

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN RELOJ UTILIZANDO MECANISMOS DE GINEBRA

Trabajo de graduación presentado por Fernando Enrique Pérez Gutiérrez para optar
por el grado académico de Licenciado en Ingeniería Mecánica

Guatemala
2014

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN RELOJ
UTILIZANDO MECANISMOS DE GINEBRA

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica

DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN RELOJ UTILIZANDO MECANISMOS DE GINEBRA


Trabajo de graduación presentado por Fernando Enrique Pérez Gutiérrez para optar
por el grado académico de Licenciado en Ingeniería Mecánica

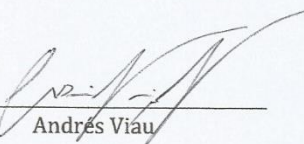
Guatemala
2014

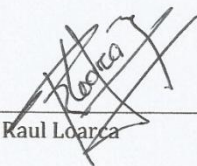
Vo. Bo.

(f) 
Víctor Hugo Ayerdi (asesor)

Tribunal Examinador

(f) 
Victor Hugo Ayerdi

(f) 
Andrés Viau

(f) 
Kaul Loarca

Fecha de aprobación: 27 de mayo del 2014

CONTENIDO

Lista de ilustraciones	xiii
Lista de tablas	xv
Resumen	xvii
I. Introducción.....	1
II. Objetivos:	3
A. Generales:	3
B. Específicos:	3
III. Marco teórico.....	5
A. Ruedas de Ginebra	5
1. Ventajas de las ruedas de Ginebra.....	5
2. Desventajas de las ruedas de Ginebra.....	5
3. Tipos de ruedas de Ginebra.....	5
4. Curvas de movimientos.....	7
5. Generalidades.....	8
6. Anatomía de un mecanismo de Ginebra.....	10
7. Nomenclatura de un mecanismo de Ginebra.....	11
B. Límites y ajustes.....	14
C. Diseño de ejes.....	15
1. Factor de superficie.....	15
2. Factor de tamaño.....	16
3. Factor de modificación de carga.....	16
4. Factor de confiabilidad.....	16
D. Aceleración de Coriolis.....	17
IV. Antecedentes	19
V. Diseño	21

A.	Parámetros del diseño	21
B.	Especificaciones de desempeño.....	21
C.	Especificaciones de diseño	21
1.	Diseño geométrico.....	21
2.	Análisis físico.....	34
3.	Resultados.....	48
VI.	Discusión de resultados	51
VII.	Conclusiones	53
VIII.	Recomendaciones.....	55
IX.	Bibliografía.....	57
X.	Anexos.....	59
A.	Anexo A: Cálculo de las Inercias	59
1.	Cálculo para el círculo 1.....	66
2.	Cálculo para el círculo 2	69
3.	Cálculo de la inercia.....	71
B.	Anexo B: planos del proyecto.....	79

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Mecanismo de Ginebra externo	6
Ilustración 2: Mecanismo de Ginebra interno.....	6
Ilustración 3: Mecanismo de Ginebra esféricos.	7
Ilustración 4: Variaciones con relación al número de ranuras en mecanismos externos.....	9
Ilustración 5: Variaciones con relación al número de ranuras en mecanismos internos	9
Ilustración 6: Anatomía de un mecanismo de Ginebra	10
Ilustración 7: Esquema básico de un mecanismo de Ginebra externo.....	12
Ilustración 8: Esquema de una rueda de Ginebra de 6 ranuras.	13
Ilustración 9: Aceleraciones de la partícula	18
Ilustración 10: Muestra de lectura de la hora	22
Ilustración 11: Modelo de Cuenta de Unidades de Minutos	23
Ilustración 12: Modelo de la manivela.....	23
Ilustración 13: Modelo de unidades de minutos	24
Ilustración 14: Modelo de la rueda de Ginebra de unidades de minutos dimensionado	26
Ilustración 15: Superficie sincronizadora.....	26
Ilustración 16: Radio superficie sincronizadora	27
Ilustración 17: Modelo de superficie sincronizadora	27
Ilustración 18: modelo de Manivela de entrada	28
Ilustración 19: Modelo de la rueda de Ginebra de unidades de minutos	29
Ilustración 20: Modelo conjunto de cuenta de decenas de minutos	29
Ilustración 21: Modelo manivela decenas de minutos	31
Ilustración 22: Modelo de la rueda de Ginebra de decenas de minutos.....	32
Ilustración 23: Modelo de conjunto de cuenta de horas	32
Ilustración 24: Modelo de Manivela de Horas	34
Ilustración 25: Modelo de la rueda de Ginebra de horas	34
Ilustración 26: Triángulo de dimensiones	37
Ilustración 27: Motor encontrado	40
Ilustración 28: Dibujo del eje motriz (medidas en milímetros)	41
Ilustración 29: Diagrama de cuerpo libre	41
Ilustración 30: Gráfica de factor teórico de concentración de esfuerzo (eje redondo con filete en el hombro en torsión).....	44

Ilustración 31: Sensibilidad a la muesca de materiales sometidos a torsión inversa.....	45
Ilustración 32: Diagrama de carga para el pasador	47
Ilustración 33: Prototipo.....	49

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Parámetros en el factor de la condición superficial de Marin.....	16
Tabla 2: Factores de confiabilidad.....	17
Tabla 3: Factores enteros de 60	21
Tabla 4: Dimensiones de la rueda de Ginebra unidades de minuto teóricos.	24
Tabla 5: Dimensiones de la rueda de Ginebra unidades de minuto seleccionados.....	25
Tabla 6: Valores para sincronizador.....	28
Tabla 7: Dimensiones de la rueda de Ginebra decenas de minuto teóricos.....	30
Tabla 8: Dimensiones de la rueda de Ginebra decenas de minuto seleccionados	31
Tabla 9: Dimensiones de la rueda de Ginebra horas teóricos.	33
Tabla 10: Dimensiones de rueda de Ginebra de horas seleccionado.....	33
Tabla 11: Inercias de unidades de minutos.....	35
Tabla 12: Valores obtenidos elementos de unidades de minutos.....	37
Tabla 13: Datos conocidos	37
Tabla 14: Interpolación de valores para una potencia de 1 W.....	42
Tabla 15: Propiedades del polímero PA 6.....	47

RESUMEN

En el presente trabajo se plasma un procedimiento para diseñar un reloj utilizando mecanismos de Ginebra

Los mecanismos de Ginebra se diseñaron utilizando bibliografía encontrada en manuales de diseño y con la intención de experimentar sobre un posible uso de ellos.

En el proceso de diseño se consideraron los materiales para que la fabricación de los elementos fuera económica y la utilización de polímeros de ingeniería con el objetivo de reducir fricciones y mejorar el desempeño y la durabilidad del mecanismo.

La eficacia del diseño se comprobó con los criterios de Goodman y los datos calculados por los modelos de la bibliografía encontrada fueron corroborados por modelos clásicos como método de aceleración de Coriolis.

Finalmente se construyó un modelo el cual puede presentar la hora con una variación aproximada de 3 segundos por cada hora, un mecanismo silencioso, en donde el único ruido provenía del motor eléctrico que lo accionaba.

I. INTRODUCCIÓN

Las ruedas de Ginebra presentan una configuración interesante sobre las levas mecánicas. Las ruedas de Ginebra tienen como objetivo un movimiento intermitente, y son de los mecanismos de movimiento intermitente más antiguos (Bickford, 1972). Dado que su movimiento es intermitente y se utilizan en aplicaciones para contar elementos, su uso inicial fue en diseños de relojes de cuerda.

El nombre de Mecanismo de Ginebra proviene de la aplicación en la industria relojera de Suiza. También se les conoce como Cruz de Malta por la similitud visual que tiene dicho mecanismo cuando tiene cuatro ranuras

Debido a la implementación de tecnologías digitales, se han empezado a sustituir por elementos que utilizan la electrónica para realizar el trabajo intermitente, sin embargo, este proyecto hace mayor énfasis en los mecanismos análogos ya que aún pueden ser encontrados en aplicaciones de maquinaria,

II. OBJETIVOS:

A. GENERALES:

- Diseñar un reloj utilizando mecanismos de Ginebra el cual sea capaz de mostrar la hora y minutos con una variación máxima de 5 minutos según la hora oficial guatemalteca para un uso cotidiano y cuya diferencia sea de 5 minutos cada 4 horas.

B. ESPECÍFICOS:

1. Diseñar una serie de Mecanismos de Ginebra para que el reloj resulte en una medida de no más 1.5 metros en cualquiera de sus dimensiones.
2. Diseñar los mecanismos de tal forma que se pueda obtener un error máximo del 3% en los cálculos y un 5% en el prototipo construido.
3. Realizar un análisis de los materiales a utilizar en el reloj, y que permitan el menor mantenimiento posible con la mayor cantidad de tiempo de vida útil. Además de ser fácilmente adquiribles y reemplazables.
4. Reducir el peso del reloj al eliminar material que sea considerado peso muerto.

III. MARCO TEÓRICO

Las ruedas de Ginebra están disponibles en una variedad de tamaños. Son más baratas que las levas o volantes de estrella y tienen características de desempeño dependientes de los factores de carga y otros requerimientos de diseño.

A. RUEDAS DE GINEBRA¹

1. *VENTAJAS DE LAS RUEDAS DE GINEBRA.* Las aplicaciones en las cuales se pueden encontrar los mecanismos de Ginebra varían desde aquellas que se usan en instrumentos de precisión, hasta aquellos usados en herramientas de maquinaria como los contadores en transporte de ejes que pueden pesar varias toneladas.

El mecanismo de Ginebra mantiene buen control de su carga en todo momento. Esto es posible por la utilización de superficies de sincronización para mantener la salida en su lugar durante los períodos de reposo.

2. *DESVENTAJAS DE LAS RUEDAS DE GINEBRA.* El mecanismo de Ginebra no es un mecanismo versátil. Puede ser usado para producir no menos de tres períodos de reposo y usualmente no más de 18 de estos períodos por revolución del eje de salida.

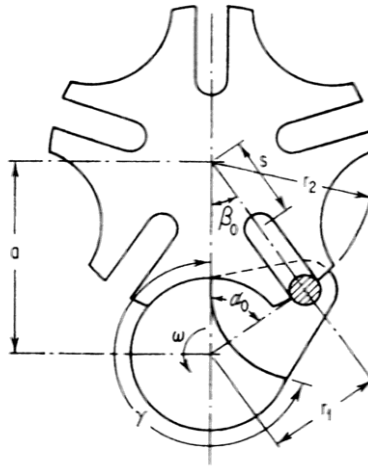
La proporción de períodos de reposo con respecto al período de movimiento también se establece una vez que el número de reposos por revolución se han seleccionado. Además, todas las curvas de aceleración empiezan y terminan con una aceleración y desaceleración finita.

3. *TIPOS DE RUEDAS DE GINEBRA.* Existen tres tipos de mecanismos de Ginebra:

- a. Externos – los más utilizados.

¹ *Mechanisms for Intermittent Motion* (Bickford, 1972)

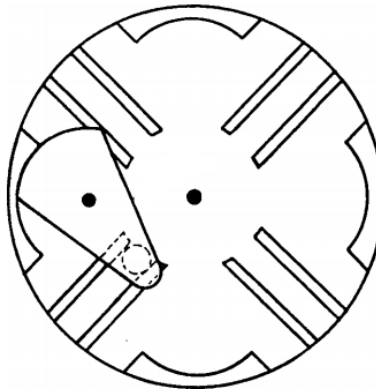
Ilustración 1: Mecanismo de Ginebra externo



(Bickford, 1972)

- b. Internos – que son también bastante comunes.

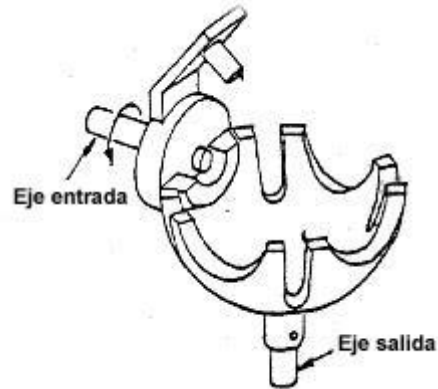
Ilustración 2: Mecanismo de Ginebra interno



(Bickford, 1972)

- c. Esféricos – que son poco utilizados.

Ilustración 3: Mecanismo de Ginebra esféricos.



(Bickford, 1972)

Los mecanismos de Ginebra también se utilizan combinados con una gran variedad de otros mecanismos, tales como mecanismos de cuatro barras, combinaciones de embragues y freno, engranes no circulares, etcétera para modificar las curvas de movimiento y proporciones de reposos y movimiento obtenidos por un mecanismo de Ginebra puro.

4. *CURVAS DE MOVIMIENTOS.* Las curvas de los mecanismos de Ginebra, tanto externos como internos, varían drásticamente. Algunas características generales sobre estas curvas son las siguientes:

- a. Para un mecanismo de Ginebra externo, el período de reposo siempre excede el período de movimiento.
- b. Para un mecanismo de Ginebra externo, el período de reposo siempre es más largo que el tiempo requerido para un movimiento de 180 grados de movimiento del elemento impulsor.
- c. Para un mecanismo de Ginebra interno, el período de movimiento siempre excede el período de reposo.
- d. Para un mecanismo de Ginebra interno, el período de reposo es siempre más corto que el tiempo requerido para 180 grados de entrada.
- e. Para un mecanismo de Ginebra esférico, el período de reposo y el período de movimiento es el mismo y es igual al tiempo requerido para exactamente 180 grados de entrada.

- f. La magnitud de la aceleración y desaceleración máxima, velocidad, etcétera, obtenidos con un mecanismo de Ginebra, es una función del número de ranuras o reposos. Esto es aplicable para todos los tipos.

A medida que la proporción entre el diámetro de la rueda de Ginebra y el diámetro del elemento impulsor aumenta (más ranuras o períodos de reposo por revolución de la salida), la aceleración y velocidad máxima decrecen para una velocidad dada del impulsor.

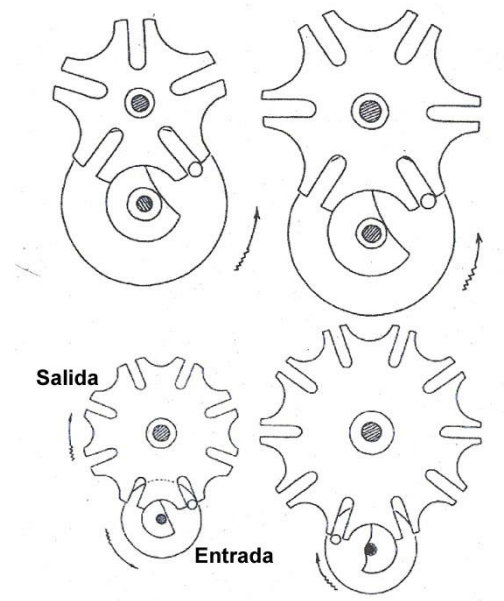
5. *GENERALIDADES.* En un mecanismo de Ginebra bien diseñado, el elemento impulsor entrará a las ranuras de la rueda de salida en un arco que es tangente a la línea de centro de la ranura. Si la dirección del movimiento del rodillo impulsor se desvía de la línea central, puede ocurrir impacto.

En la práctica, por supuesto, una velocidad inicial podría significar un impacto relativamente pequeño y no causaría problemas. Si la máquina es operada a altas velocidades, sin embargo, o bajo cargas pesadas, o con conexiones elásticas entre las partes, incluso un pequeño y súbito cambio en velocidad puede causar impactos severos, esfuerzos, vibraciones, movimientos perdidos, interferencia, etcétera.

Además, un mecanismo de Ginebra a altas velocidades o cargado puede tener dificultades si el rodillo impulsor no posee un ajuste adecuado con las ranuras del elemento de salida.

Para mecanismos de Ginebra externos, la proporción entre el diámetro del elemento impulsor y el diámetro de la rueda decrece a medida que el número de ranuras aumenta. Note también que el ángulo entre ranuras también disminuye como se muestra en la siguiente figura.

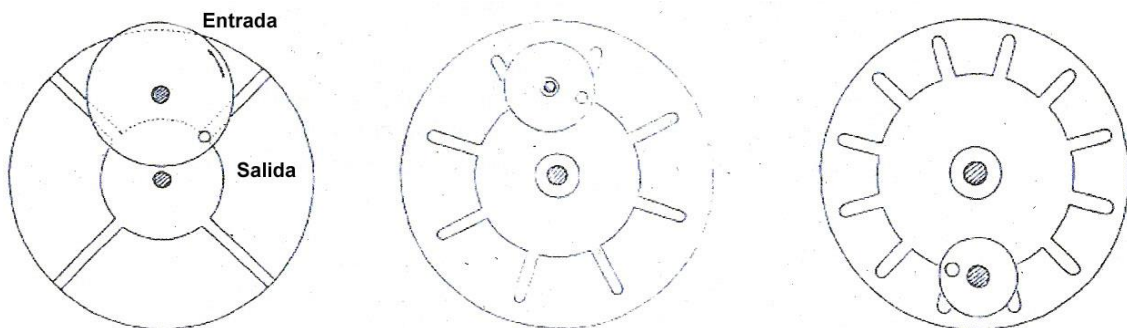
Ilustración 4: Variaciones con relación al número o de ranuras en mecanismos externos



(Bickford, 1972)

Para mecanismos de Ginebra internos, la relación del diámetro del elemento impulsor con el diámetro del volante impulsado también se reduce a medida que el número de ranuras incrementa.

Ilustración 5: Variaciones con relación al número de ranuras en mecanismos internos

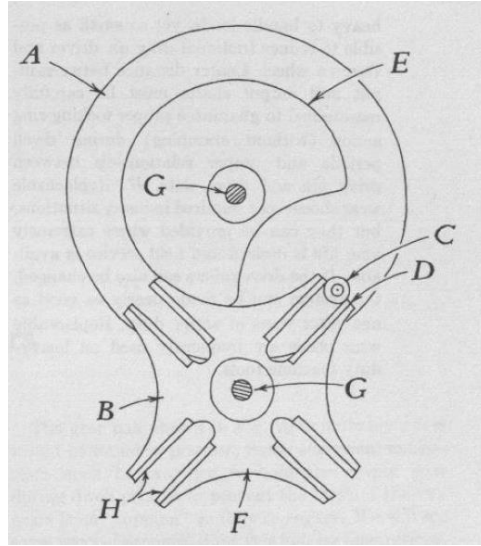


(Bickford, 1972)

También, el elemento impulsor debe ser montado en un eje en voladizo, mientras que en un mecanismo externo, los ejes de entrada y salida podrían estar montados de forma más cómoda.

6. *ANATOMÍA DE UN MECANISMO DE GINEBRA*. El diseñador debe de estar completamente familiarizado con la anatomía de un mecanismo de Ginebra convencional y la función de sus partes.

Ilustración 6: Anatomía de un mecanismo de Ginebra



(Bickford, 1972)

- A. Elemento impulsor – rota continuamente.
- B. Rueda de Ginebra – elemento de salida. Experimenta una aceleración máxima de aproximadamente 5 radianes/segundo² por cada revolución por minuto de la entrada.
- C. Rodillo impulsor o pasador – acero endurecido o equivalente y buen ajuste en las ranuras impulsoras de la rueda de Ginebra.
- D. Entrada de ranura – prismática sin chaflán. En los mejores diseños, los errores de alineación se eliminan por un acople apropiado entre *E* y *F*.
- E. Seguro de posición en el impulsor – duro, pulido y liso. Usado para sostener el elemento impulsor durante los períodos de reposo. Debe tener buen ajuste con *F* para garantizar la localización apropiada de la ranura de impulso contra el rodillo impulsor impulsora al inicio del movimiento.
- F. Superficies de sincronía – Lo indicado en el inciso *E* aplican aquí también.
- G. Rodamientos – Deben ser suficientemente fuertes para soportar las cargas, pero tan pequeños como sea posible para reducir la fricción en el elemento impulsor y la rueda de Ginebra. La distancia de centros entre los ejes de entrada y salida se deben de mantener cuidadosamente para garantizar la acción apropiada sin interferencia

durante los períodos de reposo y la relación apropiada entre el elemento impulsor y las ranuras.

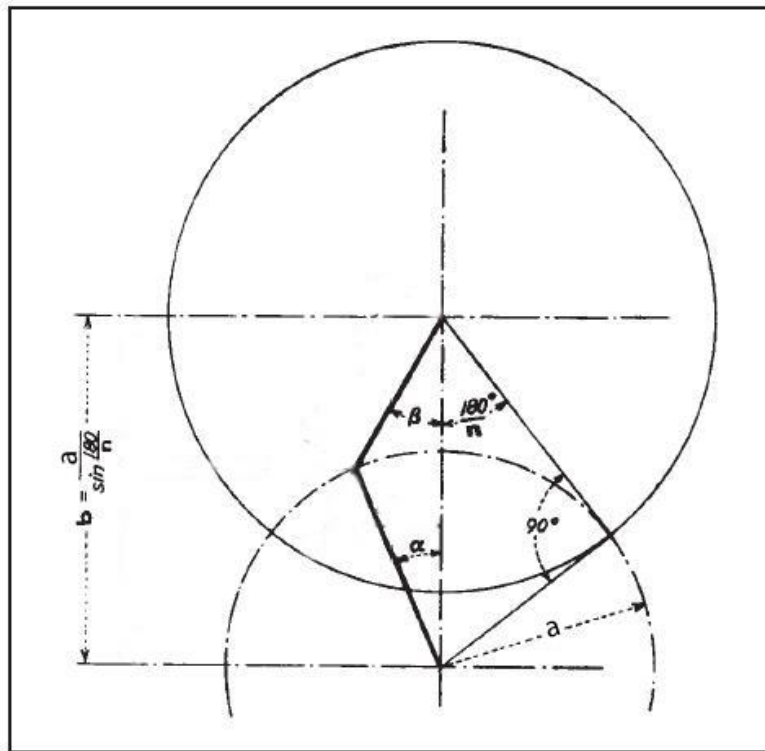
- H. Zapatas reemplazables – no son requeridas en muchas situaciones, pero pueden ser provistas cuando se desea una vida útil larga y se puede realizar servicio de forma adecuada.

7. *NOMENCLATURA DE UN MECANISMO DE GINEBRA.* Previo a diseñar el mecanismo, se presentará la nomenclatura utilizada. Dicha nomenclatura se muestra en la Ilustración 7 e Ilustración 8 en donde²:

- a = radio de la manivela del miembro impulsor
- n = número de ranuras
- d_r = diámetro del pasador
- p = velocidad constante de la manivela impulsora en rpm.
- α = posición angular de la manivela
- β = posición angular de la rueda de Ginebra

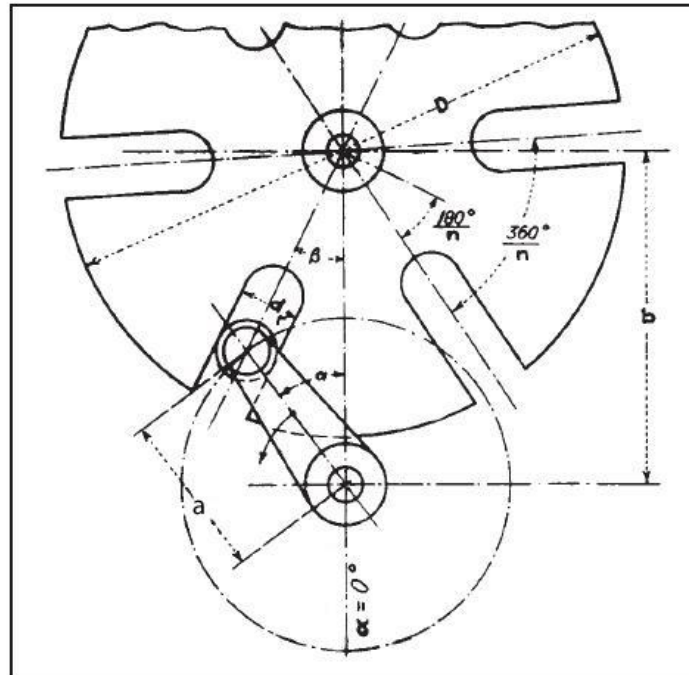
² *Mechanisms & Mechanical Devices Sourcebook* (N.C., 2001)

Ilustración 7: Esquema básico de un mecanismo de Ginebra externo



(N.C., 2001)

Ilustración 8: Esquema de una rueda de Ginebra de 6 ranuras.



(N.C., 2001)

El procedimiento para el diseño de uno de estos mecanismos se puede basar en el tamaño de la manivela, número de ranuras necesarias, velocidad de rotación y del elemento impulsor.

Primero, se debe calcular el módulo de diseño:

$$m = \frac{1}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \quad \text{Ec. (1)}$$

Con este valor encontrado, se puede encontrar la distancia entre centros de ambos miembros (b)

$$b = a \cdot m \quad \text{Ec. (2)}$$

Una vez encontrado este valor, se puede calcular el diámetro del miembro impulsado (rueda de Ginebra) D con la siguiente expresión:

$$D = 2 \sqrt{\frac{d_r^2}{4} + a^2 \cot^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \quad \text{Ec. (3)}$$

La velocidad angular constante de la manivela impulsora (ω) en radianes por segundo puede ser calculada con la siguiente ecuación:

$$\omega = \frac{p\pi}{30} \quad \text{Ec. (4)}$$

Luego, siendo α la posición angular de la manivela impulsora en cualquier momento se puede calcular el desplazamiento angular β del miembro impulsado correspondiente al ángulo α de la siguiente forma:

$$\cos(\beta) = \frac{m - \cos(\alpha)}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cdot \cos(\alpha)}} \quad \text{Ec. (5)}$$

Al derivar la expresión para β , se puede encontrar la velocidad angular de la rueda de Ginebra:

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega \left(\frac{m \cdot \cos(\alpha) - 1}{1 + m^2 - 2m \cdot \cos(\alpha)} \right) \quad \text{Ec. (6)}$$

Y la aceleración angular de la misma:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \omega^2 \left(\frac{m \cdot \sin(\alpha) \cdot (1 - m^2)}{(1 + m^2 - 2m \cdot \cos(\alpha))^2} \right) \quad \text{Ec. (7)}$$

La aceleración angular máxima ocurre cuando

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1 + m^2}{4m}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1 + m^2}{4m}\right) \quad \text{Ec. (8)}$$

Y la velocidad angular máxima ($\frac{d\beta}{dt_m}$) de la rueda de Ginebra ocurre cuando $\alpha(t) = 0^\circ$ y tiene una magnitud en radianes por segundo de

$$\frac{d\beta}{dt_m} = \frac{\omega}{m - 1} \quad \text{Ec. (9)}$$

B. LÍMITES Y AJUSTES

En diseño mecánico, el diseñador tiene libertad para adoptar cualquier configuración geométrica de ajuste para ejes y agujeros que garantice la función propuesta (Budynas & Nisbett, 2008). Gracias a las observaciones, existen normas internacionales que se pueden seguir para estandarizar esto. En Estados Unidos existen dos normas de límites y ajustes: una se basa en unidades del sistema inglés (ANSI B4.1-1967 R2009) y la otra en unidades del

sistema métrico (ANSI B4.2-1978 R2009). Las normas difieren en la nomenclatura, definiciones y organización.

Al utilizar las normas, ANSI B4.1-1967 (R2009) y ANSI B4.2-1978 (R2009) se pueden determinar los ajustes y tolerancias adecuados para los ejes y agujeros que deben ser utilizados en el proyecto.

C. DISEÑO DE EJES.

Para diseñar los ejes, se utilizó la ecuación de Marin como parámetro de diseño principal. La ecuación de Marin utilizada en el proyecto es la siguiente:

$$S_e = k_a k_b k_c k_e S_e' \quad \text{Ec. (10)}$$

Donde:

- k_a = Factor de superficie
- k_c = Factor de carga axial
- k_e = Factor de confiabilidad
- S_e' = Límite de resistencia a la fatiga del material.
- S_e = Límite de resistencia a la fatiga en la ubicación crítica de una parte de máquina

1. *FACTOR DE SUPERFICIE.* El factor de superficie se define de la siguiente forma:

$$k_a = a S_{ut}^b \quad \text{Ec. (11)}$$

Donde S_{ut} es la resistencia a la tensión y los valores para a y b se encuentran según los siguientes criterios:

Tabla 1 Parámetros en el factor de la condición superficial de Marin

Acabado Superficial	Factor a		Exponente b
	$S_{ut}, kpsi$	S_{ut}, MPa	
Esmerilado	1.34	1.58	-0.085
Maquinado o laminado en frío	2.70	4.51	-0.265
Laminado en caliente	14.4	57.7	-0.718
Como sale de la forja	39.9	272	-0.995

(Budynas & Nisbett, 2008)

2. *FACTOR DE TAMAÑO*. El factor de tamaño para flexión y torsión puede expresarse como:

$$k_b = \begin{cases} 0.879d^{-0.107} & 0.11 \leq d \leq 2 \text{ pulg} \\ 0.91d^{-0.157} & 2 < d \leq 10 \text{ pulg} \\ 1.24d^{-0.107} & 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm} \\ 1.51d^{-0.157} & 51 < d \leq 254 \text{ mm} \end{cases} \quad \text{Ec. (12)}$$

Cuando existe carga axial, no hay efecto de tamaño, por lo que

$$k_b = 1 \quad \text{Ec. (13)}$$

3. *FACTOR DE MODIFICACIÓN DE CARGA*. Los valores medios para este factor son los siguientes

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{Flexión} \\ 0.85 & \text{Axial} \\ 0.59 & \text{Torsión} \end{cases} \quad \text{Ec. (14)}$$

El último valor se utiliza sólo para la carga por fatiga torsional. Al ocurrir combinación de esfuerzos por flexión, $k_c = 1$ y la carga combinada se maneja usando el esfuerzo de von Mises. (Budynas & Nisbett, 2008). Se utilizó el valor de 0.59 para k_c dado que, de ocurrir un fallo en el diseño, el eje deberá ser capaz de soportar una carga torsional.

4. *FACTOR DE CONFIABILIDAD*. El factor de confiabilidad puede encontrarse según la siguiente tabla:

Tabla 2: Factores de confiabilidad

Confiabilidad, %	Factor de confiabilidad k_e
50	1.000
90	0.897
95	0.868
99	0.814
99.9	0.753
99.99	0.702
99.999	0.659
99.9999	0.620

(Budynas & Nisbett, 2008)

D. ACELERACIÓN DE CORIOLIS.

La aceleración de Coriolis es un efecto que se debe considerar en aplicaciones en las cuales se tiene un movimiento lineal en un sistema de referencia rotacional. El efecto se da debido a que existe una partícula que no se mantiene a una distancia constante del eje de rotación. De no considerarse esta aceleración, las fuerzas que afectan a esta partícula no se estarían analizando de forma correcta. El valor de la aceleración de Coriolis puede ser encontrada por la siguiente ecuación (Beer, Johnston, Jr., & Eisenberg, Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática, 2007):

$$a_C = 2\Omega \times v_{P/\mathcal{F}} \quad \text{Ec. (15)}$$

Donde

- \mathcal{P} = Partícula analizada.
- \mathcal{F} = Sistema de referencia en movimiento
- Ω = Velocidad angular del sistema.
- $v_{P/\mathcal{F}}$ = Velocidad de la partícula \mathcal{P} relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} .

Para encontrar la aceleración absoluta de dicha partícula en esta situación (a_P) se utiliza la siguiente expresión:

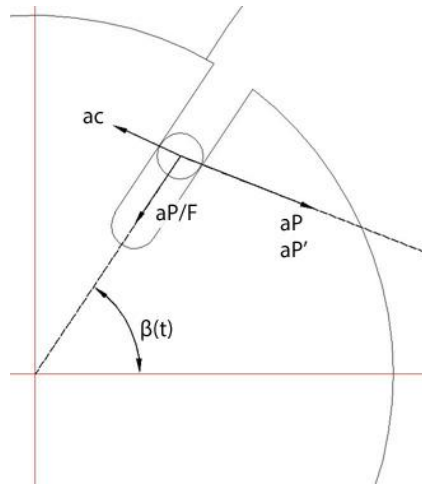
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P_I} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_C \quad \text{Ec. (16)}$$

Donde

- $\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración de la partícula debido al movimiento rotacional únicamente.
- $\mathbf{a}_{P/F}$ = aceleración de la partícula debido a la velocidad relativa.
- \mathbf{a}_C = aceleración de Coriolis

La siguiente imagen muestra las aceleraciones que experimenta la partícula

Ilustración 9: Aceleraciones de la partícula



El resultado de esta suma será la aceleración que será tomada en cuenta al momento de analizar las fuerzas en los elementos impulsores.

IV. ANTECEDENTES

Siendo los mecanismos de Ginebra un caso especial de las levas mecánicas, el dimensionamiento correcto es de vital importancia en la utilización de dichos elementos.

Los mecanismos de Ginebra aún son utilizados en algunas aplicaciones sencillas, tales como molinetes para el acceso a ciertas áreas, o para poder tener una medida de ciertos elementos, pero ya lejos quedaron sus apariciones en aplicaciones mecánicas primordiales, tales como proyectores de películas o avances de cámaras análogas debido a que la implementación de la electrónica sustituyó su utilización.

Además, debido a la naturaleza de los mecanismos de Ginebra, si no se toma en cuenta características como la aceleración de Coriolis, se pueden tener repercusiones en el diseño de los elementos impulsores.

V. DISEÑO

A. PARÁMETROS DEL DISEÑO

Para poder diseñar correctamente los elementos, se debe tomar en cuenta lo expuesto en el marco teórico sobre el número mínimo y máximo de ranuras para un diseño de mecanismo de Ginebra correcto. Como se explica en el Marco Teórico, cualquier rueda de Ginebra no puede tener menos de tres ranuras ni más de dieciocho ranuras.

Otro de los puntos a tener presente es con relación a las dimensiones máximas, las cuales no deben exceder el objetivo de 1.5 m, medida que permite un diseño maquinable y económico.

Se puede empezar con un diseño netamente geométrico y luego se pueden realizar análisis de materiales para encontrar el más apto para la aplicación.

B. ESPECIFICACIONES DE DESEMPEÑO

El reloj debe ser capaz de poder trabajar sin problemas y con una variación máxima de 5 minutos de diferencia con respecto a un reloj de referencia con la hora oficial guatemalteca por día.

C. ESPECIFICACIONES DE DISEÑO

1. *DISEÑO GEOMÉTRICO*. El primer punto por definir es la cuenta de los minutos. El iniciar con el paso de tiempo indicado no quiere decir que los segundos se estén ignorando. Sin embargo, debido a la precisión que se busca registrar en el diseño, no involucra la medida de segundos.

Utilizando una entrada al mecanismo de 1 RPM, y tomando en cuenta que no se puede tener una rueda de más de 18 ranuras o menos de 3 ranuras, el siguiente paso es encontrar una relación de factores que al multiplicarse tengan como producto 60 con la finalidad de poder llevar una correcta cuenta de los minutos que existen en una hora. A continuación, se presenta una tabla con los factores enteros cuyo producto sea 60.

Tabla 3: Factores enteros de 60

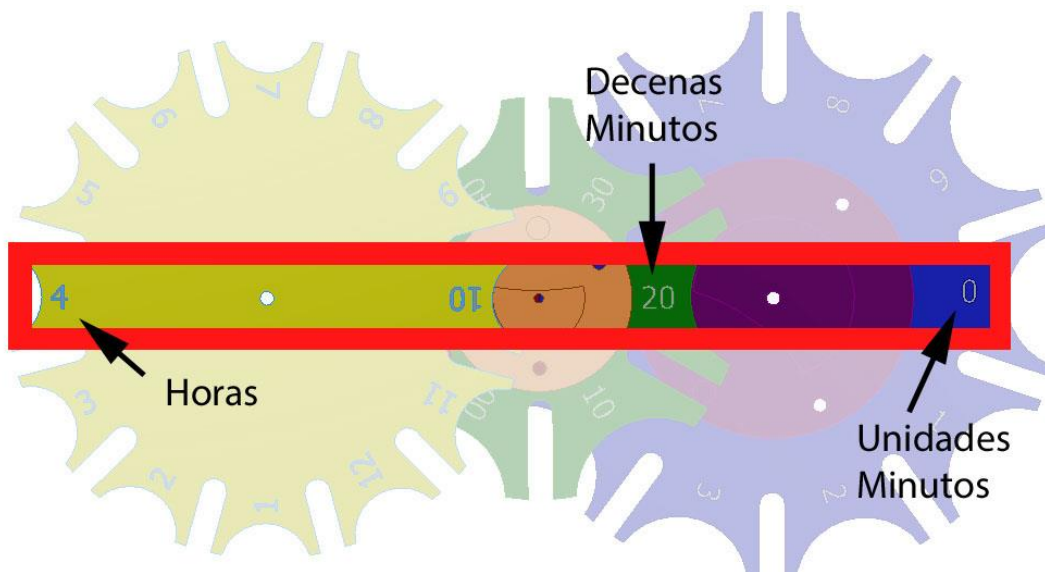
Factor 1	60	30	20	15	12	10
Factor 2	1	2	3	4	5	6

Como se puede observar, las primeras tres combinaciones de factores (sombreadas en tono gris) no pueden ser utilizadas debido a que al menos uno de los factores no cumple con las condiciones mínimas o máximas de las ranuras en una rueda de Ginebra. Sin embargo, las últimas tres combinaciones (sin sombra) pueden ser utilizadas.

Para poder diseñar los conjuntos de piezas para la cuenta de los minutos se escoge la última opción, un elemento de 10 ranuras que contará las unidades de minutos y otro de 6 ranuras que será el encargado para las decenas de minutos. La razón detrás de este razonamiento es para poder indicar de forma directa los minutos del 0 al 9 en las unidades y luego la posición de las decenas del 0 al 5.

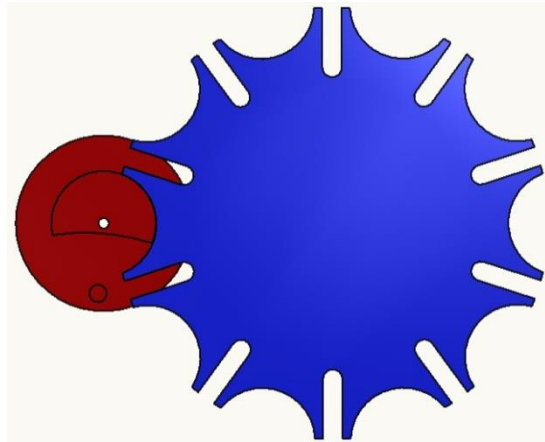
a. Configuración del reloj: Previo a diseñar cada uno de los conjuntos, se debe pensar en una organización que permita leer la hora. Para hacerlo, se propone organizarlos de tal forma que se pueda leer de izquierda a derecha como se haría en un reloj cotidiano. Esto es que el extremo más izquierdo del volante de las horas dará el valor de la hora, el valor más derecho de la rueda de las unidades de minutos dará la cuenta de minutos. Para las decenas de minutos se lee de igual manera que las unidades de minutos. A continuación, se muestran un ejemplo de la indicación para las 4:20.

Ilustración 10: Muestra de lectura de la hora



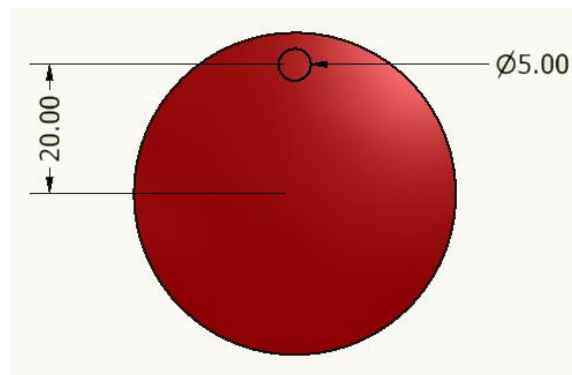
b. Cuenta de Unidades de Minutos

Ilustración 11: Modelo de Cuenta de Unidades de Minutos



1) *Manivela:* El primer paso será dimensionar la manivela que será utilizada para movilizar la rueda de Ginebra. Se escogen dimensiones de prueba para un radio de miembro impulsor (a) de 20 mm y un diámetro de pasador (d_r) de 5 mm.

Ilustración 12: Modelo de la manivela



2) *Unidades de minutos:* Al utilizar las ecuaciones Ec. (1) a Ec. (3), se puede dimensionar el elemento. Dichas ecuaciones se reproducen a continuación.

$$m = \frac{1}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

$$b = a \cdot m$$

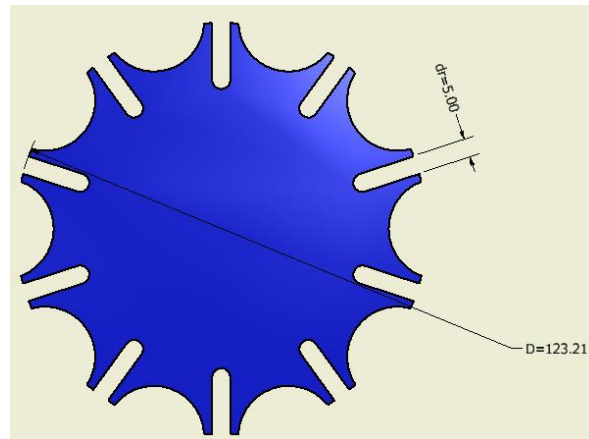
$$D = 2 \sqrt{\frac{d_r^2}{4} + a^2 \cot^2 \left(\frac{180}{n} \right)}$$

A continuación, se presenta una tabla con los valores utilizados para el diseño de la rueda de unidades de minutos:

Tabla 4: Dimensiones de la rueda de Ginebra unidades de minuto teóricos.

Radio del miembro impulsor (a) en mm	20.00
Número de ranuras (n)	10.00
Diámetro del pasador (d_r) en mm	5.00
$180^\circ/n$ en radianes	0.31
Módulo (m)	3.24
Distancia entre centros (b) en mm	64.72
Diámetro del miembro impulsado (D) en mm	123.21

Ilustración 13: Modelo de unidades de minutos



De estos valores se puede determinar que la distancia entre centros (b) y el diámetro del miembro impulsado (D) deberán ser modificados para que se obtengan medidas que sean maquinadas con una precisión adecuada y no sean costosas. Además, esto nos permite compensar cualquier error que pueda ocurrir en el momento de la manufactura. De esta forma, se escoge una distancia entre centros de 65.00 mm y 122.75 mm para el Diámetro del miembro

impulsado. A continuación, se presenta una tabla con la comparación de ambos valores y la variación en porcentaje de ambos.

Tabla 5: Dimensiones de la rueda de Ginebra unidades de minuto seleccionados.

	Teórico	Seleccionado	% Diferencia
Distancia entre centros (en mm)	64.72	65.00	0.43%
Diámetro del miembro impulsado (en mm)	123.21	122.75	0.37%

El siguiente paso será encontrar cual es la dimensión de las ranuras en el miembro impulsado. Llamaremos Distancia Libre (DL) a la diferencia que resulta de la distancia entre centros y el radio de la manivela impulsora.

$$DL = b - a \quad \text{Ec. (17)}$$

$$DL = (65.00 \text{ mm}) - (20 \text{ mm}) = 45.00 \text{ mm}$$

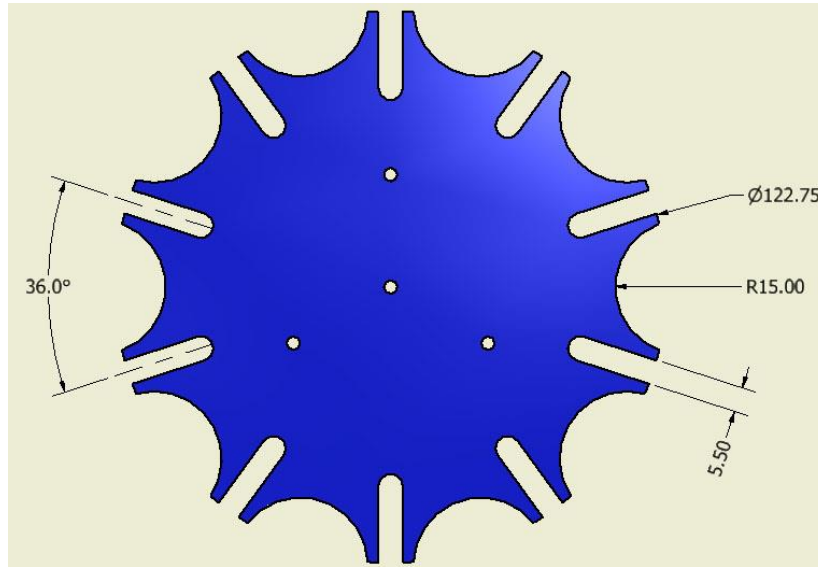
Una vez que se ha encontrado la Distancia Libre, se puede encontrar la longitud de las ranuras (R) al restar al radio del elemento impulsado (rueda de Ginebra) la Distancia Libre.

$$R = \frac{D}{2} - DL \quad \text{Ec. (18)}$$

$$R = \frac{122.75 \text{ mm}}{2} - (45.00 \text{ mm}) = 16.38 \text{ mm}$$

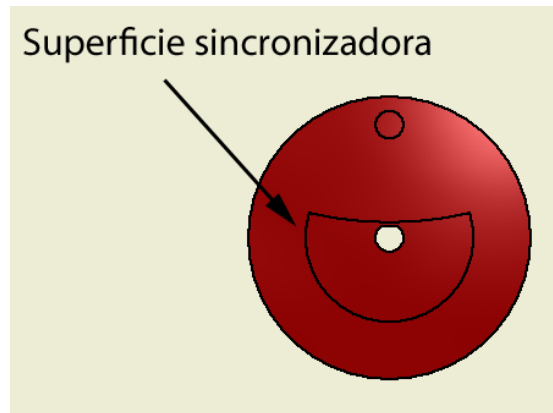
Se utilizará una distancia de ranuras de 17 mm. La razón es para minimizar la ocurrencia de impacto que pueda existir entre el pasador y el cuerpo de la rueda de Ginebra.

Ilustración 14: Modelo de la rueda de Ginebra de unidades de minutos dimensionado



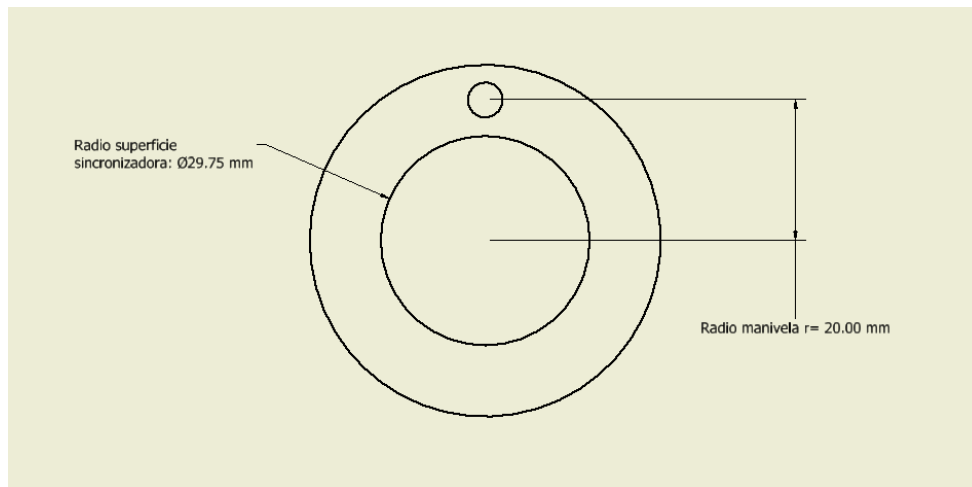
3) *Superficie sincronizadora*: El siguiente punto será encontrar las dimensiones de la superficie sincronizadora que va montada en el cuerpo de la manivela. La superficie sincronizadora se muestra en la Ilustración 15

Ilustración 15: Superficie sincronizadora



Para hacerlo, se elige un diámetro menor al de la manivela, pero que no afecte la forma como es fijada la pieza. Esto se puede visualizar en la Ilustración 16

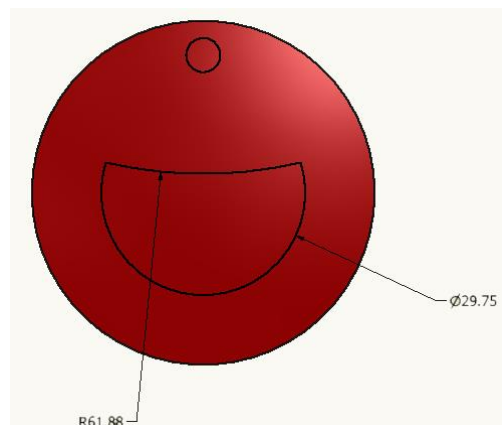
Ilustración 16: Radio superficie sincronizadora



Se escoge un diámetro concéntrico de 30 mm para realizar el corte en el mecanismo de Ginebra para el mismo y un diámetro 0.25 mm menor para el sincronizador, con lo que se utiliza un diámetro efectivo para el sincronizador de 29.75.

Acto seguido se debe encontrar la curvatura de corte del sincronizador para que pueda deslizarse sin impedimentos la rueda de Ginebra.

Ilustración 17: Modelo de superficie sincronizadora



El arco se coloca a un radio igual al de la distancia entre centros del Círculo de Ginebra para asegurar la óptima colocación. Esta será descrita como la Distancia curvatura de sincronización.

Para la manivela de entrada, se presentan sus dimensiones a continuación:

Tabla 6: Valores para sincronizador

	Valor teórico, mm	Valor seleccionado, mm	% diferencia
Diámetro de circunferencia	30.00	29.75	0.008
Distancia curvatura de sincronización	65.00	64.75	0.004
Radio de curvatura de sincronización	61.60	61.88	0.005
Radio en la rueda de Ginebra	30.00	30.00	0.000

Una vez que estos valores han sido obtenidos, se tiene el primer juego de elementos para el mecanismo de Ginebra. A continuación, se muestra un modelo de cada elemento dibujado en Autodesk Inventor®. (Los modelos que se presentan no están a escala y las unidades son en mm)

Ilustración 18: modelo de Manivela de entrada

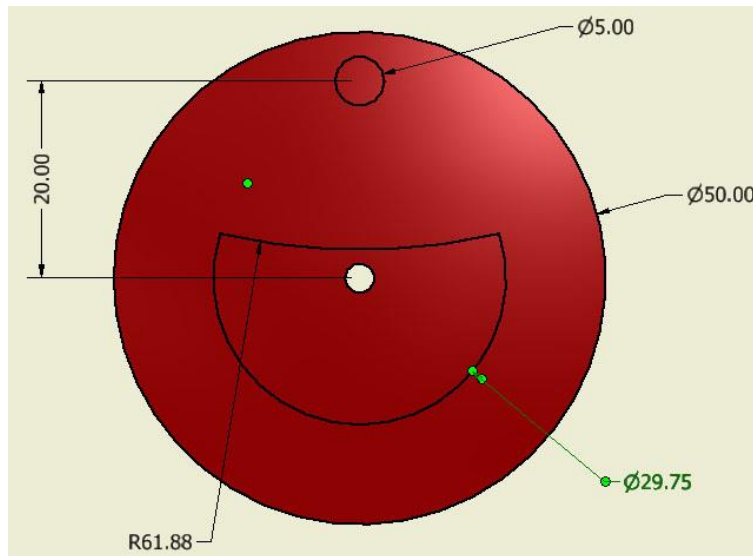
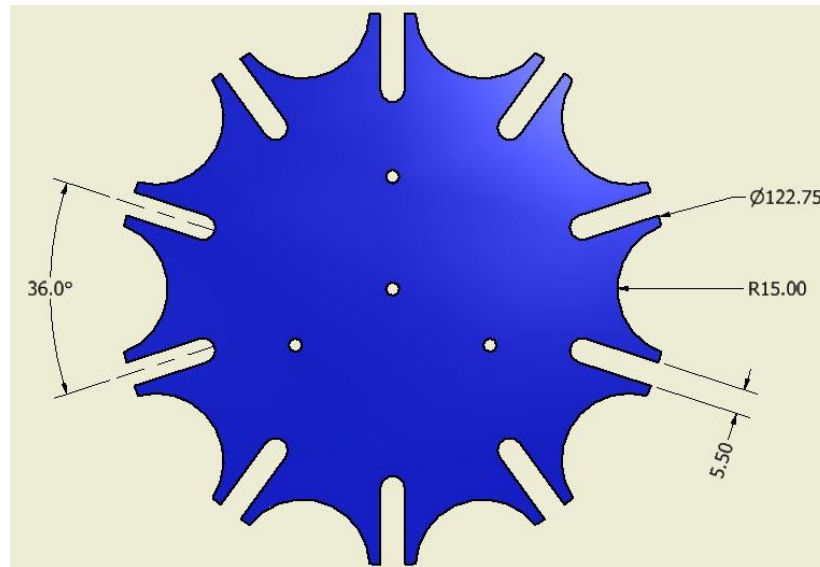
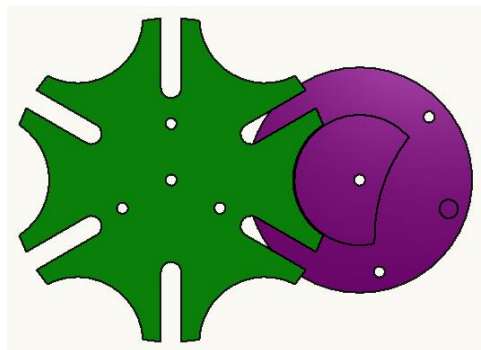


Ilustración 19: Modelo de la rueda de Ginebra de unidades de minutos



c. Cuenta de decenas de minutos

Ilustración 20: Modelo conjunto de cuenta de decenas de minutos



Ya obtenido el conjunto de Cuenta de Unidades de Minutos, y previo a diseñar el conjunto de Cuenta de Decenas de Minutos, se tendrá que encontrar cómo será la interacción entre dichos conjuntos. La interacción se puede lograr de dos formas:

1. Un pasador en uno de los lóbulos del elemento que cuente los minutos, lo cual nos daría una manivela mayor y un elemento impulsado mayor.
2. Un pasador en el cuerpo del elemento, lo que otorgaría una manivela menor y por lo tanto un elemento impulsado de menor dimensión.

De estas opciones se prefiere la segunda opción ya que reduce las dimensiones generales del proyecto; pero esta decisión también conlleva a una dificultad adicional, ya que el colocar el pasador directamente en la rueda puede ser incómodo.

La solución para poder continuar usando el pasador disponible es incluir en el cuerpo de la rueda un nuevo elemento que sea una nueva manivela, la cual será de las dimensiones deseadas y permite corregir un error de ajuste debido al desgaste de las ranuras o del pasador de forma independiente. Esto también asegura que la velocidad angular del elemento de los minutos sea replicada automáticamente para accionar la rueda de Ginebra de decenas de minutos una vez cada 10 minutos. El nuevo elemento deberá fijarse de tal forma que no cause interferencia con los elementos subsecuentes.

Esta nueva manivela será similar a la manivela de entrada en sus dimensiones, salvo que deberá tener métodos de fijación.

Una vez definida la forma como se impulsará el conjunto de Cuenta de Decenas de Minutos, se aplica el mismo procedimiento utilizado anteriormente para dimensionar los elementos de dicho conjunto.

A continuación, se muestran las dimensiones de la manivela que impulsa la rueda de Ginebra para la cuenta de las decenas de minutos, y de la rueda misma. Dichos elementos conforman el conjunto de Cuenta de Decenas de Minutos, tomando en cuenta cada una de sus características nuevas, al igual que una ilustración de cada uno de los elementos.

Tabla 7: Dimensiones de la rueda de Ginebra decenas de minuto teóricos.

Radio del miembro impulsor (a) en mm	25.00
Número de ranuras (n)	6
Diámetro del Pasador (d_r) en mm	5.00
$180^\circ/n$	0.52
Módulo (m)	2
Distancia entre centros (b) en mm	50.00
Diámetro del miembro impulsado (D) en mm	86.75

Tabla 8: Dimensiones de la rueda de Ginebra decenas de minuto seleccionados

	Teórico	Seleccionado	% Diferencia
Distancia entre centros (mm)	50.00	50.00	0.00%
Diámetro del miembro impulsado (mm)	86.75	86.25	0.58%
Ranuras (mm)	18.37	18.50	0.69%
Diámetro de circunferencia (mm)	34.75	34.75	0.00%
Distancia curvatura de sincronización (mm)	50.00	50.00	0.00%
Radio de curvatura de sincronización (mm)	43.37	43.625	0.58%
Radio en la rueda de Ginebra (mm)	35.00	35.00	0.00

A continuación, se presentan modelos de los elementos que fueron diseñados.

Ilustración 21: Modelo manivela decenas de minutos

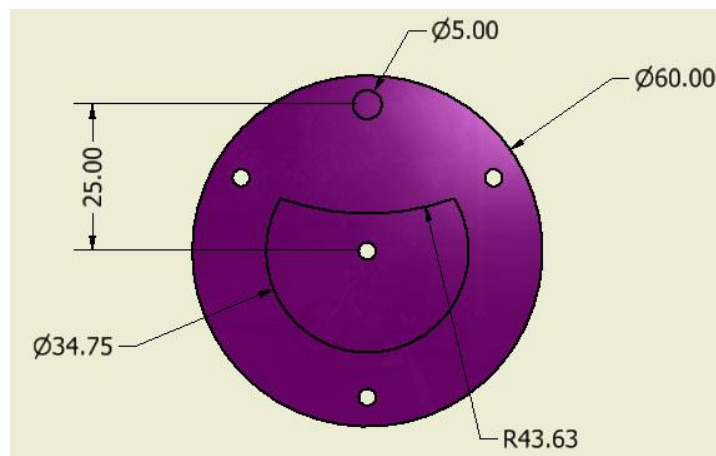
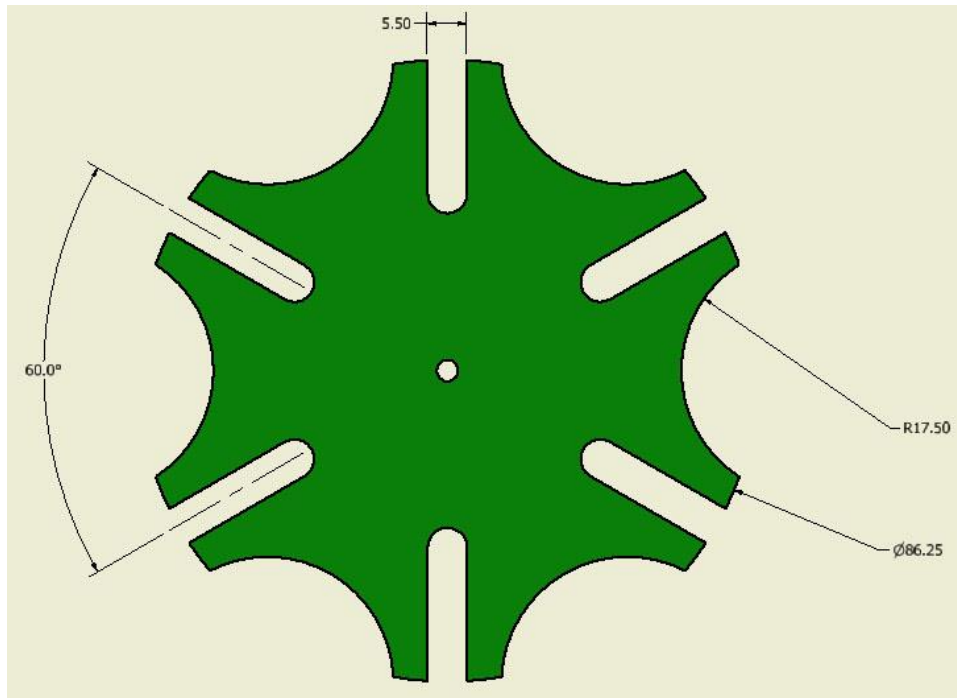
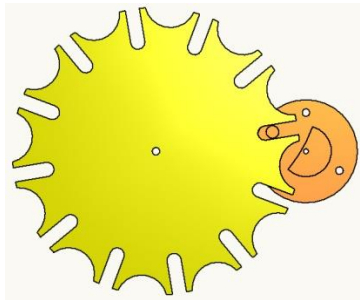


Ilustración 22: Modelo de la rueda de Ginebra de decenas de minutos



d. Cuenta de horas

Ilustración 23: Modelo de conjunto de cuenta de horas



Con los conjuntos anteriores dimensionados, se procede a diseñar el encargado de contar las horas. Utilizando un método similar a los dos anteriores, se encontraron las dimensiones para el elemento que indicará las horas. Una vez más, se utiliza una manivela adicional colocada en el cuerpo del elemento indicador de decenas de minutos para accionar la última rueda. A continuación, se presentan los valores utilizados para diseñar los elementos.

Tabla 9: Dimensiones de la rueda de Ginebra horas teóricos.

Radio del miembro impulsor (a) en mm.	15.00
Número de ranuras (n)	12
Diámetro del pasador (dr) en mm	5
$180^\circ/n$	0.26
Módulo (m)	3.86
Distancia entre centros (b) en mm	57.96
Diámetro del miembro impulsado (D) en mm	112.07

Tabla 10: Dimensiones de rueda de Ginebra de horas seleccionado

	Teórico	Seleccionado	% Diferencia
Distancia entre centros (mm)	57.96	58.00	0.08%
Diámetro del miembro impulsado (mm)	112.07	111.60	0.42%
Ranuras (mm)	13.08	13.10	0.15%
Diámetro de circunferencia (mm)	19.75	19.75	0.00%
Distancia curvatura de sincronización (mm)	57.75	58.00	0.43%
Radio de curvatura de sincronización (mm)	56.04	56.30	0.46%
Radio en la rueda de Ginebra (mm)	20.00	20.00	0.00%

Y al igual como los conjuntos anteriores, a continuación, se presenta un modelo de los elementos que se obtuvieron con estos valores.

Ilustración 24: Modelo de manivela de horas

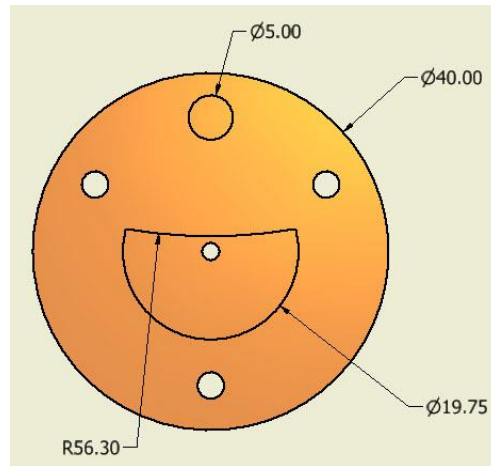
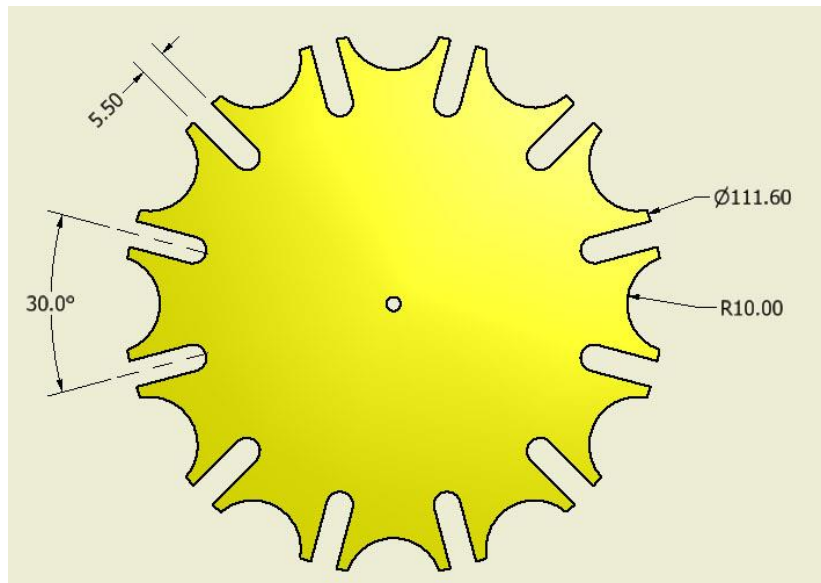


Ilustración 25: Modelo de la rueda de Ginebra de horas



2. *ANÁLISIS FÍSICO.* Una vez que se tiene el diseño geométrico deseado, se procede a encontrar el material adecuado para el proyecto.

a. Torque y Potencia Se encontrará a continuación la potencia necesaria para mover el sistema, para lo cual se requiere determinar la potencia según la siguiente ecuación:

$$P = T \cdot \omega$$

Ec. (19)

Donde

- T = Torque necesario en el sistema
- ω = Velocidad angular del sistema

La potencia mínima para accionar el sistema está dada por:

$$\mathcal{P}_t = (T \cdot \omega)_{max} \quad \text{Ec. (20)}$$

Donde el subíndice *max* corresponde a la mayor potencia necesaria para mover un conjunto individual de engranes de Ginebra.

Para encontrar el torque de cada conjunto se utilizó la siguiente ecuación con cada uno de ellos:

$$T = I \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} \quad \text{Ec. (21)}$$

Donde:

- I = Inercia del conjunto
- $\frac{d^2\beta}{dt^2}$ = Aceleración angular máxima de la rueda de Ginebra del conjunto

El primer paso es encontrar la inercia de cada segmento. En la .

Tabla 11 se muestran los resultados para el segmento de Unidades de Minutos. El método como se encontraron las inercias se detalla en el Anexo A: Cálculo de las Inercias.

Tabla 11: Inercias de unidades de minutos

Elemento	Inercia, (kg-mm ²)
Unidades de minutos	203.7095
Manivela decenas de minutos	11.1534
Total	214.8629

Una vez que se conoce esta cantidad, se puede encontrar la posición angular de la manivela en la cual la aceleración angular es máxima. Esto se puede encontrar utilizando Ec. (8) y despejar de la misma α . Dicha ecuación se reproduce a continuación.

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{1+m^2}{4m}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+m^2}{4m}\right)$$

Dado que la aceleración la experimenta el volante de unidades de minutos, se utiliza el valor m para este elemento.

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{1+m^2}{4m}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+m^2}{4m}\right) \\ \cos(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{1+(3.24)^2}{4(3.24)}\right)^2 + 2} - \left(\frac{1+(3.24)^2}{4(3.24)}\right) \\ &= 0.782704 \\ \alpha &= \cos^{-1}(0.782704) = \pm 38.4912^\circ\end{aligned}$$

Con este valor, se puede encontrar la aceleración al reemplazarlo en Ec. (7), pero dicha ecuación también requiere la velocidad angular constante de la manivela. Ésta se encuentra con Ec. (4).

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{p\pi}{30} \\ \omega &= \frac{(1 \text{ rpm})\pi}{30} = 0.10472 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Una vez que se encontró este valor, se pueden sustituir ambos valores en la ecuación de aceleración, tomando en cuenta que el ángulo está en grados y no en radianes:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\beta}{dt^2} &= \omega^2 \left(\frac{m \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot (1 - m^2)}{(1 + m^2 - 2m \cdot \cos(\alpha))^2} \right) \\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= (0.10472)^2 \left(\frac{(3.24) \text{sen}(-38.4912^\circ) \cdot (1 - (3.24)^2)}{(1 + (3.24)^2 - 2(3.24) \cdot \cos(-38.4912^\circ))^2} \right) \\ &= 0.005087 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\end{aligned}$$

Con los dos valores encontrados, se puede encontrar el torque que se requiere para movilizar ambas piezas.

$$\begin{aligned}T_1 &= I \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} = (214.8629 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2) \cdot \left(0.005087 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right) \\ &= 1.0930 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Al conocer este valor, se puede multiplicar por la velocidad angular de la manivela para encontrar la potencia necesaria para movilizar los elementos.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= T_1 \cdot \omega = (1.0930 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}) \left(0.10472 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \\ &= 114.7071 \times 10^{-9} \text{ W} \end{aligned}$$

A continuación, se presenta una tabla con los valores relevantes obtenidos:

Tabla 12: Valores obtenidos elementos de unidades de minutos.

Aceleración angular máxima (rad/s ²)	0.005098
Posición en la cual ocurre la aceleración angular máxima (grados)	38.4912
Torque necesario para mover los elementos (N-m)	1.09530×10^{-6}
Potencia necesaria para mover los elementos (W)	114.7071×10^{-9}

Mientras los valores obtenidos han sido probados como válidos, la aceleración y potencia presentada presenta un valor no razonable, por lo que se comprobó la veracidad de la aceleración al calcularla analíticamente.

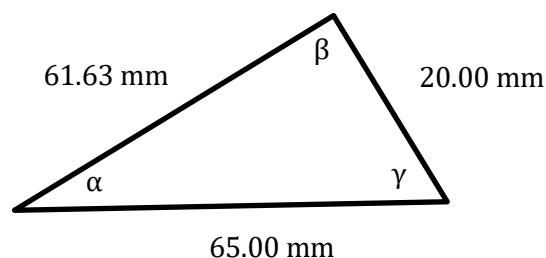
Para el análisis analítico, se decidió hacerlo con un cálculo clásico de aceleración, tomando en cuenta el efecto de la componente por el Efecto Coriolis. Lo primero a realizar fue el triángulo que se obtiene en el momento de la interacción entre la manivela y el elemento de unidades de minutos. Se conoce que la manivela girará a 1 RPM, y se conocen los radios de la manivela, del elemento de minutos y la distancia entre centros. Para facilidad, se reproducen a continuación:

Tabla 13: Datos conocidos

Velocidad angular manivela (rpm)	1.00
Radio manivela (mm)	20.00
Radio unidades de minuto (mm)	61.63
Distancia entre centros (mm)	65.00

Con estos datos, se obtiene un triángulo con las siguientes características (nótese que el dibujo no está a escala y es simplemente ilustrativo):

Ilustración 26: Triángulo de dimensiones



Con estos valores, se puede calcular el ángulo γ utilizando la ley de cosenos.

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \times \cos(\gamma)$$

$$\cos(\gamma) = \frac{r^2 - R^2 - l^2}{-2Rl} = \frac{(61.63)^2 - (20.00)^2 - (65.00)^2}{-2 * (20.00) * (65.00)} = 0.318215$$

$$\gamma = 71.45^\circ$$

Utilizando la misma mecánica, se encuentra el valor del ángulo α

$$\cos(\alpha) = \frac{R^2 - r^2 - l^2}{-2rl} = \frac{(20.00)^2 - (61.63)^2 - (65.00)^2}{-2 * (61.63) * (65.00)}$$

$$\alpha = 17.92^\circ$$

Con estos datos, se puede calcular el ángulo β

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - (71.45^\circ) - (17.92^\circ) = 90.63^\circ$$

Ya con esto, se puede empezar a realizar el análisis. Primero, se encuentra la velocidad del pasador con las características conocidas.

$$v_p = R\omega_p = (20.00 \text{ mm})(1 \text{ rpm}) = 0.002094 \frac{m}{s} \angle 198.56^\circ$$

A continuación, se realizó el triángulo de velocidades para dicho punto.

$$v_p = v_{p'} + v_{\frac{p}{s}}$$

Se conocen los ángulos de la velocidad como $\gamma = 71.45$ y $\alpha = 17.92$, por lo que el ángulo interior del triángulo γ' se calcula como

$$\gamma' = 90 - 71.45 - 17.92 = 0.63$$

Ahora se puede conocer la velocidad $v_{p'}$ que corresponde a la velocidad del pasador en el punto de estudio

$$v_{p'} = v_p * \sin(\gamma') = 0.002094 * \sin(0.63^\circ) = 0.000023 \frac{m}{s} \angle 287.92^\circ$$

Conociendo este dato, podemos encontrar la velocidad angular que tendrá el elemento de unidades de minuto en el punto de estudio.

$$\omega_s = \frac{v_{p'}}{r} = \left(0.0000023 \frac{m}{s}\right) * (61.66 \text{ mm}) = 0.000373 \frac{rad}{s}$$

Si bien se espera que el elemento de unidades de minuto tenga velocidad 0, el cálculo otorga una cantidad bastante baja como para que se considere 0 (el equivalente a 0.0036 rpm).

Lo siguiente es conocer la velocidad del pasador con respecto al elemento de unidades de minutos. Se denomina dicha cantidad por $v_{\frac{p}{s}}$.

$$v_{\frac{p}{s}} = v_p * \cos(\gamma') = 0.002094 * \cos(0.63^\circ) = 0.002094 \frac{m}{s} \angle 197.92^\circ$$

Con los datos antes obtenidos, se puede entonces encontrar la aceleración que tendrá el elemento de unidades de minutos con la ecuación de aceleración

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{p'} + \mathbf{a}_{\frac{p}{s}} + \mathbf{a}_c$$

El término más fácil de obtener es el de a_p .

$$a_p = R\omega_D^2 = (20.00 \text{ mm})(1 \text{ rpm})^2 = 0.000219 \frac{m}{s^2} \angle -71.45^\circ$$

Luego, podemos encontrar el término de $a_{p'}$ al descomponerlo en sus términos normal y tangencial

$$(a_{p'})_n = r\omega_s^2 = (61.63 \text{ mm}) \left(0.000373 \frac{rad}{s}\right)^2 = 8.527382 \times 10^{-9} \frac{m}{s^2} \angle 197.92^\circ$$

$$(a_{p'})_t = r\alpha_s = (61.63 \text{ mm})\alpha_s \angle n$$

Dado que no se conoce en qué sentido estará la parte tangencial, además de saber que está en línea con la parte normal, se dejará por el momento un ángulo aleatorio.

El siguiente término es el de la aceleración del pasador con respecto al elemento de unidades de minutos. De esto se sabe que conserva la línea del ángulo de $v_{\frac{p}{s}}$ antes descrito, pero se desconoce su magnitud, por lo que únicamente se dejará indicado el ángulo con el literal m .

$$\mathbf{a}_{\frac{p}{s}} = a_{p/s} \angle m$$

Por último, se calcula el término del efecto Coriolis.

$$a_c = 2\omega_s v_p = 2 * \left(0.000373 \frac{rad}{s}\right) \left(0.002094 \frac{m}{s}\right) = 0.000002 \frac{m}{s^2}$$

$$\mathbf{a}_c = 0.000002 \frac{m}{s^2} \angle 107.92^\circ$$

Al sustituir todos los términos antes descritos, y descomponiendo la ecuación en sus partes horizontales y verticales, se obtienen las siguientes ecuaciones

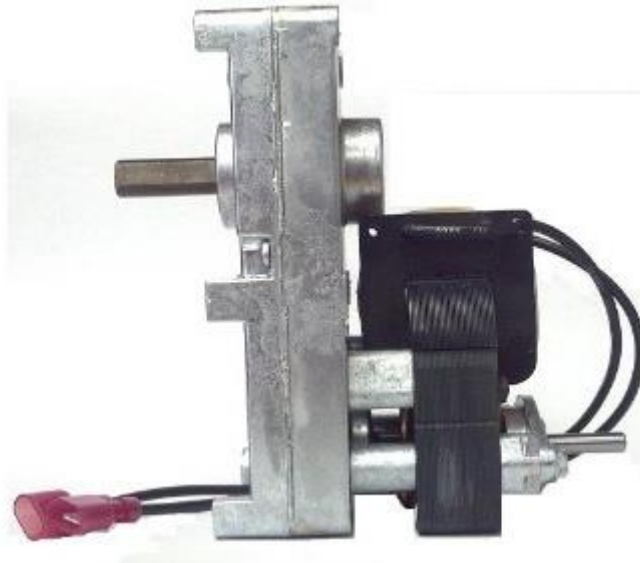
$$0.000076 \frac{m}{s^2} = (0.01896 m)\alpha_s + a_p \cos(17.92^\circ)$$

$$-0.000227 \frac{m}{s^2} = (-0.058636 m)\alpha_s + a_p \sin(17.92^\circ)$$

Resolviendo ambas ecuaciones, obtenemos que $\alpha_s = 0.004598 \text{ rad/s}^2$, por lo que se comprueba que la aceleración propuesta por la expresión antes descrita conserva su validez. Incluso, como parte del proceso de diseño, se prefiere esa expresión ya que nos otorga una potencia mayor.

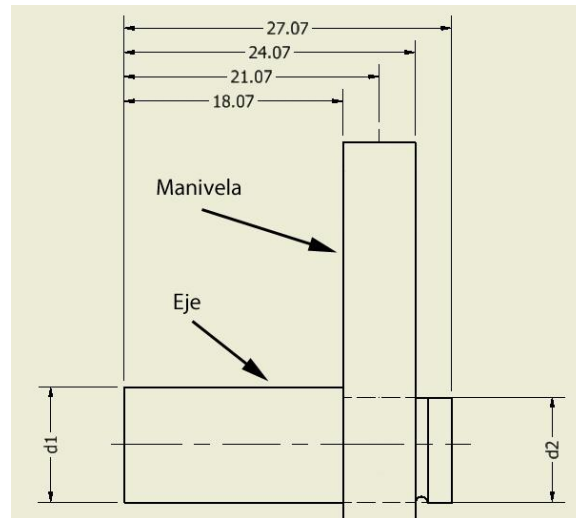
El siguiente punto por tratar será encontrar los efectos del motor sobre las piezas. Se encontró un motor cuya velocidad angular es de 1RPM. Una fotografía del mismo se presenta a continuación:

Ilustración 27: Motor encontrado



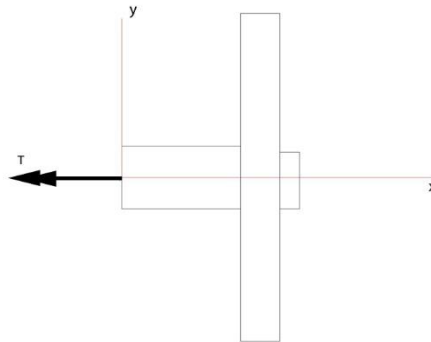
b. Eje Una vez encontrado el motor adecuado, se diseñó el eje que movilizará el sistema. A continuación, se presenta un dibujo de él. Las medidas mostradas están en milímetros:

Ilustración 28: Dibujo del eje motriz (medidas en milímetros)



Una vez que se tiene esta configuración, se puede construir un Diagrama de Fuerzas que demuestre las fuerzas y momentos que actúan sobre el eje.

Ilustración 29: Diagrama de cuerpo libre



3

Con este diagrama de fuerzas se puede armar el Diagrama de cuerpo libre del eje.

Se sabe que el esfuerzo de torsión (τ_{perm}) de un eje circular se puede encontrar por la siguiente ecuación (Gere, 2006):

$$\tau_{perm} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \text{Ec. (22)}$$

Donde T es el par, y d es el diámetro del eje.

³ Nomenclatura según (Gere, 2006)

Si de Ec. (20) se despeja d , se obtiene una ecuación útil para encontrar el diámetro mínimo del eje para un esfuerzo dado. Dicha expresión es

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau_{perm}}} \quad \text{Ec. (23)}$$

Si se utiliza el valor obtenido de α_c para encontrar el Torque a una potencia de 1 W, se obtienen los siguientes valores:

Tabla 14: Interpolación de valores para una potencia de 1 W

Ángulo de desplazamiento (grados)	Tiempo (s)	Velocidad Angular (rad/s)	Aceleración Angular (rad/s ²)	Inercia (kg-mm ²)	Torque (N-mm)	Potencia (W)
3.7686	0.0098	6.7117	684.8680	214.8600	147.1507	1.0000

Si se desea utilizar un eje de acero 1020 CD ($\tau_{perm} = 0.577 * S_{ut} = 0.577 * (470 \text{ MPa}) = 271.19 \text{ MPa}$ ⁴) se puede encontrar el diámetro mínimo si se utiliza el torque mencionado en Tabla 14 ($T = 147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}$). El resultado de aplicar Ec. (21) es

$$d = \sqrt[3]{\frac{16(147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm})}{\pi(271.19 \text{ MPa})}} = 1.4033 \text{ mm}$$

Con un diámetro tan pequeño, no se puede usar una cuña que sea maquinable de forma económica, por lo que se escogió un perfil distinto para el eje.

Se decidió usar un eje de sección cuadrada para transmitir el par a la manivela. Dicha sección cuadrada será base para encontrar una circunferencia circunscrita que proporcione el diámetro del eje necesario.

Para analizar el eje resultante, será necesario encontrar la dimensión mínima para una sección cuadrada que pueda soportar el esfuerzo de corte. Para una sección cuadrada de lados iguales, el esfuerzo de corte se encuentra por la siguiente ecuación (Beer, Johnston, Dewolf, & Mazurek, 2010):

$$\tau_{max} = \frac{T}{0.208a^3} \quad \text{Ec. (24)}$$

⁴ 1986 SAE Handbook, p. 2.15

Donde T es el par que se ejerce en el eje, y a es la dimensión de la arista.

Al despejar a de Ec. (22), se obtiene una expresión para la dimensión de la arista. La misma es la siguiente:

$$a = \sqrt[3]{\frac{T}{0.208 * \tau_{max}}} \quad \text{Ec. (25)}$$

Si se utilizan una vez más los valores de $T = 147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}$ y $\tau_{max} = 271.19 \text{ MPa}$, se obtiene la siguiente arista:

$$a = \sqrt[3]{\frac{147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}}{0.208(271.19 \text{ MPa})}} = 1.3766 \text{ mm}$$

Una vez obtenida esta arista, el diámetro del eje necesario se puede encontrar con la hipotenusa de la sección.

$$d = \sqrt{2a^2} = (1.3766 \text{ mm})\sqrt{2} = 1.9468 \text{ mm}$$

Utilizando los tamaños de ejes estándar propuestos por Shigley (Budynas & Nisbett, 2008), se escoge un diámetro de 1.8 mm. A este diámetro le corresponde una arista $a = 1.2728 \text{ mm}$. Una vez que se encontró la arista, se comprobó el esfuerzo en la sección utilizando Ec. (22).

$$\tau_d = \frac{147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}}{0.208(1.9468 \text{ mm})^3} = 95.88 \text{ MPa}$$

Con este valor, se puede encontrar el factor de seguridad del eje utilizando la siguiente ecuación:

$$n = \frac{\tau_{ut}}{\tau_d} \quad \text{Ec. (26)}$$

Donde τ_{ut} es el esfuerzo de fluencia del material. Al evaluar Ec. 24 con los valores obtenidos, se obtiene un factor de seguridad de

$$n = \frac{470 \text{ MPa}}{95.88 \text{ MPa}} = 4.90$$

Lo cual indica que el eje soportaría la carga torsional.

Lo siguiente que se dimensionó fue el hombro que localizará la manivela, y el esfuerzo por el cambio de sección en el mismo.

Para esto, se escogió una relación de diámetro de hombro (D) y diámetro de eje (d) igual a 1.2 ($\frac{D}{d} = 1.2$). Al despejar de esta relación el parámetro D , se obtiene que:

$$D = 1.2d = 1.2(1.8 \text{ mm}) = 2.16 \text{ mm}$$

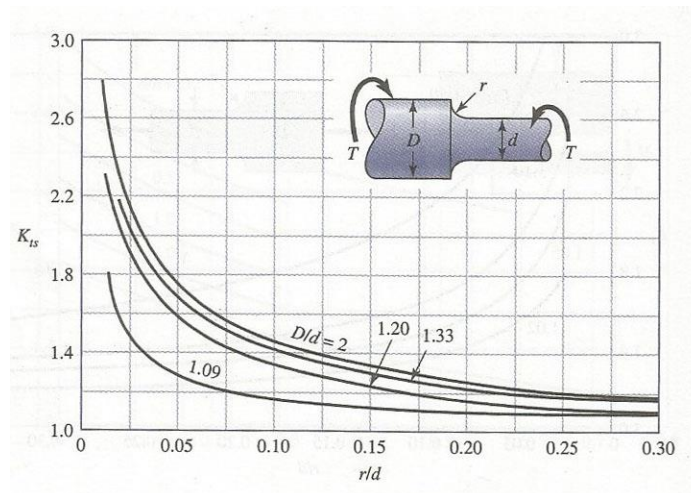
Utilizando los mismos catálogos de tamaños estándar utilizados anteriormente, se encuentra que el tamaño estándar más próximo es de 2.2 mm, por lo que se seleccionó este tamaño para el diámetro del hombro.

Una vez escogido el hombro, se puede calcular el tamaño del radio del filete en el cambio de sección. Se escogió una relación para el radio de $r = \frac{1}{10}d$, por lo que el valor del radio es de

$$r = \frac{1}{10}d = \frac{1}{10}(1.8 \text{ mm}) = 0.18 \text{ mm}$$

Con este valor, se puede encontrar el valor del factor teórico de concentración de esfuerzos para un eje redondo con filete en el hombro en torsión (K_{ts}) utilizando la siguiente gráfica:

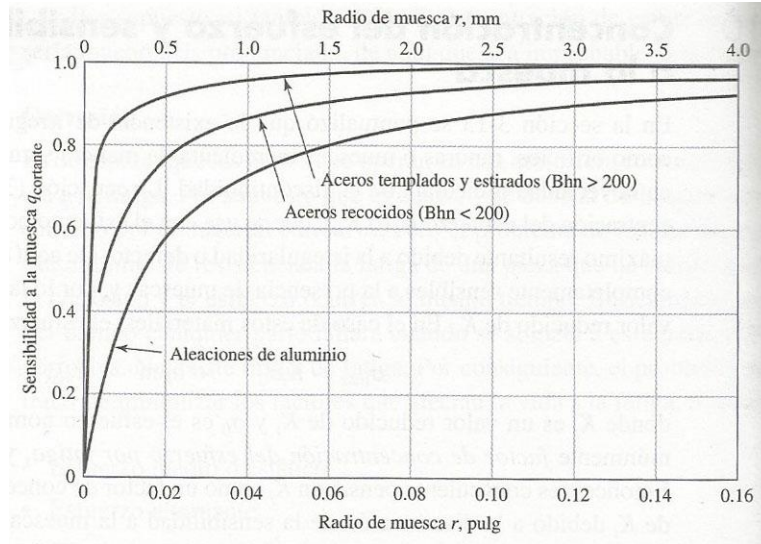
Ilustración 30: Gráfica de factor teórico de concentración de esfuerzo (eje redondo con filete en el hombro en torsión)



(Budynas & Nisbett, 2008)

Además de ese valor, se encuentra el factor de sensibilidad a la muesca del material sometido a torsión inversa (q_s) con la siguiente gráfica:

Ilustración 31: Sensibilidad a la muesca de materiales sometidos a torsión inversa



(Budynas & Nisbett, 2008)

De las dos gráficas presentadas, se escogen los valores de $K_{TS} = 1.15$ y $q_s = 0.85$. Con estos valores, se puede encontrar el valor de sensibilidad al cambio de sección:

$$K_{fs} = 1 + q_s(K_{TS} - 1) = 1 + (0.85)((1.15) - 1) = 1.1275 \quad \text{Ec. (27)}$$

Ahora se pueden encontrar los factores de superficie (k_a), de tamaño (k_b), de modificación de carga (k_c) y de confiabilidad (k_e)

El valor de k_a se encuentra con la Ec. (11), utilizando los valores indicados para sistema internacional:

$$k_a = aS_{ut}^b = (4.51)(470 \text{ MPa})^{-0.265} = 883.223 \times 10^{-3}$$

El valor de k_b se encuentra con Ec. (12):

$$k_b = 1.24(1.8 \text{ mm})^{-0.107} = 1.1644$$

El valor de k_c se encuentra con Ec. (14):

$$k_c = 0.59$$

El factor de confiabilidad k_e se encuentra con la Tabla 2. Para una confiabilidad de 90%, el valor de $k_e = 0.897$.

Con estos factores, se puede encontrar el valor de Límite de resistencia a la fatiga con Ec. (10).

$$S_e = (883.223 \times 10^{-3})(1.1644)(0.59)(0.897)(0.5)(470 \text{ MPa}) = 127.90 \text{ MPa}$$

Ya obtenido este valor, se puede utilizar el criterio de Goodman para saber si el eje es correcto para la utilización. El criterio de Goodman para torsión pura se define por:

$$\frac{1}{n_f} = \frac{\sigma'_m}{S_{ut}} \quad \text{Ec. (28)}$$

Donde σ'_m es el esfuerzo de Von Mises en torsión, y se define por

$$\sigma'_m = \frac{\sqrt{3}(16)K_{fs}T}{\pi d^3} \quad \text{Ec. (29)}$$

Y S_{ut} es el esfuerzo último de fluencia del material. Con los valores obtenidos anteriormente para K_{fs} (1.1275) y de par en el eje (147.1507 N · mm), el valor de σ'_m es

$$\sigma'_m = \frac{\sqrt{3}(16)(1.1275)(147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm})}{\pi(1.8 \text{ mm})^3} = 250 \text{ MPa}$$

Ahora se puede utilizar Ec. (28) para encontrar el valor de n_f

$$\frac{1}{n_f} = \frac{250 \text{ MPa}}{470 \text{ MPa}} = 0.5319$$

$$n_f = 1.88$$

c. Pasador El siguiente elemento crítico en el diseño es el pasador. El mismo se puede modelar como una viga en voladizo de sección prismática circular. Antes de proseguir, se escoge un polímero de Ingeniería PA6 del cual se presentan las propiedades a continuación:

Tabla 15: Propiedades del polímero PA 6

Material	Módulo de Young (MPa)	Esfuerzo de flexión (MPa)
PA 6	2300-2500	110-120

(Barbara Houtzager MSc, 2009)

A continuación, se presenta un diagrama de carga que experimenta el pasador

Ilustración 32: Diagrama de carga para el pasador



Una vez que se tiene el Diagrama de Cuerpo Libre, se pueden encontrar las reacciones debido a estar empotrado.

$$\Sigma F_y = R_y - F = 0; R_y = F$$

$$\Sigma M = M_c - F \times r_1 = 0; M_c = F \times r_1$$

El valor de la fuerza aplicada al pasador se encuentra al utilizar el par motor que se utilizó para el diseño del eje ($T = 147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}$). Si se sabe que el pasador está a una distancia de 20 mm del centro de la manivela, se puede encontrar la fuerza que experimentará el pasador.

$$F = \frac{T}{r} = \frac{147.1507 \text{ N} \cdot \text{mm}}{20 \text{ mm}} = 7.3575 \text{ N}$$

Con esta fuerza, se puede encontrar el momento de flexión del pasador en el empotramiento.

$$M_c = (7.3575 \text{ N})(6 \text{ mm}) = 44.145 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

El esfuerzo máximo para una sección transversal doblemente simétrica puede encontrarse con (Gere, 2006)

$$\sigma_{max} = \frac{M}{S} \quad \text{Ec. (30)}$$

Donde M es el momento que experimenta el pasador que causa la flexión, y S es el módulo de sección para una viga circular, el cual se encuentra por la siguiente ecuación:

$$S = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{Ec. (31)}$$

Al despejar de Ec. (30) el parámetro S y utilizar su definición (Ec. (31)) se puede tener una expresión para encontrar el diámetro.

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{M}{\sigma} \quad \text{Ec. (32)}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M}{\pi\sigma}}$$

Al hacer $\sigma = \sigma_{ut} = 120 \text{ MPa}$, y $M = 44.145 \text{ N} \cdot \text{mm}$ se obtuvo un valor de $d = 1.55$

Dado que el valor que se escogió para el diseño es de 5 mm , se procede encontrar el esfuerzo que soporta el pasador con esta dimensión.

$$S = \frac{\pi(5 \text{ mm})^3}{32} = 12.2718 \text{ mm}^3$$

$$\sigma = \frac{44.145 \text{ N} \cdot \text{mm}}{12.2718 \text{ mm}^3} = 3.5973 \text{ MPa}$$

Con este valor de σ se puede encontrar el factor de seguridad para el pasador:

$$n = \frac{\sigma_{ut}}{\sigma} = \frac{120 \text{ MPa}}{3.5973 \text{ MPa}} = 33.358$$

3. RESULTADOS. Para revisar el correcto funcionamiento del reloj, se utilizó un prototipo del mismo, salvo las características de las superficies para sincronización. El mismo se utilizará para comprobar la variación de tiempo que puede ocurrir.

Para revisar esto, se procedió a utilizar un video y se concentró únicamente en el funcionamiento del segmento de Unidades de Minutos, aunque se probó con todas las piezas conectadas. El video se grabó en alta definición con lo cual se observaban mejor las interacciones.

Ilustración 33: Prototipo



La forma de comparación fue utilizando los bordes del prototipo como puntos de referencia para el programa Tracker®. Se comparó el tiempo en el cronómetro con la finalización del movimiento de la rueda de Ginebra. A continuación, se proporcionan los resultados obtenidos:

Tiempo teórico (minutos)	Tiempo registrado (minutos)	% Diferencia
5.00	5.00	0.00
10.00	10.00	0.00
15.00	15.00	0.00
20.00	20.00	0.00
25.00	25.01	0.04
30.00	30.01	0.03
35.00	35.01	0.03
40.00	40.01	0.02
45.00	45.01	0.02
50.00	50.01	0.02
55.00	55.01	0.02
60.00	60.00	0.00

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para un diseño geométrico, Sclatter proporciona expresiones bastante útiles, dejando como parámetro de diseño el tamaño de la manivela de entrada. Además, proporciona una ecuación simple para uno de los puntos más importantes en la configuración de Ginebra: la distancia entre centros ya que, con una distancia entre centros inadecuada, puede ocurrir interferencia entre el pasador y el cuerpo de la rueda, o no completaría un desplazamiento angular necesario para continuar con los movimientos subsecuentes.

Mientras que se trató de ser lo más apegado a las medidas obtenidas por las expresiones antes mencionadas, ciertas decisiones dimensionales tuvieron que ser tomadas, al momento de llevar los datos a una aplicación tangible, tales como reducir el diámetro de los elementos impulsados o acortar la distancia entre centros para asegurar la apropiada interacción entre el pasador y la rueda de Ginebra. Los efectos provocados por dichas decisiones no afectaron en el desempeño final, ya que se compensaron las interferencias que pudieron haberse formado con un redimensionamiento apropiado de la carrera de las ranuras.

Uno de los posibles puntos de discrepancia entre el análisis analítico utilizando las ecuaciones de Sclatter, y el análisis numérico presentado se puede deber a las consideraciones de aplicación que Sclatter toma en cuenta en su obra *Mechanism & Mechanical Devices Sourcebook (3ª Edición)*. Posiblemente las consideraciones de velocidad y aceleración que tiene presentadas no contemplan una velocidad tan baja como parte del análisis dinámico. Esto parece estar comprobado por las gráficas y tablas que se presentan a continuación en las que no es posible calcular los valores para una velocidad angular de 1 rpm dado que los valores para la velocidad angular están muy cercanas al eje horizontal y no es posible hacer una valuación acertada

La utilización de métodos matemáticos para encontrar la inercia de las ruedas ofrece una forma objetiva de poder encontrar la inercia perdida o ganada según sea la aplicación de la misma en la rueda de Ginebra o en el sincronizador. El procedimiento se detalla en el Anexo A: Cálculo de las Inercias, y las expresiones encontradas pueden ser utilizadas en aplicaciones generales futuras en las que una rueda de Ginebra fuera utilizada.

Como se indicó previamente en la sección de Torque y Potencia, el valor de potencia encontrado utilizando las ecuaciones de Sclatter no parece lógico y se tuvo que recurrir a un

método alternativo para poder encontrar una potencia más apegada a un escenario real. Mientras que se buscó encontrar un método que fuera lo más preciso.

Los cambios en la medición de tiempo pueden deberse a errores de manufactura o a la exclusión de los elementos de sincronización. Sin embargo, la precisión lograda es bastante tolerable.

VII. CONCLUSIONES

1. Se logró diseñar un reloj basado en una serie de ruedas de 3 ruedas de Ginebra y sus respectivas manivelas utilizando las ecuaciones propuestas por Scatter. El reloj puede ser capaz de mostrar tanto minutos como horas con una variación menor a 5 minutos cada 4 horas y con dimensiones menores a 1.5 metros.
2. Al utilizar las expresiones propuestas por Scatter para encontrar la aceleración angular de la rueda de Ginebra, resultan valores que parecen ser ilógicos, por lo que se empleó una comprobación teórica basada en el modelo de aceleración de Coriolis, con el que se comprueba la veracidad de las expresiones propuestas en el Marco Teórico. Los valores encontrados para la aceleración angular por este método se usaron para calcular la potencia necesaria para hacer andar el proyecto.
3. El diseño de las ruedas de Ginebra se logró con un error de menor al 3% en los cálculos haciendo modificaciones dimensionales en el orden de los milímetros o décimas de milímetros en algunas situaciones, siendo las modificaciones más notorias las que tienen una diferencia de hasta 0.5 milímetros. Al mismo tiempo, la precisión lograda en el prototipo es menor al 5%, a pesar de carecer de superficies de sincronización las cuales únicamente mejorarían su precisión.
4. Para reducir el peso del proyecto, se utilizó aluminio para las ruedas de Ginebra, dada su densidad menor comparado con el acero, su resistencia al desgaste comparado con materiales orgánicos tales como madera y su precio en comparación con aleaciones más específicas. Para los pasadores, un material polimérico autolubricante fue utilizado dado sus efectos de reducción de fricción.

VIII. RECOMENDACIONES

El proyecto puede ser utilizado como parte didáctica para mostrar el funcionamiento de ruedas de Ginebra para algunos cursos que se imparten durante la preparación de los futuros profesionales como un ejemplo de los proyectos que se pueden llegar a realizar o muestra de cómo funcionan este tipo de arreglos.

El proyecto puede ser mejorado implementando un elemento mecánico o eléctrico que lo impulse adecuadamente. Dicho elemento deberá ser capaz de hacer funcionar el reloj de forma independiente y teniendo en cuenta que puedan ser tomadas acciones de prevención en caso de algún posible fallo debido a las características de dicho elemento impulsor si es que éste no pueda otorgar de una forma confiable el movimiento necesario durante el año que debe estar en mantenimiento.

Si se intentara utilizar este tipo de reloj en una zona en la cual se cumpliera el horario de verano, se requerirá adelantar la hora o atrasarla dependiendo sea el caso. Esto puede ser logrado con un sincronizador con respecto a la posición de entrada del rodillo impulsor para poder ajustar la hora. Un arreglo similar puede ser utilizado para ajustar la medida en los otros elementos de Ginebra.

Además de lo antes expuesto, se deberá hacer un análisis de qué modificaciones deberán hacerse a las fuentes bibliográficas sobre el análisis dinámico en velocidades bajas y cómo estas condiciones pueden afectar en el cálculo de una potencia de entrada necesaria para accionar el sistema.

Deben existir métodos para encontrar la potencia necesaria para mover el sistema que pueden utilizar herramientas más modernas, tales como registro de valores obtenidos por sensores físicos o seguimiento visual en un video utilizando los paquetes de análisis adecuados, pero se debe profundizar en un método en el cual pueda calcularse de forma analítica el valor de la aceleración para aplicaciones de baja velocidad.

IX. BIBLIOGRAFÍA

- Barbara Houtzager MSc, R. O. (3 de Octubre de 2009). PA 6. Recuperado el 13 de Octubre de 2012, de Matbase: <http://www.matbase.com/material/polymers/engineering/pa-6/properties>
- Beer, F. P., Johnston, E. R., Dewolf, J. T., & Mazurek, D. F. (2010). *Mecánica de Materiales* (Quinta ed.). México: McGraw-Hill Educación.
- Beer, F. P., Johnston, Jr., E. R., & Eisenberg, E. R. (2007). *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática* (Octava ed.). México D.F. : McGraw-Hill Interamericana.
- Bickford, J. H. (1972). *Mechanisms for Intermittent Motion*. Ithaca, New York: Industrial Press.
- Budynas, R. G., & Nisbett, J. K. (2008). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* (8a. ed.). Ciudad de México: McGraw-Hill Interamericana.
- Gere, J. M. (2006). *Mecánica de Materiales* (Sexta ed.). México, México: Thomson Learning.
- N.C., S. (2001). *Mechanism & Mechanical Devices Sourcebook* (3a ed.). Nueva York: McGraw-Hill.
- Norton, R. L. (2005). *Diseño de Maquinaria, Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos* (3a. ed.). Ciudad de México, México: McGraw-Hill Interamericana.
- Smith, W. F. (2004). *Ciencia e Ingeniería de Materiales* (3 ed.). Aravaca: McGraw-Hill.

X. ANEXOS

A. ANEXO A: CÁLCULO DE LAS INERCIAS

Cómo se ha establecido, se deberá encontrar la potencia necesaria en el sistema. Para hacerlo, se utilizó la ecuación

$$\mathcal{P} = T \cdot \omega \quad \text{Ec. (A-1)}$$

Dado que cada conjunto necesita distintas cantidades de potencia debido a sus dimensiones, la potencia total \mathcal{P}_t necesaria será la sumatoria de cada uno de los conjuntos.

$$\mathcal{P}_t = \sum T_i \cdot \omega_i \quad \text{Ec. (A-2)}$$

Donde el subíndice i corresponde a cada uno de los elementos a calcular.

Ya que el torque necesario para mover cada una de las ruedas de Ginebra es distinto, se deberá encontrar el mismo para cada uno individualmente. Para hacerlo, se utilizó la siguiente definición de Torque:

$$T = I \cdot \alpha \quad \text{Ec. (A-3)}$$

Donde I es la inercia de la rueda de Ginebra a ser accionada y α es la aceleración angular que experimenta.

Ya que las ruedas de Ginebra rotarán con respecto a un eje ubicado en el centro de la pieza y que sea perpendicular a la cara plana que poseen, se puede sustituir la inercia I por el Momento Polar de Inercia J_0 ya que la pieza será rotada en su centro y no en alguno de sus extremos. Haciendo esta sustitución en la ecuación del Torque, se obtiene lo siguiente:

$$T = \rho \cdot t \cdot J_0 \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} \quad \text{Ec. (A-4)}$$

Donde

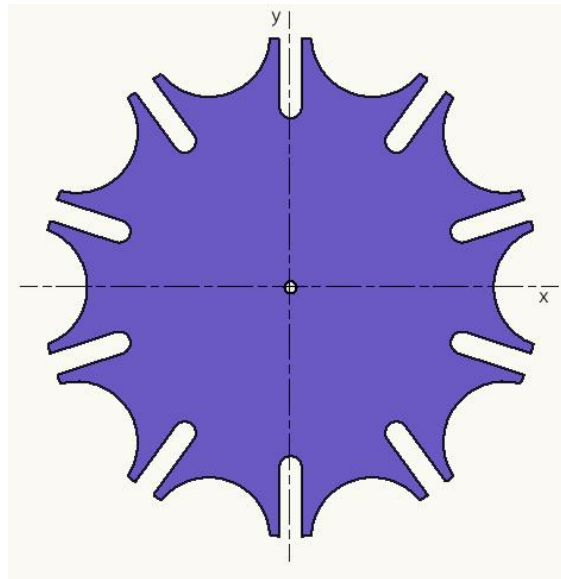
- ρ es la densidad del material
- t es el espesor de la pieza

El Momento Polar de Inercia puede ser a su vez calculado de la siguiente forma:

$$J_o = I_x + I_y \quad \text{Ec. (A-5)}$$

Donde I_x es la inercia de la Rueda de Ginebra con respecto al eje x e I_y es la inercia de la Rueda de Ginebra con respecto al eje y . A continuación, se muestra un modelo de una rueda de Ginebra, al cual se le realizará su cálculo de inercia.

Ilustración A- 1: Rueda de Ginebra

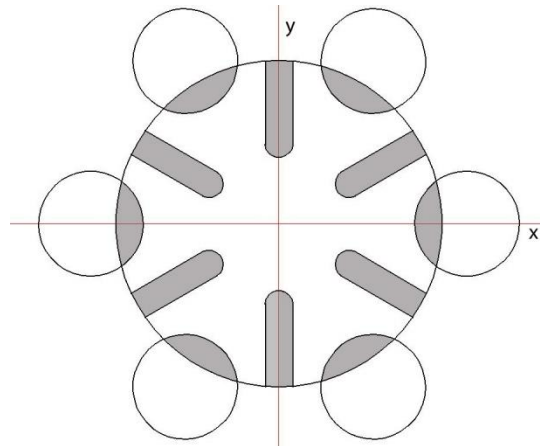


Para cada rueda de Ginebra, se puede calcular su inercia al saber que la inercia para un círculo es:

$$J_o = \frac{1}{2} \pi r^4 \quad \text{Ec. (A-6)}$$

Y luego en varios segmentos de círculo alrededor a éste a los cuáles se calculará su inercia para posteriormente restarla de la del círculo base como se muestra en las áreas sombreadas de la Ilustración A-2.

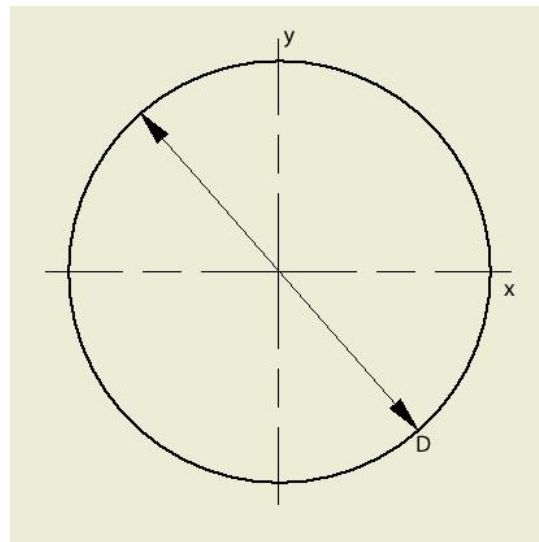
Ilustración A- 2 Círculo base y áreas a restar



De esta premisa se obtienen las siguientes figuras:

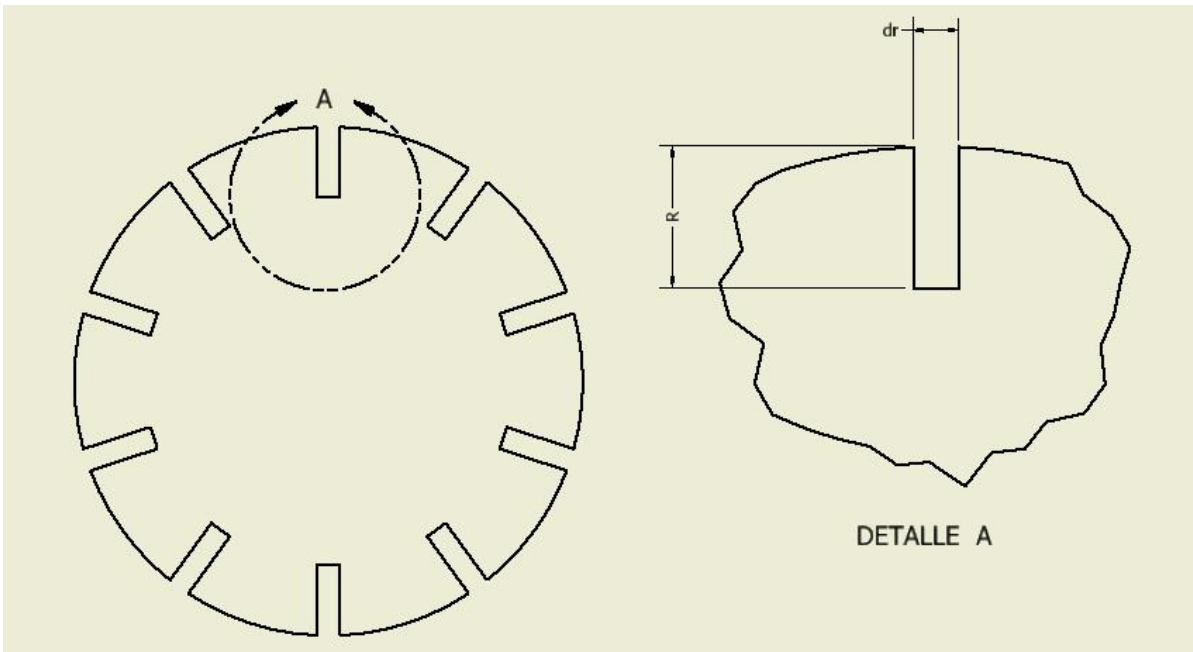
- Un círculo de diámetro D representa el cuerpo de la rueda y al cual se le restarán las inercias correspondientes a lo siguiente:

Ilustración A- 3: Cuerpo principal



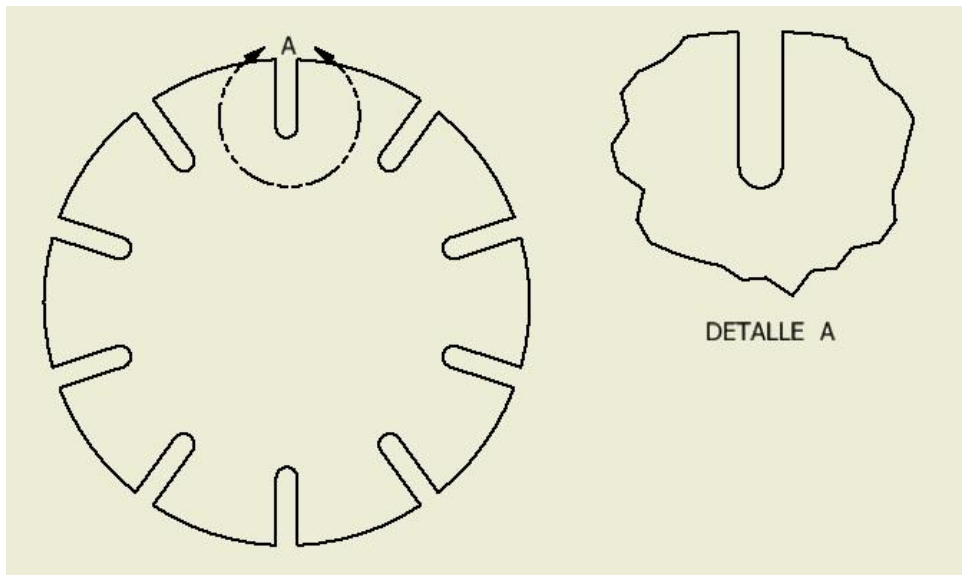
- n rectángulos de dimensiones diseñadas correspondientes a la longitud de la ranura R y el espacio para el pasador d_r .

Ilustración A- 4: Corte para ranuras



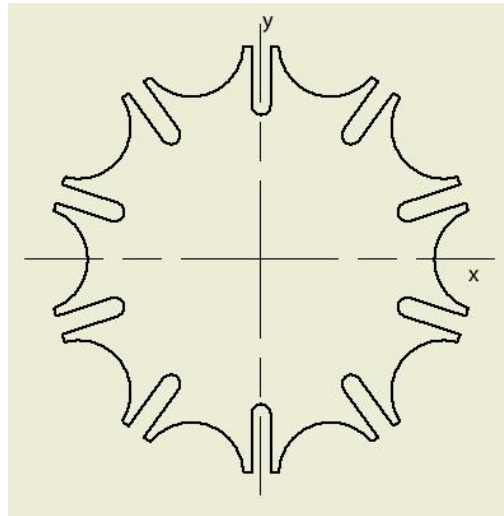
- n semicírculos correspondientes al final de cada una de las ranuras.

Ilustración A- 5: Ranuras con semicírculos



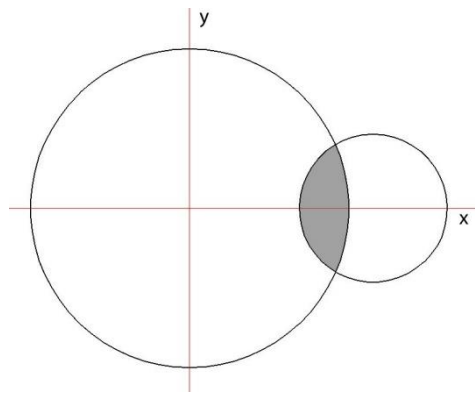
- n segmentos de intersección que representa el espacio para el sincronizador.

Ilustración A- 6: Corte sincronizadores



De estas figuras, la inercia de los segmentos de intersección del sincronizador es la única que no corresponde a la de una figura geométrica conocida. Dichos segmentos se muestran sombreados en la Ilustración A- 7

Ilustración A- 7: Segmentos de intersección del sincronizador



Por lo que se calculará según el procedimiento descrito a continuación:

Se conoce que la Inercia se puede calcular como

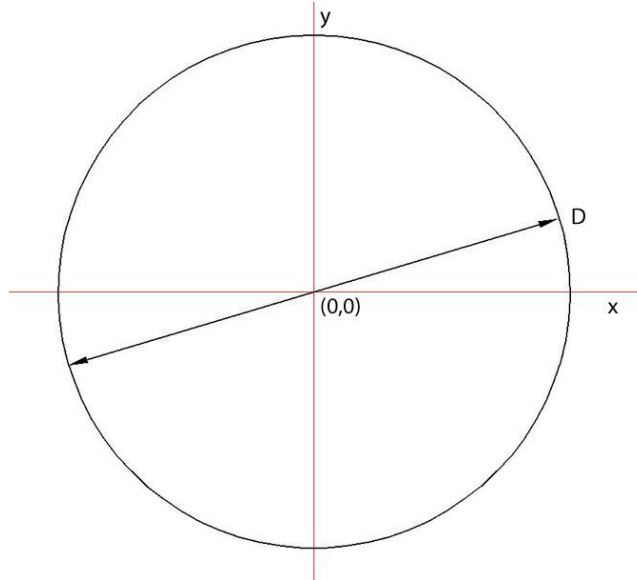
$$I_x = \int y^2 dA \quad \text{Ec. (A-7)}$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

Para lo cual se deberán encontrar los límites de integración para cada integral

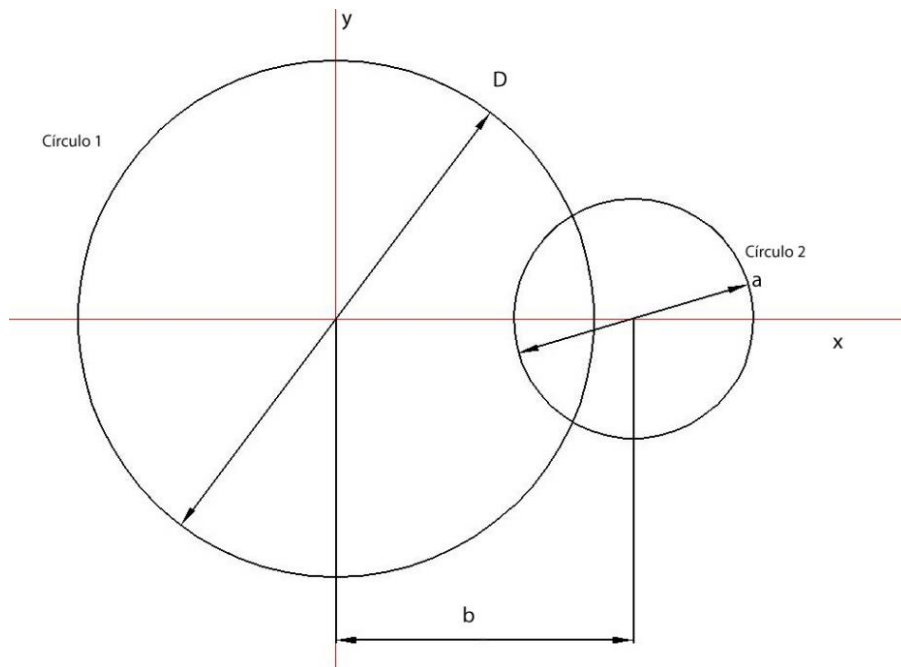
Para hacerlo, lo primero que se realizó fue modelar un círculo de radio $D/2$ en la posición $(0,0)$ de un eje de coordenadas como se muestra en la Ilustración A- 7.

Ilustración A- 8: Círculo 1



Luego, a una distancia b del centro, se coloca otro círculo de radio a como se muestra en la Ilustración A- 9.

Ilustración A- 9: Interacción círculo 1, círculo 2 y posición del círculo 2



La ecuación matemática del círculo 1 será, por lo tanto

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4} \quad \text{Ec. (A-8)}$$

Para facilitar los cálculos, se sustituirá $D/2$ por r . De esta forma, la ecuación se puede escribir

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{Ec. (A-9)}$$

$$f_1(x) = \sqrt{r_1^2 - x^2}$$

Mientras que la ecuación para el círculo 2 será

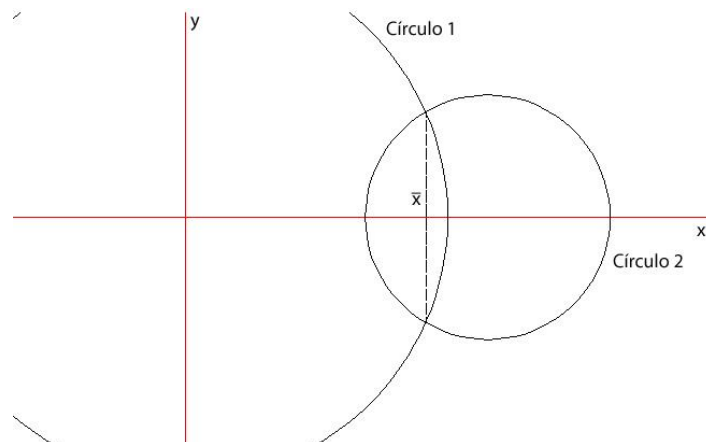
$$(x - b)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{Ec. (A-10)}$$

$$f_2(x) = \sqrt{a^2 - (x - b)^2}$$

Al despejar de ambas ecuaciones el término y^2 e igualarlas, se puede encontrar una expresión que proporcione el valor de la coordenada x en donde ocurre la intersección de ambos círculos. Se le denominará \bar{x} a este valor. La expresión a la cual se llega es:

$$\bar{x} = \frac{b^2 + r^2 - a^2}{2b} \quad \text{Ec. (A-11)}$$

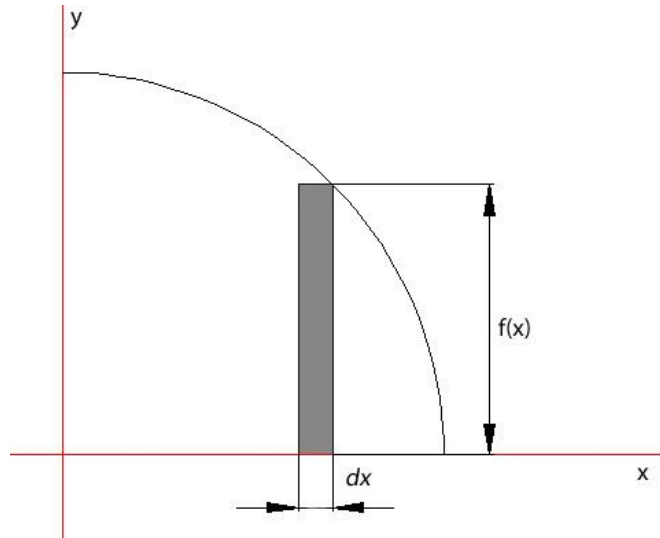
Ilustración A- 10: Intersección de \bar{x}



El valor obtenido se utilizará más adelante como un límite de integración.

Si se utiliza un elemento diferencial rectangular de base dx y altura $f(x)$,

Ilustración A- 11: Diferencial



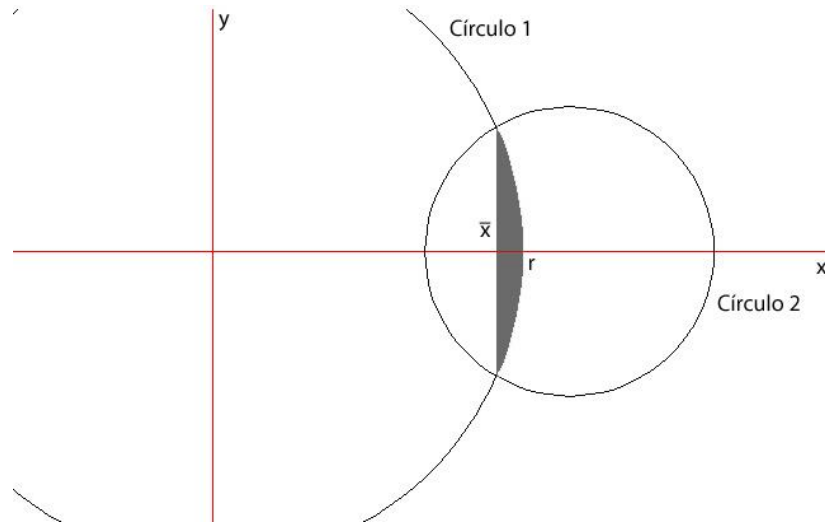
Las ecuaciones para la inercia se pueden escribir de la siguiente forma:

$$dI_x = \frac{1}{3} f_n(x)^3 dx \quad \text{Ec. (A-12)}$$

$$dI_y = x^2 f_n(x) dx$$

1. **CÁLCULO PARA EL CÍRCULO 1.** Los límites de integración para calcular las I_n serán de \bar{x} hasta r .

Ilustración A- 12: Región a integrar para el círculo 1



Primero se encontró la expresión para a I_x :

$$I_{x_1} = \frac{1}{3} \int_{\bar{x}}^r f_1(x)^3 dx \quad \text{Ec. (A-13)}$$

$$I_{x_1} = \frac{1}{8} \pi r^4 - \frac{1}{4} r^4 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\bar{x}}{r} \right) - \frac{1}{12} (5r^2 \bar{x} - 2\bar{x}^3) \sqrt{r^2 - \bar{x}^2}$$

Para I_y se obtiene lo siguiente con los mismos límites de integración:

$$I_{y_1} = \int_{\bar{x}}^r x^2 f_1(x) dx \quad \text{Ec. (A-14)}$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{8} \pi r^4 - \frac{1}{4} \text{sen}^{-1} \left(\frac{\bar{x}}{r} \right) + \frac{1}{4} (r^2 \bar{x} - 2\bar{x}^3) \sqrt{r^2 - \bar{x}^2}$$

El desarrollo para las integrales se presenta a continuación:

a. Para la integral de I_{x_1}

$$\frac{1}{3} \int (r \cdot \cos \theta)^3 r \cdot \cos \theta \quad (\text{Por sustitución trigonométrica})$$

$$\frac{1}{3} r^4 \int \cos^4 \theta d\theta$$

$$\frac{r^4}{3} \int (\cos^2 \theta)^2 d\theta$$

$$\frac{r^4}{3} \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \quad (\text{Por ecuación del ángulo doble})$$

Se sustituye lo siguiente:

$$u = 2\theta$$

$$du = 2d\theta$$

$$d\theta = \frac{du}{2}$$

$$\frac{r^4}{3} \cdot \frac{1}{4} \int (1 + \cos u)^2 du$$

$$\frac{r^4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos u)^2 du$$

$$\frac{r^4}{24} \int (1 + \cos u)^2 du$$

$$\frac{r^4}{24} \int 1 + 2 \cos u + \cos^2 u du$$

$$\frac{r^4}{24} \int 1 + 2 \cos u + \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right) du$$

$$\frac{r^4}{24} \int 1 + 2 \cos u + \frac{1}{2} (1 + \cos 2u) du$$

$$\frac{r^4}{24} \left(u + 2 \operatorname{sen} u + \frac{1}{2} \left(u + \frac{\operatorname{sen} 2u}{2} \right) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} \left(2\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{2} (2\theta + \operatorname{sen} u \cos u) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} (2\theta + 2 \operatorname{sen} 2\theta + \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta))$$

$$\frac{r^4}{24} (3\theta + 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta))$$

$$\frac{r^4}{24} (3\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta (4 + 2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)))$$

$$\frac{r^4}{24} \left(3 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \left(4 + 2 \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2} \right) \right) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} \left(3 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \left(4 + 2 \left(1 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2} \right) \right) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} \left(3 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \left(4 + 2 \left(1 - \frac{2x^2}{r^2} \right) \right) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} \left(3 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \left(4 + 2 - \frac{4x^2}{r^2} \right) \right)$$

$$\frac{r^4}{24} \left(3 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \left(6 - \frac{4x^2}{r^2} \right) \right) \Big|_{\bar{x}}^r$$

El procedimiento anterior es para un cuarto de círculo. Se deberá multiplicar por dos para obtener el valor que interesa.

b. Para la integral de Iy_1

$$\int r^2 \sin^2 \theta \cdot r \cos \theta \cdot r \cos \theta \quad (\text{Por sustitución trigonométrica})$$

$$r^4 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$r^4 \int (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta d\theta$$

$$r^4 \int \cos^2 \theta - \cos^4 \theta d\theta$$

El desarrollo de la integral de $\cos^4 \theta$ se puede ver en el procedimiento anterior, por lo que se concentró en la otra parte de la integral.

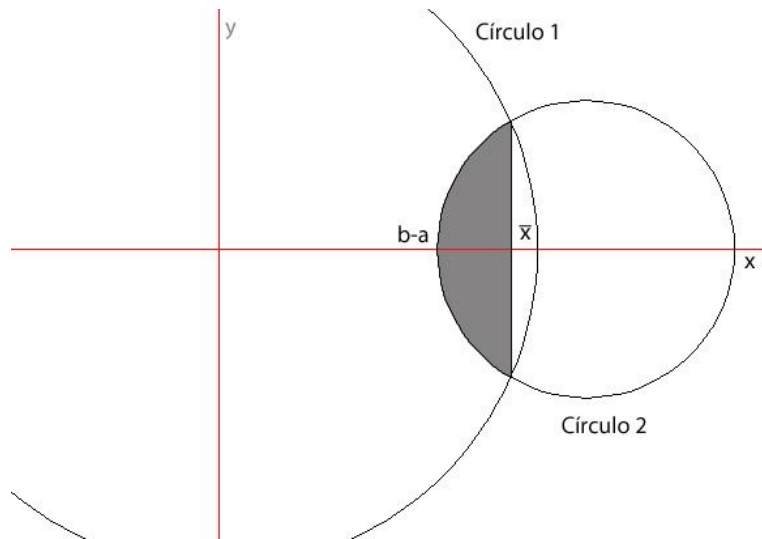
$$r^4 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \dots d\theta$$

$$\frac{r^4}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta - \dots d\theta$$

$$\frac{r^4}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{r} + \frac{x}{r} - \dots \right) \Big|_{\bar{x}}^r$$

2. *CÁLCULO PARA EL CÍRCULO 2.* Los límites de integración para calcular I_n para este círculo serán de $(b - a)$ hasta \bar{x} .

Ilustración A- 13: Región a integrar para el círculo 2



Una vez más se encontró primero la expresión para Ix_2 :

$$Ix_2 = \frac{1}{3} \int_{b-a}^{\bar{x}} f_2(x)^3 dx \quad \text{Ec. (A-15)}$$

$$Ix_2 = \frac{1}{8} \pi a^4 + \frac{1}{4} a^4 \text{sen}^{-1} \left(\frac{\bar{x} - b}{a} \right) + \frac{1}{12} (2b^3 - 5ba^2 + 6b\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3 - \bar{x}(6b^2 - 5a^2)) \sqrt{a^2 - b^2 + 2b\bar{x} - \bar{x}^2}$$

Para Iy_2 la expresión encontrada es:

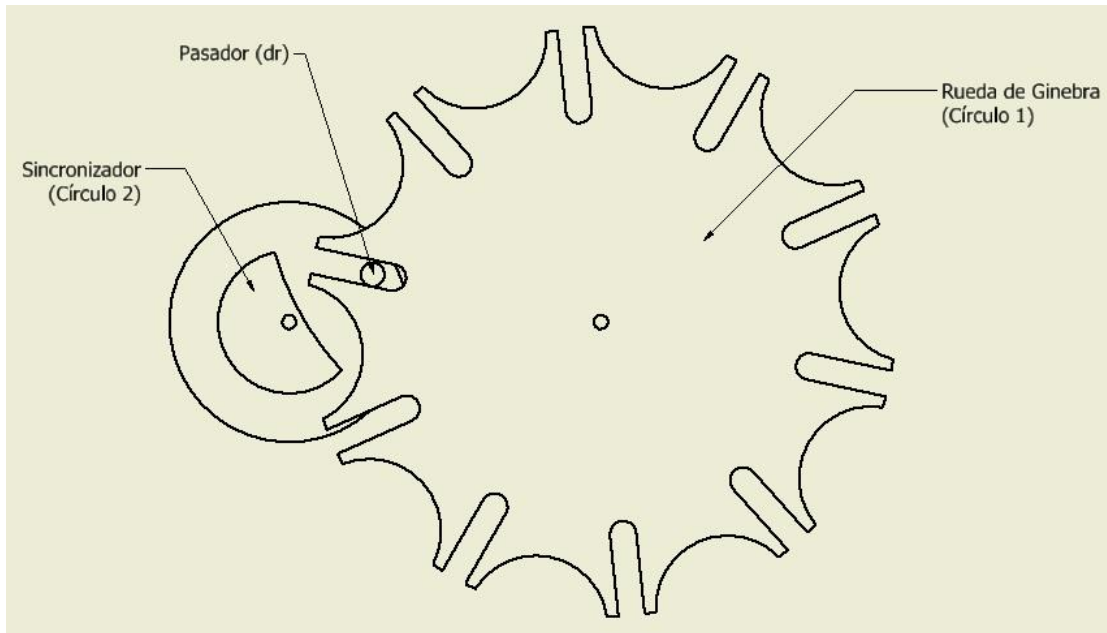
$$Iy_2 = \int_{b-a}^{\bar{x}} x^2 f_2(x) dx \quad \text{Ec. (A-16)}$$

$$Iy_2 = \frac{1}{2} \pi a^2 b^2 + \frac{1}{8} \pi a^4 + \frac{1}{4} (4b^2 a^2 + a^4) \text{sen}^{-1} \left(\frac{\bar{x} - b}{a} \right) - \frac{1}{12} (2b^3 + 13ba^2 + 2b\bar{x}^2 - 6\bar{x}^3 + \bar{x}(2b^2 + 3a^2)) \sqrt{a^2 - b^2 + 2b\bar{x} - \bar{x}^2}$$

3. *CÁLCULO DE LA INERCIA.* Ya con estas expresiones, se pueden encontrar las inercias de los segmentos de intersección de las ruedas de Ginebra.

La rueda de Ginebra y la manivela (que contendrá el elemento de sincronización) se presentan a continuación:

Ilustración A- 14: Tren armado



A continuación, se presenta una tabla con los valores para uno de los segmentos correspondientes a la rueda de Unidades de Minutos:

Tabla A- 1: Segmentos para las unidades de minutos

Diámetro D (mm)	Radio r, a (mm)	Distancia b (mm)	Posición \bar{x} (mm)	I_x (mm ⁴)	I_y (mm ⁴)	J_o (mm ⁴)
122.75	61.38	0	59.75	1212.1487	111669.4819	112881.6307
30	15	65		8769.2430	619231.2050	628000.4480
TOTAL						740882.0787

Siguiendo el mismo procedimiento, se calcula los segmentos propios de las ruedas de Decenas de Minutos y Horas y se muestran a continuación en el orden respectivo:

Tabla A- 2: Segmentos para las decenas de minutos

Diámetro D (mm)	Radio r, a (mm)	Distancia b (mm)	Posición (mm)	\bar{x}	I_x (mm ⁴)	I_y (mm ⁴)	J_o (mm ⁴)
86.25	43.13	0	40.54		2231.8969	88416.3527	90648.2496
35	17.5	50			7734.5028	232073.0867	239807.5895
TOTAL							330455.8391

Tabla A- 3: Segmentos para las horas

Diámetro D (mm)	Radio r, a (mm)	Distancia b (mm)	Posición (mm)	\bar{x}	I_x (mm ⁴)	I_y (mm ⁴)	J_o (mm ⁴)
111.85	55.93	0	55.10		193.4431	32391.8816	32585.3246
20	10	58			2073.9464	272059.8515	274133.7979
TOTAL							306719.1226

Una vez que se tienen estos valores, se pueden calcular las inercias de las ruedas de Ginebra.

A continuación, se presenta una tabla con los resultados para cada rueda de Ginebra. En la misma tabla se puede encontrar asimismo el valor de la inercia de masa de cada una de las ruedas, al multiplicar por el momento polar de inercia.

Tabla A- 4: Inercias ruedas de Ginebra

Unidades de minutos										
Radio (mm)	Base (mm)	Altura (mm)	Jo unitaria (mm ⁴)	Área (mm ²)	Distancia (mm)	Cantidad	I _z total (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Jo total (kg-mm ²)
Círculo	61.63		22654141.36				22654141.36	2.81E-06	6.00	3.82E+02
Semicírculo	2.75		44.92	11.88	44.56	10	236363.12			3.99E+00
Rectángulo		5.50	2487.49	93.50	53.06	10	2657636.77			4.48E+01
Intersecto			767772.69			10	7677726.91			1.29E+02
									TOTAL	203.7095

Continuación Tabla A- 5: Inercias ruedas de Ginebra

Decenas de minutos											
	Radio (mm)	Base (mm)	Altura (mm)	Jo unitaria (mm ⁴)	Área (mm ²)	Distancia (mm)	Cantidad	I_z total (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Jo total (kg-mm ²)
Círculo	43.375			5560038.88				5560038.88	2.81E-06	6.00	93.74
Semicírculo	2.75			44.92	11.88	24.54	6	43181.56			0.73
Rectángulo		5.50	18.50	3158.49	101.75	33.79	6	715874.15			12.07
Intersecto				330455.84			6	1982735.03			33.43
TOTAL											47.52

Continuación Tabla A- 6: Inercias ruedas de Ginebra

Horas											
	Radio (mm)	Base (mm)	Altura (mm)	Jo unitaria (mm ⁴)	Área (mm ²)	Distancia (mm)	Cantidad	I_z total (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Jo total (kg-mm ²)
Círculo	56.05			15503235.52				15503235.52	2.81E-06	6.00	2.61E+02
Semicírculo	2.75			44.92	11.88	42.76	12	261142.95			4.40E+00
Rectángulo		5.50	13.10	1212.00	72.05	49.31	12	2116542.46			3.57E+01
Intersecto				5.57			12	66.86			1.13E-03
TOTAL										221.30	

Tabla A- 7: Inercias de manivelas

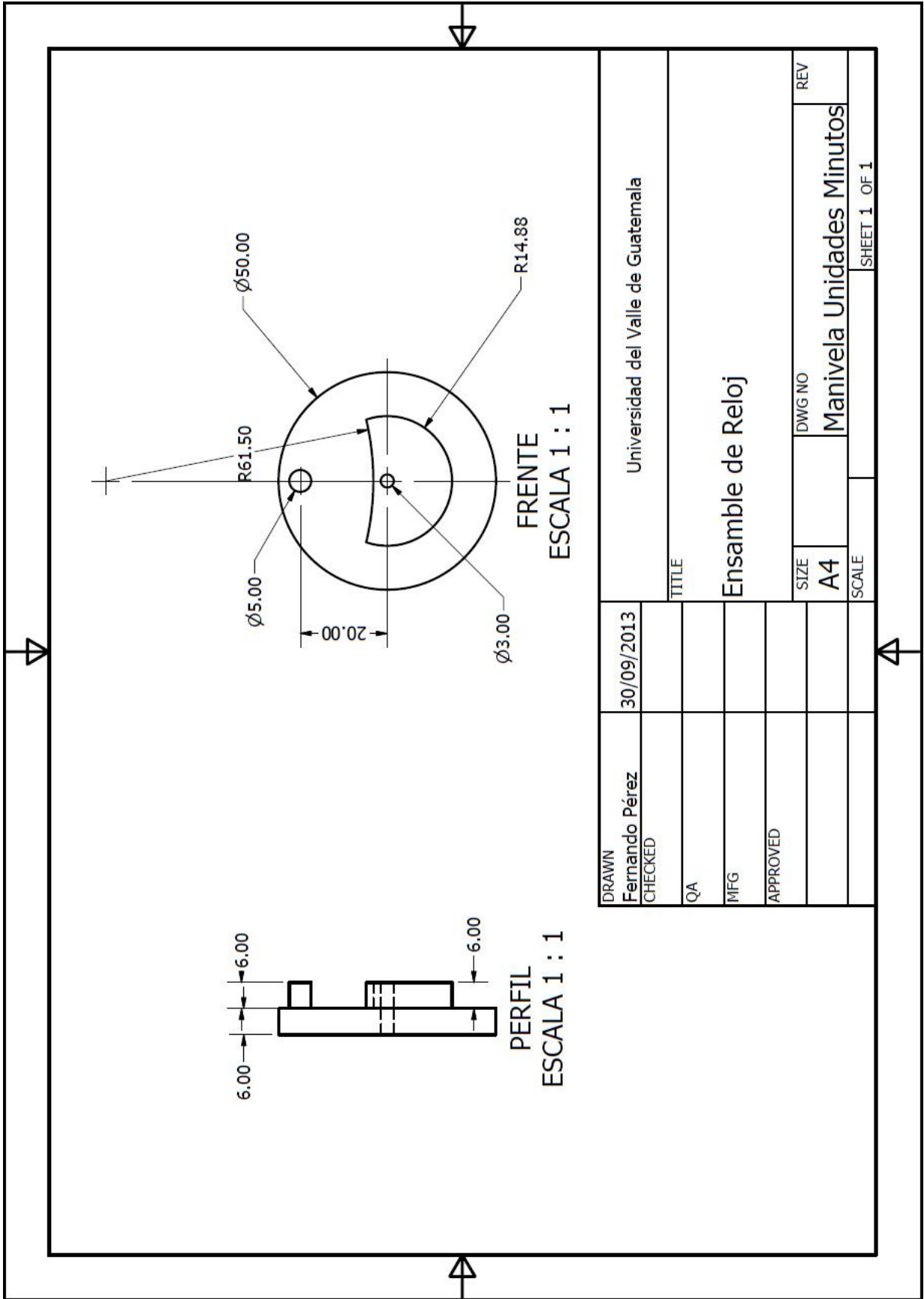
Unidades de minuto						
	Radio (mm)	iz unitaria (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Iz total (kg-mm ²)	
Cuerpo	25	613592.3152	2.81E-06	6	10.35	
Sincronizador	14.875	76903.7955			1.3	
Intersecto		28966.1827			0.49	
TOTAL		719462.2933			11.15	
Decenas de minuto						
	Radio (mm)	iz unitaria (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Iz total (kg-mm ²)	
Cuerpo	30	1272345.025	2.81E-06	6	21.45	
Sincronizador	34.75	2290546.5			38.62	
Intersecto		42113.9888			0.71	
TOTAL		3605005.513			59.36	
Manivela horas						
	Radio (mm)	iz unitaria (mm ⁴)	Densidad (kg/mm ³)	Grosor (mm)	Iz total (kg-mm ²)	
Cuerpo	20	251327.4123	2.81E-06	6	4.24	
Sincronizador	19.75	238994.7038			4.03	
Intersecto		6041.6216			0.10	
TOTAL		496363.7377			8.16	

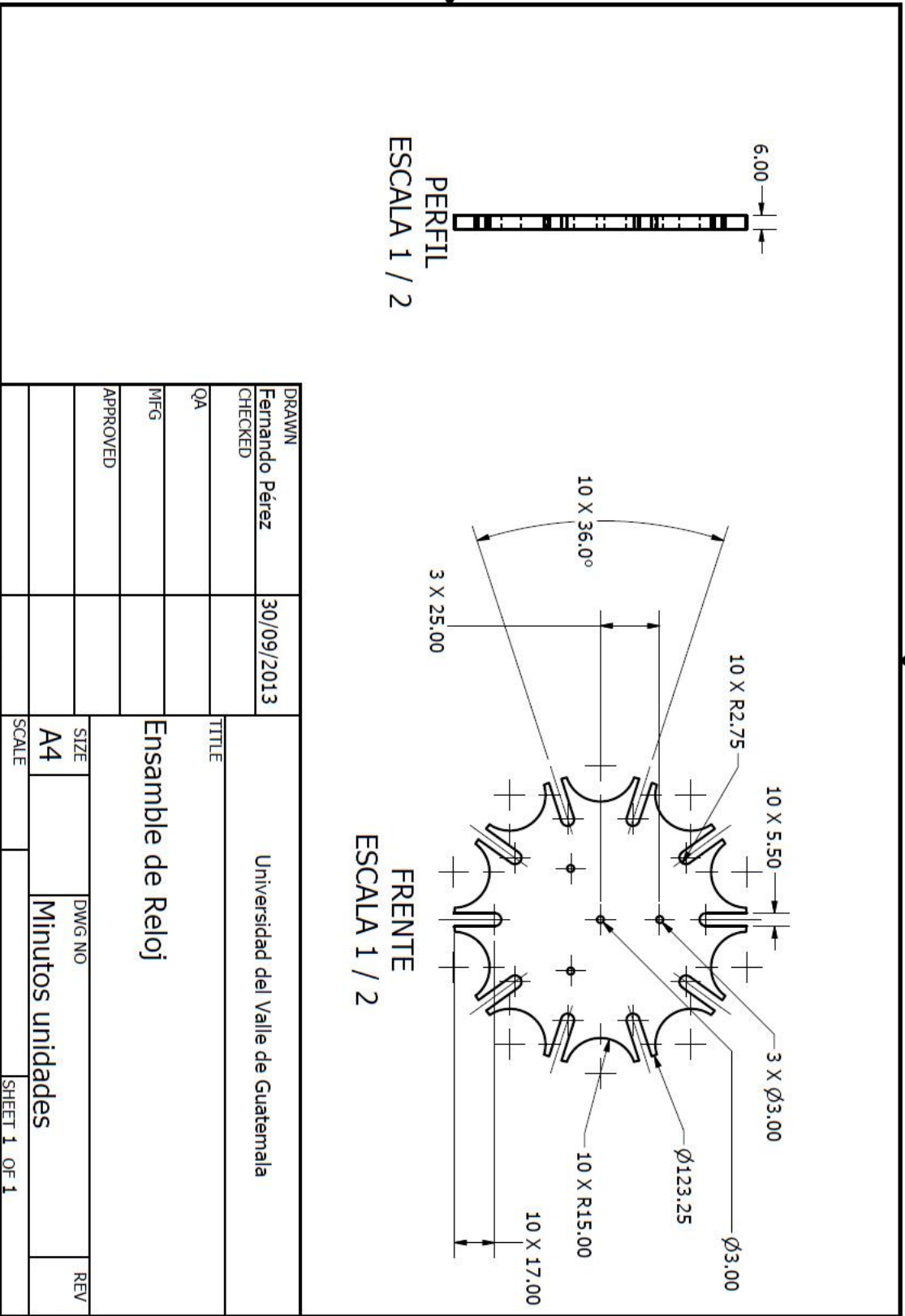
Tabla A- 8: Resumen de inercias de masa calculadas

Elemento	Inercia de masa (kg-mm ²)
Unidades de Minutos	203.7095
Decenas de Minutos	47.5157
Horas	221.2956
Manivela Unidades de Minutos	11.1534
Manivela Decenas de Minutos	59.3603
Manivela Horas	8.1650
TOTAL	551.1995

B. |ANEXO B: PLANOS DEL PROYECTO

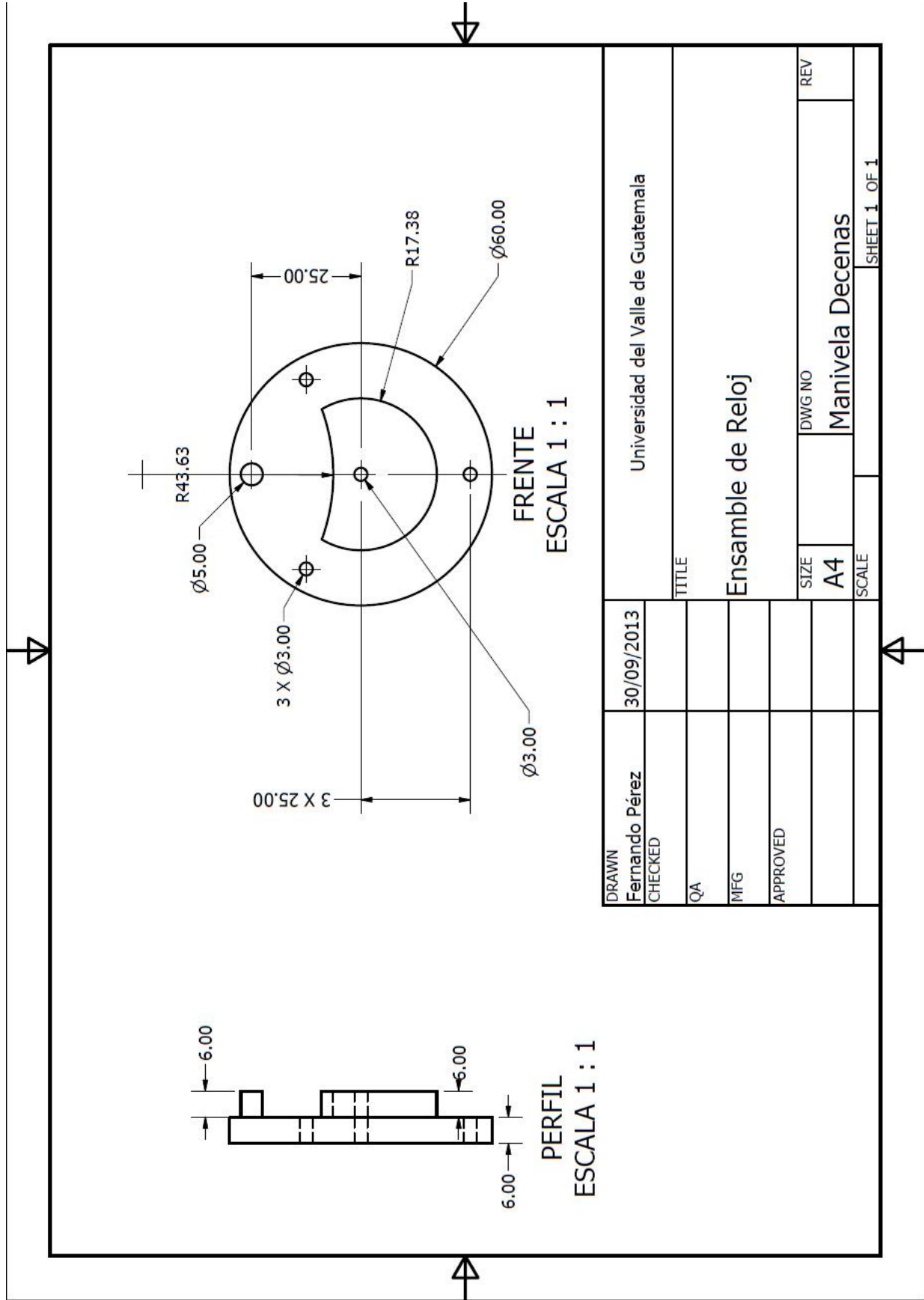
A continuación, se presentan los planos para el armado del modelo.



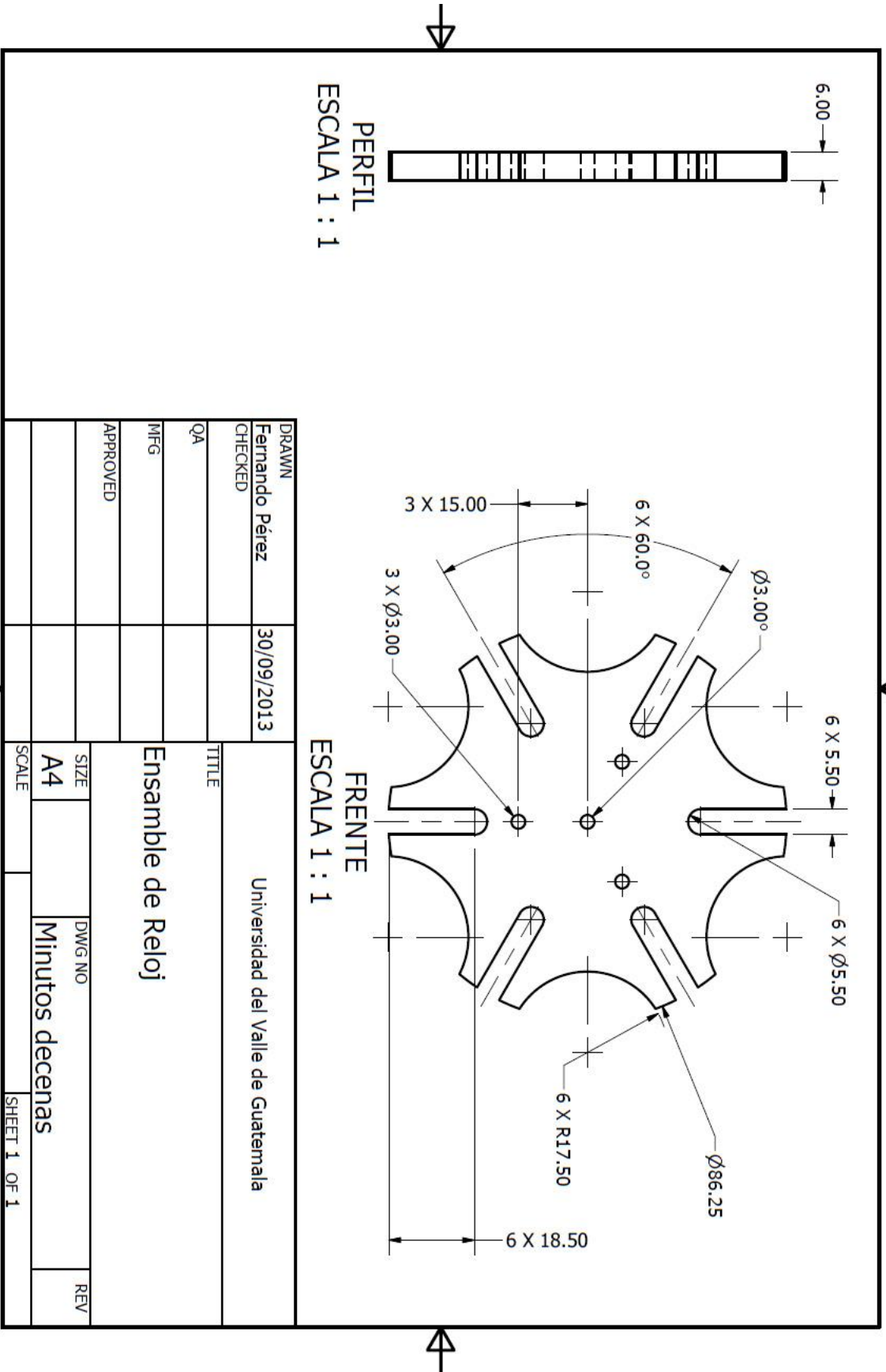


DRAWN		30/09/2013		Universidad del Valle de Guatemala	
CHECKED				TITLE	
QA				Ensamble de Reloj	
MFG				SIZE	
APPROVED				A4	
				SCALE	
				DWG NO	
				Minutos unidades	
				REV	
				SHEET 1 OF 1	

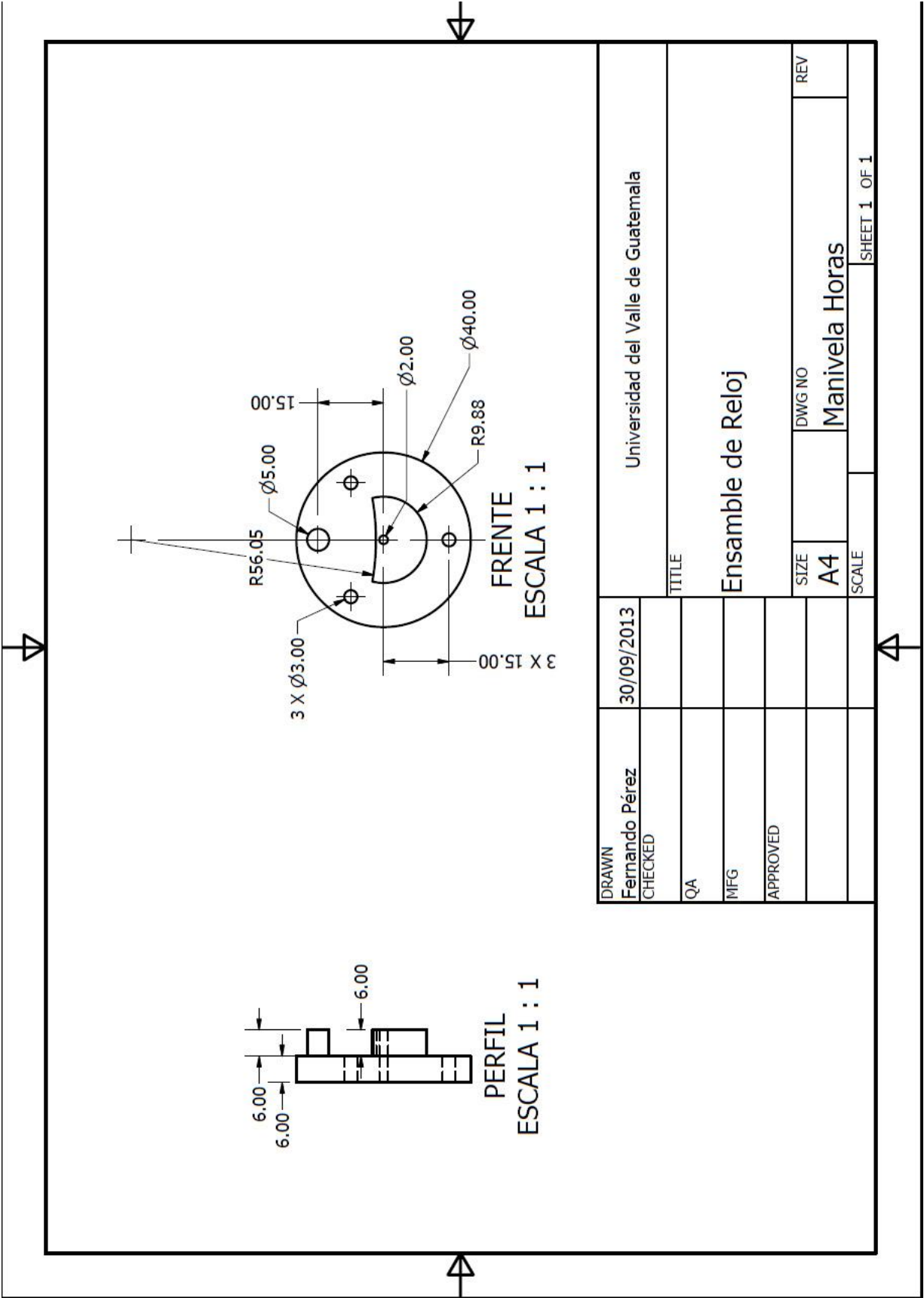




DRAWN	30/09/2013	Universidad del Valle de Guatemala	
CHECKED	Fernando Pérez	TITLE	
QA		Ensemble de Reloj	
MFG		SIZE	DWG NO
APPROVED		A4	Manivela Decenas
		SCALE	REV
			SHEET 1 OF 1

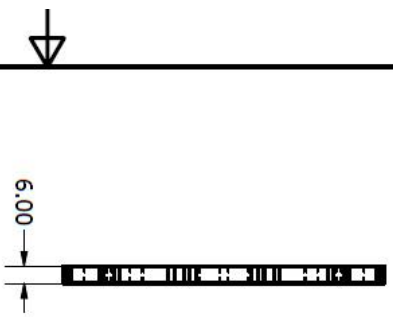


DRAWN		30/09/2013		TITLE	
CHECKED				Universidad del Valle de Guatemala	
QA				Ensamble de Reloj	
MFG				SIZE	
APPROVED				A4	
				SCALE	
				DWG NO	
				Minutos decenas	
				REV	
				SHEET 1 OF 1	

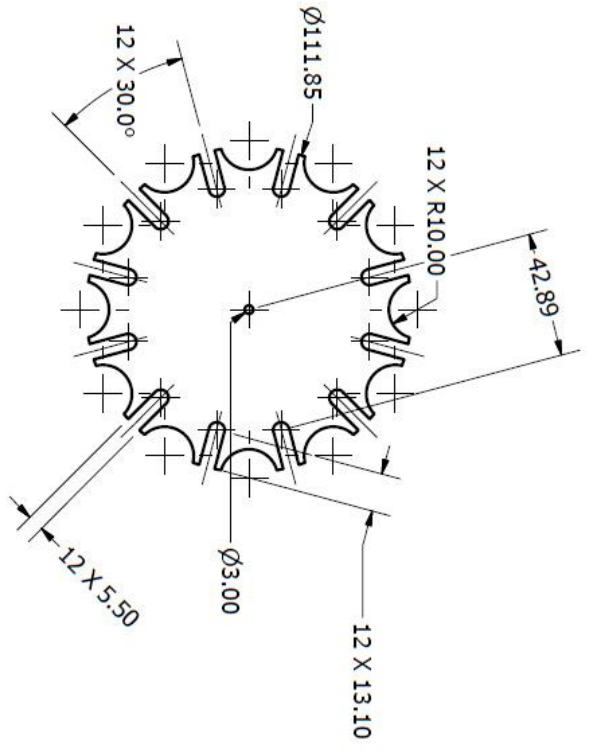


DRAWN	30/09/2013	Universidad del Valle de Guatemala	
CHECKED		TITLE	
QA		Ensamble de Reloj	
MFG		SIZE	DWG NO
APPROVED		A4	Manivela Horas
		SCALE	REV
			SHEET 1 OF 1

PERFIL
ESCALA 1 / 2



FRENTE
ESCALA 1 / 2



DRAWN		30/09/2013		TITLE		Universidad del Valle de Guatemala	
CHECKED		Fernando Pérez					
QA				Ensamble de Reloj		DWG NO	
MFG							
APPROVED				Ginebra de Horas		REV	
SCALE		A4		SHEET 1 OF 1			

