DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE RIESZ-FISCHER

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE RIESZ-FISCHER

MARIA EUGENIA CONTRERAS PINILLOS

Trabajo de investigacion presentado para
optar al grado académico de
Licenciado en Matemática

Guatemala

1985

Vo. Bo. :

(f) ______________________________
Doctor Belisario Ventura
Asesor

Tribunal:

(f) ______________________________
Doctora Miriam Castrocondo

(f) ______________________________
Doctor Raúl González

(f) ______________________________
Doctor Belisario Ventura

Fecha de aprobación: 2 de agosto de 1985

A Dios,
mis padres,
mis hermanos,
mi esposo y
mis hijos.

5. INDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCION

El presente ensayo es una exposición de la demostración del teorema de Riesz-Fischer. Para este ensayo se ha asumido un conocimiento básico de la teoría de la medida y de topología de espacios métricos.

En teoría de la medida se asumen conocimientos sobre la misma y sus propiedades fundamentales, así como un dominio elemental sobre la integral de Lebesgue en espacios de medida finita. Una excelente referencia para los requisitos anteriores es el libro de Royden.

Para efectos del presente ensayo, algunos lemas y teoremas fundamentales en la teoría de la integración han sido demostrados. Algunos ejemplos son: teorema de Fatou, teorema de convergencia dominada de Lebesgue, desigualdad de Hölder.

1.1 Importancia histórica del teorema de Riesz-Fischer

El desarrollo de la noción moderna de integral está estrechamente relacionado con la evolución de la idea de función y con el estudio profundo de las funciones numéricas de variables reales. A principios del Siglo XIX se tenía una idea intuitiva de la noción de función, pero no se admitía que tales funciones pudieran ser expresadas analíticamente.

Posteriormente, Fourier encontró que las funciones discontinuas podían ser expresadas como la suma de series trigonométricas. Este concepto habría de tener marcada influencia sobre las siguientes generaciones. Durante años no hubo avance alguno en esta área ya que el trabajo con funciones como las definidas por Fourier no despertaba interés. El primer avance significativo fue dado por Riemann.

La idea de Riemann fue la de partir del procedimiento de aproximación de la integral, cuya importancia fue señalada por Cauchy, y determinar cuándo la suma de Riemann de una función f en un intervalo $[a,b]$ tiende hacia un límite. Esta demostración no resulta complicada y, además, generaliza no sólo para funciones monótonas y seccionalmente continuas sino también para funciones discontinuas en un subconjunto denso.

La integral de Riemann surgió en un momento que era propicio para ese tipo de investigaciones y ocupó su lugar en el estudio a fondo del ⟨continuo⟩ y de las funciones de variables reales, situación que culmina con Cantor y el surgimiento de la teoría de conjuntos. La forma dada por Riemann a la condición de integralidad sugería la idea de la <u>medida</u> del conjunto de puntos de discontinuidad de una función en un intervalo. Transcurrieron 30 años antes de que se diera una definición de esta noción.

Es a Borel a quien corresponde el mérito. Borel propuso tomar como medida de $U \subset \mathbb{R}$, U abierto a la suma de las longitudes de sus intervalos abiertos componentes. Luego describió la clase de conjuntos (borelianos) que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos efectuando indefinidamente las operaciones de unión numerable y de diferencias. Indicó que para estos conjuntos se puede definir una medida que posee las propiedades fundamentales de la aditividad contable. O sea, si una sucesión (A_n) está formada por conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, la medida de su unión es igual a la suma de sus medidas.

Esta definición constituye el comienzo de una nueva era en el Análisis ya que sienta las bases para la extensión de la noción de integral que lleva a cabo Lebesgue en los primeros años del Siglo XX. En su tésis, Lebesgue define la medida exterior de un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}$ como el ínfimo de las medidas de los conjuntos abiertos que contiene A. Luego, si I es un intervalo acotado que contiene a A, la medida interior de A es la diferencia entre las medidas exteriores de I y de I - A. De esta forma se obtiene una noción de conjuntos medibles que difiere de la noción dada por Borel únicamente en que Lebesgue considera un conjunto de medida nula.

Esta definición se extiende inmediatamente a R^n y la antigua concepción de la integral definida $\int_a^b f(t)\,dt$ para f acotada y $f \geqslant 0$, como área definida por la curva $f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$; proporciona una extensión inmediata de la integral de Riemann a todas las funciones que están definidas en un conjunto medible según Lebesgue.

Ahora bien, la importancia de la noción de medida de

Lebesgue no es tanto la extensión anterior sino su descubrimiento del teorema del paso al límite bajo el signo integral. Son innumerables los progresos que se obtienen de los resultados de Lebesgue aplicados a problemas de cálculo infinitesimal. Entre ellos podemos mencionar sus aplicaciones a las series trigonométricas, longitud y área a conjuntos más generales que curvas y superficies comunes, y a los nuevos horizontes de la teoría cuya exploración no ha terminado.

Por último, y fundamentalmente, la definición de los espacios L^P y el teorema de Riesz-Fischer que ponían en evidencia el papel que podía tener en el análisis funcional la nueva noción de integral, papel que no haría otra cosa más que crecer con las generaciones posteriores.

2. CONCEPTOS PREVIOS

Como se indicó en la introducción se asumirá el conocimiento de conceptos básicos de la teoría de la medida. En éste capítulo se desarollarán algunos teoremas de convergencia y algunos sobre espacios completos, básicos para la demostración del teorema Riesz-Fischer.

2.1 Teorema 1: Convergencia Acotada:

Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles definidas, sobre un conjunto E de medida finita, y supongamos que existe un número real M $\ni$

$$|f_n(x)| \leq M \qquad \forall x \in E \quad \forall n$$

Si $f(x) = \lim f_n(x) \quad \forall x \in E$

$$\Longrightarrow \quad \int_E f = \lim \int_E f_n$$

Demostración:

Para la demostración previamente enunciaremos los principios de Littlewood:

1. Todo conjunto medible es expresable como la unión finita de intervalos.

2. Toda función medible es casi continua.

3. Toda sucesión convergente de funciones medible es casi uniformemente continua.

Estos tres principios los podemos resumir en el siguiente teorema.

2.2 Teorema 2:

Sea E un conjunto medible de medida finita, y $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles definidas en E. Sea f una función medible de valores reales, tal que

$\forall\ x \in E$ tenemos que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

$\Longrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$ y un $\delta > 0$ existe un conjunto medible $A \subset E$ con medida $mA < \delta$ y un entero N tal que

$$\forall x \notin A \quad y \quad \forall n \geq N$$

entonces $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Demostración:

Sea $\mathcal{G}_n = \{ x \in E \ \ni \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \}$ y hagamos

$$E_n = \bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{G}_n = \{ x \in E \ni |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ para algún } n > N \}$$

tenemos que $E_{N+1} \subset E_N$

y para cada $x \in E$, $\exists\ E_N \ni$

$x \notin E_N \Rightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x) \Rightarrow \cap E_N = \emptyset \Rightarrow \lim mE = 0$

$\therefore$ Dado $\delta > 0$ $\exists N \ni$ $mE_n < \delta$

es decir $m\{ x \in E \ni |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \text{ para algún } n > N \} < \delta$

si definimos a $A = E_N \Rightarrow mA < \delta$

$\square$

Los tres principios de Littlewood establecen que si $\langle f_n \rangle$ converge a f puntualmente entonces $\langle f_n \rangle$ es casi uniformemente convergente a f. El teorema nos demuestra que dada $\varepsilon > 0$ $\exists$ N y un conjunto medible $A \subset E$ con $mA < \frac{\varepsilon}{4M}$ $\ni$ para $n > N$ y $x \in E \setminus A$ tenemos que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2mE}$$

$$\Longrightarrow \left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E f_n - f \right|$$

$$\leq \int_E |f_n - f| = \int_{E\setminus A} |f_n - f| + \int_A |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

entonces $\int_E f_n \longrightarrow \int_E f$ □

2.3 Teorema 3: Lema de Fatou

Si $\langle f_n \rangle$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en casi todas partes de un conjunto E, entonces

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

Demostración:

Sin perder generalidad vamos a asumir que la convergencia es en todas partes, ya qué integrar sobre conjuntos de me medida cero el resultado es cero. Si h una función medible acotada la cuál no es mayor que f, y que se desvanece afuera de un conjunto E' de medida finita. Definimos la función

$$h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\}$$

entonces h_n está acotada por la cota de h, y se desvanece en E'.

Ahora $h_n(x) \longrightarrow h(x) \quad \forall x \in E' \Longrightarrow$

usando el teorema 1

$$\int_E h = \int_{E'} h = \lim \int_{E'} h_n \leq \underline{\lim} \int_E f_n$$

ahora bien, tomando el supremo sobre h obtenemos

$$\int_E f \leq \lim \int_E f_n \qquad \square$$

2.4 <u>Teorema 4: Convergencia Monótona</u>

Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas, y sea $f = \lim f_n$, entonces:

$$\int f = \lim \int f_n$$

<u>Demostración</u>:

Usando el teorema 3, tenemos que

$$\int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

nos falta demostrar que $\overline{\lim}\, f(n) \leq f$

Sabemos que: $f_n \leq f \Rightarrow \int f_n \leq \int f$

esto implica

$$\overline{\lim} \int f_n \leq \lim \int f$$

$$\therefore \quad \overline{\lim} \int f_n \leq \lim \int f \leq \underline{\lim} \int f_n$$

$$\Longrightarrow \lim \int f = \lim \int f_n \qquad \square$$

2.5 Teorema 5: Convergencia Dominada o de Lebesgue

Sea g integrable sobre E y sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de funciones medibles $\ni$ $|f_n| \leq g$ en E y $\forall x \in E$ tenemos que $f(x) = \lim f_n(x) \Longrightarrow$

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

Demostración:

La función $g - f_n$ no es negativa y entonces usando el teorema 3 tenemos:

$$\int_E g - f \leq \underline{\lim} \int_E g - f_n$$

como asumimos que $|f| \leq g$, y f es integrable en E entonces tenemos

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \overline{\lim} \int_E f_n$$

$$\int_E f \geq \overline{\lim} \int_E f_n$$

similarmente, consideremos $g + f_n$ obtenemos

$$\int_E f \leq \underline{\lim} \int_E f_n \qquad \square$$

2.6 Definición:1:

Una sucesión $\langle f_n \rangle$ en un espacio lineal normado se dice converge a un elemento f en el espacio, si dado $\varepsilon > 0$

existe un $N \ni \forall n > N$ tenemos que

$$\| f - f_n \| < \varepsilon$$

Si f_n converge a f escribimos $f = \lim f_n$ o $f_n \longrightarrow f$

2.7 Definición 2:

Dada una sucesión $\langle f_n \rangle$ en un espacio lineal normado diremos que e s de Cauchy si, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \ni \forall n \geq N$ y $\forall m > N$

tenemos que $\| f_n - f_m \| < \varepsilon$

2.8 Definición:

Un espacio lineal normado es llamado completo si toda sucesión de Cauchy converge en el espacio, esto es, si para cada sucesión de Cauchy $\langle f_n \rangle$ en el espacio existe un elemento f elemente del espacio tal que $f_n \longrightarrow f$. Un espacio lineal completo es llamado de Banach.

2.9 Definición 4:

Una serie $\langle f_n \rangle$ en un espacio lineal se dice es sumable a una suma S. Si S pertenece al espacio, y la sucesión de sumas parciales de la serie converge a S, esto es

$$\| S - \sum_{i=1}^{n} f_i \| \longrightarrow 0$$

En este caso se escribe $S = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. La serie $\langle f_n \rangle$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \| < \infty$$

2.10 Teorema 6 : Espacios completos

Un espacio lineal normado X es completo ssi todas las series absolutamente sumables son sumables.

Demostración:

1. $\Longrightarrow$ Sea X completo y $\langle f_n \rangle$ una serie absolutamente sumable de elementos de X $\Longrightarrow$

$$\sum \| f_n \| = M < \infty$$

$\exists\ \forall\ \varepsilon > 0$ una $N \ni \sum_{n=N}^{\infty} \| f_n \| < \varepsilon$

sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ la suma parcial de la serie $\langle f_n \rangle$

entonces para $n \geq m \geq N$ tenemos

$$\| S_n - S_m \| = \| \sum_{i=m}^{n} f_i \| \leq \sum_{i=m}^{n} \| f_i \| \leq \sum_{i=N}^{\infty} \| f_i \| < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ La sucesión $\langle s_n \rangle$ de sumas parciales es de Cauchy y como X es completo entonces $\langle s_n \rangle$ debe converger a a un S elemento del espacio.

2. $\Longrightarrow$ Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada entero k, existe un entero $n_k \ni \| f_n - f_m \| < 2^{-k}$ $\forall n, m > n_k$

y escogemos $n_k \ni$ $n_{k+1} > n_k$

entonces $\langle f_{n_k} \rangle_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\langle f_n \rangle$

y si hacemos $g_1 = f_{n_1}$ y $g_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$

para k 1 obtenemos una serie $\langle g_k \rangle$ cuya k-ésima suma parcial es f_{n_k}. Pero tenemos $\| g_k \| \leq 2^{-k+1}$ si $k > 1$

$$\Longrightarrow \sum \| g_k \| \leq \| g_1 \| + \sum 2^{-k+1} = \| g_1 \| + 1 \Longrightarrow \quad \langle g_k \rangle$$

es absolutamente sumable, y de acuerdo a nuestra hipótesis existe un elemento $f \in X$ al cual converge la suma parcial de la serie convergente. Por lo tanto la subsucesión converge a f.

Ahora tenemos que demostrar que $f = \lim f_n$

Como $\langle f_n \rangle$ es una sucesión de Cauchy dado $\varepsilon > 0$ existe un $N_\ni$

$$\|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\ n,m > N$$

como $f_{n_k} \longrightarrow f \quad \exists\, k_\ni \ \forall\, k \geq K$

$$\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

escojemos k de tal forma que $k > K$ y $n_k \geq N$

$$\Longrightarrow \|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall\, n > N \qquad \|f_n - f\| < \varepsilon \Longrightarrow f_n \longrightarrow f \quad \square$$

2.11 Lema 1:

Sean α y β dos números reales no negativos, y supongamos que $0 < \lambda < 1$. Entonces $\alpha^{\lambda} \cdot \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \cdot \alpha + (1-\lambda)\beta$ cumpliendose la igualdad solamente cuando $\alpha = \beta$

Demostración:

Considere la función φ definida para números reales no negativos t. por

$$\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^{\lambda}$$

entonces $$\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1} = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$$

como $\lambda - 1 < 0 \Rightarrow \varphi'(t) < 0$ para $t < 1$ y

$$\varphi'(t) > 0 \text{ para } t > 1$$

Entonces para $t \neq 1$ tenemos que

$$\varphi(t) < \varphi(1) = 0 \Longrightarrow (1-\lambda) + \lambda(t) \geq t^{\lambda}$$

la igualdad se cumple solamente cuando $t = 1$

Si $\beta \neq 0$ el lema se demuestra usando $\frac{\alpha}{\beta}$ por t, si $\beta = 0$ el lema es trivial.

2.12 Definición 5:

Sea $p > 0$, $p \in \mathbb{R}$. Una función medible definida en $[0,1]$ se dice pertenece al espacio $L^p = L^p[0,1]$ si

$$\int_0^1 |f|^p < \infty$$

3. ENUNCIADO Y DEMOSTRACION DEL TEOREMA

3.1 Teorema de Riesz-Fischer.

El espacio L^P es completo.

3.2 Demostración del teorema.

De acuerdo con la definición de espacios completos, tenemos que demostrar que L^P es un espacio lineal normado y que toda sucesión de Cauchy converge en el espacio L^P. Bastará con que demostremos que es lineal normado a través del uso del teorema 2.10, para lo cual vamos a dividir la demostración en tres propiedades: L^P es un espacio lineal; L^P es un espacio lineal normado; y toda serie absolutamente sumable es sumable.

3.2.1 L^P es un espacio lineal. Vamos a demostrar la cerradura de L^P respecto de la suma. Sean $f, g \in L^P$, por definición:

$$\int_0^1 |f|^p < \infty \quad y \quad \int_0^1 |g|^p < \infty$$

queremos verificar que

$$(f+g) \in L^p$$

Es decir,

$$\int_0^1 |f+g|^p < \infty$$

Tomemos

$$\int_0^1 |f+g|^p,$$

usando

$$|f+g|^p \le 2^p\left[|f|^p + |g|^p\right],$$

tenemos que:

$$\int_0^1 |f+g|^p \le 2^p \int_0^1 \left[|f|^p + |g|^p\right] \le 2^p \int_0^1 |f|^p + 2^p \int_0^1 |g|^p < \infty$$

□

A continuación vamos a probar que si

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f \in L^p,$$

entonces: $\alpha f + \beta f \in L^p$

$$\int_0^1 |\alpha f|^p = \int_0^1 |\alpha|^p |f|^p = |\alpha|^p \int_0^1 |f|^p < \infty \Rightarrow ; \alpha f \in L^p$$

por lo anterior,

$$\alpha f + \beta f \in L^p$$

□

Todas las demás propiedades son heredadas de la integral.

3.2.2 L^p es un espacio lineal normado. Para demostrar esta propiedad, vamos a definir para una función

$f \in L^p$ la función $\|f\|$ con $\|f\| = \|f\|_p = \left\{\int_0^1 |f|^p\right\}^{1/p}$ (1)

Verificaremos que $\|f\|$ es una norma; es decir, que cumple con las siguientes propiedades:

3.2.2.1 $\|f\|=0$ ssi $f=0$

3.2.2.2 $\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|$

3.2.2.3 $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$

No es cierto que $\|f\|=0$ ssi $f=0$. Para corregir esta anomalía y lograr que 3.2.2.1 exprese la primera propiedad de una norma, consideraremos a L^P, no como un conjunto de funciones, sino como un conjunto de clases de equivalencia de funciones.

Si definimos en $L^P = \left\{ f \mid \int_0^1 |f|^p < \infty \right\}$ la relación $f \sim g$ ssi $f = g$ en casi todas partes (c.t.p.); es decir que

$$m\left\{ x \mid f(x) \neq g(x) \right\} = 0 .$$

Si $f = g$ en c.t.p., se dice que f y g son esencialmente iguales. Esta es una relación de equivalencia, y se tiene que si $f \sim g$ entonces $\|f\|_p = \|g\|_p$; es decir, $\| \ \|_p$ está bien definida en el conjunto de clases de equivalencia.

Además, si llamamos $[f]$ a la clase de equivalencia de f, 2.1 nos dice que:

$$\|[f]\| = 0 \text{ ssi } [f] = 0 .$$

Para demostrar la segunda propiedad, tomemos la definición:

$$\|\alpha f\|_p = \left\{ \int_0^1 |\alpha f|^p \right\}^{1/p} = \left\{ |\alpha|^p \int_0^1 |f|^p \right\}^{1/p} = |\alpha| \left\{ \int_0^1 |f|^p \right\}^{1/p} = |\alpha| \|f\|_p$$

La demostración de la tercera propiedad equivale a demóstrar la desigualdad de Mikowski. Previamente demostraremos la desigualdad de Hölder.

3.3 Desigualdad de Hölder.

Sean p,q dos números reales positivos, tal que la suma de sus inversos sea igual a uno y, si f,g son dos funciones $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $f\cdot g \in L^1$, y

$$\int |f\cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_p$$

La igualdad se cumple ssi existen constantes

$$\alpha\cdot|f|^p = \beta\cdot|g|^q$$

3.3.1 Demóstración del primer caso. $p = 1$ y $q = \infty$

Sea $f \in L^1 \Longrightarrow \int |f| < \infty$

y sea $g \in L^\infty$, g es una función esencialmente acotada y

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup}\,|g(t)| < \infty$$

Tomemos ahora

$$\int |f(t)|\,|g(t)| \leq \|g\|_\infty \int f(t) \leq \|g\|_\infty \cdot \|f\|$$

3.3.2 Demostración del segundo caso. $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$

Vamos a suponer el caso en que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.

Si no fuera este el caso, podríamos normarlo. Consideremos

$$\alpha = |f(t)|^p \ , \ \beta = |g(t)|^q$$

Ahora, aplicamos el Lema (2.11)

$$\left\{|f(t)|^p\right\}^{1/p} \cdot \left\{|g(t)|^q\right\}^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q \qquad (1)$$

Integrando ambos lados

$$\int |f| \cdot |g| \leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q$$

recordando que

$$\|f\|^p = 1 \implies \left\{\int_0^1 |f|^p\right\}^{1/p} = 1 \implies \int_0^1 |f|^p = 1$$

y

$$\left\{\int_0^1 |g|^q\right\}^{1/q} = 1 \implies \int_0^1 |g|^q = 1$$

de donde

$$\int_0^1 |f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ahora, $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$ y recordando que para ambos

$$\|f\|_p = \|g\|_q = 1 \implies \int |fg| = \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q}\int |f \cdot g|$$

$$= \int \frac{|f| \cdot |g|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} = \int \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq 1$$

$$\therefore \int |f| \cdot |g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

La igualdad se cumple si se cumple para (1), pero entonces tendríamos que: $|f(t)|^p = |g(t)|^q$ y se cumpliría en (2) si se cumple en todas partes en (1).

Es decir:

$$\frac{|f(t)|}{\|f\|_p}=\frac{|g(t)|}{\|g\|_q}\Rightarrow |f(t)|\cdot\|g\|_q=|g(t)|\cdot\|f\|_p \quad ,$$

lo que demuestra la segunda parte del teorema □

3.4 Teorema: Desigualdad de Mikowski.

Sean f,g dos funciones; $f,g\in L^p$; la suma de $(f+g)\in L^p$; y, además, cumple con que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Demostración:

La primera parte del teorema ya fue demostrado en 3.2.1 así que, a continuación, demostraremos la inecuación. Sabemos por definición que para p, $1\leq p\leq\infty$

$$\|f+g\|_p \leq \left\{\int_0^1 |f+g|^p\right\}^{1/p}$$

Vamos a dividir la demostración del teorema en dos casos.

3.4.1 Primer caso. p = 1

Aplicando la definición:

$$\|f+g\| \leq \int_0^1 |f+g| \leq \int_0^1 |f(t)| + \int_0^1 |g(t)| \leq \|f\| + \|g\|$$

3.4.2 Segundo caso. $1\leq p<\infty$

Vamos a trabajar la integral y después l p-esima raíz:

$$\int_0^1 |f+g|^p \leq \int_0^1 |f+g|^{p-1}\cdot|f+g| \leq \int_0^1 |f+g|^{p-1}\cdot|f(t)| + \int_0^1 |f+g|^{p-1}\cdot|g(t)| \qquad (1)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder en ambas integrales, tenemos:

$$\int_0^1 |f+g|^{p-1} \cdot |f| \leq \|f+g\|_q^{p-1} \cdot \|f\|_p \qquad (2)$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\int_0^1 |f+g|^{p-1} \cdot |g| \leq \|f+g\|_q^{p-1} \cdot \|g\|_p \qquad (3)$$

A continuación trabajaremos la expresión $\|f+g\|_q^{p-1}$

$$\|f+p\|_q^{p-1} = \left\{\left(\int_0^1 |f+g|^{p-1}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Ahora bien, $(p-1)\cdot q = p$, entonces

$$\left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q = \left\{\int_0^1 |f+g|^p\right\}^{1/q} = \left[\left\{\int_0^1 |f+g|^p\right\}^{1/p}\right]^{p/q} = \|f+g\|^{p/q} \quad (4)$$

Substituyendo (4) en (2) y (3), obtenemos:

$$\left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \cdot \|f\| = \|f+g\|_p^{p/q} \cdot \|f\|_p$$

$$\left\| |f+g|^{p-1} \right\|_q \cdot \|g\| = \|f+g\|_p^{p/q} \cdot \|g\|_p$$

Y si ahora substituimos en (1), tenemos:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f+g\|_p^{p/q} \cdot \left[\|f\|_p + \|g\|_p\right]$$

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{como } p-\frac{p}{q} = 1$$

$\Longrightarrow$

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

$\square$

Ahora ya hemos demostrado que la definición dada en 3.2.2 representa una norma en L^p para $1 \leq p < \infty$.

Para el caso en que $p = \infty$, tenemos que L^∞ es el espacio formado por todas las funciones esencialmente acotadas en el intervalo $[0,1]$. Es decir, aquellas funciones que son acotadas excepto en un subconjunto de medida cero.

L^∞ es un espacio lineal y se convierte en normado si definimos:

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f(t)| = \inf\left\{M, m\left(t : f(t) > M, 0\right)\right\}.$$

3.2.3 Toda serie absolutamente sumable es sumable. En L^p a algún elemento de L^p.

3.2.3.1 Demostración del primer caso. $1 \le p < \infty$

Primero demostraremos que una serie absolutamente sumable en L^p es sumable en L^p.

Sean $\langle f_n \rangle$ una sucesión en L^p con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < M$$

y definamos la sucesión g_n como:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

Usando la inecuación de Mikowski, tenemos:

$$\|g_n(x)\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|\right\| \le \sum_{k=1}^{n} \|f_k(x)\| < M \qquad (1)$$

Recordando la definición de $\| \quad \|$

$$\|g_n^p\| = \left\{\int_0^1 |g_n|^p\right\}^{1/p}$$

Por lo tanto:

$$\|g_n\|^p = \int_0^1 |g_n|^p \leq M^p$$

Para cada x la sucesión $\langle g_n(x) \rangle$ es una sucesión creciente de números reales. Por lo tanto, converge a un número real g(x). Las funciones $g_n(x)$ son medibles y $g(x) > 0$, por lo que $\langle g_n(x) \rangle$ cumple con todas las condiciones necesarias para aplicar el lema de Fatou,

$$\int_0^1 g^p \leq M^p$$

De ahí que g^p es integrable y g(x) es finita para casi toda x.

Para todas aquellas x que cumplen con lo anterior, es decir aquellas para las cuales g (x) es finita, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

es una serie absolutamente convergente de números reales y, por lo tanto, debe ser sumable a un número real s(x). Si ahora definimos s(x) = 0 para todas aquellas x para las cuales $g(x) = \infty$, entonces tenemos definida la función:

$$S(x) = \begin{cases} \lim g_n(x) & g(x) < \infty \\ 0 & g(x) = \infty \end{cases}$$

Hemos definido una función s(x) la cual es el límite de la suma parcial

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

en casi todas partes.

Vamos a demostrar ahora que s(x) pertenece a L^p. Tenemos que es medible. Por definición:

$$|S_n(x)| \leq g(x)$$

Por lo tanto,

$$|s(x)| \leq g(x)$$

lo que implica que s(x) es integrable en $[0,1]$ y finita, lo que demuestra que s(x) pertenece a L^p.

Nos queda por demostrar ahora que la serie

$$\sum_{=1}^{\infty} f(x)$$

tiene como suma a s. Tomemos

$$|S_n(x) - S(x)|^p \leq (|S_n(x)| + |S(x)|)^p \leq (g(x) + g(x))^p = 2^p g(x)^p$$

$2^p g(x)$ es integrable y $|S_n(x) - S(x)|$ converge a 0 para casi todo x. Entonces, usando el teorema de convergencia de Lebesgue, obtenemos:

$$\int |S_n(x) - S_n(x)|^p \longrightarrow 0$$

Aplicando ahora la definición de $\| \ \|$

$$\|S_n(x) - S(x)\| = \left\{ \int_0^1 |S_n(x) - S(x)|^p \right\}^{1/p} \longrightarrow 0$$

lo que demuestra que $\|S_n - S\| \to 0$. Pero entonces, la suma parcial

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow S(x)$$

converge a $s(x)$, de donde $\langle f_n(x) \rangle$ tendrá como suma a s en L. $\square$

Con todo lo anterior hemos demostrado que L es completo para $1 < p < \infty$ falta demostrar para $p = \infty$

Demostración para $p = \infty$

Sea $\langle f_n \rangle$ una sucesión de Cauchy definida en L^∞. Sea E el conjunto de todas las x que cumplen con la siguiente propiedad:

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| > \| f_n - f_m \|_\infty \quad \text{para algún } n, m$$

$$\Rightarrow \quad E = 0$$

Ahora bien $\forall \; y \in \tilde{E}$

$$| f_n(y) - f_m(y) | < \| f_n - f_m \|_\infty \quad \text{es decir}$$

la convergencia de la sucesiones es uniforme en el complemento de E.

Hagamos
$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in E$$
$$f(x) = \lim f_n \qquad \forall x \in \tilde{E}$$

$\Rightarrow f \in L^\infty$ y además es el límite de $\langle f_n \rangle$ lo que nos demuestra que L^∞ es completo $\square$

El teorema de Riesz-Fischer queda demostrado. $\square$

4. CONCLUSIONES

Desde principios de este siglo, la completitud del espacio métrico en el cuál se trabaja, ha resultado ser fundamental en los problemas de análisis. Por lo general la solución a los distintos problemas que se plantean en análisis son dados por sucesiones de soluciones aproximadas. La convergencia de esas sucesiones es entonces de capital importancia para la resolución del problema deseado.

Ejemplos: Ecuaciones diferenciales $C[0,1]$, solución al problema de la cuerda vibrante.

Operadores compactos son operadores que por su propiedad de compactos son más fáciles de analizar y por lo tanto han sido estudiados con más detalle.

Por las razones anteriores el teorema de Riesz-Fischer es sumamente importante, ya que muestra que los espacios L^p son espacios en los cuales los teoremas de análisis asociados con espacios métricos completos pueden aplicarse en ellos.

Además el teorema nos provee de una clase de ejemplos de espacios de Banach, suficientemente amplia y variada, espacios que pueden ser usados como objetos concretos en cualquier investigación sobre geometría de espacios de Banach.

5. BIBLIOGRAFIA

Bourbaki, Nicolás. ELEMENTOS DE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS.
1972 Traducido del francés por Jesús Hernández. Madrid: Editorial Alianza. 342 pp.

Lang, Serge. REAL ANALYSIS. Massachusetts, U.S.A.: Addison-
1969 Wesley Publishing Company, Inc. 476 pp.

Royden, H. L. REAL ANALYSIS. 2nd. edition. New York, U.S.A.:
1968 Collier-Macmillan Publishers. 349 pp.