lhd R$ entonces $I \lhd R$.*

Demostración. Sean $r \in R$ y $x \in I$. Como I tiene unidades locales existe un $t \in J$ tal que $tx = x$. Como I es un ideal, $rt \in I$. Miremos que $rx = r(tx) = (rt)x \in J$. Podemos argumentar también que $rx \in I$.

Teorema 3.27 (de unicidad graduada). *Sea $L_K(E)$ valorado por $\mathbb{Z}$. Sea $\varphi : L_K(E) \to R$ un homomorfismo de anillos. Si*

1. *R tiene una graduación por $\mathbb{Z}$ y $\varphi(L_K(E)_n) \subseteq R_n$,*

2. *$\varphi(v) \neq 0$ para cada $v \in E_0$,*

entonces φ es inyectivo.

Demostración. Tomemos $I := Ker(\varphi)$. Como I es graduado es generado por $I \cap L_K(E)_0$. Definamos $\mathcal{F}_k$:=span$\{\alpha\beta : |\alpha| = |\beta| = k\}$. El conjunto $\mathcal{F}_k \subset L_K(E)_0$. Además es claro que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ y $L_K(E)_0 = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_0$.

Tomemos dos elementos de $\mathcal{F}_k$, $\alpha\beta^*$ y $\gamma\delta^*$. Sabemos que $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*)$ es $\alpha\delta^*$ en caso que $\beta^* = \gamma^*$ y cero de otro modo. El conjunto $\{\alpha\beta^* : |\alpha| = |\beta| = k\}$ es un conjunto de unidades de matrices y así $\mathcal{F}_k$ es isomorfo a $M_\infty(K)$ o $M_n(K)$, y estos son simples. Pero así $L_K(E)_0$ se mapea a si mismo o a cero. La componente I_0 determina $R =< I_0 >$. Es importante que cada unidad de matriz $v \in E_0$ no es mapeada a cero, entonces R_0 contiene una copia de I_0. No sabemos si $L_K(E)_0 \supseteq R_0$, pero esto sí es suficiente para concluir la inyectividad.[6]

[6] Sabemos que $M_n(K)$ es simple. Para ver que $M_\infty(K)$ es simple consideremos el grafo R_n en línea con n vértices, y tomemos $n \to \infty$. El grafo R_∞ no tiene ciclos ni conjuntos hereditarios y saturados no triviales.

En efecto, $\varphi(L_K(E)_n) \subset R_n$ pero para cada n, $\alpha, \beta \in L_K(E)_n$ no sucede que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Tendríamos que $\varphi(\alpha - \beta) = 0$, entonces $\alpha - \beta \in I$. Esto permitiría escribir una graduación para I porque $\alpha_n - \beta_n$ ya son elementos de un subgrupo. Entonces $I = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n$ donde $I_n := \alpha_n - \beta_n$ tal que $\alpha_n - \beta_n$ son mapeados a cero. Este sería generado por $I_0 \cap E_0$, por un lema previo, entonces contiene al menos un vértice $v \in I_0 \cap E_0$. Pero esto implica que para $v \in L_K(E)_0 \cap E_0$, $\varphi(v) = 0$, una contradicción porque $\varphi(L_K(E)_0) \neq 0$. ∎

Pregunta. ¿Dado una K-álgebra de la forma $A = \oplus_{i=1}^{t} M_{n_i}(K)$ podemos encontrar E un grafo tal que $L(E) \cong A$ y E sea conexo? Resulta que no porque un ideal de una dimensión debe surgir de un vértice aislado, si $M_{n_j}(K)$ tiene dimensión $n_j = 1$ y por lo tanto E no puede ser conexo por la proposición anterior. ¿Si ningún $n_j = 1$ está en la suma, E podría ser conexo?

Definición. El rango del índice de un vértice v, denotado por $n(v)$, es la cardinalidad del conjunto $R(v) = \{\alpha \in E^* : r(\alpha) = v\}$.

Queremos mostrar un ejemplo. Vamos a considerar dos grafos distintos y ver que $L_K(E)$ es la misma. Esto motivara las siguientes dos proposiciones. La idea principal es que grafos no isomorfos pueden dar álgebras de caminos de Leavitt isomorfas. En el caso que estudiamos serán $M_n(K)$ y sus sumas directas las que surjan.

Ejemplo. Consideremos el grafo de la siguiente figura. Hay 3 elementos idempotentes. También $v_1 = e_1e_1^*$, $v_3 = e_2e_2^*$, y $e_1^*e_1 = v_2$, $e_2^*e_2 = v_2$. También tenemos elementos e_1e_2, $e_2^*e_1^*$ distintos de cero. Estas relaciones son las mismas que tiene $L_K(R_3)$ en la siguiente manera. Hay tres idempotentes con esta relación, donde por parejas suman un vértice y para el vértice de en medio(v_2) se cuplen ambas, la dada por CK2 y por CK1 para igualar al vértice, una con cada arista. Las aristas forman las mismas cadenas que en la sección 1.3.2.

Ejemplo. $(M_4(K))$ Consideremos ahora el grafo E de cuatro vértices tal que sólo tiene un pozo. Colocamos una arista en cada uno de los otros vértices hacia el pozo.

Figura 3.1: Este grafo tiene $L_K(E) \cong L_K(R_3)$, sin embargo $E \ncong R_3$.

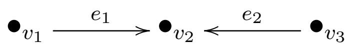
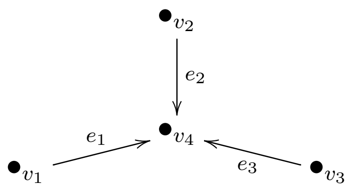


Figura 3.2: Grafo para $M_4(K)$.



Deberíamos tener que $L_K(E) \cong M_4(K)$. Llamemos al pozo v_4 y a cada arista e_i con su fuente v_i, $i = 1, 2, 3$. Las unidades de matrices son v_1, v_2, v_3 y v_4. ¿Cómo ubicamos el resto de elementos en la matriz que da el isomorfismo? Finito por filas refiere a las filas de la transformación. Así, para cada camino $x = s(p)$ con $0 \neq p \in L_K(E)$ estaría en la fila de v_i si $x = v_i$. En el caso que E es finito y acíclico también es finito por columnas. Ya que podemos identificar la matriz para el grafo R_n, que es isomorfo a uno de los ideales de pozos como mostrado a continuación (I_v), en el caso que mencionamos deberíamos identificar los elementos $\alpha\beta^*$ de $L_K(E)$ con los de $L_K(R_4)$. Podemos hacerlo usando el índice de los vértices y clasificando los elementos de acuerdo a $r(\alpha\beta^*)$ y $s(\alpha\beta^*)$, su rango y su fuente.

Agrupamos los caminos por rangos, con $R_i = \{p \in E^* | r(p) = v_i\}$ y por fuentes, escribimos $S_i = \{p \in E^* | s(p) = v_i\}$:

	S_i	R_i
1	$\{v_1, e_1, e_1e_2^*, e_1e_3^*\}$	$\{e_1^* = v_4e_1^*, e_2e_1^*, e_3e_1^*, v_1 = e_1e_1^*\}$
2	$\{v_2, e_2, e_2e_1^*, e_2e_3^*\}$	$\{e_2^*, e_1e_2^*, e_3e_2^*, v_2\}$
3	$\{v_3, e_3, e_3e_1^*, e_3e_1^*\}$	$\{e_3^*, e_1e_3^*, e_1e_3^*, v_3\}$
4	$\{v_4, e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$	$\{e_1 = e_1v_4, e_2, e_3, v_4\}$

esto debería de identificar a los elementos de matriz para determinar el isomorfismo. Cada conjunto tiene exactamente cuatro elementos. Conjeturamos que el proceso de construcción siempre funciona y se puede establecer el mapeo a los elementos de la matriz de manera definitiva. Es fácil ver que es cierto. Tomemos un vértice y fijemos un pozo al que los caminos de éste llegan. Contemos los caminos que terminan en él. El número es el mismo que el número de vértices, al igual para los caminos que terminan en el pozo. Esto nos da para un ideal de pozo de n vértices, n elementos por cada vértice. Esto da n^2 elementos para cada ideal de pozos, congruente con el número de la base de $L_K(R_n)$. Si colocamos los vértices en la diagonal, entonces en la i-ésima fila, donde se encuentra v_i, tenemos los caminos que surgen de v_i y en cada columna j el camino que surge de v_i y termina en v_j. Así la tabla que hemos construido identifica únicamente a $e_{i,j} = \phi(p)$ tal que $s(p) = v_i$, $r(p) = v_j$. Cada ideal de pozos esperamos que tenga esta forma. Probemos que este subgrafo genera un ideal en $L(E)$.[7]

Proposición 3.28 (Proposición sobre ideales de pozos). *Sea E finito y acícliclo y v un vértice aislado. Entonces*

$$I_v := \sum\{k\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^*,\ r(\alpha) = v = r(\beta), k \in K\}$$

es un ideal de $L_K(E)$, y

$$I_v \cong M_{n(v)}(K).$$

Demostración. La prueba consiste en identificar el conjunto de elementos dentro de I_v que se comportan como las unidades de matrices en $M_{n(v)}(K)$. Mostremos que I_v es un ideal.

Consideremos $\alpha\beta^* \in I_v$ y cualquier monomio distinto de cero

$$e_{i_1} \cdots e_{i_n} e^*_{j_1} \cdots e^*_{j_m} = \gamma\delta^* \in L_K(E).$$

Si $\gamma\delta^*\alpha\beta^* \neq 0$ tenemos dos posibilidades: Puede ser que $\alpha = \delta p$ o que $\delta = \alpha q$ para algunos caminos $p, q \in E^*$. De esta manera la parte fantasma o real de "en medio" es absorbida. No podría darse el caso que $\deg(q) \geq 1$ pueda suceder, como v es un pozo y necesitamos $r(q) = v$.

[7] Por el Teorema de Wedderburn Artin sabemos que el ideal debe ser un anillo completo de matrices sobre K.

Estamos en el primer caso (donde es posible que $\deg(p) = 0$), y luego que

$$\gamma\delta^*\alpha\beta^* = (\gamma p)\beta^* \in I_v$$

porque $r(\gamma p) = r(p) = v$. Sucede que I_v es un ideal izquierdo. Mostraríamos de igual manera que I_v es un ideal derecho.

Sea $n = n(v)$ (como es finito porque el grafo es acíclico, finito y finito por filas), y renombremos $\{\alpha \in E^* : r(\alpha) = v\}$ como $\{p_1, \ldots, p_n\}$ tal que

$$I_v := \sum\{kp_ip_j^* : i, j = 1, \ldots, n; k \in K\}.$$

Tomar $j \neq t$. Si $(p_ip_j^*)(p_tp_l^*) \neq 0$, como arriba, $p_t =_j q$ con grado $\deg(q) > 0$(como $j \neq t$), que contradice que v es un pozo.

Entonces $(p_ip_j^*)(p_tp_l^*) = 0$ para $j \neq t$. Por otro lado es claro que

$$(p_ip_j^*)(p_jp_l^*) = p_ivp_l^* = p_ip_l^*.$$

Hemos mostrado que $\{p_ip_j^* : i, j = 1, \ldots, n\}$ es un conjunto de unidades de matrices para I_v. Este es básicamente el resultado completo. La concatenación de caminos funciona como antes. Para algún grafo arbitrario refiramos al ejemplo anterior para construir el isomorfismo explícito. ∎

Ahora trataremos de unir estos anillos de matrices de la proposición que acabamos de estudiar, para obtener el resultado que deseamos de esta sección.

Teorema 3.29 (Teorema principal para las álgebras finito dimensionales) *Sea E un grafo finito y acíclico. Sean $\{v_1, \ldots, v_t\}$ pozos. Entonces*

$$L_K(E) \cong \oplus_{i=1}^{t} M_{n(v_i)}(K). \tag{3.4}$$

Demostración. Mostraremos que $L_K(E) \cong \oplus I_{v_i}$ donde I_{v_i} son los ideales del último resultado y podemos concluir la prueba con eso.

Consideremos $0 \neq \alpha\beta^*$ con $\alpha, \beta \in E^*$. Si $r(\alpha) = v_i$ para algún i, entonces $\alpha\beta^* \in I_{v_i}$. Si $r(\alpha) \neq v_i$ para cada i, $r(\alpha)$ no es un pozo, y por lo tanto se puede aplicar CK2 para obtener:

$$\alpha\beta^* = \alpha \left(\sum_{e \in E_1, s(e)=r(\alpha)} ee^* \right) \beta^* = \sum_{e \in E_1, s(e)=r(\alpha)} \alpha e(\beta e)^*.$$

Podemos así asumir que los elementos de $L_K(E)$ siempre están en un I_{v_i}, de la siguiente manera. Usando que el grafo es finito y sin ciclos, para cada sumando tendremos que está ya en un I_{v_i}, o repetimos el proceso hasta llegar a un pozo. Son importantes ambas condiciones del grafo para que siempre se pueda alcanzar un pozo. En esta manera podemos poner que $L_K(E) = \sum_{i=1}^{t} I_{v_i}$.

Ahora verifiquemos que la suma es directa. Supongamos que $i \neq j$, $\alpha\beta^* \in I_{v_i}$ y $\gamma\delta^* \in I_{v_j}$. Como v_i y v_j son pozos sabemos que no hay caminos de la forma $\beta\gamma'$ o $\gamma\beta'$ y que $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) = 0$. Esto significa que $I_{v_i} I_{v_j} = 0$. Añadiendo que $L_K(E)$ tiene unidad y que $L_K(E) = \sum_{i=1}^{t} I_{v_i}$, implica que la suma es directa. Hay que aplicar la última proposición para obtener el isomorfismo deseado. ∎

Los siguientes resultados son colorarios del teorema de Wedderburn Artin mostrado en el apéndice 2 y el teorema anterior. El teorema de Wedderburn Artin dice que cuando un álgebra es isomorfo a sumas directas de anillos de matrices sobre anillos de división entonces las dimensiones de los anillos de matrices son únicas. En particular digamos que si $\oplus_{i=1}^{m} M_{l_i}(K) \cong \oplus_{j=1}^{n} M_{k_i}(K)$ entonces $m = n$ y $l_i = k_i$ para algún reordenamiento de $\{k_i\}$. Esto afirma la clasificación de las algebras salvo isomorfismo.

Las hipótesis del teorema son que el anillo es artiniano y que no hay ideales nilpotentes distintos de cero. Se dice que un anillo tiene *suficientes idempotentes* dado que exista un conjunto $\{e_\alpha\}_\alpha$ de idempotentes tales que

$$R = \oplus_\alpha e_\alpha R = \oplus_\alpha R e_\alpha.$$

Las álgebras de caminos de Leavitt cumplen ésto para el conjunto de vértices E_0. La suma será directa porque los elementos de Rv_α son los elementos tales que $r(p) = e_\alpha$, y solamente. Ahora el anillo es idempotente, $R^2 = R$ a fortiori si tiene *suficientes idempotentes*. El álgebra $L_K(E)$ tiene suficientes idempotentes y es idempotente como anillo. Pero cada subálgebra también. Esto implica que cada ideal es idempotente y es imposible que $L_K(E)$ contenga un ideal nilpotente. Podemos aplicar el teorema de Wedderburn Artin sin inconveniente, y para el caso en que $L_K(E)$ es artiniano, debe ser que $L_K(E)$ es isomorfo a una suma directa de matrices sobre anillos de división. Podemos asegurar que $L_K(E)$ es artiniano si es finito dimensional. Resulta que por los cálculos en esta sección, obtenemos

$$\frac{L(E)}{\langle I_1, \ldots I_r \rangle} \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_m}(K),$$

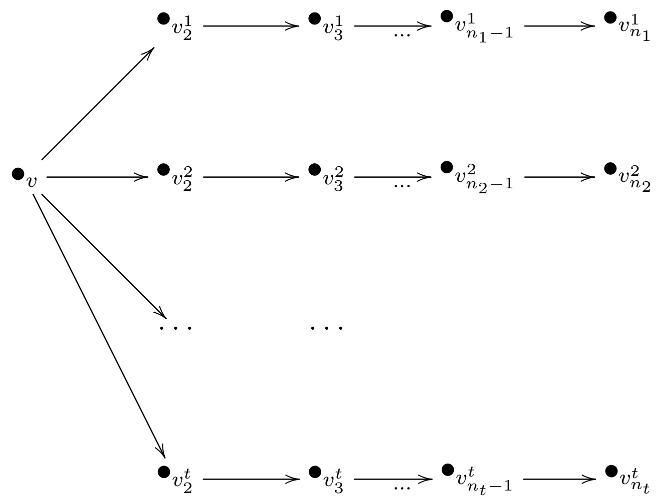
donde I_j son los ideales de una dimensión. Estos se mirarían como sumas directas disjuntas de K del otro lado de la ecuación si no tomamos el cociente. Por supuesto, $L_K(E)$ es artiniano si es finito dimensional, como K-módulo derecho(como espacio vectorial).

Corolario 3.30 *Las únicas K-álgebras finito dimensionales que surgen como $L_K(E)$ para algún grafo E son de la forma $A = \oplus_{i=1}^{t} M_{n_i}(K)$.*

De aquí surge otra pregunta sobre las álgebras finito dimensionales. Ya identificamos cuales son todas, pero tenemos varios grafos que sabemos que dan las mismas álgebras. Entonces, ¿podremos dar una familia de grafos que incluya un grafo para cada álgebra de caminos de Leavitt finito dimensional, salvo isomorfismo, y que sea mínima? Llamaremos a esto un **conjunto mínimo realizador**. El primer conjunto mínimo realizador es el que trabajamos primero para el isomorfismo, donde el grafo $L_K(R_n) \cong M_n(K)$, dando una manera de generar las sumas directas:

Proposición 3.31 (Conjunto mínimo realizador #1) *El conjunto de uniones de grafos lineales orientados es un conjunto minimal generador para el isomorfismo de clases de álgebras de caminos de Leavitt de dimensión finita.*

El grafo mostrado en la proposición anterior es disconexo. Trataremos de arreglar eso. ¿Qué pasará con los ideales de una dimensión? No podemos unirlos, pero tal vez podemos encontrar grafos módulo ideales de una dimensión, que son conexos. El teorema permite que si $A = \oplus_{i=1}^{t} M_{n_i}(K)$ con cada $n_i \geq 2$, el grafo



da un grafo conexo para el cual $L_K(E) \cong A$.

Definición. (Grado de salidas y grado total) El grado de salidas de un vértice v en un grafo dirigido E, denotado $outdeg(v)$, es el número de aristas en e tal que $s(e) = v$; i.e. $outdeg(v) = |s^{-1}(v)|$. El grado total de un vértice v es el número de aristas que tienen a v como su fuente o su rango, eso es, $totdeg(v) = |s^{-1}(v) \cup r^{-1}(v)|$. El grafo conexo E mostrado arriba tiene $outdeg(v) = t$ y $outdeg(w) \leq 1$ para el resto de vértices.

Definición. (grafo lineal y grafo de cola de cometa) Decimos que un grafo finito E es un grafo lineal si es conexo y acíclico y $totdeg(v) \leq 2$ para cada $v \in E_0$. Un grafo lineal es orientado en caso que $outdeg(v) \leq 1$ para cada $v \in E_0$. Si queremos enfatizar el número de vértices, decimos que E es un grafo n-lineal cuando $n = |E_0|$. El grafo **cola de cometa** que une n grafos lineales orientados produce un grafo isomorfo para $\oplus_{i-=1}^{t} M_{n_i}(K)$ al identificar su origen único como un mismo elemento de un nuevo grafo. Denotemos por $G = \vee_{i=1}^{n} M_{n_i} = C(n_1, \ldots, n_t)$ este nuevo grafo. Ahora incorporemos los vértices aislados de estos grafo. Sea $G = (G_o, G_1)$ un grafo dirigido. Para $s \geq 1$ sea G^{*s} el grafo formado por $G_0 \cup \{u_1, \ldots, u_s\}$, y las aristas de G_1. Entonces G^{*s} se produce de añadir s vértices aislados.

Asumimos que la secuencia de enteros del grafo cola de cometa es ordenada. Gene Abrams en sus notas del taller en álgebras de caminos de Leavitt muestra un tercer conjunto mínimo realizador. No lo mostramos por brevedad.

Proposición 3.32 (Conjunto mínimo realizador #2) *Sea K un campo, y A alguna álgebra de caminos de Leavitt finito dimensional. Existe un grafo cola de cometa $C(n_1, \ldots, n_t)$, y un entero s, para el que $A \cong L_K(C(n_1, \ldots, n_t)^{*s})$. Esta representación es única.*

3.3 Localmente finitas y casi no infinitas.

Introducimos en esta sección los conceptos de localmente finito y casi no infinito. Luego, caracterizaremos los grafos E tales que $L_K(E)$ cumple ambas propiedades. Siempre podemos escribir $L(E)$ como un álgebra graduada, aunque todos sus ideales no lo sean. Sin embargo, cada comonente homogénea no necesariamente es finita dimensional. En caso que sí, diremos que $L_K(E)$ es localmente finita.

Definición. Si $A = \oplus_{g \in G} A_g$ es una K-álgebra graduada por un grupo G, entonces A se llama **localmente finita** en caso que cada componente A_g es finita dimensional como un espacio vectorial sobre K.

El ejemplo principal es el álgebra de Laurent, que tiene $A = K[x, x^{-1}] = L_K(C_1)$ es localmente finita. La graduación está dada por $\deg(pq^*) = \deg(p) - \deg(q^*)$. Cada componente tiene dimensión 1. De hecho $A_n = \{kx^n | k \in K\}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Es muy importante notar que localmente finito es una propiedad dependiente de la graduación que se le otorga al álgebra. Pasamos a otra definición.

Definición. La K-álgebra A es llamada **casi no infinita** en caso que A es infinita dimensional, pero A/I es finita dimensional para cada ideal de ambos lados distinto de cero de A.

Podemos intentar usar esta misma definición para A como un anillo, o para un módulo.

Ejemplo. Consideremos a los enteros $\mathbb{Z}$ como anillo, y apliquemos esta definición. El anillo $\mathbb{Z}$ es casi no infinito pues $\mathbb{Z}_n$ es finito para todo n. Ahora consideremos un espacio vectorial E de dimensión $\aleph_0$. Podemos establecer para una base $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ el espacio cociente, sin pérdida de generalidad, $a_1 \sim 0$ y claro E no es casi no infinito.

Identificaremos todas las álgebras de caminos de Leavitt que son localmente finitas. Luego veremos las casi no infinitas. También identificaremos todas las localmente finitas que son casi no infinitas. Más adelante veremos que para verificar si $L_K(E)$ es casi no infinita, y el álgebra en cuestión es localmente finita, sólo necesitamos que la codimensión de cada componente en la graduación.

Definición. (condición NE) Diremos que un grafo cumple la condición **NE** si ningún ciclo tiene una salida.

Lema 3.33 *Si E es un grafo finito que satisface* **NE** *entonces cada camino de E que es una cadena de más grande que $|E_0|$ termina en un ciclo.*

Demostración. Supongamos que existe un camino de longitudo $l > |E_0|$ que no termina en un ciclo. Tal vez pasa por un ciclo o no. Si no pasa por un ciclo $|E_0| > l$, no puede ser. Debe pasar por un ciclo y salir de él, pero E no cumple NE. ∎

Definición. (C^n_m). Sea $n \in \mathbb{Z}$ y $L_K(E)$ graduada por $\mathbb{Z}$. Para $m \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq m$ denotemos por C^n_m el subconjunto de la componente graduada $L_K(E)_n$ de $L_K(E)$:

$$C^n_m := \{pq^* : p \in E^m, q \in E^{m-n}\} \subset L_K(E)_n,$$

y $C^n_m = \emptyset$ si $n > m$.

En otras palabras, C^n_m es la colección de monomios en $L_K(E)_n$ cuya parte real tiene largo m, $|p| = m$. *Para un álgebra graduada, $L_K(E)_n = (L_K(E)_{-n})^*$.* Si un elemento tiene $pq^* \in L_K(E)_n$, con $|p| - |q| = n$, entonces $|q| - |p| = -n$. Este elemento $qp^* \in L_K(E)_{-n}$. De manera igual se puede proceder con $qp^* \in L_K(E)_{-n}$. La contención es doble, así son iguales.

El siguiente resultado dice que en ciertos casos sólo necesitamos considerar finitos subconjuntos C_m^n para n fijo en orden que sea posible generar todo $L_K(E)_n$ como espacio vectorial sobre K.

Lema 3.34 *Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si existe $t \in \mathbb{N}$, $t \geq n$, tal que $C_{t+1}^n \subseteq \cup_{i=1}^t C_i^n$ entonces $\cup_{i=1}^\infty C_i^n \subseteq \cup_{i=1}^t C_i^n$.*

Demostración. Supongamos que $C_{t+1}^n \subseteq \cup_{i=1}^t C_i^n$. Mostraremos que para cada $r \in \mathbb{N}$, $C_{t+r}^n \subseteq \cup_{i=1}^t C_i^n$. Usaremos inducción sobre r.

Paso base: Es la hipótesis.

Paso inductivo. Suponer que $C_{t+r-1}^n \subseteq \cup_{i=1}^t C_i^n$. Consideremos

$$\mu = e_{t+r}e_{t+r-1}\cdots e_1 f_1^* \cdots f_{t-n+r-1}^* f_{t-n+r}^* \in C_{t+r-1}^n,$$

y definamos

$$\nu = e_{t+r-1}\cdots e_1 f_1^* \cdots f_{t-n+r-1}^* \in C_{t+r-1}^n.$$

Debemos obetener μ multiplicando ν, con

$$\begin{aligned}
\mu &= e_{t+r}\nu f_{t-n+r-1}^* \in e_{t+r}C_{t+r-1}^n f_{t-n+r-1}^* \\
&\subseteq e_{t+r}\left(\cup_{i=1}^t C_i^n\right) f_{t-n+r-1}^* \subset \cup_{i=2}^t C_i^n \subset \cup_{i=1}^t C_i^n. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 3.35 (Componentes infinito dimensionales) *Para un grafo E finito las siguientes son equivalentes:*

1. *$L_K(E)_n$ es infinito dimensional para algún $n \in \mathbb{Z}$,*

2. *$L_K(E)_n$ tiene dimensión infinita para cada $n \in \mathbb{Z}$,*

3. *E contiene un ciclo con una salida.*

Demostración. $(2 \to 1)$. Es clara.

$(1 \to 3)$. Suponer por el contrario que E tiene la condición NE, pero la dimensión de la comonente homogénea de grado n es infinita. Sea $t = \max(n, card(E_0))$. Vamos a mostrar que $C^n_{2t+1} \subseteq \cup_{i=1}^{2t} C^n_i$.

Sea ν un elemento distinto de cero en C^n_{2t+1}, digamos

$$\nu = e_1 \dots e_{2t+1} f_1^* \dots f_{2t-n+1}^*.$$

Por el lema NE, $r(e_{2t+1})$ esta en un ciclo c. Como

$$2t - n + 1 = t + t - n + 1 \geq t + 1 \geq card(E_0),$$

el lema puede ser aplicado a $f_{2t-n+1} \dots f_1$, de manera que f_1 debe estar en un ciclo d(que podría ser c). Es más, como $\nu \neq 0$ y E satisface la Condición NE(no se puede salir del ciclo), tenemos que $c = d$, y $e_{2t+1} = f_1$(sino $\nu = 0$). Esto quiere decir que $\nu \in C^n_{2t}$ y que $e_{2t+1} f_1^* = s(e_{2t+1})$. Ahora si notamos que $\cup_{i=1}^{\infty} C^n_i$ es un conjunto generador para $L_K(E)_n$, el lema técnico que vimos concluye

$$\cup_{i=1}^{\infty} C^n_i \subset \cup_{i=1}^{2t} C^n_i.$$

Añadiendo el hecho que cada C^n_i es finito dimensional, por definición, la finitud de E se aplica para concluir que la unión debe ser finita. Pero eso resulta en una contradicción.

$(3 \to 2)$. Sea f una salida para el ciclo c, que tiene una salida por hipótesis. Adicionalmente supongamos que $v := s(f) = s(c)$. Sea $k = \deg(c)$, y escribamos $c = e_k \dots e_1$. Dado $n \geq 0$, hagamos $n = bk + s$, con $0 \leq s < k$.

Se propone que

$$\{e_s \dots e_1 c^b c^r (c^*)^r \big| r \in \mathbb{N}\} \subset L_K(E)_n,$$

es un conjunto linealmente independiente en $L_K(E)_n$.

En efecto, supongamos que

$$\sum_{r=i}^{n} k_r e_s \cdots e_1 c^b c^r (c^*)^r = 0,$$

tal que $k_r \in K$ y $k_i \neq 0$. Multipliquemos por la izquierda $(c^*)^i (c^*)^b e_1^* \dots e_s^*$, y por la derecha c^i,

$$\begin{aligned} 0 &= (c^*)^i (c^*)^b e_1^* \dots e_s^* \left(\sum_{r=i}^{n} k_r e_s \cdots e_1 c^b c^r (c^*)^r \right) c^i && (3.5) \\ &= k_i v_i + \sum_{r=i+1}^{n} k_r c^{r-i} (c^*)^{r-i} && (3.6) \\ &= k_i f^* v_i + \sum_{r=i+1}^{n} k_r f^* c^{r-i} (c^*)^{r-i} = k_i f^*, && (3.7) \end{aligned}$$

una contradicción. Hemos usado que f es una salida de c y que $\alpha^* \beta \gamma^* = 0$. Obtengamos el caso de $n < 0$ usando la involución. Como $L_K(E)_n = (L_K(E)_{-n})^*$, entonces

$$\dim_K (L_K(E)_n) = \dim_K ((L_K(E)_{-n})^*) = \dim_K (L_K(E)_{-n}) = \infty.$$

Eso termina la prueba. ∎

La condición de finitud de E en el útlimo resultado no puede librarse. Por ejemplo, si E es acíclico con infinitos vértices y sólo un número finito de aristas, esto da:

$$\dim_K (L_K(E)_0) = \infty,$$
$$\dim_K (L_K(E)_n) = 0,$$

para n suficientemente grande. En el resultado anterior E es forzosamente finito.

Tenemos la misma equivalencia para la contraposición de esta equivalencia anterior, si no hay una comonente homogénea de dimensión infinita, no hay condición NE. Hemos probado con el teorema anterior el siguiente enunciado sobre la clasificación de grafos que otorgan álgebras de caminos de Leavitt localmente finitas:

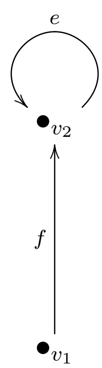
Teorema 3.36 *Es equivalente decir que:*

1. *$L_K(E)$ es s localmente finito,*

2. *E es finito y tiene la condición NE.*

Ejemplo. 1. Consideremos como un ejemplo el álgebra de caminos de Leavitt del grafo en la figura: Tenemos que $\dim_K(L_K(E)_0) = 4$; $\dim_K(L_K(E)_1) = \dim_K(L_K(E)_{-1}) =$

Figura 3.3: Grafo para ejemplo 1 de $L_K(E)$ graduada por $\mathbb{Z}$.



4; y $\dim_K(L_K(E)_n) = 3$ para todo $|n| \geq 2$. Si las componentes son finito dimensionales no necesariamente tienen todas la misma dimensión.

2. Queremos llevar nuestra atención a las ACL's localmente finitas que son casi no infinitas. Distinguimos los siguientes conceptos:

- Graduada y simple: El álgebra es simple respecto a los ideales graduados, no hay un ideal no trivial con graduación en $L_K(E)$. Sin embargo esto no quiere decir que $L(E)$ sea simple.[8]

- Graduada casi no infinita. Esto quiere decir que para cada ideal graduado I, $L(E)/I$ es finito. Puede haber un ideal no graduado para el que $L(E)/I$ es infinito, mostramos el ejemplo en el grafo abajo.

- Casi no infinita. Precisamente que $L(E)/I$ es finito para cualquier I.

Figura 3.4: Grafo para ejemplo 2 de $L_K(E)$ graduada y simple.

$$\begin{tikzcd} \cdots\cdots \arrow[r] & \bullet_{v_2} \arrow[r, "f_2"] & \bullet_{v_1} \arrow[r, "f_1"] & \bullet_{v} \arrow[loop right, "l"] \end{tikzcd}$$

Observemos la figura del ejemplo 2. Para este grafo, $\mathcal{H} = \{\emptyset, E_0\}$, entonces no hay ideales graduados. Como es graduada y simple, es graduada casi no infinita.

Sin embargo $L_K(E)$ no es casi no infinita. El ideal $I = \langle v + l \rangle$ es el mismo ideal $\langle 1 + x \rangle$ en $K[x, x^{-1}]$. El álgebra de polinomios de Laurent es una subálgebra, pero no un ideal de $L_K(E)$. Este ideal tiene codimensión infinita. Los vértices $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tienen una proyección $\{\overline{v_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ linealmente independiente en $L_K(E)/I$.

Esbocemos una prueba. Debería suceder que $v_i \notin I$. Pero $v \notin I$, como argumentado en el Teorema de Simplicidad, este es el elemento $\langle v + p \rangle = \langle \alpha \rangle$ que genera un ideal no trivial, cuando p es un ciclo en $CSP(v)$ que no tiene salida. Si $v \in I$ podemos concatenar $f_i^* f_i$ para obtener cada v_i. Esto no es posible si $v \notin I$, da $f_i^* f_i \gamma = 0$ para $\gamma \in I$; también al multiplicar por el otro lado. Escojamos $i = 1$, $c_i \in K$ para un cálculo explícito:

$$\begin{aligned} f_1^* f_1 \gamma &= v_1 \gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i (v + l) \beta_i && (3.8) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i v_1 (v \alpha_i v)(v + l)(v \beta_i v) && (3.9) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i (\delta_{1,0})(\alpha_i v)(v + l)(v \beta_i v) = 0. && (3.10) \end{aligned}$$

A continuación hacemos unos lemas para clasificar las ACL's que son casi no infinitas. Debemos de obtener algunas equivalencias para una propiedad sobre E y también un teorema general sobre las álgebras graduadas sobre $\mathbb{Z}$, que son casi no infinitas. Esto nos dará el teorema de clasificación que deseamos, para luego buscar las que son ambas, casi no infinitas y localmente finitas. Como recordatorio, V_0 es

[8] Recordemos que $L_K(E)$ siempre tiene graduación. Podemos usar el término graduada y simple sin crear confusión.

el conjunto de vértices que no están en ningún ciclo, y que para cualquier $h \in \mathcal{H}$, podemos hacer el grafo cociente E/h, que tiene $L(E/h) \cong L(E)/\langle h \rangle$. También introducimos la definición de un grafo cofinal.

Lema 3.37 *1. Si $L(E)$ es graduado casi no infinito. Si $H \neq \emptyset$ y $H \in \mathcal{H}$ entonces $E_0 - H$ es un conjunto finito y $E_0 - V_0 \subset H$.*

2. Sea $L(E)$ graduado casi no infinito. Si $H, H' \in \mathcal{H}$ son no vacíos, su intersección $H \cap H'$ es no vacía.

Demostración. 1. Si $E_0 - H$ fuera infinito E/H contendría infinitos vértices. Esto significa que $L(E - H)$ sería infinito dimensional. Pero $L_K(E - H) \cong L_K(E)/(H)$. También sabemos que (H) es un ideal graduado distinto de cero. Pero esto es imposible si $L(E)$ es casi no infinito. Hasta ahora hemos probado que E/H contiene finitos vértices.

Supongamos que $v \in (E_0 - V_0) - H$. Esto quiere decir que existe un ciclo μ con base $v \notin H$. Usando que H es hereditario, $\mu_0 \cap H = \emptyset$, donde μ_0 son los vértices $\{s(e_i), r(e_i) : \mu = pq^*, p = e_1 \ldots e_n, q = e_{n+1} \ldots e_m\}$. Inmediatamente $s(e_i), r(e_i) \notin H$. Entonces $e_i \in E/H$. Esto quiere decir que E/H contiene completamente al ciclo μ, y $L_K(E/H)$ es infinito dimensional, de nuevo contradiciendo la hipótesis.

2. Como $L_K(E)$ es infinito dimensional debe contener un ciclo, o E_0 debe ser un conjunto infinito.

Consideremos que E_0 sea infinito. Podemos usar la parte primera del lema para concluir que $E_0 - H$ y $E_0 - H'$ son finitos. Si $H \cap H = \emptyset$ entonces $H \subseteq E_0 - H'$. Ambos H y $E_0 - H$ son finitos, que es imposible si E_0 es infinito.

Supongamos ahora que E tiene al menos un ciclo, llamemos a este c y sea v la base del ciclo. Tenemos que $V_0 = \{v \in E_0 : CSP(v) = \emptyset\}$, por lo tanto $v \notin V_0$. Aplicamos la primera parte del lema obteniendo $v \in E_0 - V_0 \subseteq H, H'$, que da $H \cap H' \neq \emptyset$. ∎

Definición. Sea E^∞ el conjunto de caminos infinitos sobre E, $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$. Denotemos ahora por $E^{\leq \infty}$ el conjunto de caminos finitos que terminan en un pozo junto con

E^{∞}. Un vértice v es cofinal si para cada camino $\gamma \in E^{\leq\infty}$ hay un vértice w en el camino tal que v se conecta a w, i.e $v \geq w$. Un grafo E es cofinal si todos sus vértices son cofinales.

Los siguientes resultados están mostrados en Aranda, Pardo, Siles (2006).

Lema 3.38 *Si E es cofinal y v es un pozo en E_0 entonces:*

1. *El único pozo de E es v,*

2. *Para cada $w \in E_0$, $v \in T(w)$,*

3. *E no contiene caminos infinitos. En particular E no tiene ciclos.*

Demostración. Probemos que: (1). El único pozo es v. Asumamos que hay dos pozos en E_0, y tomemos un camino γ hacia v', el otro pozo. Como γ termina en un pozo está en $E^{\leq\infty}$ y existe $w \in \gamma$ tal que $v \geq w$. Pero así v no es un pozo.

(2). Tomemos un $w \in E_0$. Tenemos que para algún camino γ finito que termine en v, $w \geq z \in \gamma \rightarrow w \geq v$. Eso quiere decir $v \in T(w)$.

(3). Sea $\alpha \in E^{\infty}$. Existe $w \in \alpha$ tal que $v \geq w$, no puede suceder. En particular, E no contiene caminos cerrados simples porque así existiría un α infinito. Por lo tanto E no tiene ciclos. ∎

Usaremos en el siguiente lema la reescritura de $G(X)$ como usamos en lema 3.15 al final de la sección 3.1 para clasificar las álgebras de caminos de Leavitt simples.

Lema 3.39 *El grafo E es cofinal si y sólo si $\mathcal{H} = \{\emptyset, E_0\}$.*

Demostración. ($\rightarrow$). Supongamos que E es cofinal. Consideremos $H \in \mathcal{H}$ y $\emptyset \neq H \neq E_0$. Fijemos un $v \in E_0 - H$ y construyamos un camino $\gamma \in E^{\leq\infty}$ tal que $\gamma \cap H = \emptyset$. Si v es un pozo tomemos $\gamma = v$, sino tenemos que $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ y $r(s^{-1}(v)) \subsetneq H$ porque H es hereditario y saturado, y de otra manera $v \in H$ contrario a lo asumido. Escojamos una arista e_1 de $s^{-1}(v)$ que tenga rango fuera de H. Podemos tomar $\gamma = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ construido así:

Sea $\gamma_1 = e_1$ y repitamos el proceso para $r(e_1)$ encontrando e_2 y haciendo $\gamma_2 = e_2$. Obtenemos así continuando γ, un camino infinito con $H \cap \gamma = \emptyset$. Ahora, tomemos un vértice $w \in H$. Como $\gamma \in E^{\leq\infty}$ existe un $z \in \gamma$ con $w \geq z$, pero entonces $z \in H$ y no podemos construir γ.

($\leftarrow$). Supongamos que $\mathcal{H} = \{\emptyset, E_0\}$. Probemos que E es confinal. Es claro que $E^{\leq\infty}$ es no vacío. Sea $\gamma \in E^{\leq\infty}$ y escojamos v que no esté en γ. Entonces $G(\{v\}) = E_0$. Usemos que $G(\{v\}) = T(v) \cup (\cup_n \Lambda_n(\{v\})$ donde $\Lambda_n(\{v\}) = S(\Lambda_{n-1}(\{v\})$ y $\Lambda_0(\{v\}) = T(v)$. Consideremos

$$m = \min\{n : w \in \gamma \text{ y } w \in \Lambda_n(\{v\})\}.$$

Si $m > 0$ hay una arista en $e \in s^{-1}(w)$ (este conjunto es no vacío) y $e \in \gamma$ tal que $r(s^{-1}(w)) \subset \Lambda_{n-1}(v)$, y $r(e) \in \Lambda_{n-1}(v)$. Esto quiere decir que w no es un pozo pero el rango de e es un elemento de γ y contradice la minimalidad de m. Debe ser que $m = 0$, y $v \geq w$ para cualquier v y γ. Por lo tanto E es cofinal. ∎

Argumentemos más propiedades de E, al asumir que es casi no infinito. Primero, si E tiene un vértice aislado, entonces este vértice es un ideal, de hecho $\{v\} \in \mathcal{H}$ y $L_K(E)$ no es simple. Pero así, como $L_K(E)$ es infinito dimensional, el grafo $E - \{v\} = F$ cumple que L(F) es infinito dimensional. Obtenemos

$$L(E) = L(F) \oplus (v) \cong \frac{L(E)}{(v)} \oplus K,$$

no es casi no infinito. De hecho, si usamos el lema que concluye que $H \cap H'$ es no vacía, miramos que en particular esto dice que si $L_K(E)$ es graduado casi no infinito, E debe de ser conexo. Pero también si es solamente casi no infinito, al igual que en el ejemplo de un vértice aislado, casa componente conexa es un conjunto de $\mathcal{H}$. Por hipótesis, uno de estos es infinito o tiene un ciclo. Tomar el cociente por la otra componente da que es casi no infinita, y de hecho $H \cap H' = \emptyset$, para cada componente conexa.

Si $L_K(E)$ es casi no infinito, cada ideal bilateral I debe de exlcuir del cociente infinitos vértices y todos los ciclos. Si $h \in \mathcal{H}$, $E_0 - h$ es finito también para casi no infinitas.

Lema 3.40 *Si $L_K(E)$ es casi no infinito entonces:*

1. *E es conexo,*

2. *si $h \in \mathcal{H}$ es no vacío, contiene todos los ciclos y E/h es finito.*

El siguiente teorema muestra una equivalencia para las álgebras de caminos de Leavitt casi no infinitas:

Teorema 3.41 *Sea $L(E)$ infinito dimensional. Es equivalente que:*

1. *$L(E)$ es graduado casi no infinito,*

2. *E es cofinal,*

3. *$L_K(E)$ es graduado y simple.*

Demostración. $(3 \to 1)$. Es claro.

$(1 \to 2)$. Supongamos por el contrario que $h \in \mathcal{H}$ es no vacío y $h \neq E_0$. Como $L_K(E)$ es graduada casi no infinita, tenemos que $E_0 - h$ es vacío, y además, ¡E es conexo!

Sea $V = E_0 - h := \{v_1, \dots, v_n\}$. Como estos no están en h, h no se conecta a V, pero los vértices de V se pueden (y al menos uno se conecta a h). Para cada v_i debe ser que v_i tiene una arista hacia otro v_j, si v_i se conecta a h, por la condición saturada, o algún v_j se conecta a este v_i. Es imposible que cada v_i se conecte a h, porque habría un ciclo entre los vértices de V. Resulta entonces que $L(E)/\langle h \rangle$ deja afuera un ciclo, y como $\langle h \rangle$ es un ideal graduado, $L_K(E)$ no es graduado casi no infinito.

No hay un ciclo fuera de h indica que hay algún v_i que no se conecta a h. En ese caso v_i debe ser un pozo, sino forma un ciclo. Consideremos $G(v)$, donde debemos aplicar la condición saturada únicamente, como $T(v) = \{v\}$. Aplicar la condición saturada n veces, no puede incluir elementos de h, pues al tomar v_j que se conecta con e_{v_j} a h, $v_j \notin G(v)$, pues $r(e_{v_j}) \in h$. Entonces $G(v) \cap h = \emptyset$, contradiciendo de nuevo el lema, $\therefore E_0 - h = \emptyset$, dando $h = E_0$.

$(2 \to 3)$. Si E es cofinal, por el lema $\mathcal{H} = \{\emptyset, E_0\}$. Los únicos ideales graduados corresponden a (0) y $L_K(E)$ mismo, es decir $L_K(E)$ es graduado y simple.

Hemos identificado las ACL's graduadas casi no infinitas. Pero las ACL's casi no infinitas no se han identificado completamente, al menos hasta junio de 2006. Sin embargo si se puede identificar las localmente finitas casi no infinitas. Trataremos de hacer eso. Mostramos un teorema sin prueba, atribuido por Gene Abrams a una idea de D. Roglaski. Esto nos servirá, ya que podemos afirmar como consecuencia de el teorema que si $L_K(E)$ es localmente finita, graduada casi no infinita es lo mismo que casi no infinita.

Teorema 3.42 *Sea A cualquier álgebra localmente finita y graduada por $\mathbb{Z}$. El álgebra A es graduada casi no infinita si y sólo si A es casi no infinita.*

Caso $A = L_K(E)$. Tratamos de esbozar una prueba en el caso especial de $L_K(E)$. Sabemos que $L_K(E)$ debe ser finito y cumplir NE. Si $L_K(E)$ es graduada casi no infinita, E debe contener un ciclo. También, E es cofinal. Probamos que esto implica que E no puede tener dos ciclos, pero debe tener uno, sino no es infinito dimensional.

Sean c y c' ciclos en E. Ninguno tiene una salida, entonces hay un vértice v no contenido en c_0 y c'_0 tal que v se conecta a ambos ciclos. Consideremos $G(c_0)$. Verifiquemos que $v \notin G(c_0)$. Claro, $T(c_0) = c_0$, por NE. El vértice v no puede incluirse en la condición saturada, porque se conecta al otro ciclo, y para que eso suceda alguna parte del camino p' que conecta v a c' no puede incluirse en la condición saturada, dejando el otro ciclo afuera. Debemos refinar este detalle.

Para cada vértice fuera de los dos ciclos w, tenemos tres opciones. Este puede conectarse a ambos ciclos, está en el arból T(v) de un vértice que se conecta a ambos o está en el arból T(v) de un vértice que sólo se conecta a un ciclo. El conjunto de vértices que se conectan a ambos ciclos no es vacío, sino el grafo no es conexo. Para este conjunto de vértices, el más "próximo" a c' es el que nos interesa. Tomemos la cerradura de c_0. La cerradura $\overline{T(c_0)}$ deja afuera a c_0', porque de otra manera aplicar la condición saturada n veces incluye a estos vértices que nombramos antes, y que los rangos de las aristas que los tienen como fuente, ya están todas en $T(c_0)$, una contradicción porque crearía otro ciclo. Los grafos lineales que van a ambos ciclos serían no orientados, y así como falla para estos que el grafo es cofinal, falla para este grafo en particular, excluyendo a un ciclo. Aplicar la condición saturada funciona. En cada grafo lineal no orientado que une a los dos ciclos, queda bisecado en el vértice donde cambia de orientación y la distancia a c' es mínima(y cambia de orientación al menos una vez, que será suficiente). Si sucede lo contrario, el vértice se vuelve a conectar al grafo lineal que va al mismo ciclo c, pero tiene que haber un vértice que se conecta a ambos, que está más cercano a c'. Este será el que funciona. Como E es cofinal, debe ser que sólo tiene un ciclo.

El grafo E está formado por un subgrafo C_r, y grafos lineales orientados que se conectan al ciclo C_r. Le llamaremos a este **grafo C_n-cometa**, donde n es el número de vértices en E. Podemos describirlo también diciendo que E es finito, tiene un ciclo sin salidas y que cada vértice se conecta a él.

Argumentamos adicionalmente que el grafo C_n-cometa tiene un álgebra $L_K(E)$ casi no infinita, además de graduada casi no infinita. Admitimos que concluir esto, como casi no infinita es una condición más fuerte, otorga la equivalencia para estas dos propiedades dado que $L_K(E)$ sea localmente finito. El C_n-cometa tiene ideales no graduados cuando tomamos los generadores distintos a los vértices. Por ejemplo $v + c$ podría generar este ideal. Vimos un ejemplo donde el ideal de esta forma tenía dimensión infinita, porque habían infinitos vértices afuera de él. Lo que debe suceder en el grafo es que estos ideales siempre tienen codimensión finita. Lo único que necesitamos para eso es ver que si $L(E) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} L_(E)_n$, cada uno de dimensión finita, entonces $L(E)/I$ tiene que eliminar las componentes mayores a algún m, menores a algún $-m'$. Esto probaría que:

Teorema 3.43 *Sea E un grafo tal que $L(E)$ es infinita dimensional y localmente finita. Es equivalente que:*

1. *$L_K(E)$ es graduada casi no infinita,*

2. *$L_K(E)$ graduada y simple*

3. *$L_K(E)$ es casi no infinita,*

4. *E es cofinal.*

Investigamos más los ideales de $L(C_n - cometa)$. Sea $x \in I$, donde I es un ideal no graduado. Aunque esto suceda, x tiene escritura como $x = \sum_{i=m}^{n} x_{r_i}$, donde $x_{r_i} \in L_K(E)_{r_i}$, dados $m, n, r_i \in \mathbb{Z}$, enteros cualesquiera. Como cada uno de estos es finito dimensional, de hecho podemos escribir cada $x = x_{r_1} + \cdots + x_{r_i}$ y $x_{r_i} = \sum_{j=1}^{s} k_j x_{r_i}^j$, en términos de la base de la comonente homogénea. Es imposible que I no tenga elementos de cada comonente homogénea, porque $L_K(E)$ es casi no infinito. Esto nos deja concluir que hay algún entero $m > 0$ y un entero $-m' < 0$ tal que $L(E)_n \subset I$ si $n \geq m$ o $n \leq n$.

Proponemos que si $L_K(E)$ contiene cada comonente homogénea de grado mayor a n, contiene a la n-1, si el grado es mayor a cero. La involución da el resultado para las componentes de grado menor a cero. Lo hacemos de la manera siguiente:

Contemos los caminos en E distintos del ciclo. Tenemos caminos pq^* con finitas posibilidades para p y q. Estos dan casi todos los caminos de la comonente homogénea de grado n de $L(E)$, hasta cierto n. Si incluimos el ciclo en la parte real, lo podemos concatenar en finitos lugares, hasta finitos grados, si queremos que $pq^* \in L_K(E)$ reemplazando por c algunos elementos. Lo mismo con q^*, usando c^*. Estos son finitos caminos, incluyendo las multiplicaciones que dan cero. De hecho estos son todos los posibles elementos (monomios) en $L_K(E)_n$.

Para generar la siguiente componente, $L_K(E)_{n+1}$, concatenemos una arista del lado izquierdo a cada uno de $L_K(E)_{n+1}$. Podemos multiplicar cada arista de E dado que el grafo es finito. Debemos de haber incrementado un grado, pero esos no son todos los elementos posibles. Sin embargo ya hemos adjuntado finitos elementos a $L_K(E)_{n+1}$. Ahora debemos multiplicar un elemento del lado derecho, fantasma, y otro del lado izquierdo, real. Tomamos todas esas posibilidades, y volvemos a hacerlo, infinitas veces. Obtenemos, como $L_K(E)$ es localmente finita, en algún momento estos elementos se vuelven cero. De hecho, en algún momento los caminos de largo mayor a un m, los vértices en el grafo, tenemos dentro de pq^*, el ciclo real o fantasma. Al subir cada componente, si no nos quedamos en el ciclo, podemos adjuntar sólo caminos de largo no más que m, los grafos lineales deben de tener camino de tamaño a lo más $m-1$. Como el proceso de obtener un elemento de esta manera es reversible: $\alpha pq^*\beta^* \in L_K(E)_{n+1}$, tomamos, $\alpha^*\alpha pq^*\beta^*\beta = pq^* \in L_K(E)_n$, podemos concluir dado una cosa más. Debe ser que si I es un ideal graduado, $I \cap L_K(E)_n = I_n$ da $I_n = L_K(E)_n$ en algún momento. Lo mismo para los negativos. Nuestro argumento concluye que $I = L(E)$, y $L(E)$ es graduado y simple como habíamos concluido previamente (partiendo de que $L(E)$ es localmente infinito y graduado casi no infinito).

Queremos obtener que $L(E)$ es casi no infinito para concluir el teorema. Sabemos que si es graduado casi no infinito tenemos un $C_n - \mathit{cometa}$. Si tenemos un ideal que no es graduado, debemos tenera alguna combinación lineal que incluya a c o c^* dentro de los monomios,

$$x = \sum_i \alpha_i x_i^j = \sum_i \alpha_i x_i^j + \alpha_{i_0} x_{i_0}^j, \tag{3.11}$$

$$x_{i_0}^j = e_{i_1} \cdots e_{i_r} c_{i_r}^n e_{l_1}^* \cdots e_{l_s}^*, \tag{3.12}$$

por ejemplo. Podría ser que $n < 0$, y ésta sería de hecho la forma general de un monomio, donde hay un camino, el ciclo centrado en un vértice y un camino fantasma. Solamente pueden estar en el medio potencias positivas o negativas del ciclo, lo veremos luego. Asumiremos que el ideal (ya que no sabemos si $L_K(E)$ es PID, finitamente generado o algo parecido), tiene como generador un elemento de esta forma. Concluiremos que los elementos tienen que expresarse como combinaciones lineales de $x \in \oplus_{i=-m'}^{m} L_K(E)_i$. La razón por la que no son graduados es que $I \cap L(E)_i = \emptyset$, y tenemos estos elementos escritos de forma que son "irreducibles" a elementos de una sola componente, y así irreducibles a los elementos de $L(E)_0$. Si pensamos en $p(c, c^*)$ como elemento de $K[x, x^{-1}]$, deben ser polinomios sin inverso, similares a $1+x^n$. Pero cada polinomio al dividirse por $1+x^n$ es un elemento de grado $n-1$ si sólo tiene potencias de x. Si tiene potencias n' de x^{-1}, queda un residuo en potencias de no menores a $-m' = n' - n$, no mayores a m, $m = n-1$, donde n es la mayor potencia de x. Estos dan nuestros números $m, -m'$.

Demostración. $(1, 2, 4 \to 3)$. Para el $C_n - $ *cometa* tiene una complicación más a la discutida. El polinomio no esta restringido a la forma $p(c, c^*)$, pero a ser un polinomio en los elementos de las componentes homogéneas de grado hasta n, n'. Observamos ahora los elementos no en I, pero en $R = L(E)/I$. Podemos eliminar para un elemento $y \in L(E)$ expresado en combinaciones lineales de las componentes homogéneas, los términos en en y mayores a n, n', multiplicando x por los elementos adecuados, obteniendo un residuo que se escribe como $\bar{y}$. El elemento $\bar{y}$ es una suma de proyecciones a R de elementos de grado menor a $m > 0$ y mayores a $-m' < 0$. Aunque es cierto que estos monomios son de la forma

$$y_k = e_{i_1} \cdots c_{i_r}^{t_1} e_{i_{r+1}} \cdots e_{i_s} e_{i_{s+1}}^* \cdots (c^*)_{i_{s+r'}}^{t_2} \cdots e_{i_n}^*,$$

ya que el ciclo debe estar concatenado siempre junto de manera completa si aparece varias veces. De hecho si jugamos con los términos, centrando el ciclo en el vértice adecuado, podemos poner $y_k = e_{i_1} \cdots e_{i_r} c^t e_{i_{r+2}}^* \cdots e_{i_{r+s}}^* = p_i c^t p_j^*$. Podemos multiplicar nuestro elemento de la base para obtener este monomio solamente si es de grado mayor al grado más grande n del generador, dado algún generador de mínimo grado.[9] Llamemos x_n y $x_{n'}$ al monomio de menor y mayor grado de este generador. Si es más grande, podemos asumir que el residuo queda algún elemento de grado menor a cierto m, como veremos después.

Para cada elemento en x_n conocemos su inverso, de la parte real y la fantasma. Es decir, escribamos del monomio arbitrario y_k que esta en la escritura de $x \in L(E)$

[9]Podemos encontrar una dificultad de escogencia entre el generador de menor grado para grados positivos, y mayor para negativos. Aunque podríamos usar los dos elementos para dividir el polinomio, podemos obtener nuestro resultado usando el de mínimo grado positivo, y luego igualmente usarlo para dividir las potencias negativas sin preocupación.

que tiene grado mayor a n como $y_k = p_1 q_1^*$. Existen elementos $\alpha, \beta \in L(E)$ tal que

$$\alpha x_n \beta = p_1 q_1^*.$$

Cuando reducimos x_n decrementando el grado hasta llegar a $r(q) \in E_0$, donde $x_n = pq^*$, y podemos situar a $r(q)$ en el inicio $r(q_1)$ de los caminos p_1, q_1 porque dentro del ciclo podemos avanzar hacia cualquier vértice usando $e_i^* e_i$ por CK1. Es claro que es posible si estamos en el ciclo. En el caso de que se haya reducido x_n a un vértice en uno de los grafos lineales, recordemos que al igual que para R_n, en la sección 1.3.1 podemos avanzar y retroceder en los grafos lineales hasta el ciclo, porque sólo una arista tiene como fuente cada vértice, haciendo $e_i e_i^* = v_i$ y $e_i^* e_i = v_{i+1}$. Esto nos permite llegar al ciclo, avanzar en el ciclo hasta que lleguemos a $r(q_1)$ si esta en el ciclo, o sino retroceder en el grafo lineal correspondiente. La razón para retroceder es que cada vértice es fuente de sólo una arista. Pero eso sucede en el ciclo también porque no tiene salidas. Entonces podemos, tomando un vértice llegar a cualquier vértice en el ciclo(que se debe a que $\mathcal{H} = \{\emptyset, E_0\}$). Llamemos $\alpha_1 \beta_1^*$ a la caminata de $r(q)$ hacia $r(q_1)$, entonces

$$y_k = p_1 q_1^* = p_1(\alpha_1 p^*)(pq^*)(q\beta_1^*)q_1^* = (p_1\alpha_1 p^*)x_n(q\beta_1^*)q_1^* = \alpha x_n \beta^*. \tag{3.13}$$

Esto disminuye el grado del elemento arbitrario y. De hecho cualquier otro sumando de x que no sea eliminado, tiene grado menor a $x_n = pq^*$.

Caso 1. En efecto, debe ser igual a cero esa multiplicación. Asumamos que si $|p| - |q| \geq \deg(x_i) \geq 0$. Si $x_i = p_i q_i^*$ el primer paso daría $p^*(p_i q_i^*)q$ y el largo de p^* es mayor al de p_i, o el largo de q_i es menor al de q. No podemos usar CK1 suficientes veces para llevarlo a la forma pq^*, y por lo tanto es cero. Si es de la misma comonente homogénea, $\deg(x_n) = \deg(x_i)$ la multiplicación es cero, ya que debe haber algún elemento distinto que componga el camino.

Caso 2. Para el caso $\deg(x_i) \leq 0$ hagamos primero un ejemplo.

Tomemos $\gamma = e_3e_4e_5e_1^*e_2^*$, de $pq^* = e_3e_4e_5ce_2^*e_1^*$, pongamos

$$p^*\gamma q = (c^*e_5^*e_4^*e_3^*)e_3e_4e_5e_1^*e_2^*(e_2e_1) = c^*.$$

Cuando llevamos a E_0 el elemento y_k, a los demás podemos llevarlos a elementos de otro grado. Ahora multiplicaríamos este camino por p_1 y q_1 y es interesante sólo que fuera distinto de cero, y quedaría con grado $n-1$, al igual disminuido, a lo más. Podría quedar grado $0 \leq \deg(\alpha x_i \beta^*) \leq n-1$. Entonces si $\deg(x_i) < 0$, al mutiplicar por α y β^* obtenemos a fuerza un producto cero o un elemento de alguna de las componentes homogéneas que deseamos.

Caso 3. Para el caso de grado cero consideremos lo siguiente. Se hacen cero sólo los caminos que tienen $\deg(x_i) \geq 0$. Los que tienen grado cero, a menos que sean $v = r(p)$, se harán cero. En caso que sean $r(p)$ notemos que $p_1(\alpha_1 p^* r(p) q \beta^*) q_1^* = 0$.

Extensión del argumento para y. Hemos eliminado cada componente y_k de y de grado mayor a n con este argumento, y el residuo de y está dentro de $\overline{\oplus_{i=-m'}^{m} L_K(E)_i} = L(E)+I$. La proyección $\bar{y}$ se expresa como la combinación lineal de las proyecciones de la base de las componentes $L(E)_i$, con $-m' \leq i \leq m$, en el cociente correspondiente. Para los elementos de grado menor a cero, el procedimiento es similar. ¿Podríamos argumentarlo con la involución? Eso basta para concluir que el residuo de y_k está entre m y $-m'$ como queremos, $\therefore \bar{y} \in \overline{\oplus_{i=-m'}^{m} L_K(E)_i}$, que es un cociente de $L_K(E)$ de dimensión finita. Hemos probado que $L_K(E)$ es casi no infinito. ∎

El siguiente teorema describe los grafos que generan las ACL's que son localmente finitas y casi no infinitas.

Teorema 3.44 *El álgebra de caminos de Leavitt $L_K(E)$ es localmente finita y casi no infinita si y sólo si E es un $C_n - cometa$.*

El argumento del teorema previo es un resumen del teorema anterior y el resultado de que el grafo $C_n - cometa$ tiene un álgebra casi no infinita(y este caracteriza a los de casi no infinitos y a los graduados casi no infinitos, si $L(E)$ es localmente finito). Identificamos ahora la base de $L_K(C_n - cometa)$.

Lema 3.45 (base del C_n − *cometa*). *La base de $L(C_n - cometa)$ son los monomios de la forma $p_i c^k p_j^*$, donde c^k son las potencias de c, $k \in \mathbb{Z}$ con base solamente en un vértice.*

Demostración. Existen dos casos. Dejamos un vértice $v \in c_0$ fijo, y tomaremos otro v' cualquiera en c_0 distinto de v. Trasladaremos el monomio de v' a los monomios en nuestra base con el ciclo basado en v.

Caso 1. (No hay ciclos en $p_i p_j^*$, con $r(p_i) = r(p_j) = v'$). Consideremos que $e_{i_1} \cdots e_{i_r} e_{j_1}^* \cdots e_{j_l}^*$ puede tener una arista con $r(e_t) = v$. En este caso, sin pérdida de generalidad, sea la arista e_{i_1} real y

$$
\begin{aligned}
& e_{i_1} \cdots e_{i_t} \cdots e_{i_r} e_{j_1}^* \cdots e_{j_l}^* && (3.14)\\
= \; & e_{i_1} \cdots (e_{i_t} \cdots e_{i_r})(e_{i_{c_1}} \cdots e_{i_{c_s}} (e_{i_{c_s}}^*) \cdots e_{i_{c_1}}^*) e_{j_1}^* \cdots e_{j_l}^* && (3.15)\\
= \; & e_{i_1} \cdots e_{i_{t-1}} c_v e_{i_{c_s}}^* \cdots e_{j_l}^* && (3.16)\\
= \; & p_i c p_j^*. && (3.17)
\end{aligned}
$$

No puede suceder que en el camino fantasma cabe un ciclo, sino tenemos que había una arista fantasma con $r(e_s^*) = v$, pero también habŕia una arista real con v como rango, por lo que el camino ya contenía un ciclo previamente, una contradicción. Ésta sería la representación del monomio con ciclo centrado en v. Si fuera la fuente de una arista únicamente, entonces debería de ser la fuente de la primera arista real o de la última arista fantasma. Supongamos que fuera la fuente de la primera arista real. Al adjuntar elementos necesarios para formar el ciclo quedaría $c_v p_j^*$, porque los adjuntamos al final de p_i para completarlo. El otro caso es similar.

Falta detallar que pasaría si $s(e_i) \neq v \neq r(e_i)$ para ninguna arista. Debemos incluir el ciclo en el medio, entonces concatenemos las aristas de $r(p_i)$ hasta v, y debemos hacerlo también con las aristas fantasmas, poniendo las aristas fantasmas desde v hacia $r(p_j)$. En este caso no se forma un ciclo porque $v = r(p_i) = r(p_j)$, para el monomio $p_i p_j^*$ reescrito, pero no para otra arista "dentro" de p_i y p_j. Esto daría la forma deseada.

Caso 2. (Tenemos que $|k| \geq 1$ en $p_i c^k p_j^*$ y $r(p_i) = r(p_j) = v'$). El caso es similar, pero como ya existe un ciclo, podemos asegurar que $v = r(e)$ para alguna arista real, o fantasma, según la potencia del ciclo. Eso permite el procedimiento anterior en el caso que $r(e) = v$ para una arista en p o en q, en pq^*. ∎

Ahora daremos un álgebra a la que $L_K(C_n - cometa)$ es siempre isomorfa:

Teorema 3.46 *Sea $E = C_n - cometa$. Entonces el álgebra de caminos de Leavitt $L_K(E)$ es isomorfo a $M_n(K[x, x^{-1}])$, donde n es el número de caminos que terminan en un vértice arbitrario que no contienen al ciclo.*

Demostración. Tomemos el grafo $C_n - cometa$. Enumeremos los vértices de manera que v_n es un vértice en el ciclo. Quitaremos una arista en orden a obtener algo muy interesante en el grafo.

Removamos la arista que tiene como fuente v_n. Sea F el grafo resultante, y notemos que F es un grafo lineal orientado de n vértices con v_n como pozo. Este grafo es isomorfo a $M_n(K)$, y es simple.

Tomemos los caminos en el grafo que llevan a v_n. Llamemos a este conjunto $P = \{p_1, p_2, \ldots, v_n\}$, donde p_i comienza en el vértice v_i y termina en v_n. Entonces los caminos $p_i p_j^* = \delta_{i,j} v_i$ son unidades de matriz de L(F). Es importante notar que $p_i p_j^*$ generan todos los caminos y vértices en el grafo F. Ahora consideremos c el ciclo en E con base en v_n, y el conjunto $B = \{p_i c^k p_j^*\}_{i,j \in \{1,\ldots,n\}, k \in \mathbb{Z}}$. Usamos la notación $c^{-k} \sim (c^*)^k$ al igual que en $K[x, x^{-1}]$. Las reglas usuales de exponentes son validas para c, c^* porque el ciclo no tiene salidas.

Supongamos que $x = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} p_i c^k p_j^* = 0$ para $\alpha_{i,j,k} \in K$. Entonces para un i_0, j_0 arbitrarios, tenemos que $0 = p_i^* x p_j = \sum_{i_0,j_0,k} \alpha_{i_0,j_0,k} c^k$. Las potencias del ciclo son linealmente independientes, y entonces $\alpha_{i_0,j_0,k} = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto B es un conjunto linealmente independiente.

Podemos considerar el mapeo de inclusión de i de F a E. Este induce un homomorfismo $\varphi : L_K(F) \to L_K(E)$ porque las relaciones de $L_K(E)$ se preservan por φ. Como $L(F)$ es simple, φ es un monomorfismo. Este solamente mapea, al igual que en la proposición 3.5 sobre grafos sin ciclos, a $L_K(F)$ a la subálgebra de F en $L_K(E)$.

Es fácil ver que $Y = \{p_i p_j^*\} \cup \{e_1, e_1^*\}$ donde $s(e_1) = v_n$, es un conjunto generador de $L_K(E)$ como una K-álgebra; necesitamos ver que podemos obtener los vértices y el ciclo. El conjunto B es la base del espacio vectorial, $L_K(E)$. Este es cerrado bajo productos, con la fórmula general para la multiplicación de monomios,

$$(p_i c^k p_j^*)(p_r c^t p_s^*) = \delta_{j,r} p_i c^{k+t} p_s^*.$$

Obtengamos los elementos de B multiplicando las imágenes de $\{p_i p_j^*\}$ bajo φ, con $\{e_1, e_1^*\}$ y obteniendo los monomios de la forma $p_i c^k p_j^*$. Tendremos que, como B es cerrado bajo la multiplicación debe ser una base de $L_K(E)$(estos monomios son un ideal de $L_K(E)$, de hecho son $L_K(E)$; tal vez lo más complicado es obtener los otros vértices a partir de estos).

Definimos ahora un mapeo $\phi : L_K(E) \to M_n(K[x, x^{-1}])$. Este va a mapear la base, que hasta ahora identificamos, de $L_K(E)$ hacia la base de $M_n(K[x, x^{-1}])$, y por tanto podremos concluir que es un mapeo sobre. Será inyectivo también, como veremos, y por lo tanto es un isomorfismo. Sea $e_{i,j}$ las unidades estándar de matriz en la matriz (i, j). Escribamos $\phi(p_i c^k p_j^*) = x^k e_{i,j}$, y extendamos el mapeo linealmente a todo $L_K(E)$. Es un homomorfismo de K-álgebras, como

$$\begin{aligned} \phi((p_i c^k p_j^*)(p_r c^t p_s^*)) &= \phi(\delta_{j,r} p_i c^{k+t} p_s^*) = \delta_{j,r} c^{k+t} e_{i,s} && (3.18) \\ &= (x^k e_{i,j})(x^t) e_{r,s} = \phi(p_i c^k p_j^*) \phi(p_r c^t p_s^*). && (3.19) \end{aligned}$$

Es claro que el mapeo es fiel bajo la suma, y por lo tanto es el isomorfismo deseado. ∎

Corolario 3.47 *Salvo a isomorfismo, las únicas álgebras de caminos de Leavitt localmente finitas y casi no infinitas son*

$$M_n(K[x, x^{-1}])|n \in \mathbb{N}\}.$$

Sin embargo es cierto que las componentes graduadas de dos grafos no isomorfos, aunque resulten en álgebras isomorfas, tengan distinta dimensión. Es decir, el isomorfismo no es necesariamente de álgebras graduadas. Podemos considerar el grafo E y F de dos vértices cada uno. Dejemos que E tenga un bucle y una arista que una a los dos vértices. Para el otro grafo hagamos un ciclo con ambos vértices. Entonces son ambos un $C_2 - cometa$ y ambos son isomorfos a $M_2(K[x, x^{-1}])$. Sin embargo su comonente homogénea de grado cero tiene, en el caso de F dos elementos, y en el caso de E, cuatro, pues $\{v_1, v_2, e_1e_2^*, e_2e_1^*\}$ son los elementos. Los que son formados por aristas son cero en el grafo F, o son un vértice.

He usado aquí el $C_n - cometa$ como el cometa con n -vértices por el resultado previo. Es posible que en la literatura se refiera, en el ejemplo previo, a $L_K(E)$ como un $C_1 - cometa$ y L(F) un $C_2 - cometa$, usando los vértices en el ciclo. Como una observación notemos que el número de caminos que terminan en un vértice arbitrario que no contienen al ciclo, son precisamente el número de vértices que hay en el grafo. Esto justifica la definición dada para el $C_n - cometa$. A continuación describimos todas las álgebras de caminos de Leavitt que son localmente finitas.

Teorema 3.48 *Todas las álgebras $L_K(E)$ localmente finitas son sumas directas de álgebras sobre K donde cada sumando es un álgebra de matrices finito dimensional sobre K, o es un álgebra de matrices finito dimensional sobre $K[x, x^{-1}]$. Así las ACL que son localmente finitas son sumas directas de ACL's finito dimensionales con ACL's casi no infinitas.*

Demostración. [10]Sabemos que las localmente finitas casi no infinitas son álgebras de matrices de $K[x, x^{-1}]$, necesitamos extender este resultado un poco más. Debemos observar los grafos. Localmente finitas quiere decir que el grafo es finito, y tiene NE. Entonces las componentes de $\mathcal{H}$ son conjuntos que son isomorfos a $M_n(K[x, x^{-1}])$, si es un $C_n - cometa$, o un grafo lineal orientado, que es $M_n(K)$.

¿Qué más puede suceder con el grafo? Podría ser disconexo, o ser conexo. Las componentes conexas son finitas porque E_0 es finito. En las componentes conexas podríamos tener uno o más elementos de $\mathcal{H}$. Sea este el caso donde identificamos a un vértice la fuente de dos o más grafos, talvez algún grafo lineal orientado que

[10]Una prueba más detallada de este resultado se encuentra en Abrams, Pino, Siles (2008).

llega a un pozo, o en un grafo lineal orientado que llega al ciclo del $C_n - cometa$, al pozo de otro grafo lineal orientado. Podríamos tener varios vértices así, o incluso un camino que desemboca en pozos o en el ciclo del $C_n - cometa$. Para este caso los ideales de pozos dan los sumandos $M_n(K)$, y forman un conjunto hereditario y saturado, cada conjunto hereditario y saturado no debe ser disjunto necesariamente. Recordamos, cada ideal de pozos es generado por un elemento de $\mathcal{H}$ que resulta de la condición saturada aplicada repetidamente al pozo. Para esto, no logramos obtener el camino que desemboca al $C_n - cometa$, y así, el ciclo y $\bar{c} \in \mathcal{H}$ incluye parte del camino que desemboca a los pozos, pero no donde se desvía al pozo, y son distintos elementos de $\mathcal{H}$, y distintos sumandos de $L_K(E)$. La componente es suma directa de las álgebras mencionadas.

Entonces este grafo tiene que $L(E)$ es suma directa de las álgebras mencionadas porque que se generan de distintos elementos de $\mathcal{H}$, por el argumento que ya hemos visto, para cada una de sus componentes. En caso de las componentes conexas, sólo tomamos otra vez la suma directa de cada álgebra asociada a la componente. Obtenemos la suma directa de álgebras $L(C_n - cometa)$ y $L(R_m)$ que son precisamente las requeridas, es decir

$$L_K(E) \cong \left(\oplus_{i=1}^{r} M_{m_i}\left(K[x, x^{-1}]\right)\right) \oplus \left(\oplus_{j=1}^{s} M_{n_j}(K)\right). \quad \blacksquare$$

Lema 3.49 *El álgebra de Laurent $K[x, x^{-1}]$ es noetheriana.*

Para lo que sigue asumimos que $xy = yx$. El teorema de bases de Hilbert dice que si R es noetheriano también lo es $R[x]$, y así también $R[x, y]$. Podemos imponer la condición $xy = 1$ y así obtener un álgebra noetheriana también. El mapeo es lineal y respeta el producto de polinomios, entonces es un mapeo de álgebras. De hecho

$$K[x, y]/\langle xy - 1\rangle \cong K[x, x^{-1}]$$

es noetheriano porque $K[x, y]$ siempre es noetheriano. El siguiente toerema mostrará que localmente finito es equivalente a noetheriano:

Teorema 3.50 *Para un grafo E y un campo K las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$L_K(E)$ es localmente finita,*

2. *$L_K(E)$ es noetheriano derecho(o izquierdo),*

3. *E es finito y tiene la condición NE.*

Demostración. $(1 \to 2)$. Sabemos que $A = K[x, x^{-1}]$ es noetheriano y también los anillos de matrices sobre A. La suma directa de noetherianos es noetheriano. Entonces por el teorema que describe salvo isomorfismo todas las ACL's localmente finitas el resultado se da.

$(2 \to 3)$. Supongamos que existe un ciclo en E con una salida, asumiendo que falla NE. Concluiremos que $L_K(E)$ no es noetheriana.

Llamemos al ciclo μ con base en v, donde tiene una salida e con $s(e) = v$. Recordemos que $\mu = \mu_1 \cdots \mu_n$ y que $\mu_1^* e = 0$ por CK1. Proponemos que $\{J_i\}$, la cadena

$$\{0\} \subset L_K(E)(v - \mu\mu^*)L_K(E) \subset L_K(E)(v - \mu^2(\mu^*)^2) \subset \cdots$$

es una secuencia ascendente de ideales izquierdos de $L_K(E)$. La contención

$$L_K(E)(v - \mu^i(\mu^*)^i)L_K(E) \subset L_K(E)(v - \mu^{i+1}(\mu^*)^{i+1})L_K(E),$$

surge de la ecuación, para cada $i \geq 1$,

$$v - \mu^i(\mu^*)^i = (v - \mu^i(\mu^*)^i)(v - \mu^{i+1}(\mu^*)^{i+1}).$$

La contención es propia. En efecto, consideremos $v - \mu^{i+1}(\mu^*)^{i+1}$, no es un elemento de J_i. Si lo fuera podemos escribir $v - \mu^{i+1}(\mu^*)^{i+1} = \alpha(v - \mu^i(\mu^*)^i)$, para algún $\alpha \in L_K(E)$. Podemos dar por hecho la igualdad y multiplicar por la derecha el elemento μ^i Deberíamos de obtener

$$\mu^i - \mu^{i+1}\mu^* = \alpha(\mu^i - \mu^i) = 0.$$

Es imposible porque $\mu^i e \neq 0$, sin embargo tenemos de la última ecuación que $\mu^i = \mu^{i+1}\mu^*$. Entonces multiplicando por e da que $\mu^i e = \mu^{i+1}\mu^* e = 0$, por CK1. Hemos llegado a una contradicción, y la inclusión es propia, obteniendo la cadena ascendente que deseamos.

$(3 \to 1)$. Esto es por el teorema de álgebras de caminos de Leavitt localmente finitas, ya conocemos la equivalencia. ∎

Pinar Colak probó lo siguiente. Si $L_K(E)$ tiene la condición noetheriana sobre sus ideales graduados, la tiene sobre todos sus ideales. Entonces que los ideales graduados son noetherianos, por un resultado que probamos es equivalente a que el retículo $\mathcal{H}$ tenga la condición de cadenas ascendentes finitas. Resulta de utilidad también saber que los ideales de ambos lados son siempre generados por finitos elementos de la forma $k_0 v + \sum_i k_i g^i$, donde g es un ciclo basado en v, también probado por ella, y congruente con lo que esperábamos de los ideales no graduados del $L_K(C_n - cometa)$.

3.4 Problemas abiertos de $L_K(E)$.

La relación a las álgebras C^* es ampliamente estudiada, en particular por Mark Tomforde. En este caso se toma un álgebra que contiene $L_{\mathbb{C}}(E)$, donde, $L_{\mathbb{C}}(E)$ es densa en $C(E)$. En el ejemplo de $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$, el anillo de polinomios de Laurent, ésta es el álgebra de series de Laurent sobre los complejos. Algunas técnicas de prueba se pueden imitar entre estas álgebras. Para llenar el detalle técnico de como $L_{\mathbb{C}}(E)$ está contenida en el álgebra C^* se debe trabajar el mapeo de inclusión entre estas categorías. La equivalencia de Morita se vuelve necesaria y es un tópico avanzado, al igual que en el camino seguido la presentación que hemos hecho de $L_K(E)$. Las álgebras C^* de grafos tienen unidad también bajo las mismas condiciones, son simples y puramente infintas, y simples bajo las mismas condiciones también. Tienen sus distinciones, por ejemplo que el mapeo de involución siempre es autoadjunto en el álgebra C^*. También en algunos casos son parecidas. Si E es finito y acíclico, $L_{\mathbb{C}}(E) \cong \oplus_{i\leq n} M_{n_i}(\mathbb{C}) \cong C(E)$, siendo congruente que $C(E)$ es la cerradura de $L_{\mathbb{C}}(E)$, y en ese caso el álgebra es finito dimensional, entonces es cerrada bajo cualquier norma.

Por otro lado se ha estudiado sus propiedades algebraicas. En este caso, que es el que seguimos, tomamos un campo K sin distinción. Problemas como si $L_K(E)$ es auto-inyectivo, cuando es von Neumann Regular (como anillo), y otros son estudiados. Los que se han dedicado a esto han sido Gene Abrams, Mercedes Siles Molina, Gonzalo Aranda Pino, Pere Ara, y otros. En particular Pere Ara a estudiado la K-teoría de $L_K(E)$. El estudio teórico de $L_K(E)$ como una estructura algebraica ha sido muy fructífero y tiene muchos problemas abiertos. Las álgebras de caminos de Leavitt, como comunicado por Gene Abrams, han ayudado a:

1. Encontrar un isomorfismo entre $L(1, n)$ y el anillo de matrices $M_d(L(1, n))$ cuando $gcd(d, n-1) = 1$. Esto mismo llevo a las personas que trabajan en álgebras-C^* encontrar un isomorfismo explícito entre las álgebras - C^* $\mathcal{O}_n$ y $M_d(\mathcal{O}_n)$.[11]

2. Responder la pregunta, ¿cuándo dos grupos de Higman - Thompson son isomorfos?

3. Producir infinitos ejemplos de álgebras que son von Neumann regulares y primas, pero que no son primitivos.

4. Crear álgebras de Lie simples que surgen de los braquets $[L_K(E), L_K(E)]$.

Comentamos el tercer inciso. Esto responde una vieja pregunta atribuida a Kaplansky. Un anillo es von Neumann regular si para cada $a \in R$ existe un $x \in R$ tal que $a = axa$, llamado el inverso de von Neumann. El álgebra de caminos de Leavitt es von Neumann regular si E es acíclico, y prima si $L_K(E)$ cumple que para

[11]El álgebra $\mathcal{O}_n$ es el álgebra C^* dada por un conjunto de generadores que cumplen las relaciones $S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1$ y $\sum_i S_i S_i^* = 1$. Lleva el nombre de álgebra de Cuntz.

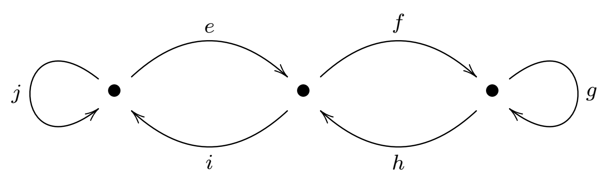
$v, w \in E_0$ existe un $y \in E_0$ tal que $v \geq y$ y $w \geq y$. Llamaremos a esta última la condición MT3. Referimos al lector a la tesis de maestría de Iain Dangerfield para el resultado. Para la caracterización de ACL's primitivas y primas referimos al artículo *Prime Spectrum and Primitive Leavitt Path Algebras*, Tomforde (2007) (L(E) es prima es el corolario 3.1).

Ahora, la condición de que E es primitivo por la izquierda o por la derecha es equivalente a que todos los ciclos en E tienen salida, como en el teorema de simplicidad. Un grafo con MT3 y con un ciclo sin salida, y con NE es el vértice con un bucle. Un ejemplo con MT3, con un ciclo con salida y no simple es el grafo con dos vértices, un bucle en v_1, y una arista con fuente v_1 y rango v_2. Ambos tienen un ciclo y no son von Neumann regulares, pero son álgebras primas y primitivas.

Un álgebra no primitiva y prima necesita tener MT3 y un ciclo sin salida, pero un álgebra von Neumann regular necesita ser acíclica. Entonces no deben de haber ciclos y debe tener MT3, pero E podría ser infinito y ¿sería $L(E)$ simple? Definamos el siguiente grafo. Sea E_0 el conjunto con un vértice v y un conjunto contable $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que hay una arista e_i con fuente v_i para cada $i \in \mathbb{N}$, con rango v. Este grafo es acíclico y tiene MT3. ¿Tendría NIB? Gene Abrams logró extender el álgebra $L_K(E)$ a grafos E que no son finitos por filas. Eso da origen a muchos ejemplos incluyendo el ejemplo que Kaplanksy creía era rebuscado. Entre esos se distingue otra propiedad, que se cumple siempre en los grafos que estudiamos.

Consideramos ahora otro ejemplo: Hay álgebras de caminos de Leavitt que son

Figura 3.5: Grafo simple y puramente infinto, con tipo de módulo (1,2), pero distinto de $L(1, n)$ para todo n.



puramente infintas y simples que son distintas a $L(1, n)$, o a las álgebras de Leavitt. Es más, hay ejemplos de álgebras de caminos de Leavitt que son simples y puramente infintas, y con NIB. Hasta ahora no se sabe si hay propiedades teoréticas sobre el grafo E que pueden dar condiciones equivalentes a que $L(E)$ sea simple sin NIB. Recordemos que no se conoce tampoco las propiedades de E que caracterizen las álgebras de caminos de Leavitt casi no infinitas.

Otro problema interesante sobre las álgebras de Leavitt es responder cuáles son, como módulos, inyectivas. Si el álgebra de Leavitt es auto-inyectiva, entonces ella misma es el álgebra inyectiva más pequeña que contiene a $L_K(E)$. Ya se ha descubierto que es auto-inyectiva si $L_K(E)$ es semisimple artiniana.

IV Bibliografía

Abrams, Gene. 2006. *Chapter 3, Leavitt Path Algebras: History and first structural results*, pág. 85- 140. Incluido en *Graph Algebras: Bridging the gap between algebra and analysis. Notes from the "Workshop in Graph Algebras", Málaga, Spain, July 2006.* [Versión electrónica, diciembre 2006] University of Málaga Press, 2007.

Abrams, Gene & Aranda Pino, Gonzalo. 2005. *The Leavitt Path Algebra of a Graph.* Recuperado en junio de 2012, arXiv:math/0509494v1.

Abrams, Gene, Aranda Pino, Gonzalo, Siles Molina, Mercedes. 2006. *Locally Finite Leavitt Path Algebras.* Israel Journal of Mathematics, # 165 (2008).

Abrams, Gene & Tomforde, Mark. 2009. *Isomorphism and Morita equivalence of Graph Algebras* Recuperado en marzo de 2012, arXiv:math/0810.2569v8.

Abrams, Gene & Mesyan, Zachary. 2012. *Simple Lie Algebras arising from Leavitt Path Algebras.* Recuperado en marzo de 2012, arXiv:math/1107.3114.

Aranda Pino, Gonzalo. 2005. *On maximal left quotient systems and Leavitt Path Algebras.* Departamento de Álgebra, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias de la Universidad de Málaga, Málaga, España. 163 págs.

Aranda Pino, Pardo, Siles. 2006. *Exchange Leavitt Path Algebras and stable rank.* Journal of Algebra, 205 (2006) 912-936.

Artin, Michael. 1991. *Algebra.* Prentice Hall, 618 págs.

Assem, Simson, Skowrońsky. 2006. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1 Techniques in Representation Theory. London Mathematical Society. 456 págs.

Bhattacharya, Jain & Nagpaul. 1991. *Basic Abstract Algebra*, segunda edición, Cambridge University Press. 508 págs.

Colak, Pinar. 2011. *Two Sided Ideales of Leavitt Path Algebras* Journal of Algebra and its Applications, vol. 10, No.5. Comunicado por P. Ara.

Dangerfield, Iain. 2011. *Leavitt Path Algebras.* Universidad de Otago, Dunedin, Nueva Zelanda. 178 págs.

Escamilla, Juan Francisco. 2008. *Introducción al Álgebra Abstracta.* Cimacien, Ciudad de Guatemala, Guatemala. 494 págs.

Lam, Tsit Yuen. 1999. *Lectures on Modules and Rings.* Springer, Graduate Texts in Mathematics (#189), 559 págs.

López-Permouth, Sergio. 2012. *A Short Course on Injective Modules and other Related Concepts.* Notas no publicadas del mini-curso dado en Groups, Rings, and Group Rings en Ubatuba, Sao Paulo, July 2012.

Goodman, Frederick. 2005. *Algebra, Abstract and Concrete.* Edición 2.5, recuperado en febrero de 2009 de http://www.math.uiowa.edu/ goodman/ algebrabook.dir/ algebrabook.html, 572 págs.

Roman, Steven. 2008. *Advanced Linea Algebra.* Springer, Graduate Texts in Mathematics (#135), 522 págs.

Siles Molina, Mercedes, *et al.* 2011. *Atlas of Leavitt Path Algebras of Small Graphs.* Recuperado en marzo de 2012, arXiv:math/112.5735.

Tomforde, Mark. 2007. *Prime and primitive ideals.* Recuperado en junio de 2012, arXiv:math/0712.2102.

Tomforde, Mark. 2007. *Uniqueness theoremas and ideal structure for Leavitt Path Algebras.* Recuperado en junio de 2012, arXiv:math/0612628v6.

Tomforde, Mark. 2012. *Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring.* Recuperado en junio de 2012, arXiv:math/0905.0478v3.

V Apéndice 1: Sobre anillos y módulos.

Este apéndice incluye de manera breve algunos requisitos que se encuentran en el texto. Podemos referir al lector a Bhattacharya, Jain, Nagpaul (1991), a Artin (1991), o a Escamilla (2008) para aprender más sobre álgebra abstracta, incluyendo la tería de módulos. Para un tratado sobre módulos únicamente ver Lam (1999). Sea R un anillo. Listamos algunas definiciones definiciones:

Idempotente Un elemento $x \in R$ es idempotente si $x^n = x$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Nilpotente Un elemento $x \in R$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$.

Ideal Un ideal $I \subset R$ es un conjunto que es grupo aditivo y atrapa productos. Para un homomorfismo φ de anillos o álgebras, $Ker(\varphi) = I \subset R$. Un subanillo o una subálgebra no es necesariamente un ideal.

Ideal Maximal Se refiere a el conjunto de ideales ordenados por la contención. Un ideal maximal I de R cumple que si $I \subset I'$ entonces $I' = I$.

Característica La característica de un elemento $r \in R$ es el entero n más pequeño para el que $r + \cdots + r = 0$, sumando n veces. Si este no existe se dice que r tiene característica 0.

Nilpotente(Ideal). Un ideal es nilpotente si existe n tal que $I^n = (0)$.

Ideal Nil. Un ideal Nil es un ideal tal que cada elemento de I es nilpotente.

Finitamente Generado. Un anillo R es finitamente generado si cada ideal $I \subseteq R$ es generado por un conjunto finito.

Noetheriano. Sea R un anillo, y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena de ideales. Si cada cadena ascendiente, $A_k \subseteq A_{k+1}$ es finita, i.e. $A_{k+1} = A_k$ para algún k, entonces R es notheriano.

Artiniano. Un anillo es artiniano si para cada cadena descendente de ideales, $A_k \supseteq A_{k+1}$, esta es finita.

Las definiciones de artiniano y noetheriano para módulos(y así para espacios vectoriales) son iguales, solamente que las cadenas son de submódulos. Hay relación entre las cadenas de ${}_RR$ y las de R.

Descomposición de Peirce. En un anillo conmutativo R si existe un idempotente $x \neq 1$ podemos descomponer el anillo en una suma directa de la siguiente manera. Supongamos que $x \in R$ es idempotente. Entonces $(1-x)$ también es idempotente porque:

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1 - x.$$

Incluso son “ortogonales” también. Multipliquemos $x(1-x) = x - x^2 = x - x = 0$; estos suman 1. La descomposicón de un anillo en estos elementos que llamamos idempotentes complementarios y ortogonales es un ejercicio de la clase de álgebra abstracta. Como suman uno pongo $a \in R$, $a = ax \oplus a(x-1)$. Entonces $R = xR \oplus (1-x)R$.

La descomposición de Peirce funciona como una descomposición en ideales de ambos lados para anillos conmutativos. Es decir, si R tiene dos idempotentes ortogonales que suman uno, entonces R es semisimple. Si el anillo R es no conmutativo, entonces la descomposición es en ideales derechos o izquierdos respectivamente. Estamos diciendo que

$$\alpha R \oplus (1-\alpha)R, \text{ y la otra descomposición, } R\alpha \oplus (1-\alpha)R$$

son descomposiciones distintas, sólo como ideales derechos o izquierdos y no como álgebras. En este caso la descomposición completa es

$$R = \alpha R\alpha \oplus \alpha R(1-\alpha) \oplus (1-\alpha)R\alpha \oplus (1-\alpha)R(1-\alpha).$$

Hay álgebras, por ejemplo $K[x, x^{-1}]$, para las que el único idempotente 1 hace que la descomposición de Pierce no exista. En particular, si A es local solo tiene idempotentes 1 y 0.

R-módulo izquierdo. Un R módulo izquierdo es un grupo abeliano M con una ley de composición externa $\mu : R \times M \to M$, sujeta a las condiciones de que para todo $r, s \in R$ y $m, n \in M$ tengamos

1. $\mu(r, m+n) = \mu(r, m) + \mu(r, n)$,
2. $\mu(r+s, m) = \mu(R, m) + \mu(s, n)$,
3. $\mu(rs, m) = \mu(r, \mu(s, m))$,
4. si $1 \in R$, $\mu(1, m) = m$.

Se acostumbra omitar la notación de μ y usar de manera sencilla $r \cdot m$ para $\mu(r, m)$. Entonces el axioma (3) se escribe $(rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$.

La existencia de un módulo izquierdo sugiere la de un módulo derecho. Un R módulo derecho es un módulo definido de la misma manera, con un grupo abeliano M y una ley de composición μ, que satisface los mismos axiomas pero los roles del anillo y de M son intercambiados. Con la notación omitida escribiríamos para (3), $m \cdot (rs) = (rm) \cdot s$. Perdón, de hecho se escribe $m \cdot (rs) = (mr) \cdot s$. Quiero enfatizar que si quisiéramos arreglar la notación para escribir siempre escalar veces un elemento del módulo, tal vez en ese caso es muy claro que la acción dada por multiplicar el escalar actúa en la derecha y no en la izquierda. En un anillo arbitrario puede dar resultados distintos, pues un R módulo podría ser artiniano por la derecha y no por la izquierda y reflejarse en los módulos. Si las acciones conmutan, es decir $s \cdot (m \cdot r) = (s \cdot m) \cdot r$, entonces se dice que ${}_S M_R$ es un bimódulo con los anillos S y R. Este concepto es muy importante.

Decimos que M es fiel como R módulo si $rM = (0)$ quiere decir que $r = 0$. El conjunto $\{rM = (0)$ tal que $r \in R\}$ es un ideal de R. De aquí surge el lema de Nakayama. Sea V un R-módulo finitamente generado y fiel, si un ideal $J \subseteq R$ cumple que que $JV = V$, entonces $J = R$.

Ejemplo. Consideremos un espacio vectorial V de dimension infinita con una base contable $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$, y sea E el anillo de operadores lineales en V. En este caso los operadores lineales son matrices con infinitas columnas y finitas filas, de la forma: $\begin{bmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{m,1} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ k_{n_1,1} & \dots & k_{m,n_m} & \dots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$.

Son finitos $k_{i_0,j}$ los que son distintos de cero, para una fila i_0 fija. Entonces es posible computar la composición de operadores, y estos son lineales. Como cada fila tiene finitos elementos distintos a cero, al hacer el producto de una fila por una la columna (que no necesariamente tiene finitos elementos distintos a cero), la suma de la entrada resultante tiene finitos sumandos y el elemento de matriz esta bien definido. Estos operadores con la suma y la composición son un anillo como en el caso finito dimensional. La matriz se aplica en un véctor de la forma $[k_1 v_1, \dots, k_n v_n, \dots]^T$.

Ahora tomemos $E^1 = E$ como un módulo sobre el anillo E. Es curioso que este módulo se puede escribir separando los operadores en como opera v_{2n+1} y v_{2n} formando para $x \in E^1$, $x = T' \oplus T$. Cada uno de estos módulos tiene una base contable infinita sobre el mismo campo y así $E^1 \cong T$, pero así $E \cong E \oplus E$, es decir

$E \cong E^2$. De hecho $E \cong E^k$ para $k \in \mathbb{N}$. Diremos que E no cumplira con tener un número invariante de base, regresaremos a esto luego.

Para los módulos se cumplen los teoremas usuales de isomorfía. Describimos los submódulos antes. Un submódulo es un conjunto no vació de un R módulo izquierdo V tal que es cerrado por la adición y la multiplicación escalar. La multiplicación es bajo los elementos de R, entonces un ideal de un módulo es precisamente un submódulo.

Para extender los teoremas veamos que $(V, +)$ es un grupo abeliano. para un cociente, consideramos el grupo aditivo de clases laterales, dado un submódulo $W \subseteq V$, de la forma $\bar{v} = v + W$. La multiplicación es la misma, dada por $r\bar{v} = \overline{rv}$. Si esta regla esta bien definida V/W es un módulo bien definido. Esto permite el primer teorema de isomorfía, para $f : V \to V'$, $Im(V) \cong V/ker(f)$. El teorema de correspondencia también se cumple.

Definición. Debemos describir los homomorfismos de módulos obligadamente. Un homomorfismo de R-módulos V, W, es un mapeo $\phi : V \to W$ que cumple las siguientes reglas(que deben ser similares a las de una transformación lineal de espacios vectoriales):

$$\phi(v + v') = \phi(v) + \phi(v'), \forall v, v' \in V; \text{ y también} \tag{5.1}$$

$$\phi(rv) = r\phi(v), \ \forall r \in R, v \in V. \tag{5.2}$$

Puede ser también que $\phi(rv) = \phi(v) \cdot r$, depende como sea el caso. Los elementos que tienen permiso de salir de ϕ son los escalares (elementos de R, o K en caso que este sea un campo y así V un espacio vectorial). Se puede probar que cada homomorfismo $\phi : R^n \to R^m$ de módulos libres está dado por la multiplicación por la izquierda de una matriz cuyas entradas están en R.

Me interesa mostrar el teorema de bases de Hilbert. Empezaremos la discusión que nos lleva a éste revisando ejemplos de anillos noetherianos.

Discutimos un ejemplo. El primer anillo que se discute en clase es el anillo de los números enteros. Los ideales de $\mathbb{Z}$ son primos, son los maximales. Resulta que $\mathbb{Z}$ es noetheriano. Es fácil de ver porque sus ideales son principales. El ideal (a) es un ideal contenido únicamente en los ideales (b) si $b \big| a$. Sólo hay finitos b que cumplen eso. Sin embargo $\mathbb{Z}$ no es Artiniano, ya que (a) siempre está contenido en (ka) para cualquier a y k.

Teorema 5.1 *Dado un anillo R, sin que $1 \in R$ y R no necesariamente conmutativo, es lo mismo decir:*

1. *El anillo R es noetheriano.*

2. *El anillo R es finitamente generado.*

Demostración. $(\leftarrow)$. Sea R finitamente generado. Dada una cadena ascendente de ideales, cada ideal $I_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,m_n})$. Entonces $\{I_n\}$ no puede ser infinita, sino los generadores de los ideales contradicen que R sea finitamente generado.

$(\rightarrow)$. Por contraposición, sea R un anillo no finitamente generado. Sea $I \subseteq R$ un ideal no finitamente generado. Para cada subconjunto finito $S \subset I$, el ideal generado por S es un ideal $\langle S \rangle \subseteq I$, contenido en I. Siempre podemos encontrar un elemento en $I - \langle S \rangle$, por la hipótesis. Esta cadena es ascendente e infinita, $\therefore$ R no es noetheriano. ∎

Enunciamos ahora un teorema conocido de anillos artinianos, y otro mucho más particular.

Teorema 5.2 *Si R es un anillo con unidad, si R es artiniano por la derecha también es noetheriano por la derecha.*

Lema 5.3 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces V es artiniano y noetheriano (por un argumento sobre la base).*

Otro detalle sobre los anillos artinianos lo muestra la siguiente proposición. El resultado es importante en la exposición sólo como curiosidad, pero da información importante sobre la clase de anillos artinianos. De hecho este es un lema para la prueba de que artiniano y con unidad para un anillo es lo mismo que noetheriano.[1]

Proposición 5.4 *Si un anillo es artiniano tiene finitos ideales maximales(R es semilocal).*

Demostración. Por el absurdo supongamos que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ es una colección infinita de ideales maximales distintos. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ el ideal $J_n = \Pi_{v=1}^{n} I_v$ es un ideal distinto y $J_n \supseteq J_{n+1}$. De hecho la contención es propia porque I_n son ideales maximales distintos. ∎

Un anillo con finitos ideales maximales es muy distinto de $\mathbb{R}[x]$. En la última sección, al discutir las álgebras $L_K(E)$ que son graduadas, llegamos a un grafo especial que se llama C_n cometa, cuya álgebra de caminos de Leavitt es isomorfa a $M_n(K[x, x^{-1}])$. Es importante entender porque $K[x, y]$ es noetheriana. Este es el teorema que queríamos mostrar:

Teorema 5.5 (de bases de Hilbert) *Si R es noetheriano entonces $R[x]$ también lo es.*

Tal vez necesitemos algunos lemas antes de la demostración. Los listaré pero omito la prueba como estos son resultados conocidos para los estudiantes. Si R sólo es noetheriano por la derecha, podemos concluir que R[x] es noetheriano por la derecha, pero no por ambos lados.

Lema 5.6 *Para un dominio Euclideano A cada ideal de R es principal.*

Si K es un campo, $K[x]$ tiene el algoritmo de la división. La función euclideana es $deg(f)$, $deg : K[x] \to \mathbb{N}$. Esta debe cumplir que $d(a) \leq d(ab)$, y que si hay un q y un R tal que $a = qb + r$, entonces $r = 0$ o $deg(r) < deg(q)$. Pero así cada ideal de K[x] es principal. El argumento se hace tomando el elemento de mínimo grado, usando el principio del buen orden en $\mathbb{N}$ al escogerlo como generador.

[1]El nombre de noetheriano se deba a la matemática Emmy Noether.

Demostración. *(Esquema)* Caso R es arbitrario. La prueba estándar trata de buscar los generadores. Haremos un esquema, siguiendo la prueba como mostrada por Mike Artin: Podemos asumir que los polinomios no son necesariamente mónicos, y su primer coeficiente no es necesariamente una unidad. Consideramos los elementos a_i tales que $f_i = a_i x^n + \cdots + a_{i,0} \in I$. Los elementos $A = \{a_i\}_{i \in \gamma}$ son un ideal de R. El ideal $A \subseteq R$ es finitamente generado. Bueno, obteniendo eso se propone los polinomios de grado común n como generadores. Pero es posible que falten algunos. Ahora, el submódulo P de $R[x]$ de polinomios hasta grado $n-1$ es finitamente generado, por $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$. Usando que R es noetheriano, $I \cap P$ es un módulo finitamente generado. Se unen estos al conjunto de generadores y falta verificar que en efecto estos deben bastar.

Caso $R = K$ un campo. Como cada ideal de $K[x]$ es principal, son de la forma $I = (a(x))$. Podemos asumir $a(x)$ mónico, al multiplicar por una unidad adecuada. Los ideales que van a contener a I son los ideales generados por las combinaciones de los factores de I únicamente. No necesariamente K es un campo algebraico. Bueno, de manera más corta si $deg(a(x)) = n$, entonces no hay más de n ideales que contienen a I. En efecto, si $I \subset J$ otro ideal, $J = (b(x))$, necesariamente $deg(b(x)) < deg(a(x))$. Son los divisores comunes de $b(x)$ y $a(x)$ los que son ideales que contienen a los generados por ambos, i.e. $d(x)\big|a(x) \to (a(x)) \subseteq (d(x))$. Si $deg(b(x)) \geq deg(a(x))$ entonces $d(x)\big|a(x)$ para cada $d(x)\big|b(x))$. Si $(b(x)) \subseteq (a(x))$ debe ser que $(b(x)) = (a(x))$. Así para hacer la cadena no estacionaria, debemos reducir grado, y no podemos hacerlo más de n veces.

Preguntamos si este caso bastará para concluir si $K[x, y]$ es un campo. Obsérvese que usamos que R es un anillo noetheriano (no usamos en particular que R fuera un PID). Pero si usamos que era un campo y que los coeficientes de $K[x]$ podíamos asumirlos mónicos, pero no los de $K[x, y]$. Pero así necesitaremos la prueba completa, llenamos los primeros dos pasos.

NB. También obsérvese $K[x]$ al igual que $\mathbb{Z}$ es noetheriano pero no artiniano. Si tomamos $\{(x), (x^2), \ldots, (x^n), \ldots\}$ es una cadena descendente de ideales de $K[x]$ que no es finita.

Paso 1. Los primeros coeficientes son un ideal de R. Es claro que A es cerrado bajo la multiplicación, porque podemos multiplicar por cualquier elemento $r \cdot 1 \in R[x]$ algún otro polinomio y este elemento nuevo elemento es un primer coeficiente. Para ver que es cerrado bajo la suma vemos que dado otro polinomio del mismo grado pues no hay inconveniente. Escojamos $deg(g(x)) = m$, $deg(f(x)) = n$ y $r = m - n \in \mathbb{Z}^+$. El polinomio $x^r f(x) + g(x)$ tiene el primer coeficiente que deseamos. Podríamos escoger un ideal para cada grado n. Tomemos en vez de A un A_n un ideal de R para cada n, resulta más fácil. Cada uno de estos estaría también finitamente generado.

Paso 2. Para cada A_n, tenemos que $A_{n+1} \supset A_n$ y que $\cup_n A_n = A$. En este momento usamos que R es noetheriano, y podemos escoger elementos de la cadena, $1, \ldots, k$, tal que $A_k = A$ y A_k es finitamente generado. Para estos escribiremos $A_1 = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,m_1})$, hasta $A_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,m_k})$. El ideal $A_k = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,m_1}, a_{2,1}, \ldots, \ldots, a_{k,m_k})$. Consideramos los polinomios $f_{i,j}$ de grado m con primer coeficiente $a_{i,j}$. Este conjunto es finito,

$$\{f_{i,j}\}_{i \leq k, 1 \leq j \leq m_i}. \tag{5.3}$$

Paso 3. El conjunto genera $I \subseteq R[x]$. Para cualquier polinomio $f \in I$, si tiene grado i está en A_i, (para este conjunto es donde podemos usar el paso 4). Si tenemos que $n \geq k$, el primer coeficiente $a \in A_k$. Podemos escribir $a = \sum_i b_i a_{k_i}$ con $b_i \in R$ y si

$$g(x) = f - \sum b_i x^{n-k} f_{k,i}, \ \ \deg(g(x)) < n.$$

De manera similar, si $n \leq k$, $a \in J_n$, y $a = \sum_i b_i a_{n,i}$, con $b_i \in R$ y $f - \sum_i b_i f_{n,i}$ con grado menor que m. Podemos probar usando inducción que para cada n, $f \in (\{f_{i,j}\})$. ∎

Paso 4. Si el lector desea, resta la prueba que $S = I \cap P$ es un R submódulo del R-módulo P. Aquí P es el conjunto de polinomios de grado menor que n junto con el cero. A probar: S es un submódulo, y al igual que P, es finitamente generado(debe usar que R es noetheriano).

Agregamos un resultado más. Cada anillo de matrices sobre R es noetheriano si R es noetheriano. Observemos que los ideales derechos son de la forma de ideales de R en cada entrada $a_{i,j}$, fijos para cada fila. Para los ideales izquierdos, son ideales de R puestos en cada columna. Esto es por la multiplicación de matrices ordinaria, cuando multiplicamos, digamos por la izquierda, los elementos que quedan en a_{i,j_0} son la mutliplicación de la matriz arbitraria, por elementos de la columna j_0. Entonces son ideales izquierdos de R colocados en las columnas de la matriz. Para los ideales derechos, son ideales derechos, el mismo en cada fila.

Para ideales de ambos lados, tenemos un ideal digamos en cada entrada. Esto es suficiente para probar lo que deseamos. Consideremos que tuviésemos un ideal distinto en cada entrada, bilateral. Entonces si R es noetheriano, los ideales que contienen a el ideal del anillo de matrices, son combinaciones de los ideales que contienen a cada ideal $(a_{i,j})$. Como es noetheriano este ideal es finitamente generado para cada entrada, y por lo tanto es finitamente generado para el anillo de matrices (porque la matriz es de dimensión finita). Cada anillo de matrices, $M_n(R)$ es por lo tanto, noetheriano.

Teorema 5.7 *El anillo de matrices de $n \times n$ sobre R, es noetheriano si R es noetheriano. En particular, $M_n(K[x, x^{-1}])$ es noetheriano.*

Continuamos explorando la propiedad de NIB. Un anillo R tiene un número invariante de base cada $R-$módulo R(R como un módulo derecho sobre si mismo), M, cumple que

$${}_R R^n \cong_R R^m \to n = m.$$

En cualquier otro caso decimos que R no tiene NIB. Encontramos el teorema 1.12 una caracterización para los anillos sin NIB de tipo de módulo $(1, n)$. Agreguemos la observación que en la prueba, un homomorfismo de módulos entre R^n y R^m se describe por una transformación que es representable por una matriz. Podríamos decir que un $R-$módulo derecho finitamente generado, cada base tiene el mismo tamaño. Se usa *rango* para denotar el tamaño de la base de M sobre R, donde *dimensión* se reserva para espacios vectoriales. Equivalentemente y sin el uso del lenguaje de módulos, si hay matrices A y B sobre R, de tamaños $m \times n$ y $n \times m$ respectivamente con $m \neq n$, tales que $AB = I_m$ y $BA = I_n$. Para la teorema 1.12 recordemos que usamos la existencia de ciertos elementos en R que implican que R es no conmutativo. Podríamos conjeturar si R es conmutativo debería tener NIB.

Teorema 5.8 *Sea M un módulo libre sobre un anillo conmutativo con unidad.*

1. *Cada dos bases de M tienen la misma cardinalidad.*
2. *La cardinalidad de un conjunto generador es mayor o igual que la cardinalidad de una base.*

Demostración. Intentaremos construir un espacio vectorial a partir del $R-$módulo $\mathcal{M}$. Para esto recordemos que si $I \subsetneq R$ es un ideal maximal, entonces R/I es un campo. Es muy importante notar que este paso es posible para anillos conmutativos pero no necesariemente para anillos no conmutativos, donde R/I no necesariamente es un anillo de división. Intentar definir $\mathcal{M}$ como espacio vectorial sobre R/I tal vez no funcione ya que:

$$(r + I)v = rv + Iv = rv$$

requeriría que $I\mathcal{M} = \{0\}$. Arreglemos esto notando que el conjunto

$$I\mathcal{M} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i : a_i \in I, v_i \in M\},$$

es un submódulo de M. Entonces, $\mathcal{M}/I\mathcal{M}$ es un espacio vectorial sobre R/I. Verifiquemos que si $rv + I\mathcal{M} = r'v' + I\mathcal{M}$ entonces $rv - r'v' \in I\mathcal{M}$, donde $r, r' \in R/I$ así $r - r' \in I$:

$$rv - r'v' = r(v - v') + (r - r')v' \in I\mathcal{M},$$

como $r - r' \in I$ y $v - v' \in I\mathcal{I}$.

El siguiente paso incluy dar un conjunto $B = \{b_i\}_{i \in I}$, y mostrar que si B genera a M sobre R entonces $B + I\mathcal{M}$ genera a $\mathcal{M}/I\mathcal{M}$ sobre R/I. Tomando la suma sobre $j \in I$ que expresa a $v = \sum_j a_j b_j + I\mathcal{M}$,

$$
\begin{aligned}
v + I\mathcal{M} &= \left(\sum_j r_j b_j \right) + I\mathcal{M} && (5.4)\\
&= \sum_j r_j (b_j + I\mathcal{M} && (5.5)\\
&= \sum_j (r_j + I)(b_j + I\mathcal{M}). && (5.6)
\end{aligned}
$$

Ahora mostraremos que si B es una base de $\mathcal{M}$ entonces $B + I\mathcal{M}$ es una base para $\mathcal{M}/I\mathcal{M}$. En efecto, la independencia lineal se preserva, si

$$\sum_j (r_j + I)(b_j + I\mathcal{M}) = I\mathcal{M},$$

deducimos que $\sum_j r_j b_j \in I\mathcal{M}$ y

$$\sum_j r_j b_j = \sum_k a_k b_k, a_k \in I.$$

De la independencia lineal de B tenemos que $r_j \in I$, es decir $r_j = 0 + I$. Probemos que $b_k + I\mathcal{M} \notin I\mathcal{M}$, así $|B| = |B + I\mathcal{M}|$. Supongamos que $b_i + I\mathcal{M} = b_k + I\mathcal{M}$, entonces

$$b_i - b_k = \sum_j a_j b_j,$$

donde $a_j \in I$. Si $i \neq j$, entonces el coeficiente de b_i en el lado derecho de la igualdad es 1, por lo que $1 \in I$, una contradicción porque $I \subsetneq R$. Entonces $b_i = b_k$. Por lo tanto

$$|B| = |B + I\mathcal{M}| = \dim_{R/I}(\mathcal{M}/I\mathcal{M}). \quad \blacksquare \tag{5.7}$$

VI Apéndice 2: Teorema de Wedderburn Artin.

Este apéndice se dedica a presentar el teorema de Wedderburn Artin. Repasamos la prueba como es expuesta por Bhattacharya, Jain, Nagpaul (1991) en *Basic Abstract Algebra*. Hacemos dos versiones del Lema de Shur.

Lema 6.1 *(de Schur, versión 1.) Si un homomorfismo de módulos(álgebras), $\varphi : S \to S'$, tiene como dominio y contradominio módulos(álgebras) simples, un es cero o un isomorfismo.*

Demostración. El kernel de φ es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar. Entonces es un submódulo por definición. De igual manera para las álgebras, debe atrapar productos multiplicados por ambos lados, debe ser un ideal de ambos lados del álgebra. Como ésta es simple, el kernel es cero o toda el álgebra. En el caso que φ tiene kernel cero, mapea el módulo(álgebra) a un submódulo(subálgebra) distinto de cero, sólo puede hacerlo al conjunto completo. En la segunda opción mapea todo a cero entonces φ es cero.

Lema 6.2 (de Schur, versión 2.) *Sea M un R-módulo simple. Entonces $Hom_R(M, M)$ es un anillo de división.*

Demostración. Tomemos $\Phi \in Hom_R(M, M)$ tal que $\Phi \neq 0$. Consideremos los R-submódulos $Ker\Phi$ y $Im\Phi$. Es claro que ambos son submódulos de M. Como en el lema anterior, si $Ker\Phi = M$ entonces $\Phi = 0$ contrario a lo asumido. Supongamos que $Ker\Phi = (0)$. De nuevo si $Im\Phi = (0)$ entonces $\Phi = 0$, no es posible. Pero así Φ es invertible. Como cada Φ es invertible no hay divisores de cero, $1 \in Hom_R(M, M)$, este es un anillo de división. ∎

Lema 6.3 *Si J es un ideal Nil izquierdo en un anillo artiniano R entonces J es nilpotente.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que J es Nil pero no es nilpotente, así $J^n \neq (0)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Como $J^k \supset J^{k-1}$ y R es artiniano tenemos que $J^m = B$ es mínimo en la cadena. Tomemos $B^2 = J^{2m} \subset J^m = B$ implica que $B^2 = B$. Consideremos

$$\mathcal{F} := \{A \big| A \text{ es un ideal izquierdo contenido en } B \text{ tal que } BA \neq (0)\}.$$

Notemos que $B \in \mathcal{F}$ porque $B^2 = B \neq (0)$. Sea A un elemento mínimo en $\mathcal{F}$. El elemento mínimo siempre existe, $\cap_i I_i$ es un ideal y es mínimo. Tomemos $a \in A$ de manera que $Ba \neq (0)$. También $Ba \subset A$ y $B(Ba) = B^2a = Ba \neq 0$. Pero así $Ba \in \mathcal{F}$. Como A es mínimo $Ba = A$. Esto da $ba = a$, obtenemos $b^i a = a$ para cualquier entero. Recordando que b es nilpotente $b^i a = a = 0$, pero habíamos asumido $a \neq 0$. ∎

¿Quién es R^{op}? Sea $R = (R, +, \cdot)$ un anillo. Definamos la operación $\circ$ en R por

$$x \circ y = y \cdot x$$

para cada $x, y \in R$. Claro, $R^{op} = (R, +, \circ)$ es un anillo y se llama el anillo opuesto de R.

Lema 6.4 *Sea R un anillo con unidad. Dejemos que $Hom_R(R, R)$ sea el anillo de endomorfismos de R considerado como un R-módulo izquierdo. Entonces $Hom_R(R, R) \cong R^{op}$ como anillos.*

Demostración. Sea R un anillo con unidad. Consideremos el mapeo

$$f : R^{op} \to Hom_R(R, R)$$

dado por $f(a) = a^*$, donde $a^*(x) = a \circ x = xa$.

Paso 1, $a^* \in Hom_R(R, R)$. Sean $x, y, r \in R$,

$$a^*(x+y) = a \circ (x+y) = (x+y)a = xa + ya = a^*(x) + a^*(y),$$

y también

$$a^*(xr) = a \circ (rx) = (rx)a = r(xa) = r(a^*(x)).$$

Notemos que la última ecuación resulta de que a^* es un homomorfismo de R-módulos derecho. mostramos ahora que f es un homomorfismo de anillos. Sean $a, b \in R$. Para cualquier $x \in R$,

$$\begin{aligned} (a+b)^*(x) &= x(a+b) = ax + bx, \\ &= a^*(x) + b^*(x) = (a^* + b^*)(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(a+b)^* = a^* + b^*$. De manera similar,

$$\begin{aligned} (ab)^*(x) &= (x)ba = (xb)a = (b^*(x))a \\ &= a^*(b^*(x)) = (a^*b^*)(x). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^* = a^* + b^* = f(a) + f(b), \text{ y además,} \quad (6.1) \\ f(ab) &= (ab)^* = a^*b^* = f(a)f(b). \quad (6.2) \end{aligned}$$

Hemos probado que es un homomorfismo como deseado. Paso 2, para completar la prueba debemos argumentar porque es uno a uno y sobre.

1-1. Sea $a, b \in R$ y $a^* = b^*$. Entonces $a^*(x) = b^*(x), \forall x \in R$. Esto quiere decir que $xa = xb, \forall x \in R$, así $R(a-b) = 0$; en particular para 1, por lo que $a = b$. Por lo tanto f es uno a uno.

Sobre. Ahora supongamos que $t \in Hom_R(R, R)$. Dejemos que $t(1) = a$. Entonces conjeturamos que $t = a^*$; y que a es una preimagen de t. Dado cualquier $x \in R$,

$$t(x) = t(x1) = xt(1) = xa = a^*(x).$$

Por lo tanto $t = a^*$, como afirmamos. Esto prueba que f es sobre y concluye la prueba. ∎

El mismo mapeo se puede usar para definir sobre R, $f : R \to Hom_R(R, R)$ de manera que $f(x) = x^*$, y $x^*(r) = xr, \forall r \in R$. Un argumento similar dejaría concluir que $R \cong Hom_R(R, R)$, considerando a $Hom_R(R, R)$ como un R-módulo derecho. Así $Hom_R(R, R)$ como un módulo derecho no es el mismo objeto que como módulo izquierdo sobre R.

Lema 6.5 *Sea $M = \oplus \sum_{i=1}^{k} M_i$ sea una suma directa de R-módulos M_i. Entonces*

$$Hom_R(M, M) \cong \begin{bmatrix} Hom_R(M_1, M_1) & Hom_R(M_1, M_2) & \dots & Hom_R(M_k, M_1) \\ Hom_R(M_1, M_2) & \ddots & \dots & Hom_R(M_k, M_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Hom_R(M_1, M_k) & Hom_R(M_2, M_k) & \dots & Hom_R(M_k, M_k) \end{bmatrix}$$

como anillos. El lado derecho es un anillo T, de matrices $k \times k$ con $f = (f_{ij})$ bajo la adición matricial usual y la multiplicación, donde $f_{ij} \in Hom_R(M_j, M_i)$.

Demostración. Es crucial que $M = \oplus \sum_{i \leq k} M_i$, que es directa. Dejemos que $\phi \in Hom_R(M, M)$. Sea $\lambda_j : M_j \to M$ y $\pi_i : M \to M_i$ los mapeos de proyección e inclusión naturales, respectivamente. Entonces

$$\phi_i \phi \lambda_j \in Hom_R(M_j, M_i).$$

Defimanos un mapeo $\sigma : Hom_R(M, M) \to T$, T e anillo de matrices, poniendo $\sigma(\phi)$ que sea la matriz $k \times k$, $(\pi_i \phi \lambda_j)$ cuya (i, j) entrada es $\pi_i \phi \lambda_j$ y $\phi \in Hom_R(M, M)$.

Debemos mostrar que σ es un isomorfismo. Sean $\phi, \psi \in Hom_R(M, M)$. Entonces

$$\sigma(\phi + \psi) = (\pi_i(\phi + \psi)\lambda_j = (\pi_i\phi\lambda_j) + (\pi_i\psi\lambda_j) = \sigma(\phi) + \sigma(\psi), \text{ y también,} \tag{6.3}$$

$$\sigma(\phi)\sigma(\psi) = (\pi_i\phi\lambda_j)(\pi_l\psi\lambda_j) = \left(\sum_{l=1}^{k} \pi_i\phi\lambda_l\pi_l\psi\lambda_j\right), \tag{6.4}$$

es la multiplicación ordinaria de matrices. Sin embargo $\sum_{l=1}^{k} \lambda_l\pi_l = 1$, porque son los mapeos de inclusión y proyección. De esto concluimos que

$$\sigma(\phi)\sigma(\psi) = (\pi_i\phi\psi\lambda_j) = \sigma(\phi\psi).$$

Por lo que hemos probado que σ es un homomorfismo.

Ahora proveemos que es inyectivo. Sea $\sigma(\phi) = (\pi_i\phi\lambda_j) = 0$. Entonces $\pi_i\phi\lambda_j = 0$, para $1 \leq i, j \leq k$. Eso quiere decir que

$$\sum_{i=1}^{k} \pi_i\phi\lambda_j = 0.$$

Pero $\sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1$, obtenemos que $\phi\lambda_j = 0$, $1 \leq j \leq k$. De manera similar, como da cero para cada λ_j, entonces $\phi = 0$, así es inyectivo.

Para probar que σ es sobre, dejemos que $f = (f_{ij}) \in T$, donde $f_{ij} : M_j \to M_i$ es un R-homomorfismo. Sea

$$\phi = \sum_{i,j} \lambda_i f_{ij}\pi_j.$$

Entonces $\phi \in Hom_R(R, R)$. Por definición de σ, $\sigma(\phi)$ s la matriz $k \times k$ cuya entrada (s, t) es

$$\pi_s(\sum_{i,j} \lambda_i f_{ij}\pi_j)\lambda_t = f_{st},$$

ya que $\pi_p\lambda_q = \delta pq$. Por lo que $\sigma(\phi) = (f_{st}) = f$. Así σ es sobreyectiva. ∎

Definición. Un R-módulo M es llamado completamente reducible si $M = \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, donde M_α son R-submódulos simples.

El siguiente lema usa la definición anterior y el lema de Zorn. El lema de Zorn es importante en varias pruebas en álgebra moderna. En particular es posible que el primer encuentro de un estudiante con el lema de Zorn sea en la prueba de existencia de un ideal maximal para un anillo R. Otro caso es el de la base de un espacio vectorial, si fuera infinito. El lema de Zorn afirma que para una familia $\mathcal{F}$, si cada cadena $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, si $\mathcal{K}$ tiene un a cota superior respecto al mismo orden parcial en $\mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal.

Para una suma de submódulos escribamos $M = \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ para el módulo generado por estos de manera que sólo finitas entradas son distintas de cero para cada $x \in M$. Usemos $\oplus \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ para decir que la suma es directa, es decir las bases de los M_α son independientes. De otra manera, x tiene expresión única en M, $x = \sum_\alpha x_\alpha$, los x_α son únicos y finitos distintos a cero. Si Λ es finito se puede escribir $M = \oplus \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha = \oplus_{i=1}^n M_i$.

Lema 6.6 *Sea $M = \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ una suma de R-módulos simples M_α. Sea K un submódulo de M. Entonces existe un conjunto $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $\sum_{\alpha\in\Lambda'} M_\alpha$ es un sumando directo de K, es decir $M = K \oplus (\oplus \sum_{\alpha\in\Lambda'} M_\alpha)$.*

Demostración. Sea

$$S = \{A \subset \Lambda | \sum_{\alpha\in A} M_\alpha \text{ es una suma directa y } K \cap \sum_{\alpha\in A} M_\alpha = (0)\}.$$

El conjunto S no es vacío porque $\emptyset \in S$. Podemos ordenar S por la inclusión y cada cadena tiene una cota superior, $\cup_i A_i$. Por el lema de Zorn S tiene un elemento maximal, que sea A. Sea también $N = K \oplus (\oplus \sum_{\alpha\in A} M_\alpha)$. Afirmamos que $M = N$. Tomemos M_β, algún elemento de la suma. Como cada sumando es simple, $N \cap M_\beta$ es (0) o M_β. Si es cero concluímos que $\sum_{\alpha\in A\cup\{\beta\}} M_\alpha$ es directa, pero contradice la maximalidad de A. De manera que para $\beta \in \Lambda$, $M_\beta \subset N$, $\therefore M = N$. ∎

Corolario 6.7 *Si $M = \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ es la suma de una familia de R-módulos simples*

$(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, *entonces existe una subfamilia* $(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda'\subset\Lambda}$ *tal que*

$$M = \oplus \sum_{\alpha\in\Lambda'} M_\alpha.$$

Lema 6.8 (de ideales mínimos) *Sea A un ideal izquierdo minimal de un anillo R. Tenemos dos opciones, $A^2 = (0)$ o $A = Re$, donde e es un idempotente distinto de cero en R.*

Demostración. Supongamos que $A^2 \neq (0)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $Aa \neq (0)$. Como A es mínimo y $Aa \subseteq A$ da $Aa = A$. Debe existir entonces un elemento de $e \in A$ tal que $ea = a$ por la última igualdad. Como $a \neq 0$ entonces $e \neq 0$. Multiplicando e de nuevo, $e^2a - ea = (e^2 - e)a = 0$.

Tomemos este elemento a fijo. Definamos ahora $B = \{c \in A | ca = 0\}$, el aniquilador de A por la izquierda. Notemos que B es un ideal izquierdo de R, porque al multiplicar mantenemos la igualdad a cero, y $B \subset A$ pero $B \neq A$, porque sino $A = (0)$. Así $B = (0)$ porque A es mínimo. Si $(e^2 - e)a = 0$ y $a \neq 0$, $e^2 = e$. Veamos que $Re \neq 0$ porque $0 \neq e = e^2 \in Re$. Es más $Re \subseteq A$, porque A es ideal izquierdo y por el supuesto $Re = A$. ∎

Cada ideal bilateral es ideal izquierdo(derecho). La condición del teorema siguiente es fuerte porque es para ideales de un sólo lado. Es sin embargo de mucha utilidad el resultado, da de consecuencia la representación de R a partir de propiedades abstractas.

Teorema 6.9 (Wedderburn-Artin) *Sea R artiniano por la izquierda (o derecha), un anillo con unidad y sin ideales nilpotentes distintos de cero. Entonces R es isomorfo a una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos de división.*

Demostración. Primera parte. Establezcamos que cada ideal distinto de cero es de la forma Re para algún idempotente e. Esto lo hicimos en el lema, pero este establece el resultado solamente si A es mínimo. Tomemos cualquier ideal A izquierdo no cero de E. En virtud de que R satisface la condición de cadenas descendentes para los ideales izquierdos, es decir R es artiniano, A contiene un ideal izquierdo mínimo M. En efecto como cada cadena descendente que parte de A es finita, cada una tiene un mínimo, M_α. Entonces $M = \cap_\alpha M_\alpha$ es mínimo, es un ideal y $M \subset A$.

Debe ser que $M = Re$ para algún idempotente si $M^2 \neq (0)$. En caso que $M^2 = (0)$, $(MR)^2 = (0)$ de manera que $MR = (0)$, porque de lo contrario MR es nilpotente. Pero así $M = (0)$ contradice la hipótesis. Entonces $e \in A$. Definamos una familia $\mathcal{F}$ de ideales izquierdos de la siguiente manera,

$$\mathcal{F} = \{R(1-e) \cap A | e \text{ es un idempotente distinto de cero en A}\}.$$

Por el último párrafo $\mathcal{F}$ es no vacía. Con el mismo argumento previo $\mathcal{F}$ tiene un elemento mínimo, digamos $R(1-e)\cap A$. Proponemos que $R(1-e)\cap A = (0)$. Si no es así hay un idempotente $e_1 \in R(1-e)\cap A$. Veamos que $e_1 e = r(1-e)e = r(e-e^2) = 0$. Hagamos $e' = e + e_1 - ee_1$. Calculemos $e'e' = e'$ y $e_1 e' \neq 0$,

$$\begin{aligned} e'e' &= (e + e_1 - ee_1)(e + e_1 - ee_1) \\ &= (e + ee_1 - ee_1) + (0 + e_1 + 0) + (0 - ee_1 + 0) \\ &= e + e_1 - ee_1 = e'. \end{aligned}$$

Se tiene que $e_1 e' = e_1 \neq 0$. También $R(1-e') \cap A \subseteq R(1-e) \cap A$. Si $e_1 e' \neq 0$, $e_1 \notin R(1-e')\cap A$ pero $e_1 \in R(1-e)\cap A$. Concluimos que $R(1-e')\cap A \subsetneq R(1-e)\cap A$ contradice la minimalidad de $R(1-e)\cap A$. Por lo tanto $R(1-e)\cap A = (0)$. Tomemos $a \in A$, eso da $a(1-e) = 0 \to a = ae$. Resulta en $A \supset Re \supset Ae = A$, i.e. $A = Re$.

Segunda parte. Sea S la suma de ideales mínimos izquierdos de R. Sabemos que $S = Re$ para algún idempotente. Si $R(1-e) \neq (0)$, existe un ideal minimal izquierdo A en $R(1-e)$. Pero como A es mínimo también esta en Re y $A \subset Re \cap R(1-e) = (0)$ en virtud de la descomposición. Por lo tanto $R(1-e) = (0)$ y $S = \sum_{i\in\Lambda} A_i$, donde Λ es la familia de ideales mínimos de R. Pero por el corolario tenemos que $R = \oplus \sum_\alpha M_\alpha$ para algunos α de Λ. Podemos usar que $1 \in R$ de manera que $1 = e_1 + \cdots + e_n$ y así $R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n$.

Tercera parte. Usando lo anterior escojamos $\{e_j\}$ tal que si reordenamos los sumandos de la última expresión obtenemos que los primeros n_1 sumandos son isomorfos a Re_1, los siguientes n_2 sumandos son isomorfos Re_2 y así. Queremos usar el lema 3, por lo que escribiremos $Hom_R(R, R)$ como una matriz expresada entre los homomorfismos de las componentes de $R = \oplus \sum_i M_i$. Como $Re_j \ncong Re_i$ si $i \neq j$ por construcción tememos que $Hom_R(Re_j, Re_i) = 0$, enfatizamos que la suma es directa. Si estos son iguales tenemos que $Hom_R(Re_j, Re_j) = D_j$ un anillo de división, al usar el lema de Schur. Sucede que $Hom_R(Re_j, Re_j) = D_j$ no es $Hom_R(R, R)$ que es R. Pero sí es un anillo de división por el lema. Podemos escribir que la multiplicación de las n_1 copias de D_1, el primer anillo de división para $Hom_R(Re_1, Re_1)$ se comporta como matrices $n_1 \times n_1$ en D_1 sobre R. Podemos hacer lo mismo y para escribirlas todas en una matriz, ponemos D_i en la diagonal. Cuando agregamos el uso del lema 3 nos permite escribir el isomorfismo siguiente:

$$Hom_R(R, R) \cong \begin{bmatrix} D_1 & \dots & D_1 & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \\ D_1 & \dots & D_1 & & & & & & & \\ & & & D_2 & \dots & D_2 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & D_2 & \dots & D_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & D_n & \dots & D_n \\ & & & & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & D_n & \dots & D_n \end{bmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (D_1)_{n_1} & & & \\ & (D_2)_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (D_k)_{n_k} \end{bmatrix}, \\
&\cong (D_1)_{n_1} \oplus (D_2)_{n_2} \oplus \cdots \oplus (D_k)_{n_k}.
\end{aligned}
$$

Además $Hom_R(R, R) \cong R^{op} \cong R$ como anillos por el lema 2. Notemos que el anillo opuesto de un anillo de división debe ser, al igual que el anillo, un anillo de división. Por lo tanto R es una suma directa finita de anillos de matrices sobre anillos de división. ∎

Veamos que $L(E)$ no tiene ideales nilpotentes distintos de cero. El teorema se aplicaría así dado que $L(E)$ sea artiniano, i.e. finito dimensional como espacio vectorial.

Sea I un ideal tal que $I^2 = 0$ e I distinto de cero. Recordemos que para dos ideales, A y B, el conjunto $AB := \{\Sigma_i a_i b_i | a_i \in A, b_i \in B\}$ es el ideal producto. Consideramos elementos $\sum_i a_i b_i \in I^2$ con $a_i, b_i \in I$. De manera muy sencilla, sabemos que debe haber un vértice que pertence a I si $I \neq (0)$. Entonces $v^2 \neq 0$ implica que $I^2 \neq 0$, contrario a lo asumido.

Podemos aplicar el teorema solamente si $\{pq^*\}$ es finito. El resultado que usamos dentro de la sección sobre $L_K(E)$ finito dimensionales es el siguiente: debemos notar que cada $(D_i)_{n_i}$ determina un n_i.

Corolario 6.10 *Si una suma de anillos de matrices $\oplus_{i \in I} M_{n_i}(K) \cong \oplus_{j \in J} M_{n_j}(K)$, con $|I|, |J| < \infty$, entonces las secuencias de índices I y J son las mismas, salvo algún reordenamiento ϕ, i.e. $n_i = n_{\phi(j)}$.*

Índice