UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Análisis de Cantor-Bendixson: La Hipótesis del Continuo para espacios polacos

Gabriel Enrique Girón Garnica

Guatemala
2008

Análisis de Cantor-Bendixson: La Hipótesis del Continuo para espacios polacos

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Análisis de Cantor-Bendixson: La Hipótesis del Continuo para espacios polacos

Trabajo de graduación presentado por
Gabriel Enrique Girón Garnica para optar al
grado académico de Licenciado en Matemática

Guatemala
2008

«Creo que la verdad está bien en la matemática…. No en la vida. En la vida es más importante la ilusión, la imaginación, el deseo, la esperanza. Además, ¿sabemos acaso lo que es la verdad? Si yo le digo que aquel trozo de ventana es azul, digo una verdad. Pero es una verdad parcial, y por lo tanto una especie de mentira. Porque ese trozo de ventana no está solo, está en una casa, en una ciudad, en un paisaje. Está rodeado del gris de ese muro de cemento, del azul claro de este cielo, de aquellas nubes alargadas, de infinitas cosas más. Y si no digo todo, absolutamente todo, estoy mintiendo. Pero decir todo es imposible, aun en este caso de la ventana, de un simple trozo de la realidad física, de la simple realidad física. La realidad es infinita y además infinitamente matizada, y si me olvido de un solo matiz ya estoy mintiendo. Ahora, imagínese lo que es la realidad de los seres humanos, con sus complicaciones y recovecos, contradicciones y además cambiantes. Porque cambia a cada instante que pasa, y lo que éramos hace un momento no lo somos más. ¿Somos, acaso, siempre la misma persona? ¿Tenemos, acaso, siempre los mismos sentimientos?»

Ernesto Sabato
(Sobre héroes y tumbas, 1961)

Prefacio

Esta tesis es el producto de una serie de discusiones y sugerencias que el maestro Dorval Carías tuvo la gentileza, y yo el honor, de compartir a inicios del año en curso. Él sugirió que escribiera una tesis cuyo tema central fuese un resultado de mucha importancia en la matemática moderna. De tal razón me propuso, aquel grandioso día, que probara la *Hipótesis del Continuo para espacios polacos* mediante la *teoría descriptiva de conjuntos*. Dicho y hecho.

En lógica matemática, la teoría descriptiva de conjuntos es una de las principales áreas de investigación en teoría de conjuntos, tiene aplicaciones en otras áreas de la lógica matemática así como en el análisis funcional. Formalmente, la teoría descriptiva de conjuntos es el estudio de "conjuntos definibles" en espacios polacos. En esta teoría, los conjuntos son clasificados en jerarquías, de acuerdo a la complejidad de sus definiciones, y la estructura de los conjuntos en cada nivel de dicha jerarquía es sistemáticamente analizada.

Además de sugerir el tema de tesis, el maestro Dorval Carías me brindó la grandísima oportunidad de que esta tesis fuese asesorada por un doctor en matemática con especial interés en lógica matemática. Este doctor es Luis Pedro Poitevin, graduado de Licenciado en Matemática en esta Universidad en 1996 y ahora catedrático del Departamento de Matemática del Salem State College en Massachusetts, USA. Cortésmente Luis Pedro aceptó asesorar este trabajo.

Durante todo este año Luis Pedro y yo trabajamos en el desarrollo de la prueba de la Hipótesis del Continuo para espacios polacos así como en la escritura de unos ejemplos originales de la derivada de Cantor-Bendixson. Está de más decir lo invaluable que fue la visión, experiencia y guía que Luis Pedro ha brindado al trabajo de investigación matemática que sigue en las siguientes páginas.

Esta tesis se limita a la exposición de los fundamentos de los espacios polacos, un breve estudio del análisis de Cantor-Bendixson y, por último, se presentan algunos ejemplos de la derivada de Cantor-Bendixson y la prueba de la Hipótesis del Continuo para espacios polacos.

Quiero expresar mi infinito agradecimiento, respeto y admiración al maestro Dorval Carías. Es él el culpable casi total del gusto y pasión que hoy en día profeso por y para la matemática, además de ser también el responsable de la mayor parte de mi formación matemática. Muchísimas gracias maestro por la brillantez de sus exposiciones y su absoluta disposición para hacer matemática. Alef-uno gracias por su amistad, sobre todo.

Expreso también mis agradecimientos hacia Luis Pedro Poitevin. Sin sus comentarios y asesoría este trabajo jamás hubiese sido posible. Gracias por el tiempo invertido en este proyecto y por la amistad que hemos construido a lo largo de este año.

Agradezco muchísimo a la Lda. María Eugenia de Nieves, Directora del Departamento de Matemática, por su apoyo incondicional durante estos cinco años de pertenencia compartida a tan especial departamento. Sin su apoyo y consejos no hubiera podido realizar mis estudios en ciencia de la computación y matemática simultáneamente. Gracias por todo.

Finalmente, gracias al Dr. Raúl González y al MSc. Paulo Mejía por haber contribuido, también, en mi formación matemática.

Contenido

Resumen

Se presenta en esta tesis una prueba de la Hipótesis del Continuo para espacios polacos y algunos ejemplos originales de la derivada de Cantor-Bendixson. La Hipótesis del Continuo, postulada por el matemático alemán Georg Cantor a finales del siglo XIX, enuncia una relación entre la cardinalidad de conjuntos infinitos. Por otro lado, la derivada de Cantor-Bendixson de un subconjunto cerrado F de un espacio polaco es el conjunto que contiene todos los puntos límite de F.

Un espacio polaco es un espacio topológico separable que es metrizable por una métrica completa. Asociado a la derivada de Cantor-Bendixson se encuentra el rango de Cantor-Bendixson, un rango ordinal. Además, la Hipótesis del Continuo es una proposición sobre números cardinales. Por lo anterior se presentan algunos preliminares sobre ordinales, cardinales y espacios topológicos y métricos.

1. Introducción

En la placa conmemorativa colocada en 1970 en la casa de Halle donde *Georg Cantor (1845 - 1918)* vivió desde 1886 hasta su muerte, se llama a Cantor «fundador de la teoría de conjuntos» (Begründer der Mengenlehre). En 1914, *Felix Hausdorff* dedicó su influyente monografía *Grundzüge der Mengelehre* a Georg Cantor, «creador de la teoría de conjuntos» (Schöpfer der Mengelehre). Con esta misma denominación, la *Sociedad Matemática Alemana* se dirigió a Cantor en 1915, en ocasión de su septuagésimo aniversario. En 1932, *Ernst Zermelo* escribió en el prefacio de su edición de la obra matemática y filosófica de Cantor: «Es raro en la historia de las ciencias que toda una disciplina científica de importancia fundamental se deba al acto creador de un solo individuo. Este es el caso de la creación de Georg Cantor, la teoría de conjuntos, una nueva disciplina matemática cuyos rasgos esenciales se desarrollaron durante un período de unos 25 años en una serie de artículos de un único investigador».

En noviembre de 1873, Cantor escribió a *Dedekind* preguntándole si sabía si los números reales eran biyectables con los enteros positivos (biyectable, en este contexto, significa que existe una función biyectiva entre los números reales y los enteros positivos). Dedekind respondió que no lo sabía, y que, en su opinión, la pregunta no merecía demasiada atención, por ser meramente especulativa. Sin embargo, añadió que el conjunto de los números algebraicos sí es contable y acompañó una demostración de tal hecho. Pocos días después, Cantor logró demostrar que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ es no contable, demostración que Dedekind le ayudó a simplificar. Cantor publicó ambos resultados (el de Dedekind sobre los números algebraicos y el suyo), observando que de ellos se sigue la existencia de números trascendentes.

En 1877, Cantor mostró que los distintos espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, son biyectables con $\mathbb{R}$. En la publicación de estos resultados, Cantor introdujo por primera vez el concepto comparativo de *potencia de un conjunto* (o cardinalidad de un conjunto): dos conjuntos tienen la misma potencia si son biyectables; si no lo son, pero uno es biyectable con un subconjunto del otro, la potencia del primero es menor que la del segundo. Cantor conoce sólo dos potencias infinitas: la del conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ y la del conjunto de números reales $\mathbb{R}$. Además, Cantor conjetura que *todo conjunto infinito de números reales tiene una de las dos potencias anteriores*. En ese momento, estamos en presencia de la primera formulación de la conocida, interesante e importante *Hipótesis del Continuo.*

Cantor realizó muchos intentos por probar la Hipótesis del Continuo. Estos intentos de Cantor parten del análisis de conjuntos cerrados y perfectos. Cantor mostró que todo conjunto perfecto tiene igual cardinalidad que los números reales, lo que sugiere un camino para demostrar la Hipótesis del Continuo: *mostrar que todo conjunto no contable posee un subconjunto perfecto.*

Cantor solamente logró mostrar que esto es cierto para todo conjunto cerrado, pero no logró ir más allá. Como hoy en día sabemos, la estrategia que escogió estaba, por decirlo de alguna forma, condenada al fracaso, ya que es posible demostrar la existencia de conjuntos no contables sin subconjuntos perfectos. Es importante recordar que la Hipótesis del Continuo, como mostró *Paul Cohen* en 1963, no es demostrable a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, incluso si se acepta el axioma de elección; tampoco es refutable a partir de ellos, según mostró *Kurt Gödel* en 1939... por lo tanto podemos concluir que Cantor no imaginaba la grandeza matemática que había construido.

Cabe mencionar que en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, el genio matemático *David Hilbert* propuso la Hipótesis del Continuo como el *primer problema* de su famosa lista de 23 problemas abiertos de la matemática, conocida usualmente como los *problemas de Hilbert*.

Esta tesis tiene por objetivo principal mostrar la Hipótesis del Continuo para espacios polacos, de hecho la prueba que se presenta sigue la idea de Cantor de mostrar que todo conjunto no contable posee un subconjunto perfecto. Para ello se realizan algunos preliminares sobre ordinales, cardinales y espacios topológicos y métricos. Tales preliminares son después utilizados para desarrollar algunos de los resultados fundamentales para espacios polacos y el análisis de Cantor-Bendixson. Adicionalmente se exponen ejemplos originales sobre conjuntos con diversos rangos de Cantor-Bendixson.

El contenido arriba descrito está basado en las siguientes dos referencias fundamentales de la teoría descriptiva de conjuntos:

1. Marker, David. 2002. Descripitve Set Theory.

2. Kechris, Alexander. 1995. Classical Descripitve Set Theory.

Puede decirse que la influencia de las notas de David Marker en el presente trabajo es mayor que la del clásico libro de Alexander Kechris.

2. Preliminares

Se presentan en esta sección los conceptos matemáticos fundamentales necesarios para el resto del contenido. Principalmente se desarrollarán resultados referentes a cardinales, ordinales y espacios topológicos.

2.1 Conjuntos y funciones

El concepto de *conjunto* es el fundamento, el pilar, sobre el cual está costruida toda la matemática moderna. Sin embargo, siendo dicho concepto tan importante, carece de una definición matemática rigurosa. Es un ente indefinido de la matemática.

Intuitivamente pensamos en un conjunto como una colección de objetos matemáticos, llamados sus *elementos* o *miembros*. Para indicar que un objeto x es elemento de un conjunto A escribimos $x \in A$; para indicar que un objeto x no es un elemento del conjunto A escribimos $x \notin A$. Consideramos dos conjuntos A y B como el mismo conjunto, denotado $A = B$, si, y sólo, si ambos conjuntos tienen los mismos elementos. Usualmente introducimos un conjunto mediante la notación de llaves, listando o indicando dentro de las llaves sus elementos. Por ejemplo, $\{2, 4\}$ es el conjunto con 2 y 4 como sus únicos elementos. Nótese que $\{2, 4\} = \{4, 2, 4\}$. Los siguientes son algunos importantes conjuntos:

- El conjunto vacío $\emptyset$.
- El conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- El conjunto de números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- El conjunto de números racionales $\mathbb{Q} = \{m/n \, : \, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } n \neq 0\}$.
- El conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Si todos los elementos de un conjunto A están en otro conjunto B, entonces decimos que A es un *subconjunto* de B. Denotamos esto escribiendo $A \subseteq B$. Si existe $b \in B$ tal que $b \notin A$ escribimos $A \subset B$ y decimos que A es un *subconjunto propio* de B. Así, el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto, y cada conjunto es subconjunto de sí mismo.

Si A y B son conjuntos, entonces podemos construir los siguientes conjuntos a partir de ellos:

- *Unión* de A y B: $A \bigcup B = \{x \, : \, x \in A \ \vee \ x \in B\}$.
- *Intersección* de A y B: $A \bigcap B = \{x \, : \, x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.
- *Complemento de B respecto a A*: $A \setminus B = \{x \, : \, x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.
- *Producto cartesiano de A y B*: $A \times B = \{(a, b) \, : \, a \in A \ \wedge \ b \in B\}$.

2.1.1 Definición. *Sean A y B conjuntos. Una función de A a B es un subconjunto $\Lambda \subseteq A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ con $(a, b) \in \Lambda$. Escribimos $f(a)$ para éste único b, y lo llamamos el valor de f en a o la imagen de a bajo f. Denominados a A el dominio de f, B el contradominio de f, y Λ la gráfica de f. Escribiremos $f : A \to B$ para indicar que f es una función de A hacia B. Es también usual escribir $x \mapsto f(x)$ para indicar la regla por la cual asociamos a cada x en el dominio, su valor $f(x)$ en el contradominio.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.1.2 Definición. *Dada $f : A \to B$ y $g : B \to C$ tenemos una función $g \circ f : A \to C$ definida por $(g \circ f)(a) = g[f(a)]$ para todo $a \in A$. Esta función es llamada la composición de g con f.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.1.3 Definición. *Sea $f : A \to B$ una función y $a_1, a_2 \in A$ tales que $a_1 \neq a_2$. Decimos que f es inyectiva si se cumple que $f(a_1) \neq f(a_2)$. Decimos que f es sobreyectiva si para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además, f es biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.2 Cardinalidad

2.2.1 Definición. *Dos conjuntos A y B se dice tienen igual cardinalidad si existe una biyección $f : A \to B$. Escribimos $A =_c B$ para indicar que A y B tienen la misma cardinalidad.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.2.2 Ejemplo. *Conjuntos con igual cardinalidad.*

(a) $\mathbb{N} =_c \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mediante la biyección $x \mapsto x + 1$.

(b) Los intervalos abiertos $(0, 1)$ y $(0, 2)$ de $\mathbb{R}$ son de igual cardinalidad bajo la biyección $x \mapsto 2x$.

$\triangledown$

2.2.3 Definición. *Un conjunto A se dice tiene cardinalidad menor o igual que un conjunto B si tiene igual cardinalidad que algún subconjunto de B. Indicamos que A tiene menor o igual cardinalidad que B escribiendo $A \leq_c B$.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

Partiendo de las definiciones 2.2.1 y 2.2.3 es claro que si A, B y C son conjuntos, entonces

$$A =_c A \;\; y \;\; A \leq_c A$$

$$A =_c B \quad \Rightarrow \quad B =_c A$$

$$A =_c B \text{ y } B =_c C \quad \Rightarrow \quad A =_c C$$

$$A \leq_c B \text{ y } B \leq_c C \quad \Rightarrow \quad A \leq_c C$$

2.2.4 Definición. *Sea A un conjunto. Decimos que A es finito si existe algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} \, : \, i \leq n\};$$

en cualquier otro caso decimos que A es infinito. Por vacuidad el conjunto vacío $\emptyset$ es finito.

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.2.5 Definición. *Un conjunto infinito A es contable si existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$. Además, decimos que A es no contable si no es finito ni contable. Por último, A es enumerable si es finito o contable.*

$\leftharpoonup\rightharpoondown$

2.2.6 Teorema. *Si A es un conjunto enumerable y existe una inyección $f : B \to A$, entonces B es también un conjunto enumerable; en particular, todo subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.*

Demostración: Claramente $A \leq_c \mathbb{N}$. Además

$$f(B) = \{a \in A \,:\, a = f(b),\, b \in B\} \subset A$$

entonces $B \leq_c A$. Por lo tanto $B \leq_c \mathbb{N}$, i.e. B es enumerable. Por otro lado, si $B \subset A$, entonces $f : B \to A$ tal que $f(x) = x$ es una inyección, de donde concluimos que B es enumerable.

∎

Adviértase que el teorema anterior también implica que si $B \subseteq A$ y B es no contable, entonces A es no contable.

2.2.7 Teorema. *Si A es un conjunto enumerable y existe una función sobreyectiva $f : A \to B$, entonces B es también un conjunto enumerable.*

Demostración: Si A es vacío, entonces $B = f(A) = \emptyset$. Si A es no vacío, entonces existe una función sobreyectiva

$$\pi : \mathbb{N} \to A$$

y la composición $h : \mathbb{N} \to B$ tal que $h(n) = f(\pi(n))$ es una función sobreyectiva entre $\mathbb{N}$ y B, entonces B es enumerable.

∎

El siguiente teorema es uno de los más básicos de la teoría de conjuntos. Su prueba la debemos a Georg Cantor.

2.2.8 Teorema. *Para cada sucesión $A_0, A_1, \ldots$ de conjuntos enumerables, la unión*

$$A = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots$$

es también un conjunto enumerable. En particular, la unión $A \bigcup B$ de dos conjuntos enumerables es enumerable.

Demostración: Es suficiente considerar el caso especial donde ninguno de los A_n es vacío. Para cada A_n existe una biyección $\pi^n : \mathbb{N} \to A_n$. Tomando $a_i^n = \pi^n(i)$, para simplificar la notación, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \{a_0^n,\, a_1^n,\, a_2^n \ldots\}$$

y podemos construir a partir de estas enumeraciones (biyecciones) una tabla de elementos que liste todos los miembros de A, digamos

$$
\begin{array}{lllll}
A_0: & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\
A_1: & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\
A_2: & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Por lo anterior tenemos que podemos enumerar la unión de la forma siguiente

$$A = \left\{a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_0^2, a_1^1, a_2^0 \ldots\right\}$$

recorriendo la tabla en forma diagonal ascendente, de izquierda a derecha, iniciando en a_0^0. Por lo tanto A es enumerable.

Si A y B son conjuntos enumerables, entonces $A \bigcup B$ es la unión de la sucesión de conjuntos A, B, B, B, $\ldots$. Por lo tanto $A \bigcup B$ es enumerable.

∎

2.2.9 Corolario. *El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es contable.*

Demostración: Defínase

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

Claramente $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{Z}^+$. Por el ejemplo 2.2.2(a) $\mathbb{Z}^+$ es contable y, además,

$$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, \ldots\}$$

es contable vía la biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-$ tal que $x \mapsto -(x+1)$. Así, gracias al teorema 2.2.8, $\mathbb{Z}$ es contable.

∎

2.2.10 Corolario. *El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ es contable.*

Demostración: Defínase

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left\{\frac{m}{n} \, : \, m \in \mathbb{Z}^+\right\} \qquad \mathbb{Q}^- = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left\{\frac{m}{n} \, : \, m \in \mathbb{Z}^-\right\}$$

Claramente $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \bigcup \{0\} \bigcup \mathbb{Q}^+$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$\mathbb{Q}_n^+ = \left\{\frac{m}{n} \, : \, m \in \mathbb{Z}^+\right\} \qquad \mathbb{Q}_n^- = \left\{\frac{m}{n} \, : \, m \in \mathbb{Z}^-\right\}$$

son contables gracias a las biyecciones $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_n^+$ tal que $m \mapsto (m+1)/n$ y $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_n^-$ tal que $m \mapsto -(m+1)/n$, respectivamente. Entonces $\mathbb{Q}^+$ y $\mathbb{Q}^-$ son contables, y en consecuencia $\mathbb{Q}$ también lo es.

∎

El corolario anterior fue uno de los primeros resultados significativos en el trabajo de clasificación de conjuntos infinitos por su "tamaño" que realizó Cantor. Tal resultado fue considerado, digamos, "paradójico" debido a que $\mathbb{Q}$ *parece* tener más elementos que $\mathbb{N}$. Seguido del resultado anterior Cantor mostró la existencia de conjuntos no contables:

2.2.11 Teorema. *El conjunto de sucesiones binarias infinitas*

$$\Delta = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \, : \, \forall \, i[a_i = 0 \ \vee \ a_i = 1]\}$$

es no contable.

Demostración: Supóngase, por el absurdo, que Δ es enumerable. Entonces existe una enumeración

$$\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$$

donde para cada n

$$\alpha_n = (a_0^n, a_1^n, \ldots)$$

es una sucesión de ceros y unos. Construimos la siguiente tabla con estas sucesiones como filas:

$$\begin{array}{lcccccc}
\alpha_0 : & a_0^0 & & a_1^0 & & a_2^0 & \cdots \\
& & \searrow & & & & \\
\alpha_1 : & a_0^1 & & a_1^1 & & a_2^1 & \cdots \\
& & & & \searrow & & \\
\alpha_2 : & a_0^2 & & a_1^2 & & a_2^2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \searrow
\end{array}$$

Definimos ahora β intercambiando cero y uno en la “sucesión diagonal” $a_0^0, a_1^1, a_2^2, \ldots$, i.e.

$$\beta = \left(1 - a_0^0, 1 - a_1^1, 1 - a_2^2, \ldots\right)$$

Es obvio que cada α_n es diferente que β. Por lo tanto la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ no enumera todo Δ, una contradicción.

∎

2.2.12 Corolario. *El conjunto de números reales* $\mathbb{R}$ *es no contable.*

Demostración: Definimos una sucesión de conjuntos $C_0, C_1, \ldots$ de números reales que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $C_0 = [0, 1]$.
2. Cada C_n es una unión de 2^n intervalos cerrados y

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1} \supseteq \cdots$$

3. C_{n+1} es construido removiendo el tercio medio abierto de cada intervalo cerrado de C_n, es decir, reemplazando $[a, b]$ en C_n por los dos intervalos cerrados

$$L[a, b] = \left[a, a + \frac{1}{3}(b - a)\right] \qquad R[a, b] = \left[a + \frac{2}{3}(b - a), b\right]$$

Con cada sucesión binaria $\delta \in \Delta$ asociamos un sucesión de intervalos cerrados

$$F_0^\delta, F_1^\delta, \ldots,$$

determinada por la siguiente recursión:

$$F_0^\delta = C_0 = [0, 1]$$

$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} LF_n^\delta & \delta(n) = 0 \\ RF_n^\delta & \delta(n) = 1 \end{cases}$$

Por inducción F_n^δ es uno de los intervalos cerrados de C_n de longitud $1/3^n$ y obviamente

$$F_0^\delta \supseteq F_1^\delta \supseteq \cdots \supseteq F_n^\delta \supseteq F_{n+1}^\delta \supseteq \cdots$$

El *axioma de completud de* $\mathbb{R}$ nos asegura que la intersección de esta sucesión es no vacía; de hecho, tal intersección contiene exactamente un número real, digamos

$$f(\delta) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n^\delta$$

La función f mapea el conjunto no contable Δ en el conjunto

$$F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \subset \mathbb{R}$$

conocido como el *conjunto de Cantor*, de tal razón para completar la prueba es suficiente verificar que f es inyectiva. Sean $\delta, \varepsilon \in \Delta$. Si n es el menor número para el cual $\delta(n) \neq \varepsilon(n)$ y (por ejemplo) $\delta(n) = 0$, tendríamos que $F_n^\delta = F_n^\varepsilon$ para ésta elección de n. Además

$$f(\delta) \in F_{n+1}^\delta = LF_n^\delta \qquad\qquad f(\varepsilon) \in F_{n+1}^\varepsilon = RF_n^\delta,$$

pero $LF_n^\delta \bigcap RF_n^\delta = \emptyset$, por lo que f es inyectiva.

∎

Adviértase que el ingrediente matemático básico de la prueba de no contabilidad de $\mathbb{R}$ está basada en el axioma de completud de $\mathbb{R}$, i.e. el uso de una propiedad particular de los números reales es necesaria: el resto de la construcción de Cantor se basa únicamente en propiedades aritméticas de los números reales.

Hasta el momento hemos mostrado la existencia de solo dos "órdenes del infinito", el de los números naturales $\mathbb{N}$ (los conjuntos infinitos contables) y el de $\mathbb{R}$. Existen muchos otros, como lo mostró Cantor.

2.2.13 Definición. *El conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A es el conjunto de todos sus subconjuntos, $\mathcal{P}(A) = \{X \,:\, X \text{ es un conjunto y } X \subseteq A\}$*

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

2.2.14 Teorema. *Si A y B son conjuntos tales que $A =_c B$, entonces*

$$\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$$

Demostración: Supóngase que $f : A \to B$ es una biyección, y sea $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ un mapeo definido por

$$\pi(X) = f(X) = \{f(x) \,:\, x \in X\}$$

Para probar que π es una inyección nótese que si $X,\ Y \in \mathcal{P}(A)$ y $x \in X \setminus Y$, entonces $f(x) \in f(X)$ pero no es posible que $f(x) \in f(Y)$. Así,

$$x \in X \setminus Y \;\Rightarrow\; f(x) \in f(X) \setminus f(Y)$$

y por argumento simétrico,

$$y \in Y \setminus X \;\Rightarrow\; f(y) \in f(Y) \setminus f(X)$$

por lo que concluimos

$$X \neq Y \;\Rightarrow\; f(X) \neq f(Y)$$

i.e. π es inyectiva.

π es también sobreyectiva. En efecto, dado $Y \subseteq B$ y $y \in Y$ es claro que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, por ser f sobreyectiva. Entonces si $X = \{x \in A \,:\, f(x) = y,\ y \in Y\}$, se tiene que $\pi(X) = Y$.

∎

2.2.15 Teorema. *Para todo conjunto A,*

$$A <_c \mathcal{P}(A)$$

i.e. $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ *pero* $A \neq_c \mathcal{P}(A)$*; de hecho no existe función sobreyectiva* $\pi : A \to \mathcal{P}(A)$.

Demostración: Que $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ se sigue del hecho que la función

$$x \mapsto \{x\}$$

que asocia con cada $x \in A$ su conjunto unitario $\{x\}$ es una inyección.

Asúmase, por el absurdo, que existe una función sobreyectiva

$$\pi : A \to \mathcal{P}(A)$$

y defínase el conjunto

$$B = \{x \in A \,:\, x \notin \pi(x)\}$$

tal que para todo $x \in A$,

$$x \in B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \pi(x)$$

Claramente B es un subconjunto de A. Como π es sobreyectiva, $B = \pi(b)$ para algún $b \in A$. Lo anterior implica que

$$b \in B \quad \Leftrightarrow \quad b \notin B$$

lo cual es una contradicción.

∎

Gracias al teorema anterior, que también debemos a Cantor, podemos concluir que existen muchos órdenes del infinito, y específicamente (al menos) aquellos de los conjuntos

$$\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) <_c \cdots$$

Si nombramos a estos conjuntos por la recursión

$$T_0 = \mathbb{N},$$
$$T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n)$$

entonces su unión $T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ tiene mayor cardinalidad que cualquier T_n, $n \in \mathbb{N}$. La clasificación y estudio de estos órdenes del infinito es uno de los problemas centrales de la teoría de conjuntos.

El siguiente problema, en cierta medida obvio, es comparar el "tamaño", formalmente la cardinalidad, de conjuntos no contables, iniciando con los dos más simples, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$.

2.2.16 Lema. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

Demostración: Es suficiente probar que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \Delta$, ya que en 2.2.12 mostramos que $\Delta \leq_c \mathbb{R}$. El mapeo $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \Delta$ definido por $\chi(A) = (\chi_A(i))_{i \in \mathbb{N}}$, donde

$$\chi_A(i) = \begin{cases} 1 & i \in A \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

es claramente una inyección, ya que si $i \in A$ e $i \notin B$, entonces $\chi_A(i) \neq \chi_B(i)$.

∎

2.2.17 Lema. $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Demostración: Es suficiente probar que $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ya que $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Nótese que la función de $\mathbb{R}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ definida por

$$x \mapsto \pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\} \subseteq \mathbb{Q}$$

es inyectiva, ya que si $x < y$ son dos números reales distintos, entonces existe algún racional q tal que $x < q < y$, y por lo tanto $q \in \pi(y) \setminus \pi(x)$.

∎

Se presenta ahora el básico e importante teorema de Schröder-Bernstein. Los dos lemas anteriores y dicho teorema nos permitirán concluir que $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.2.18 Teorema de Schröder-Bernstein. *Sean A y B conjuntos. Si $A \leq_c B$ y $B \leq_c A$, entonces $A =_c B$.*

Demostración: Notemos primero que si $A =_c C \subseteq B$, entonces existe una biyección $h : A \to C$. Claramente h es una inyección entre A y B. Por lo anterior, asúmase que

$$f : A \to B \qquad\qquad g : B \to A$$

son inyecciones y defínase recursivamente los conjuntos A_n y B_n :

$$A_0 = A \qquad\qquad B_0 = B$$

$$A_{n+1} = g[f(A_n)] \qquad\qquad B_{n+1} = f[g(B_n)]$$

Por inducción sobre n tenemos que

$$A_n \supseteq g(B_n) \supseteq A_{n+1}$$

$$B_n \supseteq f(A_n) \supseteq B_{n+1}$$

de tal forma que tenemos la cadena de inclusiones

$$A_0 \supseteq g(B_0) \supseteq A_1 \supseteq g(B_1) \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

$$B_0 \supseteq f(A_0) \supseteq B_1 \supseteq f(A_1) \supseteq B_2 \supseteq \cdots$$

Definimos también las intersecciones

$$A^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad\qquad B^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Nótese entonces que

$$B^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) \supseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1} = B^*$$

y dado que f es un inyección,

$$f(A^*) = f\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) = B^*$$

Así f es una biyección entre A^* y B^*. Por otro lado,

$$A = A^* \bigcup (A_0 \setminus g(B_0)) \bigcup (g(B_0) \setminus A_1) \bigcup (A_1 \setminus g(B_1)) \bigcup (g(B_1) \setminus A_2) \bigcup \cdots$$

$$B = B^* \bigcup (B_0 \setminus f(A_0)) \bigcup (f(A_0) \setminus B_1) \bigcup (B_1 \setminus f(A_1)) \bigcup (f(A_1) \setminus B_2) \bigcup \cdots$$

donde cada uno de los conjuntos involucrados en estas uniones es disjunto del resto. Como f y g son inyecciones,

$$f(A_n \setminus g(B_n)) = f(A_n) \setminus f[g(B_n)] = f(A_n) \setminus B_{n+1}$$
$$g(B_n \setminus f(A_n)) = g(B_n) \setminus g[f(A_n)] = g(B_n) \setminus A_{n+1}$$

Finalmente tenemos la biyección $\pi : A \to B$,

$$\pi(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A^* \ \vee \ (\exists\, n)[x \in A_n \setminus g(B_n)] \\ g^{-1}(x) & x \notin A^* \ \wedge \ (\exists\, n)[x \in g(B_n) \setminus A_{n+1}] \end{cases}$$

∎

2.2.19 Corolario. $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

∎

2.2.20 Ejemplo. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Entonces* $(\alpha, \beta) =_c \mathbb{R}$.

Nótese que $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{[x - (\alpha + \beta)/2]^3}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

es una biyección. Por lo tanto $(\alpha, \beta) =_c \mathbb{R}$.

▽

2.3 Buenos órdenes

2.3.1 Definición. *Sean A y B conjuntos. Una relación R de A a B es un subconjunto de $A \times B$. Si $A = B$ decimos que R es un relación binaria.*

↼⇁

2.3.2 Definición. *Supóngase que A es conjunto y que R es una relación binaria sobre A. Decimos que R es una relación de orden o un ordenamiento sobre A (o que A está ordenado por R) si*

(a) R es reflexiva: $(x, x) \in R, \forall\, x \in A$.

(b) R es antisimétrica: si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces $x = y$.

(c) R es transitiva: si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

Decimos que R es una relación de orden total o un ordenamiento total sobre A (o que A está totalmente ordenado por R) si, además,

(d) Para todo $x, y \in A$, si $x \neq y$, entonces $(x, y) \in R$ ó $(y, x) \in R$.

Un conjunto (totalmente) ordenado es un par (A, R) donde R es una relación de orden (total) sobre A.

↼⇁

2.3.3 Definición. *Si (A, R) y (B, S) son conjuntos ordenados, un isomorfismo de (A, R) sobre (B, S) es una biyección $f : A \to B$ tal que para todo $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ si, y sólo si, $(f(x), f(y)) \in S$. Usualmente escribimos $x <_R y$ para indicar que $(x, y) \in R$.*

↼⇁

2.3.4 Definición. *Si R es una relación de orden sobre A y si B es un subconjunto de A, entonces $b \in B$ se dice es el menor elemento o elemento mínimo de B respecto a R si satisface $b <_R x$ para cualquier $x \in B$.*

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

2.3.5 Definición. *Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A. Decimos que R es una relación de buen orden, o que R es un buen ordenamiento de A, o que A está bien ordenado por R si las siguientes condiciones se verifican:*

(a) R es un orden total de A.

(b) Todo subconjunto no vacío de A tiene menor elemento.

Un conjunto bien ordenado es un par (A, R) donde R es una relación de buen orden sobre A.

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

Sea (A, R) un conjunto bien ordenado. Adviértase que si $B \subseteq A$, entonces (B, R) es, también, un conjunto bien ordenado. Además, si $A \neq \emptyset$, entonces tiene menor elemento x_0, al cual denominaremos su "primer elemento". Si A no es igual a $\{x_0\}$, entonces el conjunto $A \setminus \{x_0\}$ tiene menor elemento x_1, al cual denominaremos como "segundo elemento" de A; este proceso puede ser continuado.

2.3.6 Teorema. *Si (A, R) es un conjunto bien ordenado, entonces no existe sucesión infinita decreciente con valores sobre A.*

Demostración: Sea $f : \mathbb{N} \to A$ una sucesión y $f(k)$ el menor elemento en $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$. Entonces $f(k) <_R f(k+1)$. En consecuencia, f no puede ser decreciente.

∎

2.3.7 Definición. *Si (A, R) es conjunto totalmente ordenado, entonces un segmento inicial de A es un subconjunto B de A con la siguiente propiedad: si $y \in B$ y $x <_R y$, entonces $x \in B$. Un segmento inicial propio de A es un segmento inicial de A que no es vacío ni igual a A.*

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

Por definición A es un segmento inicial de A. Si $x \in A$ y x no es el menor elemento de A, entonces el conjunto

$$A_x = \{y \in A : y <_R x\}$$

es un segmento inicial propio de A.

2.3.8 Lema. *Si (A, R) y (B, S) son conjuntos bien ordenados, y f y g dos isomorfismos de A hacia segmentos iniciales de B, entonces $f = g$.*

Demostración: Supóngase que $f \neq g$. Sea a el menor elemento de A tal que $f(a) \neq g(a)$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $f(a) <_S g(a)$. En este caso $f(a)$ no puede pertenecer a la imagen de g, la cual por lo tanto no es un segmento inicial de B.

∎

2.3.9 Teorema. *Si (A, R) y (B, S) son conjuntos bien ordenados, entonces existe un isomorfismo de uno de dichos conjuntos hacia un segmento inicial del otro.*

Demostración: Primero, supóngase que para todo $x \in A$, A_x es isomorfo a un segmento inicial propio de B. Por el lema 2.3.8 este segmento inicial es único. Denótese dicho segmento inicial propio por $B_{f(x)}$. Trivialmente la función f es un isomorfismo de A hacia un segmento inicial de B.

Por otro lado, sea a el menor elemento de A tal que A_a no es isomorfo a un segmento inicial propio de B. Para todo $b <_R a$, A_b es isomorfo a un segmento inicial propio $B_{f(b)}$ de B. Es claro que f es un isomorfismo de A_a sobre un segmento inicial de B, el cual, por definición de a no puede ser propio. Por lo tanto, f es un isomorfismo entre A_a y B.

∎

2.4 Ordinales

2.4.1 Definición. *Sean* (A, R) *y* (B, S) *conjuntos bien ordenados. Decimos que el ordinal de* A *es menor o igual que el ordinal de* B*, simbólicamente* $\mathrm{ord}(A) \leq \mathrm{ord}(B)$*, si* A *es isomorfo a un segmento ini-cial de* B.

↼⇁

Por ahora no debe tratarse de dar un significado preciso a la palabra "ordinal"; estamos considerando $\mathrm{ord}(A) \leq \mathrm{ord}(B)$ como una expresión unificada.

Dicha relación o expresión es reflexiva, transitiva y antisimétrica en el siguiente sentido: si $\mathrm{ord}(A) \leq \mathrm{ord}(B)$ y $\mathrm{ord}(B) \leq \mathrm{ord}(A)$ (en tal caso decimos que A y B *tienen el mismo ordinal*), entonces A y B son isomorfos; de hecho, si f es un isomorfismo de A sobre un segmento inicial de B, y g es un isomorfismo de B sobre un segmento inicial de A, entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son funciones identidad, y por el teorema 2.3.9, dos conjuntos bien ordenados son siempre comparables.

Por lo tanto podemos definir un "ordenamiento total sobre los ordinales". Dado un conjunto bien ordenado A, los ordinales estrictamente menores que el ordinal de A son los ordinales de segmentos iniciales propios de A, que corresponden a puntos de A. Vemos así que un ordinal puede ser identificado con el conjunto de ordinales estrictamente menores que él, equipado con su relación de orden natural.

2.4.2 Definición. *Un conjunto es transitivo si cada uno de sus elementos es uno de sus subconjuntos. Equivalentemente,* a *es un conjunto transitivo si siempre que* $x \in a$ *y* $y \in x$*, entonces* $y \in a$.

↼⇁

Si a es un conjunto transitivo, también lo es $a \bigcup \{a\}$. Denominamos a este conjunto un *ordinal de von Neumann* si es transitivo y la relación de pertenencia $x \in y$ es el ordenamiento estricto asociado con un buen orden sobre a: $x \leq y$ significa $x \in y \bigcup x = y$; $x \in y$ significa $x \leq y \bigcap x \neq y$, o, equivalentemente, $x < y$. Por ejemplo, $\emptyset$ es un ordinal de von Neumann, el cual, en este contexto, usualmente es denominado 0; también es un ordinal de von Neumann $\{\emptyset\}$, usualmente denominado 1, lo mismo para $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, denominado 2. Más generalmente, si a es un ordinal de von Neumann, también lo es $a \bigcup \{a\}$. Dado un ordinal a, el ordinal $a \bigcup \{a\}$ es denotado a^+ y es llamado el *sucesor de* a. Un ordinal es llamado un *ordinal límite* si no es igual al vacío y no es el sucesor de algún otro ordinal, i.e. $a \neq \emptyset$ y $a = \sup\{b : b < a\}$.

Nótese que un elemento b de un ordinal de von Neumann a es en sí mismo un ordinal de von Neumann: b es transitivo, dado que la relación de pertenencia es transitiva sobre elementos de a, y (b, ε) es un buen orden, ya que es la restricción de (a, ε). Los segmentos iniciales de un ordinal de von Neumann son ellos mismos y sus segmentos iniciales propios, que son también sus elementos.

2.4.3 Lema. *Cualquier isomorfismo entre dos ordinales de von Neumann es el isomorfismo identidad.*

Demostración: Sean a y b ordinales de von Neumann, y sea f un isomorfismo entre a y b. Supóngase, por el absurdo, que f no es el isomorfismo identidad, y sea c el menor elemento de a tal que $f(c) \neq c$. Entonces f mapea el segmento inicial a_c al segmento inicial $b_{f(c)}$. En consecuencia, c y $f(c)$ son dos conjuntos con los mismos elementos, por lo tanto son iguales, una contradicción.

∎

2.4.4 Lema. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un ordinal de von Neumann.*

Demostración: Sea (A, R) un conjunto bien ordenado. Supóngase, por el absurdo, que existe $x \in A$ tal que A_x no es isomorfo a un ordinal de von Neumann, y sea a el menor de tales elementos. Entonces para todo $x < a$ existe un isomorfismo único entre A_x y un ordinal de von Neumann x'. Si $x < y < a$, entonces x' debe ser el segmento inicial de y' que es la imagen de x bajo el isomorfismo entre y y y'. En otras palabras, $x' \in y'$. Podemos notar entonces que el conjunto de todos los ordinales de von Neumann x' es isomorfo a A_a, una contradicción.

Por lo anterior todo segmento inicial propio de un conjunto ordenado es isomorfo a un ordinal de von Neumann. Para terminar la prueba, es suficiente notar que A es un segmento inicial propio de $A+1$, el conjunto ordenado obtenido mediante la adición de otro punto a A por la derecha.

∎

En vista de los dos lemas anteriores podemos llamar al único ordinal de von Neumann isomorfo a cualquier conjunto ordenado (A, R) el *ordinal de* A. El ordinal asociado con el conjunto ordenado $\mathbb{N}$ es denotado por ω, i.e. por definición

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

es el conjunto de todos los ordinales finitos. El conjunto de todos los ordinales contables es denotado por ω_1.

2.4.5 Teorema. *Para cualquier propiedad P, si existe un ordinal que satisface dicha propiedad, entonces existe un ordinal menor que también la satisface.*

Demostración: Sea a un ordinal que satisface la propiedad P. Si a es el menor ordinal satisfaciendo P hemos concluido. En otro caso, el conjunto de elementos de a que satisface P es no vacío, y tiene menor elemento, digamos, b. Este b es el ordinal menor que también satisface P.

∎

2.4.6 Corolario - Inducción transfinita. *Si para cada ordinal x el hecho que todo $y < x$ satisface una propiedad P implica que x también satisface P, entonces todo ordinal satisface P.*

∎

2.5 La Hipótesis del Continuo

En las secciones precedentes se realizó una breve exposición de los primeros resultados básicos de la teoría de conjuntos, como fue creada por Cantor y los pioneros que lo siguieron en los últimos veinticinco años del siglo XIX. Al inicio del siglo XX, la teoría de conjuntos había madurado y justificado por sí misma con diversas y significativas aplicaciones, especial y particularmente en el análisis matemático. Talvez su más grande éxito fue la creación de la *aritmética transfinita*, la cual introduce y estudia las operaciones de adición, multiplicación y exponenciación de números infinitos. Por 1900, permanecían sin solución dos problemas fundamentales sobre cardinalidad. Estos problemas han jugado un importante rol en los desarrollos subsecuentes de la teoría de conjuntos.

A continuación simplemente enunciamos dichos problemas en forma de hipótesis:

2.5.1 Hipótesis de Comparabilidad Cardinal. *Para cualesquiera dos conjuntos A y B, o $A \leq_c B$ o $B \leq_c A$.*

2.5.2 Hipótesis del Continuo. *No existe conjunto de números reales X con cardinalidad entre la cardinalidad de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, i.e.*

$$(\forall X \subseteq \mathbb{R})[X \leq_c \mathbb{N} \ \vee \ X =_c \mathbb{R}]$$

Si ambas hipótesis son verdaderas, entonces los números naturales $\mathbb{N}$ y los números reales $\mathbb{R}$ representan los dos menores "órdenes del infinito": todo conjunto es contable, o de igual cardinalidad que $\mathbb{R}$, o estrictamente de mayor cardinalidad que $\mathbb{R}$.

Cabe mencionar que la Hipótesis de Comparabilidad Cardinal es equivalente al Axioma de Elección. En el resto de este trabajo asumimos verdadera tal hipótesis.

Al final del capítulo 4 se muestra que la Hipótesis del Continuo es verdadera para subconjuntos cerrados y F_σ-conjuntos de espacios polacos.

2.6 Espacios topológicos

Un *espacio topológico* es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X tal que $\emptyset$, $X \in \tau$ y τ es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Tal colección es denominada una *topología* sobre X y sus miembros *conjuntos abiertos* o *abiertos*. Los complementos de conjuntos abiertos son llamados *conjuntos cerrados* o simplemente *cerrados*. Por definición $\emptyset$ y X son cerrados e intersecciones arbitrarias y uniones finitas de conjuntos cerrados son cerrados. Cuando $\tau = \mathcal{P}(X)$ la llamamos *topología discreta*; cuando $\tau = \{\emptyset, X\}$ la llamamos *topología trivial*.

Un *subespacio* del espacio topológico (X, τ) consiste de un subconjunto $Y \subseteq X$ con la topología relativa $\tau_Y = \{U \bigcap Y \ : \ U \in \tau\}$. Una *base* $\mathcal{B}$ para una topología τ es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ con la propiedad que todo conjunto abierto es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Para que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X sea una base para la topología, es necesario y suficiente que la intersección de cualesquiera dos miembros de $\mathcal{B}$ puede ser escrita como la unión de miembros de $\mathcal{B}$ y $\bigcup\{B \ : \ B \in \mathcal{B}\} = X$. Una *subbase* para una topología τ es una colección $\mathcal{S} \subset \tau$ tal que el conjunto de intersecciones finitas de conjuntos en $\mathcal{S}$ es una base para τ. Para cualquier familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de un conjunto X, existe una menor topología τ conteniendo $\mathcal{S}$, denominada la *topología generada* por $\mathcal{S}$. Dicha topología consiste de todas las uniones de intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$. Claramente, $\mathcal{S}$ es una subbase para τ. Un espacio topológico es *segundo contable* si tiene una base contable.

Si X es un espacio topológico y $x \in X$, una *vecindad abierta* de x es un conjunto abierto que contiene a x. Una *vecindad base* para x es una colección $\mathcal{U}$ de vecindades abiertas de x tales que para toda vecindad abierta V de x existe $U \in \mathcal{U}$ con $U \subseteq V$. Si $E \subseteq X$, la cerradura de E en X es el conjunto $\overline{E} = \bigcap\{K \subset X \ : \ K \text{ cerrado y } E \subset K\}$. Si $\overline{E} = X$ decimos que E es *denso* en X.

Dados dos espacios topológicos X y Y, un mapeo o función $f : X \to Y$ es *continua* si la preimagen de cada conjunto abierto es abierto. Es *abierta* (resp. *cerrada*) si la imagen de cada conjunto abierto (resp. cerrado) es abierto (resp. cerrado). Es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y abierta. Una función $f : X \to Y$ es *continua en* $x \in X$ si la preimagen de una vecindad abierta de $f(x)$ contiene una vecindad abierta de x. Así f es continua si, y sólo si, f es continua en todo punto.

El *producto* $\prod_{i\in I} X_i$ de una familia de espacios topológicos $(X_i)_{i\in I}$ es el espacio topológico consistente del producto cartesiano de los conjuntos X_i con la topología generada por las funciones proyección $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$, $j \in I$. Tiene como base a los conjuntos $\Pi_i U_i$, donde U_i es abierto en X_i para todo $i \in I$, y $U_i = X_i$ para un número finito de $i \in I$. Usualmente nos referimos a la topología de $\prod_{i\in I} X_i$ como la *topología de Tychonoff* o la *topología producto*.

Una *cubierta* de un espacio topológico X es una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X cuya unión es X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{A}$ es una subcolección $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ que es una cubierta. Una *cubierta abierta* de X es una cubierta que consiste de conjuntos abiertos. Decimos que X es compacto si, y sólo si, cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. Terminamos esta sección con el siguiente importante teorema topológico que utilizaremos en el siguiente capítulo.

2.6.1 Teorema de Tychonoff. *Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Cada X_i es compacto si, y sólo si, $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto.*

∎

2.7 Espacios métricos

Un *espacio métrico* es un par (X, d), donde X es un conjunto y $d : X\times X \to [0, \infty)$ una función que satisface:

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(b) $d(x, y) = d(y, x)$.
(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. (desigualdad triangular)

Tal función es llamada una *métrica* sobre X.

La *bola abierta* con centro en x y radio r es definida por

$$B_r(x) = \{y \in X \,:\, d(x, y) < r\}$$

Estas bolas abiertas inducen una base para una topología, llamada la *topología del espacio métrico*. Una *sucesión de Cauchy* es una sucesión (x_n) de elementos de X tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$. Decimos que (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy tiene un límite en X. En tal caso es usual decir que d es una métrica completa.

Dos métricas d y ρ inducen la misma topología sobre X si, y sólo si, para toda sucesión (x_n) en X y todo $x \in X$,

$$d(x_n, x) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(x_n, x) \to 0$$

Si d es una métrica completa e induce la misma topología que otra métrica ρ, entonces ρ es completa.

El siguiente teorema nos será, también, de utilidad en el siguiente capítulo.

2.7.1 Teorema. *Si (X, d) es un espacio métrico, entonces*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es también una métrica sobre X. Además d y d' inducen la misma topología sobre X y $d'(x, y) < 1$, $\forall\, x, y \in X$.

Demostración: Como d es una métrica, entonces trivialmente $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ y $d'(x, y) = d'(y, x)$. Igual de claro es que la positividad de d implica que $d'(x, y) < 1$, $\forall\, x, y \in X$. Por lo tanto, para establecer que d' es una métrica, resta probar que cumple con la desigualdad triangular. Adviértase que si $x, y, z \in X$, entonces

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = d'(x, y)$$

y

$$\frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leq \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(y, z)$$

Dado que d es una métrica, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, y en consecuencia

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)}$$
$$\leq d'(x, y) + d'(y, z)$$

Por lo tanto d' es una métrica.

Sea (x_n) una sucesión sobre (X, d) tal que $x_n \to x$, es decir $d(x_n, x) \to 0$. Lo anterior implica que dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|d(x_n, x)| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N(\varepsilon)$. Por lo tanto

$$|d'(x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

i.e. $d'(x_n, x) \to 0$. Similarmente si $d'(x_n, x) \to 0$, entonces $d(x_n, x) \to 0$. Por lo tanto d y d' inducen la misma topología sobre X.

∎

3. Espacios polacos

Sea A un conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por A^n al conjunto de sucesiones finitas $s = (s(0), ..., s(n-1)) = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ de longitud n sobre A. Permitiremos el caso $n = 0$, en tal caso $A^0 = \{\emptyset\}$, donde $\emptyset$ denota la *sucesión vacía*. La *longitud* de una sucesión finita s es denotada por $|s|$. Así $|\emptyset| = 0$. Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, entonces $s \mid m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ (adviértase que $s \mid 0 = \emptyset$). Si s y t son sucesiones finitas en A, decimos que s es un *segmento inicial* de t y t es una *extensión* de s si $s = t \mid m$, para algún $m \leq |t|$. Cuando $m = |t|$, escribimos $s \subseteq t$; si $m < |t|$, escribimos $s \subset t$. Claramente $\emptyset \subseteq s$, $\forall\, s \in A^n$. Definimos

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$$

como el conjunto de todas las sucesiones finitas sobre A. La *concatenación* de $s = (s_i)_{i<n}$ y $t = (t_j)_{j<m}$ es la sucesión $s^\wedge t = (s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{m-1})$. Escribiremos $s^\wedge a$ por $s^\wedge(a)$, si $a \in A$.

Denotaremos mediante $A^{\mathbb{N}}$ al conjunto de sucesiones infinitas $x = (x(n)) = (x_n)$ sobre A. Si $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \mid n = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in A^n$. Decimos que $s \in A^n$ es un *segmento inicial* de $x \in A^{\mathbb{N}}$ si $s = x \mid n$, y escribimos $s \subseteq x$.

3.1 Fundamentos

Proporcionamos en esta sección algunas de las definiciones más importantes para el resto del contenido. Asimismo desarrollaremos las propiedades fundamentales de los espacios polacos.

3.1.1 Definición. *Un espacio topológico (X, τ) es metrizable si existe una métrica d sobre X tal que τ es la topología del espacio métrico (X, d). En tal caso decimos que la métrica d es compatible con τ o que la topología τ es inducida por la métrica d. Adicionalmente decimos que X es separable si admite un subconjunto denso contable.*

$\dashv$

3.1.2 Definición. *Un espacio polaco es un espacio topológico separable que es metrizable mediante una métrica completa.*

$\dashv$

3.1.3 Ejemplo. *Todo conjunto discreto contable es un espacio polaco.*

Sea X un conjunto contable con la topología discreta, i.e. un conjunto discreto contable. La métrica discreta

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

induce la topología de X. En efecto, nótese que $B_1(x) = \{x\}$, entonces todo singleton es un abierto. Dado que cualquier conjunto es la unión de sus puntos, todo subconjunto de X es abierto.

Sea ahora (x_n) una sucesión de Cauchy sobre X. Entonces para $\varepsilon = 1/2$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que n, $m > N$, implica $d(x_n, x_m) < 1/2$. Pero, bajo la métrica discreta, $d(x_n, x_m) < 1/2$ si, y sólo si, $x_n = x_m$. Por lo tanto sobre X toda sucesión de Cauchy es eventualmente una sucesión constante, y en consecuencia la métrica discreta es completa.

Por último adviértase que $\overline{X} = X$, i.e. X es separable. Concluimos entonces que todo conjunto discreto contable es un espacio polaco.

$\triangledown$

3.1.4 Teorema. *Si X es un espacio polaco y $F \subset X$ es un subespacio cerrado, entonces F es un espacio polaco.*

Demostración: Probaremos únicamente la separabilidad y completud de F, ya que claramente F es un espacio topológico metrizable. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy sobre F. Dado que F es cerrado, $\lim x_n \in F$. Entonces F es completo.

Sabemos que todo espacio métrico separable tiene una base contable para sus abiertos. Sea (G_n) tal base para los abiertos de X. Entonces los conjuntos $E_n = G_n \bigcap F$ constituyen una base contable para los abiertos de F. Definamos $E = \{x_n \in F : x_n \in E_n\}$. Trivialmente $E \subset F$ es contable. Adviértase que cada abierto no vacío A de F es la unión de algunos E_n, por lo que $A \bigcap E$ es no vacío, y en consecuencia E es denso. Por lo tanto F es separable.

∎

3.1.5 Teorema. *Si X es un espacio polaco y $U \subset X$ es un subespacio abierto, entonces U es un espacio polaco.*

Demostración: Bajo el mismo argumento que en el teorema anterior podemos concluir que U es un espacio topológico separable. Resta probar que U es metrizable completo. Sea d una métrica completa sobre X compatible con su topología. Por el teorema 2.7.1 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $d < 1$. Para $x, y \in U$ defínase

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right|$$

Claramente $d'(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Además $d'(x, y) = d'(y, x)$. Nótese que para $x, y, z \in U$ se tiene

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| \\ &= d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(z, X \setminus U)} + \frac{1}{d(z, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| \\ &\leq d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(z, X \setminus U)} \right| + \left| \frac{1}{d(z, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) + \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(z, X \setminus U)} \right| + \left| \frac{1}{d(z, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| \\ &= d'(x, z) + d'(z, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto d' es una métrica. Dado que $d'(x, y) \geq d(x, y)$, entonces todo conjunto d-abierto es d'-abierto. Probaremos ahora que todo conjunto d'-abierto es d-abierto. Sean $x \in U$, $d(x, X \setminus U) = r > 0$ y $\varepsilon > 0$. Seleccionemos $\delta > 0$ tal que si $0 < \eta \leq \delta$, entonces $\eta + \frac{\eta}{r(r-\eta)} < \varepsilon$. Si $d(x, y) < \delta$, entonces

$$d(x, X \setminus U) \leq d(x, y) + d(y, X \setminus U) < \delta + d(y, X \setminus U)$$

de donde tendríamos que $d(y, X \setminus U) > d(x, X \setminus U) - \delta = r - \delta$. Por lo tanto

$$d'(x, y) \leq \delta + \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r-\delta} \right| = \delta + \left| \frac{-\delta}{r(r-\delta)} \right| < \varepsilon$$

Entonces la d'-bola de radio ε centrada en x contiene una d-bola de radio δ, por lo que todo conjunto d'-abierto es d-abierto. Por lo tanto d' es una métrica compatible con la topología relativa de U.

Por otro lado, supóngase que (x_n) es una sucesión de d'-Cauchy. Entonces (x_n) es, también, una sucesión de d-Cauchy, por lo que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ (respecto a d). En consecuencia

$$\lim_{i,j \to \infty} \left| \frac{1}{d(x_i, X \setminus U)} - \frac{1}{d(x_j, X \setminus U)} \right| = 0$$

Como $d < 1$, podemos concluir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$ y

$$\lambda = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{d(x_i, X \setminus U)}$$

Por lo anterior concluimos que $d(x, X \setminus U) > 0$, i.e. $x \in U$. Por lo tanto d' es una métrica completa sobre U.

∎

3.1.6 Teorema. *Si $X_0, X_1, \ldots$ son espacios polacos, entonces $\prod X_n$ es un espacio polaco.*

Demostración: Supóngase que d_n es una métrica completa sobre X_n, con $d_n < 1$, para $n = 0, 1, \ldots$. Defínase d' sobre $\prod X_n$ por

$$d'(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), g(n))$$

La no negatividad y simetría de d' es clara. Además nótese que

$$\begin{aligned} d'(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), g(n)) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} [d_n(f(n), h(n)) + d_n(h(n), g(n))] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), h(n)) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(h(n), g(n)) \\ &= d'(f, h) + d'(h, g) \end{aligned}$$

Entonces d' es una métrica sobre $\prod X_n$. Si $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de Cauchy sobre $\prod X_n \Rightarrow f_1(i), f_2(i), \ldots$ es una sucesión de Cauchy en X_i para cada i. Sea $g(n) = \lim_{i \to \infty} f_i(n)$. Claramente g es el límite de $f_1, f_2, \ldots$. Por lo tanto d' es completa.

Resta probar que $\prod X_n$ es separable. Suponga que $x_0^i, x_1^i, \ldots$ es un subconjunto denso contable de X_i. Para cualquier $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ sea

$$f_\sigma(n) = \begin{cases} x^n_{\sigma(n)} & \text{si } n < |\sigma| \\ x^n_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la separabilidad de los espacios factores implica que $\{f_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ es un conjunto denso contable en $\prod X_n$.

∎

3.1.7 Ejemplo. $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{C}$ *son espacios polacos.*

Con la topología inducida por la métrica completa usual $d(x, y) = |x - y|$ tenemos que $\mathbb{R}$ es un espacio topológico metrizable. Queda por probar que $\mathbb{R}$ es separable. Sabemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto contable, entonces probaremos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Sean $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y $x = b - a > 0$; por la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ existe un entero $n > 1/x \Rightarrow 1/n < x$. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $b > 0$. Una vez más por la propiedad Arquimediana existe un entero $k > 0$ tal que $b \le k/n$. Sea h el menor entero tal que $b \le h/n \Rightarrow (h-1)/n < b$. Supóngase, por el absurdo, que $(h-1)/n \le a$, entonces

$$x = b - a \le b - \frac{h-1}{n} \le \frac{h}{n} - \frac{h-1}{n} \le \frac{1}{n}$$

lo cual contradice la definición de $n \Rightarrow (h-1)/n > a \Rightarrow (h-1)/n \in (a, b)$. Por lo tanto el intervalo (a, b) contiene un número racional $c = (h-1)/n$, entonces (a, c) contiene, también, un número racional, y por inducción concluimos que todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$ contiene un conjunto infinito contable de números racionales. Por lo anterior es obvio que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es un espacio polaco.

De igual forma $\mathbb{C}$ es un espacio topológico metrizable bajo la métrica completa usual. Considérese ahora el conjunto

$$G = \left\{x + yi \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}, i = \sqrt{-1}\right\}$$

G es un conjunto contable, ya que existe una biyección entre G y el conjunto contable $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Sea $z = u + vi \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$. Dado que $u, v \in \mathbb{R}$ y lo racionales son densos en $\mathbb{R}$, existen racionales r_1 y r_2 tales que $|u - r_1| < \varepsilon/\sqrt{2}$ y $|v - r_2| < \varepsilon/\sqrt{2}$. El número $z' = r_1 + r_2\, i \in G$ es tal que

$$d(z, z') = |z - z'| = \sqrt{(u - r_1)^2 + (v - r_2)^2} < \sqrt{\left(\varepsilon/\sqrt{2}\right)^2 + \left(\varepsilon/\sqrt{2}\right)^2} = \varepsilon$$

Entonces G es denso en $\mathbb{C}$. Por lo tanto $\mathbb{C}$ es un espacio polaco.

▽

3.1.8 Ejemplo. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *y* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *son espacios polacos.*

Por el teorema 3.1.6 y el ejemplo anterior la proposición es trivial.

▽

3.1.9 Ejemplo. *El intervalo unitario* $\mathbb{I} = [0, 1]$ *y el círculo unitario* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *son espacios polacos.*

El ejemplo 3.1.7 y el teorema 3.1.4 nos aseguran que la proposición es verdadera.

▽

3.1.10 Ejemplo. *El cubo* n*-dimensional* $\mathbb{I}^n$*, el cubo de Hilbert* $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$*, el toro* n*-dimensional* $\mathbb{T}^n$*, y el toro infinito dimensional* $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ *son espacios polacos.*

Por el ejemplo anterior y el teorema 3.1.6 la proposición es trivial.

▽

3.1.11 Ejemplo. *Si A es un conjunto contable discreto, entonces $A^{\mathbb{N}}$ es un espacio polaco.*

El ejemplo 3.1.3 y el teorema 3.1.6 nos aseguran que la proposición es verdadera. En este momento cabe hacer notar que de particular importancia serán los casos $A = 2 = \{0, 1\}$ y $A = \mathbb{N}$. El espacio $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ recibe el nombre de **espacio de Cantor** y el espacio $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ recibe el nombre de **espacio de Baire**. Estos importantes espacios serán nuestro objeto de estudio en la siguiente sección.

▽

3.1.12 Definición. *Un espacio topológico que contiene una imagen homeomorfa de todo espacio topológico de cierta clase es denominado espacio universal.*

3.1.13 Teorema. *Todo espacio polaco es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert. En consecuencia, el cubo de Hilbert es un espacio polaco universal.*

Demostración: Sea X un espacio polaco. Sean además d_X una métrica compatible sobre X, con $d_X < 1$, y $\{x_n\}$ un conjunto denso en X. Defínase $f : X \to \mathbb{H}$ por $f(x) = (d_X(x, x_0), d_X(x, x_1), \ldots)$. Si $f(x), f(y) \in \mathbb{H}$, entonces

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |d_X(x, x_n) - d_X(y, x_n)|$$

Si $d_X(x, y) < \varepsilon/2 \Rightarrow d_X(x, x_i) \leq d_X(x, y) + d_X(y, x_i) \Rightarrow d_X(x, x_i) - d_X(y, x_i) \leq d_X(x, y) < \varepsilon/2$. Por lo anterior podemos concluir que $|d_X(x, x_i) - d_X(y, x_i)| < \varepsilon$, entonces

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} |d_X(x, x_n) - d_X(y, x_n)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \epsilon$$

Por lo tanto f es continua. Por otro lado, si $d_X(x, y) = \varepsilon$ seleccionemos x_i tal que $d_X(x, x_i) < \varepsilon/2$. Sabemos que $d_X(x, y) \leq d_X(x, x_i) + d_X(x_i, y) < \varepsilon/2 + d_X(x_i, y)$, entonces

$$d_X(y, x_i) = d_X(x_i, y) > d_X(x, y) - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

por lo que podemos asegurar que $f(x)$ y $f(y)$ difieren en al menos una componente, i.e. $f(x) \neq f(y)$. Entonces f es inyectiva. Por lo tanto f es biyectiva sobre $f(X) \subset \mathbb{H}$.

Nos resta probar que f es abierta. Probaremos esto mostrando que f^{-1} es continua secuencialmente. Sea $f(y_m)$ una sucesión sobre $f(X)$ que converge a $f(x)$. Entonces $d_X(y_m, x_n) \to d_X(x, x_n)$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y sea n tal que $d_X(x, x_n) < \varepsilon/2$ (por densidad de los x_n). Dado que $d_X(y_m, x_n) \to d_X(x, x_n)$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq M \Rightarrow d_X(y_m, x_n) < \varepsilon/2$, por lo que

$$d_X(y_m, x) \leq d_X(y_m, x_n) + d_X(x_n, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \Rightarrow y_m \to x$$

∎

A continuación probamos dos lemas que serán de mucha utilidad más adelante. Antes de proceder con dichos lemas enunciamos la siguiente definición:

3.1.14 Definición. *Si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subseteq X$, el diámetro de Y es*

$$\operatorname{diam}(Y) = \sup\{d(x, y) : x, y \in Y\}$$

↼⇁

3.1.15 Lema. *Supóngase que X es un espacio polaco y $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$ son subconjuntos cerrados de X tales que* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = 0$. *Entonces existe $x \in X$ tal que $\bigcap X_n = \{x\}$.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea x_n un punto arbitrario en X_n. Si $m, N \in \mathbb{N}$ son tales que $n, m \geq N$, entonces $x_n, x_m \in X_N$, así, por definición, $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(X_N)$. Por hipótesis podemos seleccionar N lo suficientemente grande, de tal forma que $\operatorname{diam}(X_N) < \varepsilon$. Entonces la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x = \lim x_n$. Para cualquier $n \geq N$ sabemos que $x_n \in X_N \Rightarrow x \in X_N, \forall\, N \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = F$. Entonces F contiene al menos un punto. Supóngase, por el absurdo, que $y \in F$ con $y \neq x \Rightarrow x, y \in X_n, \forall\, n \Rightarrow d(x, y) \leq \operatorname{diam}(X_n) \to 0, \forall\, n \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$, una contradicción.

∎

3.1.16 Lema. *Si X es un espacio polaco, $U \subseteq X$ es un abierto y $\varepsilon > 0$, entonces existen conjuntos abiertos $U_0, U_1, U_2, \ldots$ tales que $U = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U}_n$ y* $\operatorname{diam}(U_n) < \varepsilon, \forall\, n$.

Demostración: Sea $D \subseteq X$ un conjunto denso contable y d_X la métrica completa de X. Además sea U_0, $U_1, \ldots$ una lista de todos los conjuntos $B_{1/n}(d)$ tales que $d \in D$, $1/n < \varepsilon/2$ y $\overline{B_{1/n}(d)} \subset U$. Claramente si x pertenece a $\bigcup U_n$, entonces $x \in U$. De igual forma si $x \in \bigcup \overline{U}_n \Rightarrow x \in U$.

Sea $x \in U$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y $B_{1/n}(x) \subset U$. Por la densidad de D existe d elemento de $D \bigcap B_{1/3\,n}(x)$. Adviértase que $B_{1/3\,n}(x) \subset B_{1/n}(x)$ y

$$D \bigcap B_{1/3\,n}(x) = \{y \in D \bigcap U \,:\, d_X(x, y) < 1/3\,n\} \subset B_{1/n}(x) \subset U$$

por lo que $d \in D \bigcap U$ y $d_X(x, d) < 1/3\,n \Rightarrow x \in B_{1/3\,n}(d) = \{y \in U \,:\, d_X(d, y) < 1/3\,n\}$. Sea y elemento $B_{1/3\,n}(d)$, entonces

$$d_X(x, y) \leq d_X(x, d) + d_X(d, y) < 1/3\,n + 1/3\,n = 2/3\,n < 1/n \quad \Rightarrow \quad B_{1/3\,n}(d) \subset B_{1/n}(x) \subset U$$

y bajo el mismo argumento $\overline{B_{1/3\,n}(d)} \subset B_{1/n}(x) \subset U \Rightarrow x \in B_{1/3\,n}(d) \subset \overline{B_{1/3\,n}(d)} \subset B_{1/n}(x) \subset U$. Por último adviértase que $1/3\,n < \varepsilon/3 < \varepsilon/2$. Por lo tanto $B_{1/3\,n}(d)$ es uno de los $U_i \Rightarrow x \in \bigcup U_i, x \in \bigcup \overline{U}_i$ y $\operatorname{diam}(U_n) < \varepsilon, \forall\, n$.

∎

3.2 Espacios de Baire y Cantor

En el ejemplo 3.1.11 de la sección anterior se mencionaron los espacios de Baire y Cantor. Presentamos a continuación una definición formal de dichos espacios:

3.2.1 Definición. *El espacio de Baire es el espacio polaco $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y el espacio de Cantor es el espacio polaco $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$.*

$\leftharpoondown\!\rightharpoondown$

Si $f, g \in \mathcal{N}$, entonces una métrica completa sobre $\mathcal{N}$ es $d_{\mathcal{N}}(f, g) = \frac{1}{2^{n+1}}$, donde n es el menor entero no negativo para el cual $f(n) \neq g(n)$. La no negatividad y simetría de $d_{\mathcal{N}}$ es clara. Probaremos que $d_{\mathcal{N}}$ cumple con la desigualdad triangular.

Sean $f, g, h \in \mathcal{N}$ tales que $d_{\mathcal{N}}(f, g) = \frac{1}{2^{n+1}}$, $d_{\mathcal{N}}(f, h) = \frac{1}{2^{n_1+1}}$ y $d_{\mathcal{N}}(h, g) = \frac{1}{2^{n_2+1}}$. Nótese que si probamos la imposibilidad de que $n < n_1$ y $n < n_2$, entonces, trivialmente, $d_{\mathcal{N}}(f, g) \leq d_{\mathcal{N}}(f, h) + d_{\mathcal{N}}(h, g)$. Supóngase, por el absurdo, que $n < n_1$ y $n < n_2 \Rightarrow f(n) = h(n)$ y $g(n) = h(n) \Rightarrow h(n) \neq g(n)$ y $h(n) \neq f(n)$, lo cual es una contradicción.

Resta probar que $d_{\mathcal{N}}$ es completa. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy sobre $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}}) \Rightarrow (f_n(i))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{N}$ (bajo la métrica discreta) para cada i. Sea $g(i) = \lim_{n\to\infty} f_n(i)$, entonces $g = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{N}$. Por lo tanto $d_{\mathcal{N}}$ es completa.

Por otro lado, trivialmente observamos que el conjunto $\{0, 1\}$ junto con la topología discreta constituyen un espacio topológico compacto. Entonces, por el teorema de Tychonoff, concluimos que el espacio de Cantor $\mathcal{C}$ es compacto. Además, si $f, g \in \mathcal{C}$, de la misma forma en que lo hicimos en lo tres párrafos anteriores, $d_{\mathcal{C}}(f, g) = \frac{1}{n+1}$, siendo n el menor entero no negativo para el cual $f(n) \neq g(n)$, es una métrica completa sobre $\mathcal{C}$.

3.2.2 Ejemplo. *$\mathcal{C}$ es homeomorfo al conjunto de "tercios medios" de Cantor.*

Denótese por F el conjunto de "tercios medios" de Cantor. Sabemos que F es, con su topología relativa, un espacio de Hausdorff. Además F es el conjunto de todos los puntos del intervalo $[0, 1]$ que admiten una expresión en base 3 (expansión ternaria) sin utilizar el dígito 1. Defínase ahora $\gamma : \mathcal{C} \to F$ tal que $\gamma(s) = \gamma(s(0), s(1), \ldots) = (x(0), x(1), \ldots)$ con $x(i) = 0 \Leftrightarrow s(i) = 0$ y $x(i) = 2 \Leftrightarrow s(i) = 1$. Claramente γ es biyectiva.

Sean $\gamma(s_1) = (x(0), x(1), \ldots)$ y $\gamma(s_2) = (y(0), y(1), \ldots)$. Supóngase que $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) \Rightarrow x(n) = y(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de γ lo anterior únicamente es posible cuando $s_1(n) = s_2(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow s_1 = s_2 \Rightarrow \gamma$ es inyectiva. Por otro lado, consideremos a los elementos de F en base 3. Si $x \in F$ y $s \in \mathcal{C}$ es tal que

$$s(n) = \begin{cases} 0 & x(n) = 0 \\ 1 & x(n) = 2 \end{cases}$$

para $n \in \mathbb{N}$, entonces por definición de γ es claro que $\gamma(s) = x \Rightarrow \gamma$ es sobreyectiva. Por lo tanto γ es biyectiva.

Sea (s_n) una sucesión convergente sobre $\mathcal{C}$, digamos $\lim_{n\to\infty} s_n = s \Rightarrow (s_n)$ es una sucesión de Cauchy. Lo anterior implica que $(s_n(i))$, para cada $i \in \mathbb{N}$, es, también, una sucesión de Cauchy en $\{0, 1\}$ bajo la métrica discreta $\Rightarrow (s_n(i))$ es eventualmente constante sobre $\{0, 1\}$, i.e. existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_n(i) = s_m(i) = s(i)$, $\forall\, n, m > N$.

Ahora sea $(\gamma(s_n))$ una sucesión sobre F, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(s_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(s_n(0), s_n(1), \ \ldots) = \gamma(s(0), s(1), \ \ldots) = \gamma(s)$$

i.e. γ es continua. Hemos probado hasta el momento que γ es una función biyectiva y continua cuyo dominio es un espacio compacto y con un espacio de Hausdorff como imagen. Pero, bajo estás hipótesis, γ es un homeomorfismo entre $\mathcal{C}$ y F. Por lo tanto dichos espacios son topológicamente equivalentes u homeomorfos.

$\triangledown$

3.2.3 Ejemplo. *Defínase $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ por*

$$\phi(f) = \underbrace{00\ldots0}_{f(0)}\,\underbrace{11\ldots1}_{f(1)+1}\,\underbrace{00\ldots0}_{f(2)+1}\,1\ldots$$

Entonces ϕ es continua e inyectiva. ¿Cuál es la imagen de ϕ?

Si $\phi(f) = \phi(g) \Rightarrow f(0) = g(0),\ f(1) + 1 = g(1) + 1,\ f(2) + 1 = g(2) + 1 \Rightarrow f(n) = g(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Entonces ϕ es inyectiva. Por otro lado, si (f_n) una sucesión convergente sobre $\mathcal{N}$, entonces bajo el mismo argumento que en el ejemplo anterior,

$$\lim_{n \to \infty} \phi(f_n) = \phi(f)$$

i.e. ϕ es continua.

Recuérdese que $x \in \mathbb{R}$ es un *racional diádico* si $x = n/2^m$ para $n, m \in \mathbb{N}$. En otro caso, decimos que x es *irracional diádico*. Sabemos que todo racional diádico tiene expansión binaria finita. Adviértase entonces que la imagen de ϕ es el conjunto de todos los irracionales diádicos, ya que $\phi(f)$ es una expansión binaria infinita.

$\triangledown$

3.2.4 Teorema. *El espacio de Baire $\mathcal{N}$ es homeomorfo al espacio I_r de números irracionales (bajo la topología heredada de la topología usual de $\mathbb{R}$).*

Demostración: Sea X el subespacio de $\mathcal{N}$ que consiste de todas aquellas sucesiones s tales que $s(n)$ es diferente de 0 para toda $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{N}$ es homeomorfo a X bajo el mapeo $\phi : \mathcal{N} \to X$ definido por

$$\phi(s) = (s(0) + 1,\ s(1) + 1,\ s(2) + 1,\ \ldots)$$

En efecto, si $\phi(s_1) = \phi(s_2) \Rightarrow s_1(0) + 1 = s_2(0) + 1,\ s_1(1) + 1 = s_2(1) + 1,\ \ldots \Rightarrow s_1(n) = s_2(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $s_1 = s_2 \Rightarrow \phi$ es inyectiva. Por otro lado, es claro que si $s \in X$, entonces $s' = (s(0) - 1, s(1) - 1, s(2) - 1, \ldots) \in \mathcal{N}$ es tal que $\phi(s') = s$, i.e. ϕ es sobreyectiva. Por lo tanto ϕ es biyectiva.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que siempre es posible encontrar un $n \in \mathbb{N} \ni 1\big/2^{n+1} < \varepsilon$. Sean ahora $s_1, s_2 \in \mathcal{N}$ tales que

$$s_1 \mid n = s_2 \mid n$$

y $s_1(n) \neq s_2(n) \Rightarrow d_{\mathcal{N}}(s_1, s_2) = 1\big/2^{n+1}$. Adviértase entonces que $d_{\mathcal{N}}(\phi(s_1), \phi(s_2)) = 1\big/2^{n+1} < \varepsilon$, por definición de ϕ. Por lo tanto ϕ es continua. Por un argumento análogo tenemos que ϕ^{-1} es continua. Por lo anterior queda demostrado que ϕ es un homeomorfismo entre $\mathcal{N}$ y X.

Sea ahora $\theta : X \to (1, \infty)$ definido por

$$\theta(s) = s(0) + \cfrac{1}{s(1) + \cfrac{1}{s(2) + \cfrac{1}{s(3) + \cdots}}}$$

que, por propósitos de abreviación, escribiremos $s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+}\ \frac{1}{s(3)+}\ \cdots$. Demostraremos que θ es un homeomorfismo de X a $I_r \cap (1, \infty)$. Dado que $(1, \infty)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ vía un mapeo que lleva irracionales a irracionales, como por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 2 \\ 2 - \frac{1}{x-1} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

se sigue que I_r es homeomorfo a $\mathcal{N}$. De modo que debemos verificar los siguientes puntos:

1) El mapeo θ está bien definido para cada $s \in X$; i.e. la sucesión

$$s(0),\ s(0) + \frac{1}{s(1)},\ s(0) + \cfrac{1}{s(1) + \frac{1}{s(2)}},\ \ldots$$

converge.

2) θ es inyectivo.

3) $\theta(s)$ es irraccional para toda $s \in X$.

4) Todo número irracional mayor que 1 está en la imagen de θ.

5) Tanto θ como θ^{-1} son continuos.

Para derivar estos puntos precisaremos de algunos cálculos auxiliares. Para $s \in X$ escribiremos

$$s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+}\ \frac{1}{s(3)+} \cdots \frac{1}{s(n)}$$

(un número racional positivo) en términos reducidos p_n / q_n, donde p_n y q_n son números enteros positivos determinados de manera única. Por añadidura, convendremos en que $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_{-2} = 0$, y $q_{-2} = 1$.

3.2.4.1 Lema. *Para cada* $n \geq 0$,

$$p_n = p_{n-1}\, s(n) + p_{n-2} \qquad\qquad q_n = q_{n-1}\, s(n) + q_{n-2}$$

Demostración: Por inducción sobre n. Demostraremos que el lema se satisface para toda sucesión de enteros positivos, y no únicamente para la sucesión con la que partimos. El punto de hacer esto es que queremos poder aplicar la hipótesis de inducción a la "sucesión derivada" $s' = (s(1), s(2), s(3), \ldots)$ cuya n-ésima entrada es $s'(n) = s(n+1)$.

Observemos que como $s(0)$ es un entero, $p_0 = s(0)$, $q_0 = 1$, y como $p_1 / q_1 = s(0) + \frac{1}{s(1)} = \frac{s(0)\,s(1)+1}{s(1)}$ y además $s(0)\,s(1)+1$ y $s(1)$ son primos relativos, $p_1 = s(0)\,s(1)+1$ y $q_1 = s(1)$. Así, podemos verificar fácilmente los casos básicos de la inducción ($n = 0, 1$), para toda sucesión de enteros positivos s al escribir

$$p_0 = s(0) = p_{-1}\, s(0) + p_{-2} \qquad\qquad q_0 = 1 = q_{-1}\, s(0) + q_{-2}$$

$$p_1 = s(0)\, s(1) + 1 = p_0\, s(1) + p_{-1} \qquad\qquad q_1 = s(1) = q_0\, s(1) + q_{-1}$$

Ahora asumamos que todas las sucesiones satisfacen las relaciones apropiadas para todo $k < n$, donde $n \geq 2$, y sea s una sucesión de enteros positivos. Sea $s' = (s(1), s(2), s(3), \ldots)$ la sucesión derivada de s. Entonces para cada k,

$$\frac{p_k}{q_k} = s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+} \cdots \frac{1}{s(k)}$$

y

$$\frac{p'_k}{q'_k} = s(1) + \frac{1}{s(2)+}\ \frac{1}{s(3)+} \cdots \frac{1}{s(k+1)}$$

De forma que $p_k / q_k = s(0) + q'_{k-1} / p'_{k-1} = \frac{s(0)\, p'_{k-1} + q'_{k-1}}{p'_{k-1}}$. Como p'_{k-1} y q'_{k-1} son primos relativos, los números $s(0)\, p'_{k-1} + q'_{k-1}$ y p'_{k-1} también lo son, de forma que

$$p_k = s(0)\, p'_{k-1} + q'_{k-1} \qquad\qquad q_k = p'_{k-1} \tag{1}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la sucesión s' obtenemos que

$$\begin{aligned} p_n = s(0)\, p'_{n-1} + q'_{n-1} &= s(0)[p'_{n-2}\, s'(n-1) + p'_{n-3}] + (q'_{n-2}\, s'(n-1) + q'_{n-3}) \\ &= [s(0)\, p'_{n-2} + q'_{n-2}]\, s'(n-1) + [s(0)\, p'_{n-3} + q'_{n-3}] \\ &= p_{n-1}\, s(n) + p_{n-2} \end{aligned}$$

y que

$$q_n = p'_{n-1} = p'_{n-2}\, s'(n-1) + p'_{n-3} = q_{n-1}\, s(n) + q_{n-2}$$

∎

3.2.4.2 Lema. *Para cada $s \in X$, si p_n y q_n son dados como arriba definidos, entonces*

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n\, q_{n+1}}$$

Demostración: Utilizaremos un estilo de inducción similar al utilizado en el lema anterior. Para $n = 0$

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{s(1)} = \frac{1}{q_0\, q_1}$$

y el resultado es inmediato. Si $n > 0$, entonces, utilizando (1), obtenemos que

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{s(0)\, p'_n + q'_n}{p'_n} - \frac{s(0)\, p'_{n-1} + q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = \frac{q'_n}{p'_n} - \frac{q'_{n-1}}{p'_{n-1}} = -\frac{q'_n\, q'_{n-1}}{p'_n\, p'_{n-1}} \left(\frac{p'_n}{q'_n} - \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}} \right)$$

Aplicando la hipótesis de inducción para s' tenemos que esto es igual a

$$(-1)^n \frac{q'_n\, q'_{n-1}}{p'_n\, p'_{n-1}} \left(\frac{1}{q'_n\, q'_{n-1}} \right) = \frac{(-1)^n}{p'_n\, p'_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{q_n\, q_{n+1}}$$

∎

3.2.4.3 Lema. $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$.

Demostración: Por el lema anterior, si n es par, claramente $p_n / q_n < p_{n+1} / q_{n+1}$. Además

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \left(\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right) - \left(\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}\, q_{n+2}} + \frac{(-1)^n}{q_n\, q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n\, q_{n+1}\, q_{n+2}} (q_{n+2} - q_n)$$

El lema 3.2.4.1 nos garantiza que $q_{n+2} - q_n > 0,\ \forall\, n \Rightarrow p_{n+2} / q_{n+2} - p_n / q_n$ es positivo o negativo de acuerdo a si n es par o impar, respectivamente. Lo anterior establece lo que queríamos probar.

∎

3.2.4.4 Lema. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) = 0$.

Demostración: Por el lema 3.2.4.2, es suficiente demostrar que $q_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. De hecho, $q_n \geq n$ para cada $n \geq 0$, como puede ser verficado por inducción utilizando el lema 3.2.4.1.

∎

Podemos aquí deducir el primer punto de los cinco que debemos verificar para establecer el teorema 3.2.4. El lema 3.2.4.3 garantiza que cada una de las sucesiones (p_{2n} / q_{2n}) y (p_{2n+1} / q_{2n+1}) son monótonas acotadas. En consecuencia, dichas sucesiones convergen. Por el lema 3.2.4.4, la sucesión (p_n / q_n) converge. De manera que $\theta(s)$ está definido para cada $s \in X$ y podemos escribir

$$\theta(s) = s(0) + \frac{1}{s(1) +}\ \frac{1}{s(2) +} \cdots$$

sin ningún temor.

3.2.4.5 Lema. *Sea $s \in X$ y para cada n escríbase*

$$x_n = \theta(s(n), s(n+1), s(n+2), \ldots) = s(n) + \frac{1}{s(n+1) +}\ \frac{1}{s(n+2) +} \cdots$$

Si $x = x_0$ y p_n, q_n están definidos como arriba, entonces las siguientes propiedades se satisfacen

1. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - s(n)}$;

2. $s(n) = \lfloor x_n \rfloor$;

3. $x = \dfrac{p_n\, x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\, x_{n+1} + q_{n-1}}$ *para* $n \geq 0$.

Demostración: 1. La ecuación se sigue de la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lim_{m\to\infty}\left[s(n+1) + \frac{1}{s(n+2)+}\ \frac{1}{s(n+3)+}\cdots\frac{1}{s(n+m)}\right] \\ &= 1 \Big/ \lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{s(n+1)+}\ \frac{1}{s(n+2)+}\cdots\frac{1}{s(n+m)}\right] \\ &= 1 \Big/ \lim_{m\to\infty}\left[\left(s(n) + \frac{1}{s(n+1)+}\ \frac{1}{s(n+2)+}\cdots\frac{1}{s(n+m)}\right) - s(n)\right] = \frac{1}{x_n - s(n)} \end{aligned}$$

2. Claramente $x_n > s(n)$, $\forall\, n$. En particular $x_n > 1$. De modo que $1/x_{n+1} < 1$, entonces

$$a_n < x_n = a_n + 1/x_{n+1} < a_n + 1$$

3. Utilizamos inducción. Para $n = 0$,

$$\frac{p_0\, x_1 + p_{-1}}{q_0\, x_1 + q_{-1}} = \frac{s(0)\, x_1 + 1}{x_1} = s(0) + \frac{1}{x_1} = x_0 = x$$

Asumiendo el resultado para n y utilizando (1), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}\, x_{n+2} + p_n}{q_{n+1}\, x_{n+2} + q_n} &= \frac{[s(0)\, p'_n + q'_n]\, x'_{n+1} + [s(0)\, p'_{n-1} + q'_{n-1}]}{p'_n\, x'_{n+1} + p'_{n-1}} \\ &= \frac{s(0)[p'_n\, x'_{n+1} + p'_{n-1}] + (q'_n\, x'_{n+1} + q'_{n-1})}{p'_n\, x'_{n+1} + p'_{n-1}} \\ &= s(0) + 1 \Big/ \left(\frac{p'_n\, x'_{n+1} + p'_{n-1}}{q'_n\, x'_{n+1} + q'_{n-1}}\right) \\ &= s(0) + 1/x' \qquad \text{(por hipótesis de inducción)} \\ &= s(0) + 1/x_1 \\ &= x \end{aligned}$$

∎

Estamos ahora en condiciones de verificar los puntos 2) - 5) que nos restan para establecer el teorema 3.2.4.

2) θ es inyectivo. Esto se sigue de la segunda propiedad establecida por el lema 3.2.4.5. Puesto que si $x = \theta(s)$, entonces unívocamente tenemos que $s(0) = \lfloor x \rfloor = \lfloor x_0 \rfloor$, $s(1) = \lfloor x_1 \rfloor$, y así sucesivamente. En general, conociendo los valores de $s(0), s(1), \ldots, s(n-1)$, conocemos también el valor de x_n, y por ende el valor de $a_n = \lfloor x_n \rfloor . \theta(s)$ es irraccional para toda $s \in X$.

3) $\theta(s)$ es irraccional para toda $s \in X$. Demostraremos que cualquier número racional $p/q \geq 1$ tiene una expansión finita en fracciones continuas de la forma $s(0) + \frac{1}{s(1)+} \cdots \frac{1}{s(n)}$. Esto puede ser demostrado por inducción sobre q, asumiendo que p/q está escrito en términos irreducibles. Si $q = 1$, entonces $s(0) = p$ y $n = 0$. En otro caso, escribimos $p = s(0)\, q + b$ con $0 < b < q$. Inductivamente, $q/b = s(1) + \frac{1}{s(2)+} \cdots \frac{1}{s(n)}$, de manera que

$$\frac{p}{q} = s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+}\cdots\frac{1}{s(n)}$$

Ahora supóngase que $\theta(s)$ es racional para algún $s \in X$, digamos

$$\theta(s) = s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+} \cdots = s'(0) + \frac{1}{s'(1)+}\ \frac{1}{s'(2)+} \cdots \frac{1}{s'(n)} = b \in \mathbb{Q}$$

con $b \geq 1$. Un argumento similar al empleado en la demostración de que θ es inyectiva muestra que

$$s(n) + \frac{1}{s(n+1)+} \cdots = s'(n) \qquad\qquad \frac{1}{s(n+1)+}\ \frac{1}{s(n+2)+} \cdots = 0$$

lo cual es imposible.

4) θ es sobreyectiva sobre $I_r \bigcap (1, \infty)$. Sea $x \in I_r \ni x > 1$. Defínase $s(n)$ y x_n inductivamente por $x_0 = x$, $s(n) = \lfloor x_n \rfloor$ y $x_{n+1} = 1/[x_n - s(n)]$. Claramente x_n es irracional, de manera que $1/[x_n - s(n)]$ existe (no hay forma de que $s(n) = x_n$) y $s(n)$, x_n están definidos para todo n. Más aún, $s(n) \geq 1, \forall\, n$. En efecto, para $n = 0$ el resultado se tiene por definición. Si $n > 0$, entonces $x_n - s(n) < 1$ y $x_{n+1} > 1$ $\Rightarrow \lfloor x_{n+1} \rfloor \geq 1$. Nos queda mostrar que

$$\theta(s) = \theta(s(0), s(1), s(2), \ldots) = x$$

donde, claramente, $s \in X$. Por los lemas 3.2.4.3 y 3.2.4.4, $p_{2n}/q_{2n} < p_{2n+1}/q_{2n+1}$ para cada n y $p_n/q_n \to \theta(s)$ cuando $n \to \infty$, de manera que es suficiente mostrar que $p_{2n}/q_{2n} \leq x \leq p_{2n+1}/q_{2n+1}$ para cada n. Para $n = 0$ la desigualdad que deseamos probar solamente implica que $s(0) \leq x \leq s(0) + 1/s(1)$. Pero $x - s(0) = x_0 - s(0) = 1/x_1 \leq 1/s(1)$, así que la desigualdad se tiene para $n = 0$. Asumimos luego que $p_{2n}/q_{2n} \leq x \leq p_{2n+1}/q_{2n+1}$ para cada número irracional $x > 1$ y para las sucesiones (p_n) y (q_n) correspondientemente defnidas. Las sucesiones definidas a partir de x_1, x_2 son claramente la primera y segunda sucesiones derivadas de las sucesiones definidas a partir de x. Aplicando la hipótesis de inducción,

$$p''_{2n}/q''_{2n} \leq x_2 \leq p''_{2n+1}/q''_{2n+1} \Rightarrow p''_{2n}/q''_{2n} \leq 1/[x_1 - s(1)] \leq p''_{2n+1}/q''_{2n+1}$$

Luego

$$\frac{s(1)\, p''_{2n+1} + q''_{2n+1}}{p''_{2n+1}} \leq x_1 \leq \frac{s(1)\, p''_{2n} + q''_{2n}}{p''_{2n}}$$

y por (1), $p'_{2n+2}/q'_{2n+2} \leq x_1 \leq p'_{2n+1}/q'_{2n+1}$.

Repitiendo este argumento encontramos que

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \leq x \leq \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}$$

5) θ y θ^{-1} son continuos. Es suficiente demostrar que θ mapea una base para la topología de X sobre una base para la topología de $I_r \bigcap (1, \infty)$. La base que utilizaremos para X es la familia de conjuntos $N_\sigma = \{x \in X : \sigma \subset x\}$ para $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Si $s \in N_\sigma$ escribiremos c_1 y c_2 para denotar el mínimo y máximo, respectivamente, entre

$$s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+} \cdots \frac{1}{s(n)} \qquad\qquad s(0) + \frac{1}{s(1)+}\ \frac{1}{s(2)+} \cdots \frac{1}{s(n+1)}$$

con $\sigma = (s(0), s(1), \ldots, s(n))$. De manera que tenemos que demostrar que θ mapea N_σ sobre $I_r \bigcap (c_1, c_2)$, y que los conjuntos de la forma $I_r \bigcap (c_1, c_2)$ forman una base para la topología en $I_r \bigcap (1, \infty)$.

Si $b \in N_\sigma$ y $|\sigma| = 1$, entonces $c_1 = b(0)$ y $c_2 = b(0) + 1/b(1)$. Además

$$b(1)+\frac{1}{b(2)+}\cdots > b(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b(1)+}\,\frac{1}{b(2)+}\cdots < \frac{1}{b(1)}$$

y en consecuencia

$$\theta(b)=b(0)+\frac{1}{b(1)+}\,\frac{1}{b(2)+}\cdots \in \left(b(0),\, b(0)+\frac{1}{b(1)}\right)=(c_1,\, c_2)$$

Por lo tanto $\theta(N_\sigma)\subset I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$. Opuestamente, la demostración de sobreyectividad de θ mostró que si $x\in I_r\bigcap(k,\, k+1/r)$, con $k,\, r\in\mathbb{Z}^+$, entonces $x=\theta(b)$ para algún $b\in X$ con $b(0)=k$, es decir $\theta^{-1}(I_r\bigcap(c_1,\, c_2))\subset N_\sigma$, con $\sigma(0)=k$. De manera que θ mapea N_σ sobre $I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$ cuando $|\sigma|=1$.

Sea ahora $\sigma'=(s(1),\, s(2),\, \ldots,\, s(n)),\, n>0$, asúmase inductivamente que $\theta(N_{\sigma'})=I_r\bigcap(c_1',\, c_2')$, donde c_1' y c_2' son el mínimo y máximo, respectivamente, entre los números

$$s(1)+\frac{1}{s(2)+}\cdots\frac{1}{s(n)} \qquad \text{y} \qquad s\,(1)+\frac{1}{s(2)+}\cdots\frac{1}{s(n+1)}$$

Entonces el mínimo y el máximo entre $s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(n)}$ y $s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(n+1)}$ están dado por

$$c_1=s(0)+\frac{1}{c_2'} \qquad\qquad c_2=s(0)+\frac{1}{c_1'}$$

respectivamente. Así, si $\sigma=s(0)^\wedge\sigma'$, entonces θ mapea N_σ sobre el conjunto de números de la forma $s(0)+1/x$ con $x\in I_r\bigcap(c_1',\, c_2')$. Pero $I_r\bigcap(c_1',\, c_2')=I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$, ya que

$$x\in I_r\bigcap(c_1',\, c_2') \quad\Leftrightarrow\quad 1/x\in I_r\bigcap(1/c_1',\, 1/c_2') \quad\Leftrightarrow\quad s(0)+1/x\in I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$$

Por otro lado, para verificar que la familia de todos estos conjuntos forma una base para la topología en $I_r\bigcap(1,\, \infty)$, sea $x\in I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$, donde $1<c_1<c_2$. Entonces la sucesión (p_n/q_n), definida a partir de x como en la demostración de la sobreyectividad de θ, converge a x. De forma que para algún n,

$$c_1<\frac{p_{2n}}{q_{2n}}<x<\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}<c_2$$

Pero $p_{2n}/q_{2n}=s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(2n)}$ y $p_{2n+1}/q_{2n+1}=s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(2n+1)}$. Sean

$$c_1'=p_{2n}/q_{2n} \qquad\qquad c_2'=s(0)+\frac{1}{s(1)+}\,\frac{1}{s(2)+}\cdots\frac{1}{s(2n)+1}$$

Entonces $I_r\bigcap(c_1',\, c_2')$ es un conjunto de la forma requerida. Además tenemos que

$$s(2n-1)+\frac{1}{s(2n)+\frac{1}{s(2n+1)}}>s(2n-1)+\frac{1}{s(2n)+1}>s(2n-1)$$

de donde se sigue que

$$s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(2n+1)}<s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(2n)+1}<s(0)+\frac{1}{s(1)+}\cdots\frac{1}{s(2n-1)}$$

En síntesis, hemos demostrado que

$$c_1<c_1'<x<\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<c_2'<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}<c_2$$

de manera que $x\in I_r\bigcap(c_1',\, c_2')\subset I_r\bigcap(c_1,\, c_2)$ y los conjuntos de la forma $\theta(N_\sigma)$ forman una base para la topología de $I_r\bigcap(1,\, \infty)$ tal y como queríamos demostrar.

∎

Dado que $\mathcal{N}$ es un importante espacio en el estudio de los espacios polacos, estudiaremos más a detalle su topología. Si $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, sea $N_\sigma = \{f \in \mathcal{N} : \sigma \subset f\}$. Claramente N_σ es una vecindad de f (bajo la métrica $d_{\mathcal{N}}$). Nótese que $\mathcal{B} = \left\{N_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\right\}$ es una base para la topología de $\mathcal{N}$, ya que para cualquier abierto U de $\mathcal{N}$ y $f \in U$, existe algún $N_\sigma \in \mathcal{B} \ni f \in N_\sigma \subset U$. Por otro lado, adviértase que

$$\mathcal{N} \setminus N_\sigma = \bigcup \{N_\tau : \tau(i) \neq \sigma(i),\ 0 \leq i \leq |\sigma|\}$$

es un abierto. Así N_σ es abierto y cerrado.

Sabemos que todo producto cartesiano de espacios totalmente disconexos es un espacio totalmente disconexo. Entonces **el espacio de Baire $\mathcal{N}$ es totalmente disconexo**, ya que $\mathbb{N}$ es un espacio discreto, y en consecuencia, totalmente disconexo.

Si $U \subseteq \mathcal{N}$ es abierto, entonces existe $S \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ tal que $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$. Sea

$$T = \left\{\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \forall\, \tau \subseteq \sigma,\ \tau \notin S\right\}$$

Nótese que si $\sigma \in T$ y $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in T$. Todo conjunto de sucesiones con esta propiedad recibe el nombre de *árbol*, i.e. un árbol es un conjunto de sucesiones cerrado bajo segmentos iniciales. Decimos que $f \in \mathcal{N}$ es una *trayectoria* a través de T si $(f(0), \ldots, f(n)) \in T,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea

$$[T] = \{f \in \mathcal{N} : f \text{ es una trayectoria a través de } T\}$$

el *cuerpo de* T. Nótese ahora que $f \in [T] \Leftrightarrow \sigma \not\subset f,\ \forall\, \sigma \in S \Leftrightarrow f \notin U$. A partir de lo discutido en los párrafos anteriores hemos probado la siguiente caracterización de los subconjuntos cerrados y abiertos de $\mathcal{N}$.

3.2.5 Lema.

i) $U \subseteq \mathcal{N}$ *es abierto si, y sólo si, existe* $S \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *tal que* $U = \bigcup_{\sigma \in S} N_\sigma$.

ii) $F \subseteq \mathcal{N}$ *es cerrado si, y sólo si, existe un árbol* $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *tal que* $F = [T]$.

∎

Podemos mejorar un poco la caracterización anterior. Para ello necesitamos la siguiente definición:

3.2.6 Definición. *Decimos que un árbol* $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *está podado si para toda* $\sigma \in T$, *existe* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sigma^\wedge i \in T$.

$\leftharpoondown\!\rightharpoondown$

Equivalentemente, T es un árbol podado si para toda $\sigma \in T$, existe $f \in [T]$ con $\sigma \subset f$. Si T es un árbol, entonces

$$T' = \{\sigma \in T : \exists\, f \in [T] \text{ con } \sigma \subset f\}$$

es un árbol podado tal que $T \subseteq T'$. Así, todo conjunto cerrado F de $\mathcal{N}$ es el conjunto de todas las trayectorias a través de un árbol podado.

Gracias a lo discutido hasta el momento podemos caracterizar las funciones continuas de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{N}$: Si $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, entonces f es continua si, y sólo si, para todo x tal que $\sigma \subset f(x)$, existe $\tau \subset x$ tal que si $\tau \subset y$, entonces $\sigma \subset f(y)$. En palabras más simples, para toda natural n existe un natural m tal que los primeros n valores de $f(x)$ son determinados por los primeros m valores de x.

Probaremos ahora que todo subconjunto cerrado de $\mathcal{N}$ es la imagen continua de $\mathcal{N}$:

3.2.7 Teorema. *Si* X *es un espacio polaco, entonces existe una función continua y sobreyectiva* ϕ *con dominio* $\mathcal{N}$ *y contradominio* X.

Demostración: Utilizando el lema 3.1.16 construimos un árbol de conjuntos $\left(U_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\right)$ tal que:

i) $U_\emptyset = X$;

ii) U_σ es un subconjunto abierto de X;

iii) $\operatorname{diam}(U_\sigma) < 1/|\sigma|$;

iv) $\overline{U_\tau} \subset U_\sigma$ para $\sigma \subset \tau$;

v) $U_\sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{\sigma^\wedge i}$.

Por iv) es claro que $U_\tau \subset \overline{U_\tau} \subset U_\sigma \subset \overline{U_\sigma} \Leftrightarrow \sigma \subset \tau$. Si $f \in \mathcal{N}$, entonces por el lema 3.1.15 existe $\phi(f)$ tal que

$$\phi(f) = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{f|n}} = \{\phi(f)\}$$

Supóngase que $x \in X$ y constrúyase $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots$ con $x \in U_{\sigma_i}$. Sea $\sigma_0 = \emptyset$. Supóngase ahora que σ_n es tal que $x \in U_{\sigma_n}$. Por v) existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{\sigma_n{}^\wedge j}$. Sea $\sigma_{n+1} = \sigma_n{}^\wedge j$. Entonces, si $f = \bigcup \sigma_n$, claramente $\phi(f) = x$. Por lo tanto ϕ es sobreyectiva.

Sean $f, g \in \mathcal{N}$ y $\phi(f) = x$. Si $g \,\big|\, n = f \,\big|\, n \Rightarrow d_{\mathcal{N}}(g, f) = 1\big/2^{n+1} \Rightarrow \phi(g) \in U_{f|n}$ y, por iii),

$$d_X(\phi(f), \phi(g)) < 1/n$$

Entonces ϕ es continua.

∎

Adviértase que, en realidad, hemos probado que siempre existe una función continua, biyectiva y abierta del espacio de Baire hacia cualquier otro espacio polaco. Gracias al teorema 3.1.4 debe ser claro que todo subconjunto cerrado de $\mathcal{N}$ es la imagen continua de $\mathcal{N}$.

Mejoraremos el teorema 3.2.7. Para ello necesitamos dos lemas, pero antes haremos un breve recordatorio. Un conjunto X es un F_σ-conjunto si es la unión contable de conjuntos cerrados. Si X es un espacio polaco y $O \subset X$ es abierto, entonces, por el lema 3.1.16 existen conjuntos abiertos $U_0, U_1, \ldots$ tales que $O = \bigcup \overline{U_n}$. Así, todo conjunto abierto en un espacio polaco es un F_σ-conjunto. La unión contable de F_σ-conjuntos es, claramente, un F_σ-conjunto. Si $X = \bigcup A_i$ y $Y = \bigcup B_i$ son F_σ-conjuntos, entonces $X \bigcap Y = \bigcup (A_i \bigcap B_j)$ es también un F_σ-conjunto.

3.2.8 Lema. *Sea X un espacio polaco, y sean $F, O \subseteq X$, con F cerrado y O abierto. Entonces existen F_σ-conjuntos $H_0, H_1, \ldots$ disjuntos a pares tales que* $\operatorname{diam}(H_i) < \varepsilon$, $\overline{H_i} \subseteq F \bigcap O$ *y* $\bigcup H_i = Y$.

Demostración: Por el lema 3.1.16, existen conjuntos abiertos $O_0, O_1, \ldots$ con $\operatorname{diam}(O_i) < \varepsilon$ y tales que $\bigcup O_i = \bigcup \overline{O_i} = O$. Sean $H_i = F \bigcap [O_i \setminus (O_0 \bigcap \cdots \bigcap O_{i-1})]$. Entonces los H_i son disjuntos a pares, $\overline{H_i} \subseteq \overline{O_i} \subseteq O$, de manera que $H_i \subseteq F \bigcap O$ y $\bigcup \overline{H_i} = F \bigcap O$.

∎

3.2.9 Lema. *Sea X un espacio polaco, $Y \subseteq X$ un F_σ-conjunto y $\varepsilon > 0$. Entonces existen F_σ-conjuntos disjuntos $Y_0, Y_1, \ldots$ con* $\operatorname{diam}(Y_i) < \varepsilon$, $\overline{Y_i} \subseteq Y$ *y* $\bigcup \overline{Y_i} = Y$.

Demostración: Sea $Y = \bigcup C_n$ donde cada C_n es cerrado. Defínase $C_n' = C_0 \bigcup \cdots \bigcup C_n$ para cada n. Nótese que

$$C_0' \subseteq C_1' \subseteq C_2' \subseteq \cdots$$

Defínase, ahora, de forma recursiva $D_0 = C_0'$ y $D_n = C_n' \setminus C_{n-1}'$, $\forall\, n \geq 1$. Luego $\bigcup \overline{D_n} = Y$. Por ende, es suficiente demostrar que cada uno de los D_n es una unión de una colección de F_σ-conjuntos disjuntos a pares con diámetro menor que ε, ya que si cada D_n satisface tal condición, entonces Y satisface la condición también, dado que Y es una unión disjunta de un número contable de D_n. Cada uno de los

D_n es la intersección de un conjunto cerrado C'_n y un conjunto abierto $X \setminus C'_{n-1}$. El resultado se sigue del lema 3.2.8.

∎

3.2.10 Teorema. *Si X es un espacio polaco, entonces existe una función biyectiva y continua $\phi : F \to X$, donde $F \subseteq \mathcal{N}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración: Utilizando el lema anterior constrúyase el árbol $\left(X_\sigma : \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\right)$ de F_σ-conjuntos tales que

i) $X_\emptyset = X$;
ii) $X_\sigma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_{\sigma^\wedge i}$;
iii) $\operatorname{diam}(X_\sigma) < 1/|\sigma|$;
iv) $\overline{X_\tau} \subset X_\sigma$ para $\sigma \subset \tau$;
v) Si $i \neq j$, entonces $X_{\sigma^\wedge i} \cap X_{\sigma^\wedge j} = \emptyset$.

Por iv) es claro que $X_\tau \subset \overline{X_\tau} \subset X_\sigma \subset \overline{X_\sigma} \Leftrightarrow \sigma \subset \tau$. Si $f \in \mathcal{N}$, entonces por el lema 3.1.15 $\bigcap X_{f|n} = \bigcap \overline{X_{f|n}}$ contiene a lo más un punto. Sea

$$F = \left\{ f \in \mathcal{N} : \exists\, x \in X \ni x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{f|n} \right\}$$

Sea $\phi : F \to X$ tal que $\phi(f) = \bigcap X_{f|n}$. Bajo un argumento similar al de la prueba del teorema 3.2.7, ϕ es continua y sobreyectiva. Sean $f, g \in F$ tales que $f \neq g$ y n es el menor natural para el cual $f(n) \neq g(n)$. Por v) tenemos que

$$X_{f|(n+1)} \cap X_{g|(n+1)} = \emptyset$$

Nótese que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{f|n} = \left(\bigcap_{i=0}^{n} X_{f|i}\right) \cap X_{f|(n+1)} \cap \left(\bigcap_{j=n+2}^{\infty} X_{f|j}\right)$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{g|n} = \left(\bigcap_{i=0}^{n} X_{g|i}\right) \cap X_{g|(n+1)} \cap \left(\bigcap_{j=n+2}^{\infty} X_{g|j}\right)$$

Por lo que

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{f|n}\right) \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{g|n}\right) = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad \phi(f) \neq \phi(g)$$

i.e. ϕ es inyectiva. Entonces resta probar que F es cerrado.

Supóngase que (f_n) es una sucesión de Cauchy sobre F, digamos $f_n \to f \in \mathcal{N}$. Debemos probar que $f \in F$. Para cualquier n existe un m tal que $f_i \mid n = f_m \mid n$ para $i > m$. Lo anterior implica, por iii), que $d_X(\phi(f_i), \phi(f_m)) < 1/n$. Por lo tanto $\phi(f_n)$ es una sucesión de Cauchy. Supóngase que $\phi(f_n) \to x$. Entonces

$$x \in \bigcap \overline{X_{f|n}} = \bigcap X_{f_n|n}$$

lo cual implica que $\phi(f) = x$ y, en consecuencia, $f \in F$.

∎

4. Análisis de Cantor-Bendixson

A continuación se mostrará que la Hipótesis del Continuo es verdadera para espacios polacos y subconjuntos cerrados de espacios polacos. Adicionalmente se presentarán algunos ejemplos originales de la derivada y rango de Cantor-Bendixson sobre $\mathbb{R}$.

Como una breve reseña histórica hacemos notar que el nombre «Análisis de Cantor-Bendixson» es en honor a los grandes matemáticos Georg Cantor (1845 - 1918) e Ivar Otto Bendixson (1861 - 1935), cuyas ideas y resultados en la teoría de conjuntos y en los fundamentos de la matemática se convirtieron en el punto de partida de muchas investigaciones en la matemática moderna.

4.1 Espacios perfectos

4.1.1 Definición. *Sea X un espacio polaco. Decimos que X es perfecto si todos sus puntos son puntos límites. Si $P \subset X$, denominamos a P perfecto en X si P es cerrado y perfecto en su topología relativa.*

$\dashv$

Por vacuidad es claro que el conjunto vacío $\emptyset$ es perfecto. El siguiente lema nos asegura que todo subconjunto perfecto no vacío de un espacio polaco tiene igual cardinalidad que $\mathbb{R}$.

4.1.2 Lema. *Si X es un espacio polaco y $P \subseteq X$ es un conjunto perfecto no vacío, entonces existe una función continua e inyectiva $f : \mathcal{C} \to P$. De hecho, existe un conjunto perfecto $F \subseteq P$ homeomorfo a $\mathcal{C}$. En particular $P =_c \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío tal que $U \bigcap P \neq \emptyset$. Entonces podemos encontrar x_0 y x_1 elementos de $U \bigcap P$ tales que $x_0 \neq x_1$, ya que cualquier vecindad de un punto límite contiene infinitos puntos. Además, dado que X es un espacio métrico, y en consecuencia un espacio de Hausdorff, podemos elegir U_0 y U_1 vecindades disjuntas de x_0 y x_1, respectivamente, tales que $\overline{U_i} \subset U$ y $\mathrm{diam}(U_i) < \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ e $i \in \{0, 1\}$.

Por lo anterior, es posible construir un árbol $\left(U_\sigma : \sigma \in \{0, 1\}^{<\mathbb{N}}\right)$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que:

i) $U_\sigma \bigcap P \neq \emptyset$;

ii) $U_\emptyset = X$;

iii) $\overline{U_\tau} \subset U_\sigma$ para $\sigma \subset \tau$;

iv) $U_{\sigma^\frown 0} \bigcap U_{\sigma^\frown 1} = \emptyset$.

v) $\mathrm{diam}(U_\sigma) < 1/|\sigma|$;

Por i) y iii) es claro que $U_\sigma \bigcap P \subset U_\sigma$ y $U_\tau \subset \overline{U_\tau} \subset U_\sigma \subset \overline{U_\sigma} \Leftrightarrow \sigma \subset \tau$. Entonces, gracias al lema 3.1.15, podemos definir $f : \mathcal{C} \to P$ tal que

$$\{f(x)\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_{x|n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{x|n}} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_{x|n}} \cap P$$

Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in C$ y $f(\sigma_1) = x$. Si $\sigma_2 \mid n = \sigma_1 \mid n \Rightarrow d_C(\sigma_2, \sigma_1) = 1/(n+1) \Rightarrow f(\sigma_2) \in U_{\sigma_1|n}$ y, por v),

$$d_X(f(\sigma_1), f(\sigma_2)) < \frac{1}{n}$$

i.e. f es continua. Adviértase ahora que iv) y el argumento utilizado para probar la inyectividad de la función del teorema 3.2.10 implican que f es inyectiva.

Defínase $F = f(C) \subseteq P \subseteq X$. La continuidad de f y el hecho de que su dominio es compacto implica que F es compacto $\Rightarrow$ F es, también, cerrado, ya que todo conjunto compacto en un espacio métrico es cerrado. Claramente F es un conjunto perfecto.

Por lo probado hasta el momento $f: C \to F$ es una función con dominio compacto que es continua y biyectiva. Pero F es un subespacio métrico, por lo que es también un espacio de Hausdorff. Lo anterior implica que f es un homeomorfismo.

Por lo tanto $F =_c \mathbb{R}$ y en particular $P =_c \mathbb{R}$.

∎

El teorema anterior implica, claramente, que todo espacio polaco perfecto tiene igual cardinalidad que $\mathbb{R}$.

4.1.3 Ejemplo. *Sea X un espacio polaco. Si $f: C \to X$ es una función continua e inyectiva, entonces $f(C)$ es perfecto.*

Sea $G = f(C)$ y F el conjunto de "tercios medios" de Cantor. Por el lema anterior sabemos que C y G son homeomorfos. Además, gracias al ejemplo 3.2.2, C es, también, homeomorfo a F. Lo anterior implica, claramente, que G y F son homeomorfos.

Recuérdese que F es perfecto, ya que es denso en sí mismo. Esta propiedad junto con el homeomorfismo entre G y F nos garantizan que $f(C)$ es perfecto (invariante topológico).

▽

4.2 La derivada de Cantor-Bendixson

Considérese $\mathbb{Q}$ como un subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{Q}$ es cerrado y no tiene puntos aislados. Sin embargo sabemos que $\mathbb{Q}$ es contable, i.e. $\mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathbb{Q}$ no puede ser un espacio polaco. Analizaremos ahora subconjuntos cerrados arbitrarios de espacios polacos.

4.2.1 Lema. *Sean X un espacio polaco y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. Si F_0 denota el conjunto de puntos aislados de F, entonces $F_0 \leq_c \mathbb{N}$ y $F \setminus F_0$ es cerrado.*

Demostración: Por definición X es un espacio métrico (completo) separable, entonces X es segundo contable, ya que las vecindades de radio racional centradas en cada punto del subconjunto denso contable de X constituyen una base contable. Por lo anterior existe $U_0, U_1, \ldots$ base contable para la topología de X. Para cada $x \in F_0$ es posible encontrar $i_x \in \mathbb{N}$ tal que $U_{i_x} \cap F = \{x\}$. En consecuencia F_0 es contable, i.e. $F_0 \leq_c \mathbb{N}$, y

$$F \setminus F_0 = F \Big\backslash \bigcup_{x \in F_0} U_{i_x}$$

es cerrado, ya que, por definición de base, $\bigcup_{x\in F_0} U_{i_x}$ es abierto.

∎

4.2.2 Definición. *Sea X un espacio polaco. Si $F \subseteq X$ es cerrado, la derivada de Cantor-Bendixson de F es*

$$\Gamma(F) = \{x \in F \,:\, x \textit{ es punto límite de } F\}$$

Para cada ordinal contable $\alpha < \omega_1$, definimos $\Gamma^\alpha(F)$ de la siguiente forma:

i) $\Gamma^0(F) = F$;

ii) $\Gamma^{\alpha+1}(F) = \Gamma(\Gamma^\alpha(F))$;

iii) Si α es un ordinal límite, entonces $\Gamma^\alpha(F) = \bigcap_{\beta<\alpha} \Gamma^\beta(F)$.

A partir de la definición anterior adviértase que si X es un espacio polaco, $F \subseteq X$ es cerrado, y F_0 es el conjunto de todos los puntos aislados de F, entonces

$$\Gamma(F) = F \setminus F_0$$

gracias al lema 4.2.1.

4.2.3 Lema. *Sean X un espacio polaco y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces:*

i) $\Gamma^\alpha(F)$ *es cerrado para todo* $\alpha < \omega_1$;

ii) $\Gamma^\alpha(F) \big\backslash \Gamma^{\alpha+1}(F) \leq_c \mathbb{N}$;

iii) Si $\Gamma(F) = F$, *entonces F es perfecto y* $\Gamma^\alpha(F) = F$, $\forall\, \alpha < \omega_1$;

iv) Existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $\Gamma^\alpha(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$.

Demostración: i) Por definición $\Gamma^0(F) = F$, entonces $\Gamma^0(F)$ es cerrado. Supóngase que $\Gamma^\alpha(F)$ es cerrado para algún ordinal $\alpha < \omega_1$. Por definición $\Gamma^{\alpha+1}(F) = \Gamma(\Gamma^\alpha(F))$. Por hipótesis $\Gamma^\alpha(F)$ es cerrado, entonces por el lema 4.2.1 concluimos que $\Gamma(\Gamma^\alpha(F))$ es cerrado.

ii) Sean $G_\alpha = \Gamma^\alpha(F)$ y $G_{\alpha+1} = \Gamma^{\alpha+1}(F)$. Denótese por G'_α el conjunto de todos los puntos límites de G_α y por G^*_α el conjunto de todos los puntos aislados de G_α. Claramente $G_\alpha = G'_\alpha \bigcup G^*_\alpha$, con $G'_\alpha \bigcap G^*_\alpha = \emptyset$, y $\Gamma^{\alpha+1}(F) = G_\alpha \setminus G^*_\alpha$. Nótese entonces que

$$\Gamma^\alpha(F) \big\backslash \Gamma^{\alpha+1}(F) = G_\alpha \setminus G_{\alpha+1} = G_\alpha \setminus (G_\alpha \setminus G^*_\alpha) = G^*_\alpha$$

Por el lema 4.2.1 sabemos que $G^*_\alpha \leq_c \mathbb{N}$. Por lo tanto $\Gamma^\alpha(F) \big\backslash \Gamma^{\alpha+1}(F) \leq_c \mathbb{N}$.

iii) Si $\Gamma(F) = F$, entonces F no tiene puntos aislados o, lo que es equivalente, todos sus puntos son puntos límites. Como F es cerrado, entonces, por definición, F es perfecto. Por lo anterior es obvio que $\Gamma^\alpha(F) = F$, $\forall\, \alpha < \omega_1$.

iv) Sea $U_0, U_1, \ldots$ una base contable para la topología de X. Si $\Gamma^{\alpha+1}(F) \big\backslash \Gamma^\alpha(F) \neq \emptyset$, podemos encontrar $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_\alpha} \bigcap \Gamma^\alpha(F) = \{x\}$, para algún $x \in \Gamma^\alpha(F)$. Por definición de la derivada de Cantor-Bendixson debe cumplirse que $U_{n_\alpha} \bigcap \Gamma^\beta(F)$ consta de más de un punto para cualquier $\beta < \alpha$. Por lo tanto $n_\beta \neq n_\alpha$ para cualquier $\beta < \alpha$.

Si no existe ningún ordinal α con $\Gamma^{\alpha}(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$, entonces el mapeo $\alpha \mapsto n_{\alpha}$ es, por lo anterior, inyectivo. Sin embargo dicho mapeo tendría como dominio a ω_1 y como contradominio $\mathbb{N}$. La existencia de tal mapeo es imposible.

∎

4.2.4 Definición. *Sean X un espacio polaco y $F \subseteq X$ un conjunto cerrado. El rango de Cantor-Bendixson de F se define como el menor ordinal α tal que $\Gamma^{\alpha}(F) = \Gamma^{\alpha+1}(F)$.*

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

Adviértase que para cualquier subconjunto cerrado F de un espacio polaco tenemos que

$$F = \Gamma^0(F) \supseteq \Gamma(F) \supseteq \Gamma^2(F) \supseteq \cdots \supseteq \Gamma^{\alpha}(F) \supseteq \cdots$$

i.e. que la derivada de Cantor-Bendixson de F nos proporciona una cadena decreciente de conjuntos cerrados contenidos en F. ¿Será posible que dicha cadena sea estrictamente decreciente? Nótese que sí, ya que por 4.2.3iv) el rango de Cantor-Bendixson de F siempre existe y, en consecuencia, si dicho rango es α, entonces

$$\Gamma^0(F) \supset \Gamma(F) \supset \Gamma^2(F) \supset \cdots \supset \Gamma^{\alpha}(F)$$

4.3 Ejemplos de la derivada y rango de Cantor-Bendixson sobre $\mathbb{R}$

4.3.1 Definición. *Decimos que un subconjunto cerrado X de $\mathbb{R}$ es disperso si $\Gamma^{\alpha}(X) = \emptyset$ para algún ordinal contable α.*

$\leftharpoondown\rightharpoondown$

Presentamos a continuación algunos ejemplos de la derivada y rango de Cantor-Bendixson de conjuntos cerrados dispersos y bien ordenados en $\mathbb{R}$. Seguido a estos ejemplos se presenta un teorema que nos asegura que para cualquier ordinal contable α existe un subconjunto cerrado disperso y bien ordenado en $\mathbb{R}$ con rango de Cantor-Bendixson α.

4.3.2 Ejemplo. *Conjunto con rango de Cantor-Bendixson cero.*

Sea $X_0 = \emptyset$. Claramente X_0 es un conjunto con rango de Cantor-Bendixson cero.

▽

4.3.3 Ejemplo. *Conjunto con rango de Cantor-Bendixson uno.*

Sea $X_1 = \{1\}$. Claramente X_1 es un conjunto con rango de Cantor-Bendixson uno.

▽

4.3.4 Ejemplo. *Conjunto con rango de Cantor-Bendixson dos.*

Sea

$$X_2 = \left\{ \frac{n}{n+1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup X_1$$

Nótese entonces que $\Gamma(X_2) = X_1$ y $\Gamma^2(X_2) = \Gamma(\Gamma(X_2)) = \Gamma(X_1) = \emptyset$. Por lo que X_2 es un conjunto con rango de Cantor-Bendixson dos.

▽

4.3.5 Ejemplo. *Conjunto con rango de Cantor-Bendixson tres.*

Sean

$$a_n = \frac{n}{n+1} \qquad\qquad b_k^n = \frac{1}{k+1}\, a_n + \frac{k}{k+1}\, a_{n+1}$$

para $n, k \in \mathbb{N}$, donde n es fijo en cada uno de los elementos de la sucesión b_k^n. Claramente $b_k^n \to a_{n+1}$ cuando $k \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$Y_n = \{b_k^n \,:\, k \in \mathbb{N}\} \bigcup \{a_{n+1}\}$$

es tal que $\Gamma(Y_n) = \{a_{n+1}\}$. Entonces si

$$X_3 = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} Y_n \bigcup X_2$$

tenemos que $\Gamma(X_3) = X_2$, $\Gamma^2(X_3) = X_1$ y $\Gamma^3(X_3) = X_0$. Por lo que X_2 es un conjunto con rango de Cantor-Bendixson tres.

$\triangledown$

El siguiente teorema generaliza, mediante inducción transfinita, la construcción seguida en los ejemplos anteriores. Este teorema nos indica cómo generar conjuntos cerrados dispersos y bien ordenados en $\mathbb{R}$ con rango de Cantor-Bendixson previamente especificado.

4.3.6 Teorema. *Para cada número ordinal contable α, existe un conjunto cerrado disperso y bien ordenado de números reales X_α con rango de Cantor-Bendixson α.*

Demostración: Utilizaremos inducción transfinita. Sea $X_0 = \emptyset$ y $X_1 = \{0\}$. Supóngase que X_α es un conjunto cerrado disperso y bien ordenado de números reales para algún ordinal contable α. Procederemos por casos.

Caso 1. Supóngase que $\Gamma^\beta(X_\alpha)$ es no acotado para todo $\beta < \alpha$. Sea θ un isomorfismo, que preserva el orden, definido de $\mathbb{R}$ sobre $(0, 1)$ (por ejemplo $\theta(x) = 1/2 + (1/\pi)\arctan x$) y sea

$$X_{\alpha+1} = \theta(X_\alpha) \bigcup \{1\}$$

Entonces $X_{\alpha+1}$ es cerrado, disperso y bien ordenado y, para $\beta \le \alpha$,

$$\Gamma^\beta(X_{\alpha+1}) = \theta\big(\Gamma^\beta(X_\alpha)\big) \bigcup \{1\}$$

dado que θ preserva el orden. De manera que $\Gamma^\alpha(X_{\alpha+1}) = \{1\}$, y luego $\Gamma^{\alpha+1}(X_{\alpha+1}) = \emptyset$.

Caso 2. Supóngase que $\Gamma^\beta(X_\alpha)$ es acotado para algún $\beta < \alpha$. Entonces $\theta(X_\alpha) \bigcup \{1\} \subseteq (0, 1]$ y tiene rango de Cantor-Bendixson α, puesto que ahora 1 es un punto aislado en $\Gamma^\beta(\theta(X_\alpha) \bigcup \{1\})$ para algún $\beta < \alpha$. De manera que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $X_\alpha \subseteq [0, 1]$ (en caso contrario podemos reemplazar X_α por $\theta(X_\alpha) \bigcup \{1\}$). Sea

$$X_{\alpha_n} = \left\{\left(\frac{x}{4} - 1\right)\Big/ 2^n \,:\, x \in X_\alpha\right\} \subseteq \left[-\frac{1}{2^n}, -\frac{3}{4\cdot 2^n}\right]$$

y sea

$$X_{\alpha+1} = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} X_{\alpha_n} \bigcup \{0\}$$

Entonces, como en el caso 1, $X_{\alpha+1}$ es cerrado, bien ordenado, con rango de Cantor-Bendixson $\alpha + 1$ y $\Gamma^{\alpha+1}(X_{\alpha+1}) = \emptyset$. Damos por concluido el caso 2.

Finalmente, supóngase que X_α ha sido definido para todo $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite. Como λ es contable, podemos escribir $\lambda = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada X_{α_n} está contenido en $[0, 1]$. Sea $X_\lambda = \{x + 2n : x \in X_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Si escribimos $X'_{\alpha_n} = \{x + 2n : x \in X_{\alpha_n}\}$, entonces

$$X_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X'_{\alpha_n}$$

y, para cada β,

$$\Gamma^\beta(X_\lambda) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^\beta\left(X'_{\alpha_n}\right)$$

De manera que X_λ tiene rango de Cantor-Bendixson λ.

∎

4.4 Aplicación: La Hipótesis del Continuo para espacios polacos

Utilizando los resultados desarrollados en las secciones anteriores mostramos a continuación que la Hipótesis del Continuo es verdadera para espacios polacos y subconjuntos cerrados de espacios polacos. Antes probamos un importante teorema.

4.4.1 Teorema. *Si X es un espacio polaco y $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado, entonces $F = P \bigcup C$, donde P es un conjunto perfecto (posiblemente vacío), C es un conjunto contable y $P \bigcap C = \emptyset$.*

Demostración: Si $F \subset X$ es cerrado, entonces por 4.2.3iv) podemos asegurar que F tiene rango de Cantor-Bendixson $\alpha < \omega_1$. Nótese que si $P = \Gamma^\alpha(F)$, entonces por 4.2.3iii) concluimos que P es perfecto.

De igual forma, si $C = \bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma^\beta(F) \setminus \Gamma^{\beta+1}(F)$, entonces C es contable, ya que 4.2.3ii) nos asegura que $\Gamma^\beta(F) \setminus \Gamma^{\beta+1}(F) \leq_c \mathbb{N}$ para $\beta < \alpha$, i.e. C es la unión contable de conjuntos contables.

Claramente $P \bigcup C \subset F$. Sea $x \in F$. Si x es punto límite de F, entonces $x \in \Gamma^\alpha(F) \Rightarrow x \in P \bigcup C$; si x es punto aislado de F, entonces $x \in \Gamma^\beta(F) \setminus \Gamma^{\beta+1}(F)$ para algún $\beta < \alpha \Rightarrow x \in P \bigcup C$. Concluimos entonces que $F = P \bigcup C$.

Resta probar que $P \bigcap C = \emptyset$. Supóngase, por el absurdo, que $x \in P \bigcap C$, entonces

$$x \in \Gamma^\alpha(F) \qquad \text{y} \qquad x \in \Gamma^\beta(F) \setminus \Gamma^{\beta+1}(F)$$

para algún $\beta < \alpha$. Sin embargo sabemos que $\Gamma^\beta(F) \supset \Gamma^{\beta+1}(F) \supset \Gamma^\alpha(F)$, por lo tanto tal x no existe.

∎

4.4.2 Hipótesis del Continuo. *Sea X un espacio polaco. Si $F \subseteq X$ es un conjunto cerrado o un F_σ-conjunto, entonces $F \leq_c \mathbb{N}$ o $F =_c \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $F \subseteq X$ un conjunto cerrado o un F_σ-conjunto. Si F es contable, entonces trivialmente $F \leq_c \mathbb{N}$.

Supóngase que F es no contable. Consideremos, primero, el caso en que F es cerrado. Por el teorema 4.4.1 sabemos que $F = P \bigcup C$ con $P \bigcap C = \emptyset$, P perfecto (en su topología relativa) y C contable. Además, por el lema 4.1.2, $P =_c \mathbb{R}$. Concluimos entonces que $F =_c \mathbb{R}$.

Considérese ahora el caso en que F es un F_σ-conjunto. Por definición $F = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$, con cada F_i cerrado en X. Como $F_i \leq_c \mathbb{N}$ o $F_i =_c \mathbb{R}$, concluimos que $F =_c \mathbb{R}$.

∎

4.4.3 Corolario. *Todo espacio polaco X no contable es tal que $X =_c \mathbb{R}$.*

∎

5. Bibliografía

1. Aczel, Amir. 2001. *The Mystery of the Aleph: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity*. Primera edición EEUU, Washington Square Press. 272 págs.

2. Bernays, Paul. 1968. *Axiomatic Set Theory*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 227 págs.

3. Cantor, Georg. 1895. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Mathematische Annalen.

4. Cohen, Paul. 2008. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 192 págs.

5. Crossley, J.N.; et al. 1972. *What is Mathematical Logic?* Primera edición EEUU, Dover Publications. 82 págs.

6. Dauben, Joseph. 1990. *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Primera edición EEUU, Princeton University Press. 424 págs.

7. Dieudonne, Jean. 2006. *Foundations of Modern Analysis*. Primera edición EEUU, Hesperides Press. 379 págs.

8. Ferreirós, José. 2007. *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Segunda edición EEUU, Birkhäuser Basel. 466 págs.

9. Friedman, Avner. 1982. *Foundations of Modern Analysis*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 250 págs.

10. Halmos, Paul. 1978. *Measure Theory*. Primera edición EEUU, Springer-Verlag. 304 págs.

11. Halmos, Paul. 1974. *Naive Set Theory*. Primera edición EEUU, Springer-Verlag. 104 págs.

12. Jech, Thomas. 2008. *The Axiom of Choice*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 224 págs.

13. Kechris, Alexander. 1995. *Classical Descriptive Set Theory*. Primera edición EEUU, Springer-Verlag. 402 págs.

14. Kolmogorov, A. N.; Fomin, S.V. 1970. *Introductory Real Analysis*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 403 págs.

15. Marker, David. 2002. *Descriptive Set Theory*. 105 págs.

16. Moschovakis, Yiannis. 2006. *Notes on Set Theory*. Segunda edición EEUU, Springer-Verlag. 276 págs.

17. Munkres, James. 2000. *Topology.* Segunda edición EEUU, Prentice Hall. 537 págs.

18. Rudin, Walter. 1976. *Principles of Mathematical Analysis*. Tercera edición EEUU, McGraw-Hill. 342 págs.

19. Shilov, Georgi. 1996. *Elementary Real and Complex Analysis.* Primera edición EEUU, Dover Publications. 528 págs.

20. Simmons, George. 2004. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* Primera edición EEUU, McGraw-Hill. 372 págs.

21. Simmons, Harold. *Examples of the Cantor-Bendixson process on the reals.* Mathematical Foundations Group, Inglaterra, Manchester University. 9 págs.

22. Suppes, Patrick. 1972. *Axiomatic Set Theory*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 267 págs.

23. Suppes, Patrick. 1999. *Introduction to Logic*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 312 págs.

24. Willard, Stephen. 2004. *General Topology*. Primera edición EEUU, Dover Publications. 369 págs.

25. Woodin, W. Hugh. 2001. *The Continuum Hypothesis, Part I*. Notices of the AMS, Volume 48, Number 6. Págs. 567 - 576.

26. Woodin, W. Hugh. 2001. *The Continuum Hypothesis, Part II*. Notices of the AMS, Volume 48, Number 7. Págs. 681 - 690.