

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Modelos Físicos del Crimen

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por Paolo
Doménico Marsicovetere Fanjul para optar al grado académico de
Licenciado en Física

Guatemala,
2020

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Modelos Físicos del Crimen

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por Paolo
Doménico Marsicovetere Fanjul para optar al grado académico de
Licenciado en Física

Guatemala,
2020

Vo.Bo.:

(f) 
Dr. Juan Adolfo Ponciano

Tribunal Examinador:

(f) 
Dr. Juan Adolfo Ponciano

(f) 
MSc. Zaida Urrutia

(f) 
MSc. Juan Diego Chang

Fecha de aprobación: Guatemala, 6 de noviembre de 2020.

Conforme la humanidad ha madurado, los desafíos a los que se enfrenta también lo han hecho. Estos abarcan desde problemas circunstanciales que afectan a sectores de la población -por ejemplo, conflictos agrarios, afluencia vehicular o falta de empleo, hasta cuestiones de vital importancia para la subsistencia de la sociedad como lo son su administración política y socioeconómica, la sostenibilidad de recursos naturales y ecosistemas, brotes epidémicos o el pleno cumplimiento de los derechos de todas las personas.

Si bien cada uno de estos desafíos tradicionalmente han sido objeto de estudio sus propias ramas de la ciencia, su creciente complejidad requiere de un abordaje integral e interdisciplinario para encontrarles solución. Particularmente para los problemas sociales y de interés público y cotidiano, el abordaje desde las ciencias naturales tiene el potencial de innovar en estos estudios. Este trabajo está dedicado a la idea de que podemos encontrar respuestas desde la diversidad y que la física puede llegar a abrir la puerta hacia algunas de ellas.

Me considero una persona muy privilegiada. He tenido la oportunidad de estudiar para una licenciatura en física y de ello adquirir una herramientas para lograr los objetivos que me plantee en el futuro, tanto como una apreciación del universo que me rodea. Agradezco a la Universidad del Valle por otorgarme esta oportunidad y al Departamento de Física le agradezco el apoyo en el transcurso de ello y, particularmente, por haberme enseñado a aprender.

Agradezco a los catedráticos que desinteresadamente me han impulsado y que me han tenido una (enorme) paciencia en distintas etapas. Muchas gracias a aquellos y aquellas que sienten una gran y contagiosa pasión por lo que enseñan. Muchas gracias a quienes hoy, además de ser guías, son amistades.

Soy muy privilegiado, también, en rodearme de las amistades -seres queridos- que tengo. Sin duda alguna, son una fuente de risas, apoyo e identidad. Sobre todo, son ellas quienes mediante su ser y su actuar me inspiran a seguir soñando un mundo mejor. A seguir creciendo y apropiándome de la persona más íntegra que pueda ser. Gracias por tanto y por lo que viene.

Resalto entre mis seres queridos a mi padre quien me encaminó a mucho de lo que soy hoy, a mis hermanas que me cuidan y acompañan y a mi madre que también es mi mejor amiga. Gracias.

Prefacio	III
Lista de figuras	VII
Resumen	VIII
1. Introducción	1
2. Objetivos	3
2.1. Objetivo general	3
2.2. Objetivos específicos	3
3. Justificación	4
4. Marco teórico: Métodos de Monte Carlo	6
4.1. Introducción a métodos de Monte Carlo	6
4.2. Conceptos de probabilidad	8
4.2.1. Variables aleatorias	8
4.2.2. Funciones de probabilidad	8
4.2.3. Distribución probabilística uniforme, de Poisson y normal	10
4.3. Generadores de números pseudo-aleatorios	10
4.4. Caminata aleatoria	11
4.4.1. Caminata aleatoria simple	11
4.4.2. Caminatas aleatorias simples y difusión	12
4.4.3. Caminatas aleatorias sesgadas	15
4.5. Cadenas de Markov y algoritmos de Monte Carlo markovianos	15
4.5.1. Cadenas de Markov	15
4.5.2. Algoritmo de Metropolis-Hastings	17
5. El crimen desde la física	20
5.1. Movimiento browniano	20
5.1.1. Difusión de partículas	20
5.2. Difusión espacial del crimen	22
5.3. El crimen como epidemia	26
5.3.1. Modelo de conducta colectiva y mecánica estadística	26
5.3.2. ‘Contagio’ de crimen	30
5.3.3. SIR	33

5.4. Proceso puntual auto-activado y victimización repetida	35
5.4.1. Proceso puntual auto-activado	35
5.4.2. Victimización repetida	39
6. Modelos de difusión de crimen	41
6.1. Modelo discreto de difusión de crimen	41
6.1.1. Construcción de modelo discreto de difusión de crimen	41
6.1.2. Implementación de modelo discreto de difusión del crimen	45
6.1.3. Análisis del modelo discreto de difusión del crimen	51
6.2. Modelo continuo de difusión de crimen	56
6.2.1. Derivación de modelo continuo de difusión de crimen	56
6.2.2. Implementación de modelo continuo	58
6.2.3. Análisis de modelo continuo	64
7. Posibles conexiones con modelo físico de Ising	72
7.1. Modelo de Ising	72
7.1.1. Marco teórico	72
7.1.2. Vínculo con estudio del crimen	74
7.1.3. Modelos de Ising cinéticos y ecuación de Ginzburg-Landau	78
8. Conclusiones	83
9. Recomendaciones	85
10. Bibliografía	87
11. Anexos	93

Lista de figuras

4.1. Gráfica Θ - X de la ecuación que describe si las agujas del experimento de Comte logran atravesar o no la ranura.	7
4.2. cdf de la cantidad de caras resultantes al tirar dos monedas.	9
4.3. Ilustración de caminata aleatoria en una dimensión centrada en 0 luego de tres pasos dados por lanzamientos de una moneda no truncada que puede caer en cara (C, avanza una unidad) o escudo (E, retrocede una unidad).	12
4.4. Ilustración de la posición en intervalos resultante de partículas realizando caminatas aleatorias simples en dos dimensiones.	13
4.5. Ilustración de los trayectos que toma una partícula al hacer 5000 caminatas aleatorias en una dimensión.	14
4.6. Una cadena de Markov hipotética de 4 estados.	16
4.7. Diagrama de flujo de algoritmo Monte Carlo de Metropolis-Hastings.	19
5.1. Aumento en tasa de homicidios en Pittsburg entre 1991 y 1995 por: (a) población joven vinculada a pandilla; (b) población joven no vinculada a pandilla y (c) población no joven.	24
5.2. Aumentos contagiosos de expansión de homicidios entre 2005 y 2010, donde los puntos por color muestran el año en el que cada municipio llegó a tener una alta incidencia criminal a partir de sus vecinos.	25
5.3. Modelo SIR de pandillas.	34
5.4. Un hipotético proceso puntual activado en $t \in [0, 10]$, con ilustración de eventos de fondo y generaciones de réplicas.	36
5.5. Kernel Density Estimation para observaciones de partículas de CO2 en el año 2008.	38
5.6. Comparación de bandas temporales de eventos sísmológicos y criminales.	40
6.1. Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen.	44
6.2. Un nodo de la rejilla que representa un sitio del área del sistema.	45
6.3. Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen, desarrollado por bucles.	47
6.4. Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen, vectorizado.	49
6.5. Corrida de modelo discreto (a).	50
6.6. Corrida de modelo discreto (b).	50
6.7. Corrida de modelo discreto (c).	51
6.8. Corrida de modelo discreto (d).	51
6.9. Mapa de calor ilustrativo de hurto en la ciudad de Vancouver, extraído el 29 de junio de 2020 de https://www.geodose.com/2017/11/qgis-heatmap-using-kernel-density.html	55
6.10. Corrida de modelo continuo (a).	63
6.11. Corrida de modelo continuo (b).	63

6.12. Corrida de modelo continuo (a).	64
6.13. Corrida de modelo continuo (d).	64
6.14. Ilustración de diferentes condiciones en el modelo continuo de difusión de crimen que llevan a un estado de equilibrio uniforme (D) o con hotspots de crimen (E).	70
7.1. Simulación del modelo de Ising en dos dimensiones con el algoritmo de Metrópolis Hastings. Cada fila muestra la progresión de una misma cadena con parámetros $J = 1$ y $H = 0$ pero con temperaturas distintas. La primera fila tiene una temperatura $T = 1$, la segunda $T = 2.5$ y la tercera $T = 5$.	76
7.2. Simulación del modelo de Ising en dos dimensiones con el algoritmo de Metropolis Hastings con un campo magnético con variaciones locales. Se corre el modelo a una misma cadena bidimensional de espines a tres temperaturas distintas con una constante de acoplamiento $J = 1$ al igual que en 7.1, pero esta vez también están sujetas a un campo magnético con variaciones locales. Este campo magnético toma valores de $H = \pm 5$ y su distribución se muestra en la Figura de hasta la izquierda, mientras que las otras tres gráficas muestran el resultado de correr el modelo luego de un promedio de 500 iteraciones por cada nodo a las tres temperaturas distintas.	77
7.3. Promedio de simulaciones del modelo de Ising en dos dimensiones. Partiendo de una misma cadena inicial, se corrió 10 veces el algoritmo de Metropolis Hastings bajo los mismos parámetros: $J = 1, H = 0, T = 2.5$. Luego, se promediaron los valores que tuvieron las 10 corridas en tres etapas de su progresión y estos promedios se muestra en la figura.	77
7.4. Simulación de la ecuación simplificada de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo (7.18), mostrando la transición de una substancia ferromagnética desde una fase desordenada hacia un estado de equilibrio ordenado, obviando la función de ruido θ .	82
11.1. Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short y cols. (2008), con parámetros $\eta = 0.2, \gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.	96
11.2. Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short y cols. (2008), con parámetros $\eta = 0.2, \gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.	97
11.3. Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short y cols. (2008), con parámetros $\eta = 0.2, \gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.	97
11.4. Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short y cols. (2008), con parámetros $\eta = 0.2, \gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.	97
11.5. Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen continuo de Short y cols. (2008), con parámetros: (a), (b) y (c).	101

La física, en su condición de ciencia natural con multitudes de ramas y objetos de estudio en todo el universo, ha acumulado un gran conjunto de conceptos, formalismo matemático y modelos científicos para entender fenómenos de la naturaleza. Este conocimiento, además de ser útil para el continuo progreso de la física como disciplina y para el resto de la humanidad por medio de los descubrimientos e inventos tecnológicos que surgen de él, tiene el potencial de aplicarse a otras áreas de la ciencia -particularmente en fenómenos cotidianos de interés público. Para ejemplificar el aporte que la física puede brindar para la resolución de problemáticas sociales, este trabajo se centra en replicar un modelo para caracterizar el robo en casas de un contexto urbano (Short y cols., 2008) y explora otros modelos del crimen basados en modelos físicos. El capítulo 1 hace una pequeña introducción a la idea de aplicar el conocimiento de física a otras disciplinas, el capítulo 2 describe los objetivos a alcanzar con los modelos de crimen desde la física, mientras que el capítulo 3 justifica la elección de trabajar con modelos de crimen. El capítulo 4 hace un desarrollo teórico de herramientas y conceptos de estadística y el capítulo 5 desarrolla algunos antecedentes y conceptos que llevan al modelo central de este trabajo, fungiendo como breve estado del arte de crimen desde la física. El capítulo 6 desarrolla el modelo de crimen central, desarrollando su construcción, implementando su simulación y analizándolo, mientras que el capítulo 7 tiene propuestas para otros modelos del crimen basados en el modelo de Ising. Los capítulos 8 y 9 cierran con recomendaciones y conclusiones finales.

«La mecánica estadística es un formalismo cuyo objetivo es explicar las propiedades físicas de la materia en bulto según la dinámica de sus componentes microscópicos» (Pathria, 1996), acompañada de observaciones empíricas y experimentación. Describe sistemas macroscópicos basándose en la mecánica de la vasta cantidad de partículas que los componen (del orden del número de Avogadro $\sim 10^{23}$), acompañado de observaciones y experimento. Siendo este el caso, la mecánica estadística se basa en estadística para tratar con esta inmensidad de grados de libertad y en la mecánica analítica para modelar sistemas en coordenadas generalizadas.

Vista desde otra perspectiva, la mecánica estadística se desarrolla para estudiar fenómenos que están conformados por muchos agentes individuales y posee un amplio marco conceptual y metodológico construido alrededor de este propósito. Uno de los fenómenos que ha estudiado históricamente es el movimiento browniano: los pequeños y rápidos movimiento aparentemente arbitrarios de partículas suspendidas en un fluido debido a colisiones con las partículas del fluido. La dinámica que siguen estas partículas brownianas puede emplearse para modelar el crimen urbano.

Una de las teorías criminológicas más aceptadas es la Teoría de las Actividades Rutinarias (L. E. Cohen y Felson, 1979). Esta afirma que, fuera del crimen que desde su concepción tiene un objetivo específico (como el crimen pasional o el relacionado a conflicto entre grupos), la mayoría de los actos criminales suceden cuando convergen tres factores en un momento y lugar: presencia de posibles ofensores, existencia de víctimas oportunas y ausencia de guardianes que puedan evitar el crimen (D'Orsogna y Perc, 2015). Los últimos dos factores son equivalentes a una proporción variable entre riesgo y recompensa; son un nivel de atracción para que un posible ofensor que se encuentra en ese lugar y momento cometa un crimen (Short *et al.*, 2008).

Otros factores que aumentan dicha atracción son los crímenes ocurridos anteriormente. La Teoría de la Ventana Rota (Wilson y Kelling, 1982) indica como signos aparentemente insignificantes de desorden social o previa actividad criminal ocasionan un alza en la ocurrencia de nuevos crímenes (D'Orsogna y Perc, 2015). Por otro lado, el fenómeno de victimización repetida (*repeat victimization* en inglés) se debe a que los ofensores tienden a regresar a sitios donde ya cometieron una transgresión por un período de tiempo (Fisher y Lab, 2010) - esto por el aprendizaje adquirido en los eventos anteriores. Este fenómeno de victimización repetida es análogo a las réplicas que se producen luego de un terremoto en el campo de estudio de la sismología (Mohler, Short, Brantingham, Schoenberg, y Tita, 2011).

La actividad criminal ilustrada por estas teorías, entonces, se puede modelar cuantitativamente

como potenciales ofensores realizando paseos aleatorios sujetos a un sesgo ocasionado por la atracción de cada sitio (que varía según el riesgo-recompensa inherente del mismo) y por los crímenes acontecidos anteriormente (Short *et al.*, 2008). Ya que la actividad criminal es sesgada por la atracción y la atracción aumenta con crímenes ocurridos, el sistema tiene una dinámica compleja no lineal. Este modelo, además, ilustra agentes paseando arbitrariamente con un sesgo- son partículas con movimiento browniano sujetas a una fuerza externa.

Este trabajo pretende realizar una simulación de la actividad criminal según este modelo de agentes sujetos a un campo de atracción basándose en el marco conceptual desarrollado por la mecánica estadística de partículas brownianas, siguiendo el procedimiento establecido por Short *et al.* (2008).

2.1. Objetivo general

Aplicar métodos de mecánica estadística para caracterizar el fenómeno social del crimen y resaltar el potencial que posee la física para el estudio de problemáticas sociales.

2.2. Objetivos específicos

- Construir un modelo discreto basado en procesos estocásticos para caracterizar el movimiento de criminales dentro de un campo de atracción, congruente con las teorías sociales y observaciones de datos reales de crimen.
- Generalizar el modelo discreto a un modelo continuo que caracterice al crimen de una forma probabilística empleando los principios de movimiento browniano y difusión de partículas.

La física estudia la materia, la energía, el espacio-tiempo y sus interacciones. Esto se logra, adicional a la observación y experimentación, mediante la formulación de principios, análisis de fenómenos y resolución de problemas complejos de carácter cuantitativo- todas herramientas de estudio que pueden ser aplicadas a innumerables temáticas y que presentan una gran contribución a la sociedad.

A partir de la segunda mitad del siglo XX, diversas disciplinas y estudios - por ejemplo, las finanzas y economía - obtienen significantes avances gracias a la inclusión de sistemas complejos, sistemas no lineales y sistemas estocásticos que se habían desarrollado previamente en la física, especialmente en mecánica estadística. Ha sido tanta la contribución de la física hacia la economía y las finanzas que se acuñó el término 'Econofísica' para describir el campo de estudio de estas por medio de métodos y conceptos originalmente físicos (Mantegna, 2000). Más allá de economía y finanzas, aplicaciones de la física pueden ser empleadas para estudiar fenómenos sociales desde transmisión de ideas terroristas (Galam, 2012) y toma de decisiones colectivas (Bahr y Passerini, 1998a, 1998b) hasta brotes epidémicos de enfermedades en Guatemala (Ponciano, Chang, y Quiroa, 2018).

En búsqueda de resaltar la contribución que puede brindar la física a la sociedad guatemalteca para comprender y analizar problemáticas latentes, se decide trabajar con actividad criminal urbana por diversas razones. La primera razón es el gran impacto que posee la violencia e inseguridad en los guatemaltecos. Solo entre julio de 2018 y junio de 2019, se registraron 66.53 homicidios por cada 100,000 habitantes en el municipio de Guatemala (Mendoza, 2019). Como referencia, esta tasa es alrededor de tres veces mayor que la tasa de homicidios de la región más violenta del mundo- la tasa de Latinoamérica con 23.6 homicidios anuales por cada 100,000 habitantes (Oficina de las Naciones Unidas contra la Droga and el Delito, 2019). Datos de la Encuesta Nacional de Condiciones de Vida 2014 (Instituto Nacional de Estadística, 2016) revelaron que, en el departamento de Guatemala, el porcentaje de personas que en un año fueron víctimas de un crimen o que alguien de su hogar lo fue es de: 13.6 % para robo, 12.0 % para asalto, 2.22 % para extorsión y 1.3 % para agresión física, entre otros. Solo en el 2013, por lo menos uno de cada 10 hogares fue víctima directa de actividad criminal.

Estos son tan solo indicadores de la actividad criminal en el territorio de Guatemala y la relevancia que puede tener en la vida de sus habitantes en el día a día. Incluso, Encuestas de Victimización y Percepción de Inseguridad en el municipio de Guatemala (Programa de Seguridad Ciudadana and Prevención de la Violencia del PNUD Guatemala, 2007), posicionan a la inseguridad como el mayor

problema percibido por los habitantes del municipio de Guatemala- asiento de la metrópolis más grande de Centroamérica.

Otra razón por la que se decide trabajar con la actividad criminal son los antecedentes con respecto al estudio del crimen desde la física. Además de ser una problemática relevante para la sociedad, los patrones de crimen son interesantes desde un punto de vista fenomenológico: suele concentrarse en cúmulos espacio temporales, surgen *hotspots* - o zonas calientes, donde la densidad probabilística de crimen es relativamente mayor-, dependen de la dinámica de ofensores tanto como de víctimas, existen factores de riesgo que lo impulsan - tanto actores como circunstancias - y existen muchas métricas para abordarlo. No es sorpresa, entonces, que existan ya estudios del crimen desde la física y, particularmente, desde la mecánica estadística. J. Cohen y Tita (1999) estudian a la propagación de actividad criminal como un proceso de difusión probabilístico. Myers (2000) estudia la ocurrencia de amotinamientos como si se tratasen de 'ondas' de violencia y epidemias. Sooknanan, B., y Comissiong (2013) describen al esparcimiento de pandillas criminales como una epidemia contagiosa. Barbaro y D'Orsogna (2013) estudiaron la formación de pandillas a través de estudiar el grafiti y grafiteros como un ensamble de espines en una malla. Magoga (2014) hizo un caso de estudio de la violencia comparado con el estado de derecho en Guatemala, El Salvador, Honduras, México y Colombia, donde hace un análisis estadístico, factorial y de conglomerados. Además, en la última década, se han realizado muchos estudios acerca la naturaleza de la victimización repetida y victimización cercana repetida, con los propósitos de entender la naturaleza espacio-temporal de los patrones del crimen, optimizar esfuerzos para combatirlos y prevenir daños Chen y Kurland (2020), incluido un estudio por Mohler *et al.* (2011) donde se analiza este fenómeno desde el marco metodológico y conceptual de la sismología. D'Orsogna y Perc (2015) realizaron una compilación de estudios de actividad criminal desde la física estadística, donde figura el trabajo *A Statistical Model of Criminal Behaviour* de Short *et al.* (2008) cuyo algoritmo para caracterizar la actividad criminal es empleado en este trabajo.

Por último, en Guatemala existen organizaciones e instituciones como el Instituto Nacional de Ciencias Forenses (INACIF), el Observatorio de Violencia de Diálogos, el Grupo de Apoyo Mutuo (GAM) o el propio Ministerio de Gobernación que recogen datos de crímenes en el país. Estos datos abren la posibilidad de aterrizar los modelos teóricos al estudio del fenómeno real y así aportar soluciones al mismo. «Predecir el crimen es una condición necesaria para su prevención» (Farrell y Pease, 2014).

4.1. Introducción a métodos de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo son algoritmos que se emplean para analizar fenómenos por medio de la generación de números aleatorios:

$$y = f(X_{RNG}), \quad (4.1)$$

donde X_{RNG} denota a una variable aleatoria. Estos son especialmente útiles para modelar procesos estocásticos, fenómenos con componentes arbitrarios o encontrar aproximaciones a soluciones de problemas analíticamente complejos. Por ejemplo, «[el modelado del] movimiento de partículas microscópicas en un determinado ambiente» (Shonkwiler y Franklin, 2009).

El primer uso documentado de un método de Monte Carlo ocurre en 1733, en manos del científico francés Comte de Buffon (Shonkwiler y Franklin, 2009). Él buscaba calcular el valor de π e ideó un experimento que consiste en lanzar agujas de largo L en una ranura con grosor d . Sea X la distancia entre el centro de la ranura y el punto donde aterriza el centro de la aguja, para que las agujas logran atravesar la ranura se debe cumplir que $X \leq L/2 \sin \Theta$. Aquí, $0 \leq \Theta \leq \pi/2$ es el ángulo que forma la orientación de la aguja a lo largo de la ranura.

Gráficamente, las agujas cuyas dimensiones estén por debajo de la curva de la ecuación límite (ilustrada en la Figura 4.1), atraviesan la ranura. Por lo tanto, si se lanzan las agujas con una distribución aleatoria de orientación (Θ) y ubicación (X), la probabilidad Pr de que estas logren atravesar la ranura está dada por:

$$\text{Pr} = \frac{\text{Área bajo la curva}}{\text{Área del rectángulo } (0, \pi/2) \times (0, d/2)} = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{L}{2} \sin \Theta d\Theta}{\frac{d}{2} \frac{\pi}{2}} = \frac{2L}{\pi d}. \quad (4.2)$$

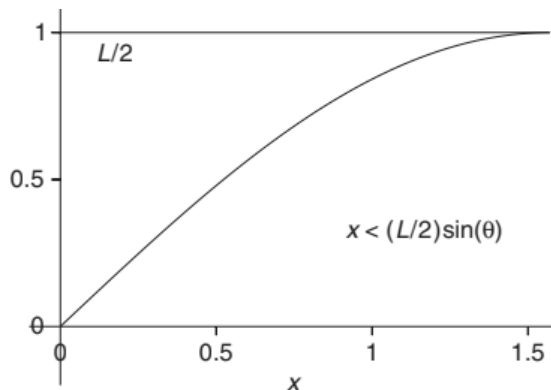


Figura 4.1: Gráfica Θ - X de la ecuación que describe si las agujas del experimento de Comte logran atravesar o no la ranura.

Fuente: Shonkwiler y Franklin (2009)

Por último, al lanzar N agujas, la proporción de agujas que logran atravesar (N_1/N) la ranura tiende a la probabilidad Pr . Con ello, se logra aproximar un valor para π :

$$\pi = \frac{2L}{d} \frac{1}{\text{Pr}} \approx \frac{2L}{d} \frac{1}{\frac{N_1}{N}}. \quad (4.3)$$

Recapitulando, Comte formula un experimento y logra estimar el valor de una constante empleando 'parámetros arbitrarios' (el lanzamiento de agujas), demostrando como estos pueden utilizarse para encontrar o aproximar soluciones de problemas analíticos complejos. Sin embargo, la exactitud de este experimento depende del número N de lanzamientos de agujas - la probabilidad de una aguja de ingresar a la ranura tiende a la proporción de agujas que la atravesaron conforme N aumenta (Shonkwiler y Franklin, 2009). Esta limitante en los métodos de Monte Carlo no se resolvería hasta siglos después con la introducción de computadoras modernas.

La creación de los métodos de Monte Carlo computacionales es atribuida a los científicos John von Neumann y Stanislaw Ulam en el año 1946, mientras estudiaban «problemas de difusión y multiplicación de neutrones en dispositivos de fisión nuclear» (Eckhard, 1987) dentro del Proyecto Manhattan. Ulam jugaba cartas una tarde y trataba de calcular analíticamente la probabilidad de resultar con cierta combinación de cartas. Este cálculo le pareció engorroso. Buscando alternativas prácticas, se dio cuenta que podría jugar 100 veces a las cartas y la proporción de veces que obtuviera la combinación sería una aproximación a la probabilidad teórica. Bajo una interpretación frecuentista (Neyman, 1937), incluso, la probabilidad aproximada tendería a ser la exacta conforme el número de ensayos sea mayor. Además, el avance de herramientas computacionales veloces significaba que la resolución del problema con este método sería cada vez más viable (Eckhard, 1987), puesto que con ellas podría simularse repetidamente la toma aleatoria de cartas.

Ulam se percató que este mismo principio podría adaptarse para descubrir la distribución y multiplicaciones de neutrones en procesos de fisión, donde la gran cantidad de parámetros y colisiones ocasionan un alto grado de complejidad. Le presentó esta idea a Von Neumann y juntos desarrollaron el algoritmo del primer método de Monte Carlo computacional (Eckhard, 1987).

4.2. Conceptos de probabilidad

En esta sección se introducen algunos conceptos de probabilidad básica para continuar con la presentación de los métodos de Monte Carlo, tomando de referencia a Shonkwiler y Franklin (2009) y Hjorth-Jensen (2010).

4.2.1. Variables aleatorias

En un experimento probabilístico, un evento E es uno de sus posibles resultados. Ω es el conjunto de todos los resultados posibles al experimento, también llamado el universo de eventos, de forma que $E \in \Omega$. La probabilidad de ocurrencia del evento particular E , denotada como $\Pr(E)$, es la proporción de corridas del experimento que resultan en E cuando se da una cantidad infinita de corridas. Una variable aleatoria, entonces, es aquella que mapea Ω a los números reales.

Una variable aleatoria X puede ser discreta o continua y poseer una cantidad finita o infinita de valores. Por ejemplo, una variable finita y discreta es si el resultado del lanzamiento de una moneda es cara: $X \in \{0, 1\}$, donde 1 equivale a que el resultado sea cara y 0 escudo. Suponiendo que la moneda no está trucada, ambos resultados son igual de probables o $\Pr(X = 0) = \Pr(X = 1) = 0.5$. Por otro lado, un ejemplo de variable infinita y discreta es la cantidad de lanzamientos de una moneda ocurridos hasta que salga cara; potencialmente cualquier número entero positivo: $X \in \mathbb{Z}^+$.

Las variables aleatorias continuas son aquellas tal que $\Pr(X = x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Generalmente, las mediciones de estas variables son discretas y dependientes de la resolución de instrumentos de medición, tal como en mediciones del tiempo u otras magnitudes físicas, sin embargo, estas mediciones se toman de un conjunto continuo de posibles valores.

4.2.2. Funciones de probabilidad

Sea X una variable aleatoria continua o discreta, la función de distribución acumulativa, o cdf, de X es:

$$\text{cdf}(x) = \Pr(X \leq x). \quad (4.4)$$

Esta cumple las propiedades de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{cdf}(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{cdf}(x) = 1$$

y, sea $x_1 \leq x_2$,

$$\text{cdf}(x_1) \leq \text{cdf}(x_2).$$

Como su nombre lo dice, es la sumatoria de la probabilidad de todos los posibles resultados menores o iguales a x .

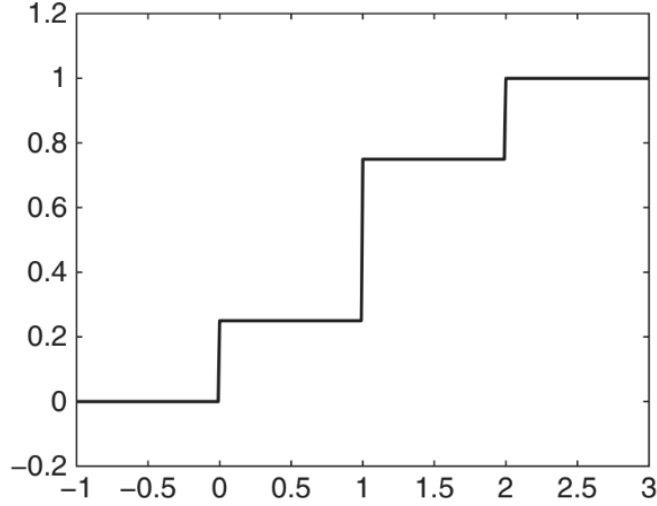


Figura 4.2: cdf de la cantidad de caras resultantes al tirar dos monedas.
Fuente: Shonkwiler y Franklin (2009)

Luego, se define la función de densidad de probabilidad $pdf(x) = Pr(X = x)$;

$$pdf(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (cdf(x) - cdf(x - \epsilon)). \quad (4.5)$$

En el caso de las variables discretas, esto se entiende como la probabilidad en un cierto intervalo:

$$Pr(a < X \leq b) = \sum_{a < x \leq b} pdf(x) = cdf(b) - cdf(a), \quad (4.6)$$

que cuantifica la probabilidad de ocurrencia de un evento puntual contenido entre a y b . En cambio, para las variables continuas se entiende como la derivada de la de la función de probabilidad acumulativa,

$$pdf(x) = \frac{d}{dx} cdf(x). \quad (4.7)$$

De esta definición, se construye que

$$Pr(a < X \leq b) = \int_a^b pdf(x) dx = cdf(b) - cdf(a) \quad (4.8)$$

y que

$$cdf(x) = \int_{-\infty}^x pdf(x) dx. \quad (4.9)$$

De las propiedades de la $cdf(x)$, se obtiene que la $pdf(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} pdf(x) dx = 1 \quad (4.10)$$

Con las funciones de densidad de probabilidad, es posible calcular el valor esperado $\mathbb{E}[f]$ de una función genérica $f(x)$:

$$\mathbb{E}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} pdf(x) f(x) dx \quad (4.11)$$

Además, se define al valor esperado de una distribución probabilística como $\mathbb{E}[x]$ y a la varianza de esta distribución como $\sigma^2[X] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$. En la siguiente sección se presentan algunas distribuciones de densidad de probabilidad relevantes para este trabajo.

4.2.3. Distribución probabilística uniforme, de Poisson y normal

El único requisito que posee un método de Monte Carlo, «es que el sistema físico o matemático sea descrito por funciones de densidad de probabilidad (pdf)» (Hjorth-Jensen, 2010). Una función de densidad de probabilidad es fundamental dado que a partir de esta es que se generan los parámetros aleatorios o se define el comportamiento estocástico del sistema en cuestión.

Una de las más comunes es la distribución uniforme U (Shonkwiler y Franklin, 2009). Esta recibe su nombre porque la densidad de probabilidad es la misma para cada $x \in \Omega$. En caso que la distribución uniforme sea sobre un conjunto discreto, entonces la densidad de probabilidad es $U = 1/[\Omega]$, donde $[\Omega]$ denota la cardinalidad de los posibles valores de x . En cambio, para conjuntos continuos, la distribución uniforme se define sobre un intervalo $x \in (a, b)$, se denota como $U(a, b)$ y está caracterizada por:

$$\text{pdf}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b. \\ 0, & \text{de lo contrario,} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\text{cdf} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dx = \int_{-a}^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad (4.13)$$

cumpliendo con todas las propiedades de las funciones de densidad de probabilidad descritas previamente (Shonkwiler y Franklin, 2009). Tiene un valor esperado $\mathbb{E}[X] = (a + b/2)$ y una varianza $\sigma^2[X] = (b - a)^2/12$.

Por otro lado, sea una variable aleatoria discreta y positiva X con posibles valores k y un parámetro finito λ tal que $\lambda > 0$. X tiene una distribución de Poisson sobre el λ si:

$$\text{pdf}(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \quad (4.14)$$

Esta distribución probabilística es empleada para contabilizar eventos dado que $\mathbb{E}[X] = \sigma^2[X] = \lambda$. (Oscariz, 2012).

Por último, la distribución normal o gaussiana está dada por la siguiente ecuación:

$$\text{pdf}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.15)$$

con $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\sigma^2(x) = \sigma^2$.

4.3. Generadores de números pseudo-aleatorios

Los números generados aleatoriamente están al centro de los métodos de Monte Carlo. Históricamente, estos se han tomado de procesos físicos haciendo una serie de supuestos sobre el fenómeno proceso. Por ejemplo, el tirar una moneda o un dado, servir cartas o el arrojar agujas cerca de una ranura.

Como sea, la generación de números con estos procesos presenta algunas deficiencias. Una de ellas es que los procesos físicos clásicos son sumamente ineficientes para generar números aleatorios, en especial para los Métodos de Monte Carlo que requieren de una gran cantidad de iteraciones para validarse. La mayor limitante, no obstante, es que estos procesos no son necesariamente aleatorios sino que responden a sistemas deterministas cuyas condiciones iniciales se desconocen (Eckhard, 1987).

Una parte del mérito de Ulam y Von Neumann es la implementación de números pseudo-aleatorios generados computacionalmente. Si bien son generados por medio de un sistema determinista al igual

que los procesos físicos, estos tienen una serie de propiedades que les hace asemejarse a procesos realmente aleatorios:

1. los números generados tienen una distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$,
2. la correlación entre los números generados es despreciable y,
3. el ciclo del generador de números aleatorios es tan grande como para no ser significativo.

Además, tienen las condiciones implícitas de poder ser generados de forma eficiente y de poder ser reproducibles, gracias al uso de semillas aleatorias (Hjorth-Jensen, 2010). Las semillas aleatorias son números o vectores que inicializan procesos de generación de secuencia pseudo-aleatorias, de forma que una misma semilla aleatoria siempre genera una misma secuencia de números o vectores pseudo-aleatorios (Kaplan, 1981).

Existen distintos generadores de números aleatorios computacionales, pero uno de los más básicos es el Generador de Lehmer (Eckhard, 1987) y se define a partir de aritmética modular:

$$x_{n+1} = Ax_n + C \pmod{M}. \quad (4.16)$$

Este generador produce números en el intervalo $[0,1]$ al hacer

$$x_i^* = \frac{x_i}{M}. \quad (4.17)$$

Para que sea efectivo, se debe elegir a M tal que el ciclo de los números generados sea lo más largo posible. A y C también contribuyen al largo del ciclo, mientras que x_0 es el primer valor del ciclo o semilla. Otros generadores más robustos se pueden construir a partir de este, combinándolo con varias semillas o utilizando entradas de partidas distintas a la anterior (Hjorth-Jensen, 2010).

Finalmente, los números pseudo-aleatorios generados computacionalmente son prácticamente aleatorios para problemas de interés. En este caso, simular la aparente arbitrariedad en la difusión del crimen mediante métodos de Monte Carlo.

4.4. Caminata aleatoria

Una caminata aleatoria es un algoritmo de Monte Carlo que simula la evolución de un sistema estocástico al suponer un cambio finito aleatorio luego de un intervalo de tiempo o iteración en el sistema, siendo esta catalogada según la modalidad de los cambios que sufra el sistema.

4.4.1. Caminata aleatoria simple

La caminata aleatoria simple es el caso de caminata aleatoria más sencillo: la magnitud del cambio en cada iteración es constante y las posibles orientaciones de este cambio son equiprobables (Malthe-Sørensen, 2015). Para ejemplificarla, supóngase un punto que se desliza a lo largo de la recta numérica de los reales ($x \in \mathbb{R}$) y que inicialmente se ubica en el origen ($x(0) = 0$). Cada vez que se lanza una moneda, el punto da un paso u . Si en un i -ésimo lanzamiento la moneda cae en cara, el punto avanza ($u_i = +\Delta x$), mientras que si cae en escudo retrocede ($u_i = -\Delta x$). Por lo tanto, la posición del punto luego de N pasos está dada por $x(N) = \sum_i^N u_i$. Los posibles resultados de tirar la moneda 5 veces, $x(5)$, se ilustran en la Figura 4.3.

Es decir, el desplazamiento esperado de la partícula luego de un tiempo $t = N\Delta t$ es nulo. La varianza se puede calcular similarmente: (Hjorth-Jensen, 2010)

$$\sigma(x) = \mathbb{E}\left[\sum_i^N \sum_j^N u_i u_j\right] - 0 = \mathbb{E}\left[\sum_i^N u_i^2\right] = N \mathbb{E}[u_i^2] = N(\Delta x)^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta t} t. \quad (4.20)$$

Por otro lado, es de interés calcular la pdf(x) de la partícula realizando una caminata aleatoria. Para construirla, se puede determinar la probabilidad que tiene la partícula de resultar en x luego de N pasos aleatorios -denotada por $P_N(x)$. Esta se puede calcular al realizar M experimentos de la partícula dando N pasos y contar la cantidad de veces que la partícula se encuentra en el intervalo $(x, x + dx)$ (Malthe-Sørenssen, 2015). Sea m_x dicho conteo y suponiendo que M es suficientemente grande,

$$P_N(x)dx = \frac{m_x}{M} \Rightarrow P_N(x) = \frac{m_x}{Mdx}. \quad (4.21)$$

Análogamente, en lugar de hacer M experimentos con una partícula se puede hacer el experimento una vez con M partículas y de esa cuenta calcular la proporción de partículas en cierto intervalo, tal como se ilustra en la Figura 4.4.

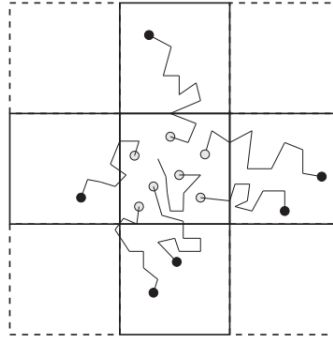


Figura 4.4: Ilustración de la posición en intervalos resultante de partículas realizando caminatas aleatorias simples en dos dimensiones.

Fuente: Malthe-Sørenssen (2015)

Siguiendo el desarrollo de Malthe-Sørenssen (2015), se define una función $\rho_i(t)$ que significa la cantidad de partículas en la «caja» (intervalo con longitud $x/\delta x$) i en el tiempo t . Se supone que cada partícula tiene una probabilidad $p = R\Delta t$ de salir de la caja i para ir a la caja $i + 1$ en un tiempo Δt , así como una misma probabilidad $p = R\delta t$ para ir la caja $i - 1$ en el mismo intervalo Δt . En otras palabras, si hubiese una gran cantidad de partículas en la caja i , en un tiempo Δt una fracción R de las partículas en i se trasladarían a $i + 1$ y otra fracción R se trasladarían a $i - 1$. De la misma manera que hay partículas trasladándose hacia las cajas adyacentes en un intervalo Δt , hay partículas llegando a la caja i desde las cajas $i + 1$ e $i - 1$, siendo la cantidad de partículas entrante una misma fracción R desde su respectiva caja. Por lo tanto, se tiene que

$$\rho_i(t + \Delta t) = \rho_i(t) - R\Delta t\rho_i(t) - R\Delta t\rho_i(t) + R\Delta t\rho_{i-1}(t) + R\Delta t\rho_{i+1}(t). \quad (4.22)$$

Reorganizando esta ecuación y tomando a $R\Delta x$ como una constante de difusión D , se llega a una ecuación diferencial de ρ en forma discretizada (Malthe-Sørenssen, 2015):

$$\frac{\rho_i(t + \Delta t) - \rho_i(t)}{\Delta t} = D \frac{(\rho_{i+1}(t) - \rho_i(t)) + (\rho_{i-1}(t) - \rho_i(t))}{\Delta x}. \quad (4.23)$$

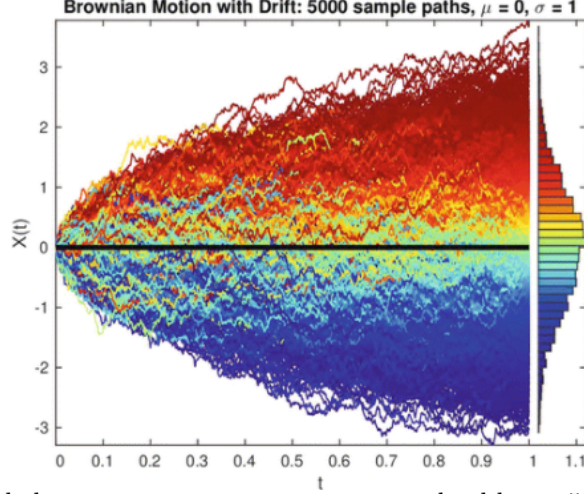


Figura 4.5: Ilustración de los trayectos que toma una partícula al hacer 5000 caminatas aleatorias en una dimensión.

Aquí, $\Delta t = \Delta x = 0.001$ empezando y la partícula parte del origen, o $x(t = 0) = 0$. Nótese que la distribución de las posiciones de la partícula tiende a la distribución normal que predice la ecuación 4.26.

Fuente: Petters y Dong (2016)

En el límite continuo, cuando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, esta ecuación se convierte en la ecuación de difusión para ρ en una dimensión

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (4.24)$$

Si bien esta ecuación describe que la cantidad de partículas en caminatas aleatorias se difunden espacialmente, según la analogía trazada puede resignificarse a ser la densidad de probabilidad de encontrar una partícula con movimiento aleatorio en tiempo t y ubicación x como en la ecuación 5.19. Adicionalmente, este resultado se podría repetir para partículas realizando caminatas aleatorias en espacios de más dimensiones, generalizando con el laplaciano ∇^2 ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho. \quad (4.25)$$

Luego, la resolución de la ecuación de difusión de la densidad de probabilidad de la partícula – condicionada a $\rho(t, x_0) = 1$ y a $\rho(t, x = \infty) = 0$ – es una distribución normal

$$\rho(t, \bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(\bar{x}-x_0)^2}{4Dt}}. \quad (4.26)$$

Conociendo, además, la varianza de la densidad de probabilidad de partículas realizando caminatas aleatorias (ecuación 4.20), se obtiene un valor de la constante de difusión,

$$D = \frac{\Delta x^2}{\Delta t}. \quad (4.27)$$

De esta forma, se determina que existe una íntima relación entre las caminatas aleatorias simples y la ecuación de difusión. Una aplicación de las caminatas aleatorias simples es que resultan ser un mecanismo para estudiar los componentes microscópicos de fenómenos que sufren de difusión (Hjorth-Jensen, 2010). En particular, este vínculo significa que la densidad de probabilidad de la posición de una partícula realizando caminatas aleatorias simples se difunde desde su ubicación

inicial. O bien, partículas realizando caminatas aleatorias se esparcen espacialmente según la ecuación de difusión. Adicionalmente, la varianza de esta distribución aumenta con \sqrt{t} .

El vínculo entre las caminatas aleatorias de agentes y la difusión es un componente fundamental del modelo del crimen que se estudia en este trabajo.

4.4.3. Caminatas aleatorias sesgadas

Las caminatas aleatorias simples suponen que la próxima configuración del sistema se obtiene de un conjunto de estados equiprobables. En muchos problemas, sin embargo, no se puede suponer una misma probabilidad para todas las posibilidades si no que cada una tiene un peso distinto. La evolución estocástica de un sistema como estos puede ser modelada por una caminata aleatoria con sesgo o «biased random walk» (Zlatić, Gabrielli, y Caldarelli, 2010). Las caminatas aleatorias sesgadas se pueden definir por medio de una matriz P compuesta de los pesos W_{ij} que tiene cada estado i de evolucionar a otro estado j . Para que estos pesos se traduzcan en probabilidades y así poder realizar pasos u_i con la cdf(r), se ponderan. De esta forma, los elementos de la matriz P son

$$P_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_l W_{lj}}. \quad (4.28)$$

Sabiendo que la distribución probabilística de una partícula realizando caminatas aleatorias está descrita por la ecuación de difusión, puede intuirse que la distribución probabilística de una partícula en caminatas sesgadas se difunde, pero con una serie de perturbaciones que responden a P . Esta distribución puede conseguirse de una matriz de transición de una cadena de Markov.

4.5. Cadenas de Markov y algoritmos de Monte Carlo markovianos

Habiendo establecido principios generales de estadística y las caminatas aleatorias, se procede a presentar a las cadenas de Markov con ánimos de presentar un marco conceptual y matemático que contribuya al análisis de procesos estocásticos así como su simulación.

4.5.1. Cadenas de Markov

En las secciones anteriores, se había considerado un experimento probabilístico con el espacio de posibles resultados Ω . Ahora, se considera una secuencia de varios experimentos probabilísticos con el espacio de posibles resultados Ω . Cada experimento resulta en un estado X_t , con $t = 0, 1, 2, \dots$. Es decir, con la iteración t de la secuencia de experimentos, el estado del sistema pasa de X_t a un estado X_{t+1} . Una cadena de Markov es una secuencia como esta, con la distinción que las posibilidades para el siguiente estado del sistema dependen únicamente del estado actual. Las posibilidades para el siguiente estado son la vecindad N_x del presente estado x . Se elige el próximo estado entre los de N_x por medio de caminatas aleatorias. Además, las caminatas aleatorias simples y sesgadas que fueron definidas anteriormente son un proceso markoviano, dado que los posibles estados a alcanzar con cada paso solo dependen del estado anterior.

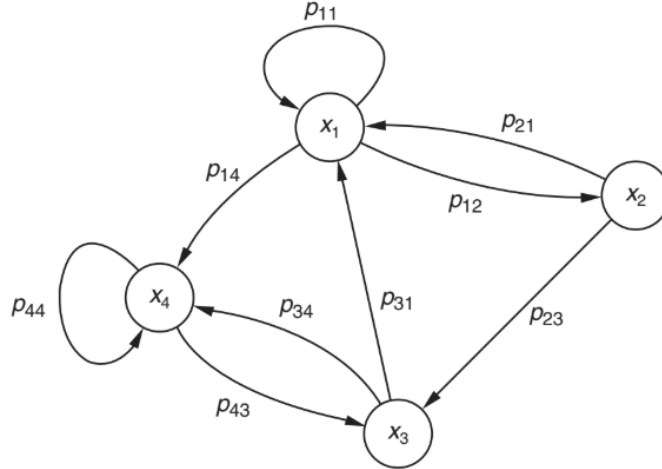


Figura 4.6: Una cadena de Markov hipotética de 4 estados.
Fuente: Shonkwiler y Franklin (2009)

Las cadenas de Markov pueden ilustrarse gráficamente, tal como se muestra en la Figura 4.6. En esta Figura se muestra cada posible estado del sistema i , representado por x_i , y luego las relaciones entre estos estados se ilustran por flechas que tienen un peso probabilístico p_{ij} tal que representan la probabilidad discreta de pasar de un estado i a un estado vecino j . Por ser probabilidades, se debe cumplir que

$$\sum_{j: x_j \in N_{x_i}} p_{ij} = 1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.29)$$

Las cadenas de Markov igualmente pueden representarse mediante matrices de transición P que agrupan las densidades de probabilidad p_{ij} de pasar de un estado i a uno j . La matriz de transición de la cadena de Markov ilustrada en la Figura 4.6 se muestra a continuación:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & p_{14} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & p_{43} & p \end{bmatrix}$$

La dimensión vertical corresponde al estado del que se inicia (i) y la dimensión horizontal corresponde al estado al que potencialmente se transita (j), de manera que las entradas de la matriz representan cada flecha o peso probabilístico de transitar de un estado a otro. Las entradas con valor 0 ilustran que no es posible la transición de unos estados a otros.

Si se representara el estado de un experimento probabilístico en un tiempo t como un vector X_t que contiene la probabilidad que el sistema en cualquier estado x_i , el producto entre la matriz de transición y este vector resulta en la distribución probabilística de posibles estados de la siguiente iteración del experimento:

$$X_{t+1} = PX_t, \quad (4.30)$$

y multiplicando sucesivamente la matriz de transición con el vector, se obtienen las distribuciones de propiedad para las sucesivas iteraciones:

$$X_{t+s} = P^s X_t. \quad (4.31)$$

La matriz de los pesos ponderados de la caminata aleatoria sesgada no es nada más que la matriz de transición de ese sistema.

Las cadenas de Markov poseen la propiedad de poder generar distribuciones de probabilidad invariantes, siempre que sean aperiódicas e irreducibles (es decir, que cada posible estado del sistema es eventualmente accesible desde cualquier distribución inicial). (Shonkwiler y Franklin, 2009). Una distribución invariante X_π de una cadena de markov es aquella que al multiplicarse por la matriz de transición permanece igual:

$$X_\pi = P X_\pi. \quad (4.32)$$

Las cadenas de Markov pueden describir discretamente la evolución temporal de una pdf(x) de un sistema. Sea w_j un vector con los valores de esta función de densidad en un tiempo t , entonces

$$w_i(t + \Delta t) = W_{ij} w_j(t), \quad (4.33)$$

con W siendo la matriz de transición. Al ser los vectores w_i densidades de probabilidad, se tiene que

$$\sum_i w_i(t) = 1. \quad (4.34)$$

Similarmente, para un vector columna fija de la matriz de transición (para i constante) se tiene que

$$\sum_j W_{ij} = 1. \quad (4.35)$$

Por último, si se tiene que $\|w(t + \Delta t) - w(t)\| \rightarrow 0$, entonces se dice que el sistema del cual se deriva la función de densidad de probabilidad ha alcanzado su estado más probable; también llamada estado estacionario o de equilibrio (Hjorth-Jensen, 2010). Esto también se puede expresar como

$$w(t = \infty) = W w(t = \infty) \quad (4.36)$$

4.5.2. Algoritmo de Metropolis-Hastings

Las cadenas de Markov se emplean frecuentemente en métodos de Monte Carlo (*Markov chain Monte Carlo methods*) para generar iterativamente nuevos estados aleatorios del sistema. Su utilidad radica en que si se corren por suficiente tiempo, producen la configuración más probable del sistema (ecuación 4.36) - siempre y cuando la cadena de Markov sea ergódica y cumpla el principio de balance detallado (Hjorth-Jensen, 2010) que se explica a continuación.

Una cadena de Markov es ergódica si para cualquier estado inicial X_0 , existe una cantidad N de pasos que puede dar el sistema de tal forma que la probabilidad de acceder a cualquier otro estado posible es mayor que 0. En otras palabras, una cadena de Markov es ergódica si desde cualquier estado del sistema es posible llegar a todos los demás estados existentes después de una cantidad finita de pasos, o que los componentes microscópicos de un sistema pueden variar en el tiempo pero las mediciones tienden a ser iguales (Shonkwiler y Franklin, 2009). Por otro lado, una cadena de Markov cumple el principio de balance detallado si la probabilidad de cursar de un estado i a uno j es la misma probabilidad que cursar de j a i . Esto se lee como $\Pr(i|j) = \Pr(j|i)$ o en la matriz de transición simplemente como $W_{ij} = W_{ji}$, o bien, $W = W^T$. Ambas propiedades implican que los sistemas con las cadenas de Markov pueden llegar a una distribución estacionaria -equivalente a llegar a un estado de equilibrio en un sistema termodinámico- donde todas las configuraciones del sistema en equilibrio son igualmente probables y, siempre que conserven el equilibrio, reversibles (Hjorth-Jensen, 2010).

El algoritmo más básico para los métodos de Monte Carlo de cadenas de Markov es el algoritmo de Metropolis. Su función principal es obtener muestras aleatorias de una distribución probabilística compleja. Parte de la capacidad que tienen las cadenas de Markov de llegar a un estado en equilibrio, donde se tiene que

$$\frac{dw_i(t)}{dt} = 0. \quad (4.37)$$

Para que esto se cumpla, de las condiciones de ergodicidad y balance detallado se deduce que $w_j W_{ij} = w_i W_{ji}$, o bien, se debe cumplir que

$$\frac{W_{ij}}{W_{ji}} = \frac{w_i}{w_j}. \quad (4.38)$$

Generalmente se conoce la forma analítica o teórica de w pero se desconocen los valores de la matriz de transición W . Esta última entonces se descompone en

$$W(i \rightarrow j) = g(i \rightarrow j)A(i \rightarrow j), \quad (4.39)$$

donde g es la probabilidad de elegir a uno de los posibles estados en la vecindad del actual estado y A es la tasa de aceptación del estado elegido. Por las condiciones establecidas, aunque la tasa de aceptación para ir de un estado i a uno j es variable, la probabilidad g de elegir a cada uno de los estados es la misma ($1/N$). Por tanto, la proporción de las tasas de aceptación

$$\frac{A(j \rightarrow i)}{A(i \rightarrow j)} = \frac{w_i}{w_j} \quad (4.40)$$

es la probabilidad de aceptar un cambio de w_j a w_i .

El algoritmo consiste entonces en generar una configuración inicial del sistema y llevarlo al equilibrio por medio de una sucesión de pasos. Cada paso consiste en proponer un cambio aleatorio en el sistema, calcular la probabilidad de aceptación de este cambio (ecuación 4.40) y aceptar o rechazar el cambio: se genera un número aleatorio $r \in U(0, 1)$ y si este es menor que la probabilidad, entonces se acepta el cambio. Luego de llevar el sistema a equilibrio, registrar las mediciones observables. A partir de ello, se repite el procedimiento partiendo nuevamente desde la configuración inicial repetidas veces. El algoritmo termina al haber realizado una determinada cantidad de iteraciones y se promedian las mediciones y observaciones registradas para tener resultados finales. La Figura 4.7 ilustra el diagrama de flujo de este algoritmo.

En conclusión, el algoritmo de Metropolis-Hastings es un método de Monte Carlo que permite simular sistemas con complejas configuraciones de microestados sabiendo solo su distribución de densidad de probabilidad teórica y hacer mediciones sobre ellos.

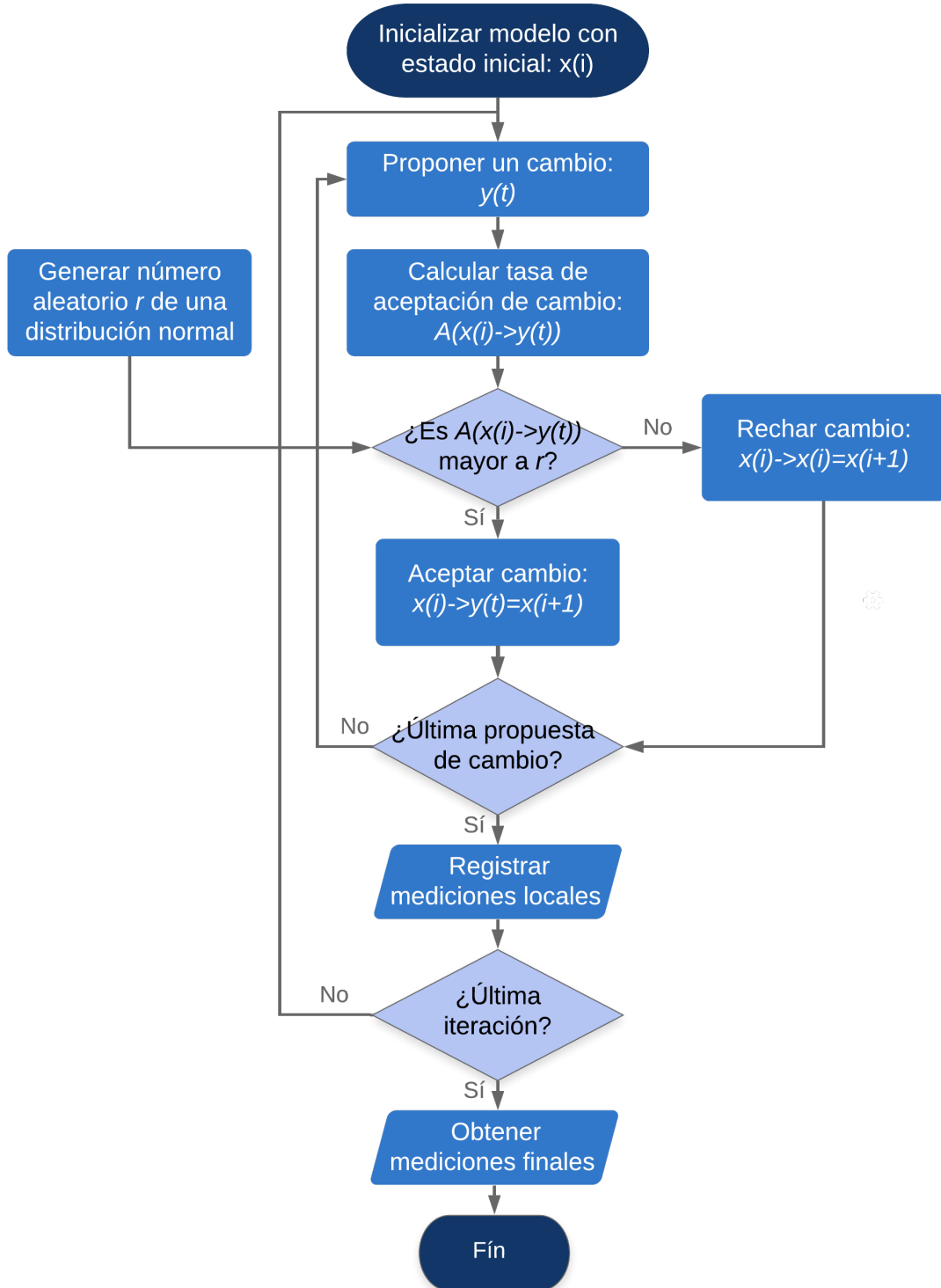


Figura 4.7: Diagrama de flujo de algoritmo Monte Carlo de Metropolis-Hastings. Fuente: elaboración propia, basado en Hjorth-Jensen (2010)

5.1. Movimiento browniano

En el siglo XIX, Mientras experimentaba con el proceso de fertilización de una flor, el botánico Robert Brown observó con un microscopio el «movimiento errático veloz» (Shonkwiler y Franklin, 2009) de partículas de polen suspendidas sobre agua. Una hipótesis inicial para explicar este fenómeno fue que las partículas observadas eran seres vivos. Sin embargo, subsiguientes experimentos demostraron que este comportamiento se repite para cualquier partícula suspendida en un fluido y que su movimiento no necesariamente se origina de sí mismas ni de fuerzas externas al fluido (Nelson, 1967).

Si bien este fenómeno se siguió estudiando durante varias décadas, su origen no fue explicado hasta el año 1905 por Albert Einstein. Como consecuencia de su desarrollo teórico del tamaño definitivo y finito de los átomos, él encontró que partículas suspendidas deben tener un movimiento oscilatorio observable. Este fenómeno, en honor a Brown, se conoce como movimiento browniano (Nelson, 1967).

5.1.1. Difusión de partículas

Para inicios del siglo XX, gracias al trabajo de muchos científicos a lo largo del tiempo, ya se habían determinado varias características del movimiento browniano (Nelson, 1967):

1. El movimiento browniano es bastante irregular y compuesto por rotaciones y traslaciones no preferenciales.
2. Las partículas se mueven independientemente de las demás, aún cuando la distancia que las separa es menor al diámetro de cada partícula.
3. El movimiento es mayor para partículas mas pequeñas.
4. La composición y densidad de las partículas es irrelevante al movimiento.

5. El movimiento es más activo para fluidos menos viscosos.
6. El movimiento es más activo a mayor temperatura y este movimiento nunca se detiene.

Con esos antecedentes, el descubrimiento teórico del movimiento browniano por Einstein se basa en dos argumentos. El primer argumento proviene de matemática estadística y resulta en que existe una densidad probabilística de encontrar una partícula $\rho = \rho(t, x)$ en un tiempo t y espacio x . Luego, al suponer que el movimiento de una partícula en un determinado momento y el movimiento de la misma partícula después de un período infinitesimalmente pequeño son completamente independientes, se llega a una ecuación diferencial de difusión de la densidad probabilística:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho, \quad (5.1)$$

donde $t > 0$ y D es la constante de difusión que regula la tasa de dispersión de la densidad de probabilidad en el espacio. El hecho que el movimiento de una partícula en un instante y en el instante subsiguiente sean completamente independientes significa que puede modelarse por una caminata aleatoria simple, razón por la que densidad probabilística de la partícula se difunde al igual que lo hacen agentes en caminatas aleatorias. Resolviendo la ecuación de difusión en tres dimensiones y centrada en el origen, se llega a una densidad de probabilidad

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4Dt}}, \quad (5.2)$$

donde la densidad de probabilidad está dada por una distribución gaussiana según la distancia euclidiana desde el origen y que cuya varianza aumenta con el tiempo transcurrido (Nelson, 1967).

El otro argumento viene de la termodinámica y mecánica - relaciona la constante de difusión con magnitudes físicas. Se obtiene de que, al tener una gran cantidad de partículas en un fluido sujetas a una fuerza externa, estas llegan a un equilibrio dinámico entre la fuerza osmótica y la misma fuerza externa:

$$K = kT \frac{\nabla \nu}{\nu}. \quad (5.3)$$

K es la fuerza externa, T la temperatura absoluta, ν la cantidad de partículas por unidad de volumen y k es la constante de Boltzmann - equivale a conocer el número de Avogadro y, por lo tanto, el tamaño de cada átomo. La fuerza osmótica (el lado derecho de 5.3) se deriva de la teoría cinética de gases aplicada a partículas (Nelson, 1967). Luego, las partículas en el fluido experimentan fricción proporcional a la masa m de cada una. En equilibrio dinámico, estas tendrían una velocidad de

$$v = \frac{K}{m\beta},$$

donde β es una constante con unidades de frecuencia. Consecuentemente, $\frac{K}{m\beta}\nu$ partículas atraviesan una unidad de área en una unidad de tiempo debido a la fuerza K .

Por otro lado, si las fuerzas osmóticas y externas se encuentran en equilibrio, las partículas solo experimentan difusión y la ecuación (5.1) se cumple para ν . Por lo tanto, $-D\nabla\nu$ partículas atraviesan una unidad de área en una unidad de tiempo:

$$\frac{K}{m\beta}\nu = D\nabla\nu. \quad (5.4)$$

Despejando para K con la ecuación (5.3), se tiene una expresión para la constante de difusión:

$$D = \frac{kT}{m\beta}. \quad (5.5)$$

Con ello, la ecuación (5.1) ya no es solo un supuesto teórico sino que una predicción física como resultado de la termodinámica. Además, la constante de difusión de caminatas aleatorias (ecuación

4.27) corresponde directamente a la constante de difusión del movimiento browniano, evidenciando nuevamente que las caminatas aleatorias simulan a partículas brownianas.

De esta forma, Einstein no solo contribuyó a demostrar la naturaleza atómica de la materia, sino que teorizó la existencia del movimiento browniano de partículas en un fluido y la difusión que estas tienen al estar sujetas a una fuerza externa.

Un principio fundamental de este trabajo de graduación es la hipótesis que los criminales en un territorio se comportan como partículas brownianas en un fluido bajo una fuerza externa K .

5.2. Difusión espacial del crimen

En la segunda mitad del siglo XX crece la percepción e interés en el fenómeno del crimen. En vista de ello, empiezan a surgir teorías y estudios abarcando la temática. Entre ellos, un estudio de parte de J. Cohen y Tita (1999) que busca comprender la mecánica de difusión de homicidios en una ciudad estadounidense y factores que la impulsan. La tasa de homicidios en ciudades de Estados Unidos se dispara en las décadas de 1980 y 1990. Particularmente en la ciudad de Pittsburg, este fenómeno parece haber tenido mayor incidencia en personas jóvenes relacionadas con pandillas.

Aquí cabe reiterar dos puntos importantes de este trabajo de graduación. El primero es que este es un trabajo que parte estrictamente de física y matemática y que pretende ejemplificar cómo desarrollos de estas podrían emplearse para contribuir a ciencias con diferentes objetos de estudio. En particular, al hablar de crimen en este trabajo se refiere estrictamente a la distribución de eventos puntuales que pueden ser catalogados como delitos tal como que si se tratase de objetos matemáticos. Por consecuencia y reconociendo la gran complejidad y sensibles implicaciones que conlleva el crimen, se aclara que en ningún momento se pretende discutir su origen o determinantes, su contexto político-económico o su relación con dinámicas sociales. Se reconoce, por ejemplo, que una caracterización errónea del crimen puede resultar en estigmas o hasta en políticas públicas nocivas hacia las propias poblaciones que más sufren de exclusión social. El segundo punto es que al citar distintos autores en el contexto de crimen, se hace para rescatar el modelado matemático o físico de fenómenos, sin suscribirse necesariamente a las miradas o predisposiciones que ellos tengan sobre mencionado complejo y sensible tema. Las expresiones de cada autor son el resultado de su formación y contexto, donde el paso del tiempo y el avance hacia sociedades más justas y equitativas permiten evidenciar posibles sesgos en la producción científica.

Retomando, entonces, el estudio de J. Cohen y Tita (1999) pretendía caracterizar patrones espacio temporales de eventos tomando datos de homicidios en Pittsburg entre 1991 y 1995. En este estudio, definen 'difusión' como el proceso general del movimiento con el que un fenómeno se esparce. Si bien no se emplea bajo el marco conceptual del movimiento browniano, coincide en referirse a la dinámica de un fenómeno -homicidios- pasando de sitios localizados de alta concentración a sitios con menor concentración. Luego de enmarcar el fenómeno de estudio a los homicidios de jóvenes en la ciudad de Pittsburg ocasionados por actividad de pandillas o mercado de crack, se emplea un método de asociación espacial para estudiar su difusión, llamado «Estadísticas de indicadores locales de asociación espacial» (o LISA por sus siglas en inglés) (J. Cohen y Tita, 1999).

El análisis por medio de LISA consiste en dividir el espacio donde se manifiesta un fenómeno en sitios o regiones. Luego, caracterizar el fenómeno en cada sitio por medio de una dupla (L, N) que contenga un índice del fenómeno- tasa de homicidio en el caso de Cohen y Tita- en el sitio (L) y el promedio ponderado con la distancia del índice en los sitios vecinos (N) . Además, según el valor que estos tengan, cada sitio o cada vecindad de un sitio puede definirse en términos de alta concentración (H) o de baja concentración (L) de homicidios, y así caracterizar cada dupla en una de las siguientes categorías (L, L) , (L, H) , (H, L) o (H, H) . Por último, el comportamiento de los sitios puede caracterizarse a lo largo el tiempo. Para medir la magnitud de la difusión de fenómenos,

se emplea la distancia Euclideana $D = \sqrt{(L_{t+1} - L_t)^2 + (N_{t+1} - N_t)^2}$ para medir el cambio entre la dupla de un sitio en un tiempo t y ella misma en un tiempo $t+1$, logrando una poderosa herramienta para evidenciar clusters del homicidio u objeto de estudio.

Para caracterizar la existencia de difusión del homicidios, se observa el comportamiento de los clusters a lo largo del tiempo. Para ello, primero se filtran los cambios significativos con la distancia $D > \pm 2\sigma$. Luego, estos cambios en la tasa de homicidios se divide en dos vertientes: «difusión contagiosa» cuando $(H, L) \rightarrow (H, H)$ (se expande) o $(H, L) \rightarrow (L, H)$ (se relocaliza) y «difusión jerárquica» cuando $(L, L) \rightarrow (H, L)$ (se aumenta aisladamente) o $(L, L) \rightarrow (H, H)$ (se aumenta globalmente).

Usando estas métricas, Cohen y Tita llegan a concluir que el mercado de crack no es una causa del aumento de homicidios en la ciudad de Pittsburg, pero las actividades de pandillas sí lo son. Inclusive, identifican difusión espacial de riesgos de homicidio alrededor de estas actividades. Lo más importante, sin embargo, de este estudio es la presentación de métodos de análisis estadístico-espaciales como herramientas para abarcar fenómenos sociales y que presentan predican que el crimen, particularmente el homicidio, sufre de difusión y de concentración en ciertas ubicaciones.

Otro estudio más reciente que emplea métodos similares de análisis exploratorio de datos espaciales (*ESDA* según sus siglas en inglés) es Villareal y Flores (2015). Acá se estudia la difusión de violencia entre municipales de México en el período de 2005 a 2010, caracterizada nuevamente por el homicidio, en el marco de la guerra estatal contra el crimen organizado y narcotráfico.

Parten de aplicar el mismo método de LISA que aplicaron Cohen y Tita para las localidades de la ciudad de Pittsburg para ver la difusión de homicidios entre las municipalidades mexicanas. Luego, para verificar que el aumento de incidencia criminal en municipalidades entre 2005 y 2010 fuese resultado de una difusión contagiosa, utilizan el indicador de autocorrelación espacial Global Moran's I:

$$I = N \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij})(\sum_{i=1}^n x_i - \bar{x})^2}, \quad (5.6)$$

donde N es el número de casos, \bar{x} es el promedio de la variable, i y j son ubicaciones y w_{ij} es la entrada de una matriz de ponderación que indica la interdependencia de i con j . Algunos ejemplos de esta matriz de interdependencia son la matriz de 4 vecinos-más-cercanos, la distancia inversa entre municipalidades o los el compartir bordes.

Este indicador puede tomar valores negativos, positivos y 0. Los negativos significan que la distribución de datos tiene una dispersión espacial (cada sitio está rodeado por otros con valores opuestos) mientras que valores positivos implican la agrupación de valores similares en regiones. En cambio, el 0 refleja una distribución perfectamente aleatoria de los datos o una nula correlación entre sitios. Inclusive, los LISA no son nada más que aplicaciones locales del Indicador Global de Moran's I.

Cuando Villareal y Flores aplicaron el indicador global de Moran's a las tasas municipales de homicidio en México, se observa que a partir de 2007, el aumento de homicidio se agrupa en selectas regiones municipales y que se crean clusters de homicidio - justamente los municipios con alta presencia de crimen organizado y narcotráfico. Además, replican el indicador para distintas matrices de ponderación de interdependencia espacial y concluyen que la matriz de primer orden de contigüidad -solo existe interrelación con vecinos inmediatos- es la que presenta mayor correlación espacial en el homicidio- significando que la difusión contagiosa de homicidios sucede entre municipalidades vecinas.

Por tanto, Villareal y Flores llegan a la conclusión que la violencia homicida tiende a agruparse por regiones y que tiene un efecto contagioso entre municipalidades adyacentes. Además, al sobreponer la información de intervenciones de fuerzas armadas en zonas de riesgo de homicidio, observan que las intervenciones militares no han tenido un efecto positivo en la reducción de homicidios sin necesidad de realizar un análisis de causalidad (Figura 5.2).

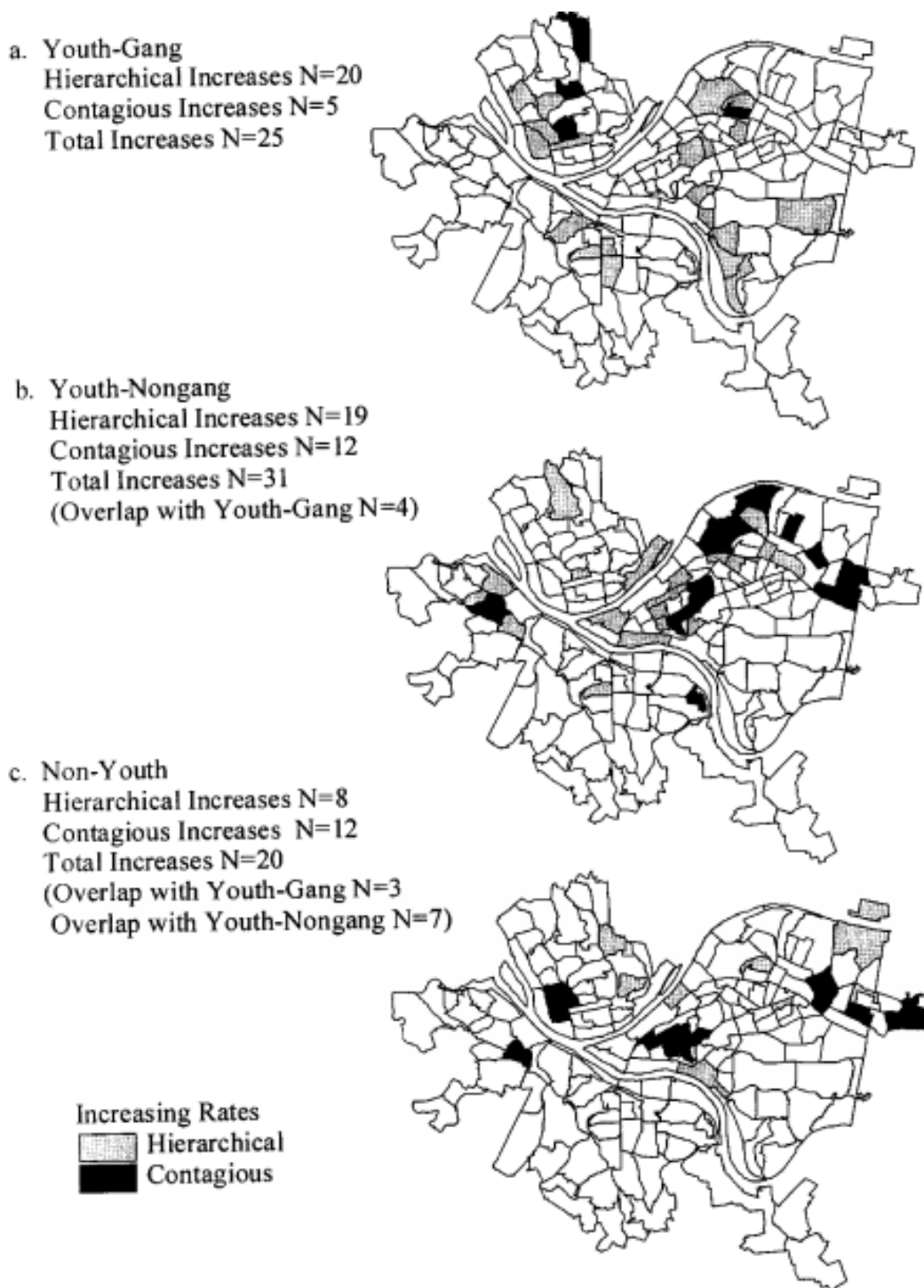


Figura 5.1: Aumento en tasa de homicidios en Pittsburg entre 1991 y 1995 por: (a) población joven vinculada a pandilla; (b) población joven no vinculada a pandilla y (c) población no joven. Se observa que la población de pandillas tuvo un aumento esencialmente jerárquico y global, mientras que la población joven no relacionada a pandillas y mayor si sufrieron de aumentos contagiados tanto como jerárquicos.

Fuente: J. Cohen y Tita (1999)



Figura 5.2: Aumentos contagiosos de expansión de homicidios entre 2005 y 2010, donde los puntos por color muestran el año en el que cada municipio llegó a tener una alta incidencia criminal a partir de sus vecinos.

Los estados con bordes son aquellos que tuvieron intervención de fuerzas armadas en 2007 — líneas punteadas — o 2008 — líneas sólidas.

Fuente: Villareal y Flores (2015)

En este segundo estudio, se observa nuevamente que los homicidios tienden a agregarse por regiones y que se difunden espacialmente de forma 'contagiosa', en un contexto bastante cercano al de Guatemala en los últimos años. Además, da otro ejemplo de herramientas y metodologías estadísticas para la representación de fenómenos sociales.

5.3. El crimen como epidemia

Para que un fenómeno pueda describirse como una epidemia, este debe sufrir cambios no monótonos. Le debe caracterizar, en primer lugar, una súbita y creciente aceleración en su propagación seguido por un declive lento de la existencia del fenómeno. En segundo lugar, debe contar con un mecanismo de transmisión del agente infeccioso a individuos de la población (J. Cohen y Tita, 1999). Usando esta definición, los autores de los artículos anteriores consideran la difusión contagiosa de homicidios que cumplen con estas características como una epidemia - recordando que con ello únicamente se describe al patrón espacio temporal de eventos registrados. En esta sección se presentan algunos modelos estadísticos que podrían abordar distintas manifestaciones del crimen similarmente como una epidemia impulsada.

5.3.1. Modelo de conducta colectiva y mecánica estadística

Bahr y Passerini (1998b) desarrollan un modelo de mecánica estadística para caracterizar conductas colectivas. Este modelo determina el surgimiento de comportamientos macro-sociales colectivos a partir de las reglas de interacción entre agentes individuales (micro-sociológicos) y las características generales de la población. Parte de la idea que cada persona puede tener un determinado comportamiento que incide en el comportamiento de su círculo de influencia social.

Para que un modelo simule que un colectivo impacta la conducta de un individuo, deben cumplirse tres supuestos. El primero es que existe una probabilidad $0 \leq P_{\Delta} \leq 1$ que el comportamiento de un individuo sea cambiado por el colectivo. En segundo lugar, esta probabilidad debería permanecer igual o aumentar conforme la población N crece, es decir, $P_{\Delta}(N + 1) \geq P_{\Delta}(N)$ o

$$\frac{\partial P_{\Delta}}{\partial N} \geq 0.$$

Por último, el impacto adicional en la probabilidad P_{Δ} por agregar una n -ésima persona es mayor que el impacto adicional al agregar una $n + 1$ -ésima persona. Equivalentemente,

$$\frac{\partial^2 P_{\Delta}}{\partial N^2} \leq 0.$$

Habiendo definido los supuestos con los que construyen su modelo, Bahr y Passerini introducen el argumento base del mismo: si una población tuviese N personas y m conductas distintas representadas por las variables $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ y si se supone que cada persona del colectivo tiene el mismo nivel de influencia sobre cualquier otro, al agregar una persona más a la población sin conducta alguna, esta tiene una probabilidad de adoptar la conducta k igual a:

$$P_k = \frac{N_{\sigma_k}}{N}, \quad (5.7)$$

con N_{σ_k} refiriéndose al tamaño del subconjunto de N que posee la conducta σ_k . De hecho, σ no corresponde únicamente a conductas si no que también engloba a opiniones, expresiones sociales o paradigmas sociales que diferencian categóricamente a los miembros de la sociedad. Para efectos del presente desarrollo, estos paradigmas como conductas u opiniones se utilizan indistintamente como el estado que caracteriza a cada individuo.

Luego, generalizan este argumento a una sociedad donde la influencia que tiene cada actor sobre cualquier otro es variable. Para añadir este elemento, se recurre a una variable $p_{ij} \geq 0$ que representa la influencia que tiene el actor j sobre el actor i . Con ello, la probabilidad que un agente i tenga una conducta k se convierte en:

$$P_k(i) = \frac{\sum_{j:m(j)=k} p_{ij}}{\sum_{j=1}^N p_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^N p_{ij} \prod_{l=1, l \neq k}^m ((\sigma_j - \sigma_l)/(\sigma_k - \sigma_l))}{\sum_{j=1}^N p_{ij}}. \quad (5.8)$$

La notación $j : m(j) = k$ representa a los actores j que poseen una conducta k . Esto se desarrolla aritméticamente al filtrar para la conducta σ_k mediante el producto \prod . Lo importante de esta función es que cumple con los tres supuestos para cualquier N y para m conductas distintas. Adicionalmente, p_{ij} está íntimamente vinculada al estudio de redes - la matriz de influencia $N \times N$ con entradas p_{ij} ilustra la interdependencia y la estructura de influencia dentro de una sociedad. Esta matriz de influencia es interesante porque podría interpretarse como una matriz de transición al considerar la evolución dinámica del comportamiento colectivo como cadena de Markov. Adicionalmente, la matriz permite ajustar el modelo a estructuras sociales más realistas: agrega elementos como el que no todas las personas tienen contacto e influencia entre sí, la incidencia entre agentes puede tener una magnitud variable y puede no ser bilateral. Finalmente, esto permite ajustar el modelo a distintos casos de estudio.

Uno de los casos más sencillos es cuando un único individuo i posee una opinión σ_1 mientras que el resto del colectivo conserva una opinión σ_2 . De la teoría desarrollada anteriormente, la probabilidad que el individuo mantenga su opinión σ_1 es

$$P_1 = \frac{p_{ii}}{\sum_{j=1}^N p_{ij}}, \quad (5.9)$$

donde p_{ii} se interpreta como el autoestima, fuerza de opinión propia del individuo o capacidad de auto-persuadirse. Por tanto, la probabilidad que el individuo cambie a opinión σ_2 es $P_2 = 1 - P_1$. Utilizando la ley de grandes números, se tiene que $\sum_{j=1}^N p_{ij} \approx N \langle p_{ij} \rangle$ para $N \gg 1$. De esta forma, la probabilidad que el individuo i se aproxima a

$$P_1 \approx \frac{p_{ii}}{N \langle p_{ij} \rangle} \quad (5.10)$$

y la probabilidad que el individuo cambie de opinión a

$$P_2 \approx 1 - \frac{p_{ii}}{N \langle p_{ij} \rangle}. \quad (5.11)$$

Dado que para un dado individuo y una dada estructura social $p_{ii}/\langle p_{ij} \rangle$ equivale a una constante c , la probabilidad de cambio P_2 está aproximada por una familia de curvas $P_\delta(c, N) = 1 - c/N$. Suponiendo que la influencia entre todos los actores sea relativamente homogénea (no hay líderes con bastante impacto ni personas con poca influencia), $p_{ij} \simeq cte$ y $c = 1$, por lo que $P_1 = 1/N$ y $P_2 = 1 - 1/N$.

El ejemplo anterior obvia el hecho que así como el colectivo influencia al individuo, el individuo influencia igualmente al colectivo y puede cambiar la opinión de otros. La probabilidad que cualquier otro individuo del colectivo cambie a la opinión σ_1 está dado por la misma probabilidad de $P_1 = 1 - P_2 = c/N$.

Si se realizaron diversos experimentos independientes de la influencia colectiva sobre un individuo, la probabilidad esperada que el individuo cambie de opinión estaría dada por

$$\begin{aligned} \langle P_2 \rangle &= \left\langle 1 - \frac{p_{ii}}{\sum_{j=1}^N p_{ij}} \right\rangle = 1 - \frac{\langle p_{ii} \rangle}{\langle \sum_{j=1}^N p_{ij} \rangle} \\ &\approx 1 - \frac{\langle p_{ii} \rangle}{N \langle p_{ij} \rangle} = 1 - \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

En otras palabras, $c \approx 1$ al hacer el experimento para diversos individuos del colectivo, gracias a que el valor esperado de incidencia propia de los individuos tiende a la incidencia del colectivo mismo. Adicionalmente, estas curvas de probabilidad de cambio de opinión con $c \approx 1$ es precisamente el resultado que estudios empíricos de dinámicas de formación de opiniones evidencian (Bahr y Passerini, 1998b).

Otro caso de estudio de este modelo de comportamiento colectivo es la influencia que tiene una mayoría de M integrantes con una opinión σ_1 sobre una minoría $n \leq N - M$ con otra opinión σ_2 . Suponiendo N grande y $N - M \ll N$, se llega similarmente a

$$P_1 \approx M/N \quad (5.13)$$

y

$$P_2 \approx 1 - M/N. \quad (5.14)$$

De ello, se obtiene que la probabilidad que n miembros de la sociedad adopten la opinión 1 está dada con una distribución binomial tal que

$$P(n) = \binom{N}{n} (P_1)^n (P_2)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{M}{N}\right)^n \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{N-n}. \quad (5.15)$$

En esta distribución las dos modas se encuentran, respectivamente, en $n = M$ y $n = (N - M)M/N$, significando que lo más probable es que la cantidad de personas con cada opinión se conserve a lo largo del experimento. A partir de este marco para modelar las opiniones de dos grupos, pueden estudiarse distintos casos y fenómenos como el que las personas de un grupo no puedan cambiar de opinión debido a alguna afinidad estricta mientras que las del otro grupo sí. Otra aplicación es calcular la cantidad de personas M con una opinión k necesarias para influenciar a n personas a cambiarse a ella también (Bahr y Passerini, 1998b). Este mismo desarrollo para determinar la probabilidad que un componente de un sistema macroscópico se encuentre en uno u otro estado es un problema recurrente en mecánica estadística, por ejemplo ver Huang (2010).

Más allá de la influencia colectiva, en las sociedades existen otros factores a una escala macro que afectan la toma de decisiones, formación de opiniones o adopciones de conductas de individuos. Entre estos factores se encuentran los medios y canales de comunicación, los eventos con repercusiones masivas como catástrofes o características culturales que afecten el comportamiento de cada individuo. Estos factores tienen distintos efectos sobre la población pero para modelarlos en su trabajo, Bahr y Passerini los clasifican en tres categorías.

La primera categoría de efectos se refiere a la propensión o disposición con la que los individuos de una sociedad cambian de estado (conducta) frente a la influencia del colectivo. Si bien esta propiedad no tiene mucho sentido en una escala microscópica porque fluctúa demasiado entre individuos, su efecto promedio puede apreciarse al analizarse macroscópicamente (poblaciones enteras). En la mecánica estadística, se puede decir exactamente lo mismo de la temperatura: da una medida promediada de la energía cinética de cada componente del objeto macroscópico en cuestión. Reconociendo la similitud conceptual entre la propensión a cambios de conducta en el presente modelo de comportamiento colectivo y la temperatura física, Bahr y Passerini trazan una analogía directa y denominan a esta propensión social como «temperatura social». Con esta analogía y con el formalismo proveniente de la mecánica estadística, proceden a cuantificar la temperatura social e integrarlo al modelo de comportamiento colectivo.

Sea P_Δ la probabilidad que un individuo cambie de opinión, dada por

$$P_\Delta = \frac{e^{-\Delta H}}{Z}. \quad (5.16)$$

Z es una constante que aún no se define pero se introduce para asemejar a la distribución de Boltzmann de mecánica estadística y asegurar una distribución normalizada. Por simplicidad, el

siguiente desarrollo se hace para dos opiniones contrarias donde n_1 integrantes tienen opinión $\sigma = 1$ y el resto de integrantes n_2 tienen opinión $\sigma = -1$. Retomando el desarrollo anterior y p_{ij} constante, la probabilidad que un individuo cambie de opinión está dada por

$$P_{\Delta}(i) = \begin{cases} n_1/N, & \text{si } \sigma(i) = -1, \\ n_2/N, & \text{si } \sigma(i) = 1. \end{cases} \quad (5.17)$$

Suponiendo como caso particular que $Z = 1$, de 5.17 se obtiene que

$$\Delta H(i) = \begin{cases} -\log(n_1/N), & \text{si } s_i = -1, \\ -\log(n_2/N), & \text{si } s_i = 1. \end{cases} \quad (5.18)$$

Hasta ahora, lo único que se ha hecho es expresar la probabilidad de cambio de estado de un individuo en términos de una función indefinida ΔH . No obstante, en un sistema físico con micro componente como el que describe la ecuación 5.16, ΔH es precisamente el cambio de energía necesario para inducir un cambio en la configuración de micro componentes -independientemente de la forma del hamiltoniano H . Haciendo una analogía directa al modelo de comportamiento colectivo, entonces, ΔH describe en promedio la «energía» o recursos necesarios para inducir un cambio en la conducta de un individuo. Siguiendo esta línea y conociendo el aporte de la temperatura en el modelo físico, entonces el modelo de comportamiento social se reescribe como

$$P_{\Delta}(i) = \frac{1}{Z} e^{-\Delta H/T}. \quad (5.19)$$

Aquí, T es la temperatura social. Es distinta a la temperatura física; describen dos fenómenos de índole completamente distinta (incluso la social se define adimensionalmente y se incluye sin estar acompañada por una constante como la de Boltzmann). Sin embargo, la temperatura social sigue siendo un parámetro que amplifica o reduce la energía necesaria para inducir cambios en el sistema y con ello se logra incluir al modelo la propensión a cambios que puede sufrir una sociedad particular por distintos factores. En el caso de solo dos posibles conductas con el mismo peso, una temperatura $T \rightarrow 0$ implicaría que casi todos los integrantes estuviesen muy inclinados hacia una de las dos conductas con pequeñas agrupaciones de personas con la conducta contraria y poca posibilidad de que individuos cambien, mientras que una temperatura $T \rightarrow \infty$ implicaría que en promedio hay una misma cantidad de individuos con cada conducta, que los individuos cambian fácilmente de conducta y que no se forman agrupaciones locales con conductas preferenciales (distribución casi aleatoria de conductas en la sociedad).

El incluir la temperatura al modelo hace que se tenga que redefinir ΔH para que se sigan cumpliendo las probabilidades que un individuo cambie de opinión (ecuación 5.17 en el caso de la sociedad uniforme con dos opiniones contrarias).

Se mencionó a la temperatura social como uno de los tres efectos (o parámetros) que definen la adopción de paradigmas de los individuos de una sociedad debido a los factores a los que están sujetos. El segundo efecto que mencionan Bahr y Passerini son los sesgos que una sociedad entera tiene hacia una determinada conducta, mientras que el tercero es un elemento de arbitrariedad individual en su toma de decisiones o en el modelo. De la misma forma con la que se establece una temperatura social, estos otros dos efectos son análogos a una «fuerza social» y un «ruido». Incluyéndolos mediante la analogía con mecánica estadística, la probabilidad que un individuo cambie de opinión entonces es

$$P_{\Delta}(i) = \frac{1}{Z} e^{-(\Delta H + h\sigma_i)/T + \Phi}, \quad (5.20)$$

con h siendo la fuerza social y Φ una función de ruido. Finalmente, entonces, Bahr y Passerini consiguen construir un modelo de comportamiento colectivo que incluye a la temperatura social, las fuerzas sociales y ruido. Según las características del sistema puede definirse ΔH y a Z de forma que

se sigan cumpliendo los tres supuestos del modelo. Por ejemplo, para el caso de opiniones contrarias y $\Phi = 0$, se tiene que (5.17),

$$\Delta H(i) = \begin{cases} (l/z)e^{h_s/T_s}(n_1/N)^{1/T_s}, & \text{si } s_i = 1, \\ (l/z)e^{h_s/T_s}(n_2/N)^{1/T_s}, & \text{si } s_i = -1 \end{cases} \quad (5.21)$$

y con ello se recupera una función de partición que asegura que $\sum P_\Delta = 1$:

$$Z = e^{h_s/T_s} \left(\frac{n_1}{N}\right)^{\frac{1}{T_s}} + e^{h_s/T_s} \left(\frac{n_2}{N}\right)^{\frac{1}{T_s}}. \quad (5.22)$$

Una característica importante de los conceptos de temperatura social, fuerza social y ruido (así como ΔH) es que esencialmente son conceptos adaptados matemáticamente al modelo siguiendo la intuición que brinda la mecánica estadística pero son completamente independientes de los principios físicos que guiaron su planteamiento. Es decir, este modelo y sus conceptos no son resultado de la física pero fueron logrados gracias a la analogía del fenómeno macro-sociológico con uno de la física-principio central para generar modelos criminológicos desde modelos físicos.

5.3.2. ‘Contagio’ de crimen

Según se ha discutido anteriormente, los términos de contagio o epidemia se utilizan únicamente como descriptores de patrones de eventos o estado de agentes, en el marco de una discusión de modelos matemáticos orientados por el formalismo desarrollado en física. En esta sección, se discuten estudios que podrían abonar a la idea de patrones epidémicos del crimen desde el contagio de comportamientos colectivos.

Conducta Colectiva

Algunas fuentes (Stark, Kent, y Doyle, 1982; P. C. Higgins y Albrecht, 1977), afirman que existe una correlación negativa entre asistencia a la iglesia y la participación en actividades delictivas entre los adolescentes, particularmente en comunidades con alta participación en iglesias. Alrededor de esta observación empírica, Bahr y Passerini hacen una aplicación del modelo de conductas colectivas que ilustra como adolescentes son influenciados por sus pares para involucrarse en actividades delictivas o asistir a la iglesia. (Bahr y Passerini, 1998a)

Pare ella, Bahr y Passerini definen dos conductas para los adolescentes en una comunidad: $\sigma_{-1} = -1$ para actividades delictivas y $\sigma_1 = 1$ para los asistencia a la iglesia. Además, definen una fuerza $h_1 > 0$ de moralidad que se aplica a los adolescentes que asisten a la iglesia - sesgándoles en contra de la delincuencia - cuya magnitud podría significar, por ejemplo, la frecuencia promedio de asistencia de jóvenes a la iglesia en la comunidad.

La intensidad de incidencia entre los distintos actores p_{ij} varía aleatoriamente entre individuos y se supone una interacción de vecinos inmediatos en una rejilla rectangular, o bien, cada persona es un nodo con cuatro personas vecinas sobre las que incide. Esta es una aproximación sencilla, pero los autores, basándose en otro estudio (Lewenstein, Nowak, y Latané, 1992), afirman que es una suficiente aproximación para el comportamiento fundamental de las redes sociales. Según la ecuación (5.19), la probabilidad que un adolescente adopte la conducta delincuente, luego de manipulación algebraica, corresponde a:

$$P_{-1} = \frac{1}{e^{2h_1/T_s} (n_1/(N - n_1))^{1/T_s} + 1}. \quad (5.23)$$

Aquí, n_1 es el número de adolescentes que asiste a la iglesia, suponiendo que p_{ij} es constante. De acuerdo con la ecuación, si aumenta la frecuencia de asistencia de los jóvenes a la iglesia (h_1) o si

aumenta la cantidad de jóvenes que asisten a la iglesia (n_1), la probabilidad que alguien adopte la cultura delincuente se reduce. Sin embargo, la ecuación (5.23) también dicta que dependiendo de T_s , la frecuencia con la que los jóvenes asisten a la iglesia o su cantidad puede no tener correlación — discrepando con observaciones empíricas. Al añadir la variable de magnitud de incidencia entre actores p_{ij} , la variable dominante en el modelo sería esta. Quiere decir que, por ejemplo, un joven con gran incidencia que no asiste a la iglesia puede influir a todo su círculo social a participar en actividades delictivas aunque todo su círculo asista a la iglesia. O viceversa, una persona que asista a la iglesia influya a todo su círculo a dejar la delincuencia. Este efecto resaltado de líderes discrepa con observaciones empíricas, que demuestran que la variable más importante es la asistencia del círculo en la iglesia.

Esta salvedad se resuelve al considerar que las relaciones (p_{ij}) se fortalecen entre las personas que tienen una similar conducta: los jóvenes que asisten a la iglesia forman vínculos más fuertes con otros jóvenes que también están en la iglesia, de la misma forma que quienes no participan en la iglesia forman vínculos con otros que tampoco lo hacen. Con este supuesto, se siguen formando agrupaciones de jóvenes alrededor de líderes pero cuando el número de asistentes a la iglesia es mayor, existe una correlación negativa entre la frecuencia h_1 y la delincuencia que desaparece en la medida que n_1 se reduce. De esta forma, este modelo permite caracterizar este fenómeno de iglesia-delinuencia en adolescentes que ha sido observado empíricamente y permite profundizar su análisis. Por ejemplo, a partir de los hallazgos de este modelo, los autores recomiendan investigar si las relaciones (o persuasión) entre personas que atienden a la iglesia es mayor que las relaciones entre personas que no atienden.

Además de mostrar una aplicación del modelo de comportamiento colectivo basado en la mecánica estadística, ese trabajo ejemplifica como la conducta delictiva ocasiona más conducta delictiva - ofreciendo una potencial conexión a la difusión de conducta criminal. Cabe señalarse que esta aplicación del modelo de comportamiento colectivo es muy similar a un modelo de Ising, que se discute a mayor profundidad en el capítulo 7.

Difusión de Violencia Colectiva

Por otro lado, Myers (2000) estudia la propagación de huelgas que se tornaron violentas en Estados Unidos entre 1964 y 1971, entendiendo a las huelgas violentas como un evento asociado a determinado comportamiento colectivo que se transmite. «Formalmente, la influencia contagiosa es parte de un proceso de comportamiento colectivo donde un actor comete un acto de protesta o violencia y su comportamiento cambia la probabilidad de actos futuros similares» (Myers, 2000). En otras palabras, eventos relacionados a determinado comportamiento colectivo (huelgas o violencia colectiva) pueden ocasionar la difusión contagiosa de la misma conducta, mismo principio que el empleado por Bahr y Passerini (1998a) para actividad delictiva.

Lejos de hacer un juicio de valor acerca las protestas por derechos civiles o criminalizarles, el trabajo de Myers ejemplifica la naturaleza contagiosa (y difusiva) de algunas conductas colectivas. Cabe reiterarse que al etiquetar a las huelgas y eventos de violencia colectiva como contagiosas o como epidemias se hace únicamente por las características de su difusión según la definición de J. Cohen y Tita (1999).

Para este estudio, se utiliza el método de historia de eventos difusivos de Strang y Tuma (1993). Este se basa en un modelo de difusión de conductas poblacionales que tiene una premisa similar al modelo de comportamiento colectivo de Bahr y Passerini - la probabilidad que un actor social adopte una conducta depende de los actores que ya la adoptaron previamente. Sea N el tamaño de la población y S el subconjunto de la población que ya ha adoptado una determinada conducta, la

difusión de la conducta colectiva en el tiempo se formula como

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr[S(t + \Delta t) = s - 1 | S(t) = s]}{\Delta t} \\ = [a + bs(t)](n(t) - s(t), \end{aligned} \quad (5.24)$$

con a siendo un factor exógeno de riesgo para la adopción de la conducta (toda la influencia distinta a la que ejercen los propios individuos que ya adoptaron la conducta) y b siendo el factor de influencia del subconjunto que ya adoptó la conducta. El modelo de historia de eventos difusivos que utiliza Myers es una especificación de la ecuación 5.24, donde la probabilidad de adopción de una conducta se formula a nivel de cada individuo para poder incluir heterogeneidades entre la población. En él, se tiene que la probabilidad que un actor social i adopte una conducta en un tiempo t está dada por

$$\lambda_i(t) = \exp \left[\bar{\alpha} \bar{X}_i + \sum_{s \in S(t)} (\bar{\beta} \bar{V}_s + \bar{\gamma} \bar{W}_i + \bar{\delta} \bar{Z}_{is}) \right]. \quad (5.25)$$

Donde \bar{X}_i es un vector que representa las características internas de un individuo y los vectores \bar{V}_s , \bar{W}_i , \bar{Z}_{is} representan los efectos que los demás actores tienen sobre este (respectivamente, la infecciosidad de un actor s que ya ha adoptado la conducta, la susceptibilidad del actor i a adoptar la conducta y la proximidad que tiene el actor i a al actor s). Por otro lado, los vectores $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ y $\bar{\delta}$ son los parámetros para modular la influencia que tiene cada una de estas características. Cabe resaltar que un actor i no necesariamente alude a una persona individual, si no que puede entenderse como un conjunto de ellas con características y propósitos similares.

Para el estudio de las protestas por derechos civiles en Estados Unidos en la década de los 60s, particularmente aquellas que se tornaron violentas, ajustó los parámetros del modelo mencionado anteriormente según supuestos y observaciones empíricas: la infecciosidad de esas huelgas fue en función de su severidad, la susceptibilidad de contagio de huelgas es el tamaño de la población históricamente excluida y el acceso a y programación de la televisión, mientras que la proximidad fue la distancia física. Con ello, se logra afirmar que

1. las huelgas no son eventos independientes,
2. las ciudades tienen distintas propiedades intrínsecas que les da una cierta susceptibilidad a huelgas (recordativo a una temperatura social) y
3. las huelgas tienen distintas propiedades- las redes implícitas de medios de comunicación masiva son el medio de transmisión de difusión. En el modelo de comportamiento colectivo, esto se traduciría como que los medios de comunicación son una fuerza social o como que los agentes asociados a esos medios tienen alta incidencia.

Combinadas, estas ideas significan que las huelgas por derechos civiles en la década de los 60 fueron interdependientes entre sí, su patrón de difusión fue afectado por las propiedades de cada ciudad o del motivo de las huelgas y que los medios de comunicación propagaron las huelgas (y los actos violentos en ellas). Estos mecanismos explican la influencia contagiosa de las huelgas violentas de aquella época, empleando una lógica de difusión de conductas parecida a la difusión de partículas brownianas. Mendoza (2006) hace un estudio similar al de Myers (2000), donde evalúa causas estructurales y procesos difusivos de linchamientos en Guatemala.

Sin ánimos de hacer una discusión de los complejos factores (históricos, antropológicos, psicológicos, políticos, etc.) que dan origen a y sin tildar de crimen a las conductas colectivas dentro de movimientos que buscan justicia social, la lógica que emplean Myers (2000) y (Mendoza, 2006) podría usarse para estudiar algunas manifestaciones del crimen.

5.3.3. SIR

Retomando el hecho que cada miembro de una sociedad está influenciado por otros, Sooknanan *et al.* (2013) aplican un modelo de enfermedades infecciosas al fenómeno de pertenencia a pandillas criminales. Se recupera este estudio para ilustrar nuevamente una aplicación de modelos difusivos a un potencial fenómeno de 'crimen', partiendo de una discusión de matemática de sistemas complejos.

Para ello, suponen la hipótesis de crecimiento infeccioso de pandillas que enuncia que la principal influencia en personas para que ingresen a pandillas (el contagio del comportamiento) es la asociación a personas que ya pertenecen a ellas. Esta es la hipótesis de crecimiento infeccioso de pandillas. Claro está, se utiliza el lenguaje técnico del marco de epidemiología para el estudio de conductas colectivas asociadas a pandillas delictivas enfocándose únicamente en la distribución de eventos y sin juicios de valor, al igual que se ha hecho en las secciones anteriores.

La idea fundamental es que quienes se asocien con personas que pertenecen a pandillas tienen una posibilidad de ser persuadidos a entrar en ellas y los pandilleros que tienen relaciones con personas no asociadas a pandillas tienen la posibilidad de ser persuadidos a salir. Las personas en las pandillas también tienen un riesgo de ser encarcelados y al cumplir su condena pueden rehabilitarse o regresar a sus pandillas.

Se toman varios supuestos entonces:

1. la membresía de pandillas es una infección,
2. el contacto social juega un rol importante en el reclutamiento a pandillas,
3. todos los integrantes de la pandilla y las personas en su periferia participan en el proceso de reclutamiento,
4. se ignora los detalles de la infección en cada integrante de la población y los posibles estados están limitados a pocos estados discretos (un estado es infectado y se supone que todo infectado es infeccioso),
5. es más sencillo persuadir a alguien que sea un potencial miembro que persuadir a un potencial miembro a convertirse en un miembro completo ($\beta_1 > \beta_2$) y
6. no hay muertes ni nacimientos en la población (T es constante).

Este modelo es el 'SIR', susceptibles, infecciosos y recuperados. Para el modelo, se supone que una población T está subdividida en 4 conjuntos según su relación y riesgo de pertenecer a pandillas: las personas no susceptibles a las pandillas N , los susceptibles a pandillas S -se encuentran en la periferia de pandillas, de donde alejarse o adentrarse-, los pandilleros G que pertenecen plenamente a las pandillas y los encarcelados R . Además, toda persona en esta población es idéntica entre sí. Se supone también que cada persona tiene una influencia uniforme de parte del resto de la sociedad.

Luego, las personas no susceptibles a pandillas (N) pueden convertirse en susceptibles (S) al relacionarse con personas susceptibles a pandillas o con pandilleros mismos (G). Sea esta tasa con la que se convierten en susceptibles denotada por α , sea β_1 la tasa con la que personas susceptibles (S) se convierten en pandilleros (G), sea Φ la tasa de encarcelamiento de pandilleros, con lo que se unen a (R). Además, el tiempo promedio de encarcelamiento es de ρ^{-1} , f es la probabilidad que una persona en la cárcel sea rehabilitada y forme parte de N , por lo que $(1 - f)$ es la probabilidad complementaria de regresar a formas partes de pandillas. Estas relaciones definen la dinámica entre los subconjuntos de la población y el sistema es caracterizado por el siguiente sistema complejo de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 n(s + g) + \alpha s + f\rho r, \quad (5.26)$$

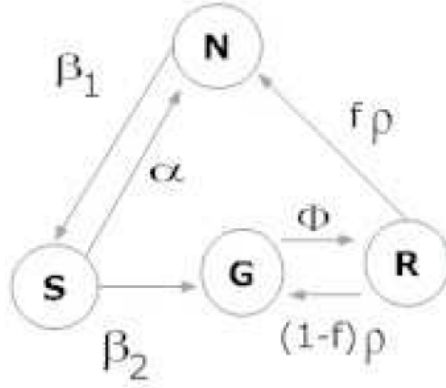


Figura 5.3: Modelo SIR de pandillas.

Fuente: Sooknanan *et al.* (2013)

$$\frac{ds}{dt} = \beta_1 n(s + g) + -\beta_2 sg - \alpha s, \quad (5.27)$$

$$\frac{dg}{dt} = \beta_2 sg + (1 - f)\rho r - \Phi g, \quad (5.28)$$

$$\frac{dr}{dt} = \Phi g - \rho r - \Phi g, \quad (5.29)$$

$$n + s + g + r = 1, \quad (5.30)$$

Donde son variables normalizadas $n = N/T$, $s = S/T$, $g = G/T$, $r = R/T$ y además $n(0) \geq 0$, $g(0) \geq 0$, $s(0) \geq 0$, $r(0) \geq 0$. Este sistema se ilustra en la Figura 5.3.

Siguiendo los modelos epidémicos, se define a R_0 la cantidad promedio de personas infectadas que son infectas por cada 1 infectado. Este valor se traduce como la cantidad promedio de personas promedio que recluta un miembro o potencial miembro de una pandilla y está dado por $R_0 = \beta_1/\alpha$, puede ser considerado como un indicador de idoneidad del ambiente para soportar pandillas. Si $R_0 < 1$, la cantidad de criminales se reduce asintóticamente, acabando con el crimen y evitando cualquier otro brote. Sin embargo, $R_0 > 1$ implica soluciones con posibles estados de equilibrio. Los autores proceden a hacer un análisis de equilibrio estable y análisis de bifurcación respecto la tasa α para ver distintos comportamientos del sistema.

Con este trabajo, es posible predecir los efectos de distintas estrategias de mitigación de pandillas variando los parámetros del sistema. Los programas relacionados a la prevención o intervención en pandillas estarían relacionadas a las variables α , β_1 y β_2 , mientras que las estrategias de supresión están vinculadas a Φ , ρ y f . El análisis de bifurcación y estabilidad del modelo es especialmente valioso dado que en los puntos de bifurcación, pequeños cambios en los parámetros pueden provocar grandes y súbitos efectos en el sistema, ocasionando que el sistema se dirija se dirija a otro punto de equilibrio o que surjan grandes inestabilidades. Estos diagramas pueden ser apreciados en el artículo de Sooknanan *et al.* (2013). De ahí la problemática de pandillas criminales puede ser agravada o la o reducida considerablemente. Aunque el modelo no refleje perfectamente el fenómeno real, las consideraciones que presenta este modelo son de indudable utilidad para el diseño de políticas que lo aborden y para ello es indispensable el marco metodológico y conceptual empleado comúnmente en la física.

5.4. Proceso puntual auto-activado y victimización repetida

Hasta el momento se han introducido algunos estudios con métodos matemáticos, respaldados con intuición de modelos complejos como los que se encuentran en física, para potencialmente estudiar la distribución difusiva de eventos o características asociadas a crimen. No obstante, los métodos mostrados anteriormente estudian fenómenos con agregación geográfica y temporal tal que de ellos no se puede recabar información de eventos u agentes individuales. El modelo central de este trabajo parte de agentes puntuales cuyos actos llegan a afectar a otros agentes puntuales cercanos, por lo que se requiere de herramientas matemáticas para desarrollarlo. Por ello, se recurre a los procesos puntuales auto-activados que son ampliamente utilizados en la sismología para modelar la interdependencia de sismos cercanos.

5.4.1. Proceso puntual auto-activado

Los procesos puntuales auto-activados, «Self-Exciting Point Process» en inglés, «modelan eventos cuyas tasas dependen en el historial pasado del proceso» (Reinhart, 2018) y fueron formalizados matemáticamente por Hawkes (1971). A diferencia de otros procesos puntuales, los auto-activados tienen una intensidad condicional de eventos anteriores, de forma que eventos ocurridos pueden ocasionar más eventos en el futuro.

Su construcción parte de los procesos puntuales estacionarios: Sea una función $N(A)$ definida como la cantidad acumulada de eventos ocurridos en tiempo $t \in A$, entonces la cantidad de eventos esperada en un tiempo t está definida como

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}\{N[t, t + \Delta t]\}}{\Delta t}. \quad (5.31)$$

El proceso puntual estacionario por excelencia es el proceso puntual de Poisson. En este proceso, la ocurrencia de eventos está descrita por una distribución de Poisson — ecuación (4.14) — distribución probabilística de eventos con una tasa media de ocurrencia y donde cada evento es independiente de los otros. Es decir, $\mathbb{E}\{N(t)\} = \lambda t$.

En cambio, en un proceso puntual auto-activo activado el valor esperado de eventos en un tiempo t debe estar condicionado por el historial de eventos anteriores, denotado por \mathcal{H}_t , tal que:

$$\lambda(t|\mathcal{H}_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N([t, t + \Delta t])|\mathcal{H}_t]}{\Delta t} \quad (5.32)$$

Hawkes define a los procesos puntuales auto activados como

$$\lambda(t) = \nu + \int_0^t g(t-u) dN(u) \quad (5.33)$$

o equivalente

$$\lambda(t) = \nu + \sum_{i:t_i < t} g(t-t_i). \quad (5.34)$$

Aquí, ν es una tasa constante de generación de eventos semejante a la de procesos puntuales de Poisson y g es la función desencadenante que da la forma con la que eventos pasados influyen en la tasa de generación de nuevos. Por ejemplo, la función desencadenante puede tener una forma exponencial $g(t) = e^{-\alpha t}$ que implicaría que los eventos ocurridos inciden en el proceso por un relativamente corto intervalo de tiempo. Además, dado que $\lambda(t|\mathcal{H}_t) \geq 0$, entonces $g(u) \geq 0$ si $u \geq 0$ o $g(u) = 0$ si $u < 0$. Los eventos ocasionados por ν son denominados eventos de fondo, mientras que

los desencadenados por efectos de fondo son las réplicas de primera generación. Las réplicas de la primera generación de réplicas son réplicas de segunda generación y así sucesivamente.

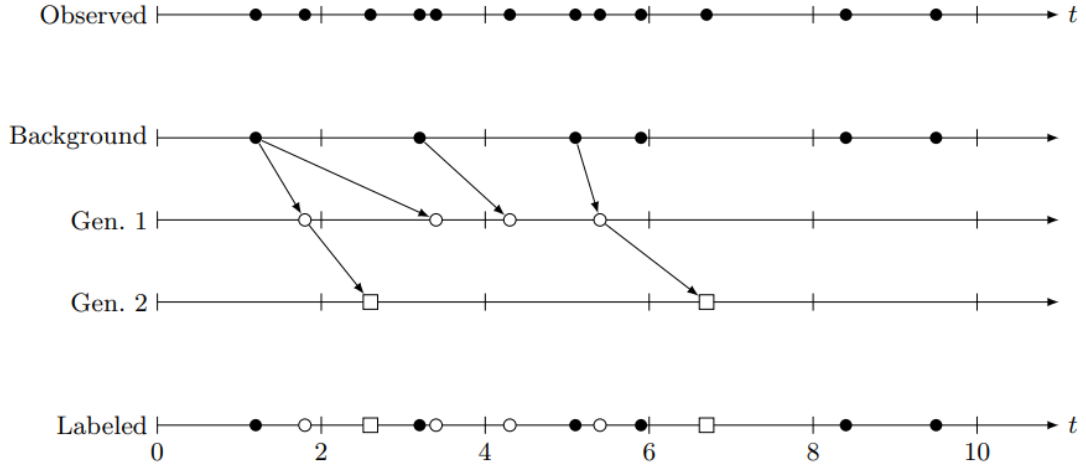


Figura 5.4: Un hipotético proceso puntual activado en $t \in [0, 10]$, con ilustración de eventos de fondo y generaciones de réplicas.

Fuente: Reinhart (2018)

Según se visualiza en la Figura 5.4, la constante ν ocasiona los efectos de fondo y luego con la función activante g , estos pueden dar lugar a otras generaciones de eventos. La cantidad de eventos producto por un evento inicial se obtiene de una distribución de Poisson con media

$$m = \int_0^{\infty} g(t)dt. \quad (5.35)$$

Mientras que $m < 1$, la cantidad será finita y se podrá estimar el tamaño u otras propiedades de cúmulos de eventos, análogo al factor R_O de modelos epidémicos que establece cuántos infectados adicionales hay por cada infectado.

Generalizando los procesos puntuales auto activados a una dimensión temporal y dos dimensiones espaciales, (5.32) se transforma a

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{H}_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[N([t, t + \Delta t) \times (x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y)) | \mathcal{H}_t]}{\Delta t}, \quad (5.36)$$

mientras que (5.34) se convierten en

$$\lambda(t, x, y) = \mu(x, y) + \sum_{i: t_i < t} g(t - t_i, x - x_i, y - y_i). \quad (5.37)$$

Las contribuciones de esta nueva ecuación son el hecho que la tasa media de generación de eventos de fondo es en función de la ubicación y que la función desencadenante g toma como parámetro no solo el tiempo desde eventos anteriores si no la distancia también. Luego, la cantidad de eventos descendientes de un primer evento se continúa calculando de una distribución de Poisson pero con la nueva media:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g(t, x, y) dt dx dy. \quad (5.38)$$

Esta herramienta estadística se usa cotidianamente para el modelado de diversos fenómenos en la física pero su desarrollo es debido principalmente a la sismología: los sismos y sus réplicas son la aplicación por defecto de los procesos puntuales auto-activados (Reinhart, 2018).

En particular, los sismos y sus réplicas son un proceso puntual auto activado con una marca $M_i \in M$. Aquí, M_i es una magnitud independiente asociada a cada sismo que denota su intensidad y M se refiere al espacio de posibles magnitudes de sismos. Además, M_i incide en la intensidad de las siguientes generaciones de sismos que surjan de este primero. Por lo tanto, el valor esperado de eventos se expresa como:

$$\lambda(t, x, y, M) = j(M)\lambda(t, x, y) \quad (5.39)$$

y el modelo toma la forma de

$$\lambda(t) = \mu(x, y) + \sum_{\{k:t_i < t\}} g(t - t_i, x - x_i, y - y_i; M_i). \quad (5.40)$$

Los modelos de este tipo son denominados Secuencias de Réplicas de Tipo Epidémico (ETAS por sus siglas en inglés). A lo largo de décadas de observaciones empíricas se han propuesto diversas formas para la ecuación desencadenante de sismos. Se suelen elegir aquellas formas que aumentan con la magnitud del evento M y decrecen con la distancia y tiempo transcurrido. Un ejemplo es el modelo isotrópico (Reinhart, 2018):

$$g(t, x, y; M) = \frac{L_0}{(t + c)^p} \frac{e^{\alpha(M - M_0)}}{(x^2 + y^2 + d)^q}, \quad (5.41)$$

con L_0 , α y M_0 siendo parámetros para la cantidad de réplicas, c y d parámetros que definen el impacto en el origen y p y q son parámetros de decaimiento de la función desencadenante a lo largo del espacio y tiempo. Para seleccionar parámetros en los modelos ETAS, se suele optimizar funciones de estimación verosimilitud. Un ejemplo es la función de verosimilitud logarítmica (Mohler *et al.*, 2011)

$$l(\theta) = \sum_i \log\{\lambda(t_i, x_i, y_i; \theta)\} - \int_0^T \int \int_S \lambda(t, x, y; \theta) dy dx dt, \quad (5.42)$$

que se maximiza sobre todo el conjunto de parámetros θ en el espacio S y tiempo $[0, T]$. Para incluir marcas M u otras variables, la ecuación 5.42 puede generalizarse a más dimensiones.

Por otro lado, existen diversas propuestas para obtener la forma de la tasa media de eventos de fondo $\mu(x, y)$. Una de ellas es por medio de «bandwith kernel density estimations» (Silverman, 1986); que prácticamente consta de observar una distribución de eventos en el pasado, usarla para trazar una distribución probabilística sobre todo el espacio, afinarla con alguna función kernel y suponer que esta misma distribución se mantiene constante a lo largo del tiempo (Reinhart, 2018):

$$\mu(x, y) \approx \hat{\mu}(x, y) = \frac{1}{T} \sum_{i=t_i < t} k(x - x_i, y - y_i) \quad (5.43)$$

De esta forma, todo evento sucedido i contribuye a la construcción de la tasa o densidad de eventos esperados por unidad de tiempo, y luego esta distribución se suaviza con alguna función kernel k . La Figura 5.5 ilustra la generación de una distribución de fondo μ a partir de observaciones. Se tiene un histograma con la distribución de observaciones y de estos histogramas luego se trazan estimaciones al suavizarlos con distribuciones gaussianas.

Sin embargo, suponer que todos los eventos anteriores de fondo no siempre es lo ideal. Ello implica recurrir a métodos de «stochastic decluttering», o de separación de los eventos de fondo (ocasionados por μ) de los eventos desencadenados de otros (generados por la función g), para poder establecer la verdadera tasa de eventos fondo.

La función de intensidad espacial de eventos (Reinhart, 2018) de todos los eventos en el espacio está dada por

$$m_1(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t, x, y) dt. \quad (5.44)$$

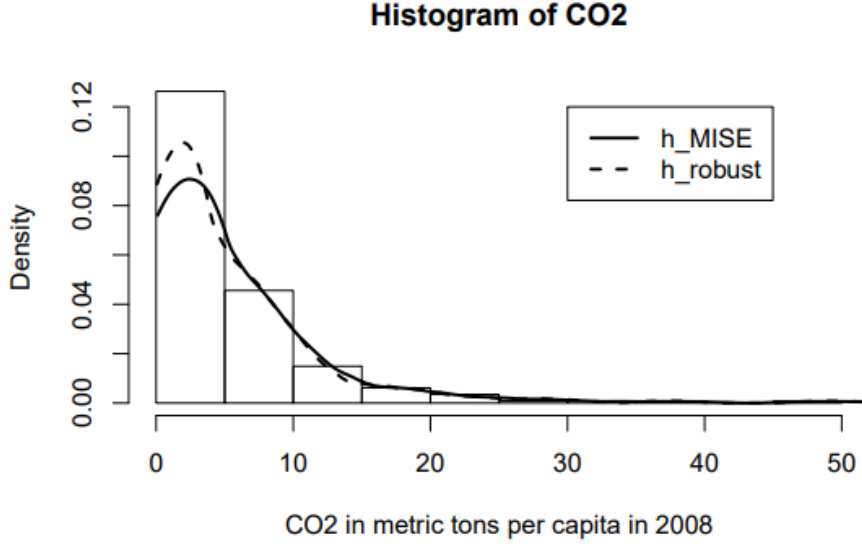


Figura 5.5: Kernel Density Estimation para observaciones de partículas de CO2 en el año 2008. Las funciones kernel son distribuciones Gaussianas centradas en cada histograma, con diferente parámetro de varianza.

Fuente: Zambom y Dias (2012)

Aquí, T es el período de observación de eventos. Al suponer que T es finito y substituyendo con la tasa de eventos de un proceso puntual auto-activado en espacio tiempo ecuación (5.37),

$$m_1(x, y) \approx \frac{1}{T} \int_0^T (\mu(x, y) + \sum_{i:t_i < t} g(t-t_i, x-x_i, y-y_i)) = \mu(x, y) + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i:t_i < t} g(t-t_i, x-x_i, y-y_i) dt. \quad (5.45)$$

De esta relación se despeja para una estimación de la tasa verdadera de eventos de fondo:

$$\hat{\mu}(x, y) = \hat{m}_1(x, y) - \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i:t_i < t} g(t-t_i, x-x_i, y-y_i) dt. \quad (5.46)$$

Luego, se puede determinar $m_1(x, y)$ por medio de estimaciones de densidad con kernel como en la ecuación (5.43). De la ecuación (5.37) se obtiene la probabilidad que un evento i sea de fondo ($\Pr(u_i = 0)$) o desencadenado de otro evento j ($\Pr(u_i = j)$);

$$\Pr(u_i = 0) = \frac{\mu(t_i, x_i, y_i)}{\lambda(t_i, x_i, y_i)}, \quad \Pr(u_i = j) = \frac{g(t_i - t_j, x_i - x_j, y_i - y_j)}{\lambda(t_i, x_i, y_i)}.$$

Con estimaciones de kernel de densidad y con la probabilidad que cada evento sea de fondo o desencadenado, la tasa de eventos de fondo esperados en la ecuación (5.46) se lee como (Reinhart, 2018)

$$\hat{\mu}(x, y) = \frac{1}{T} \sum_{i:t_i < t} (1 - \Pr(u_i \neq 0)) k(x - x_i, y - y_i). \quad (5.47)$$

A partir de este cálculo para $\mu(x, y)$ y la optimización de la función de verosimilitud, puede establecerse un algoritmo paramétrico para ajustar un proceso puntual auto activado a datos reales (Zhuang, Ogata, y Vere-Jones, 2002):

1. Se fija inicialmente $\mu(x, y) = \mu_0$, un valor arbitrario.

2. Con una función de verosimilitud, se ajustan los parámetros de

$$\lambda(t, x, y) = \hat{\mu}(x, y) + \sum_{i:t_i < t} g(t - t_i, x - x_i, y - y_i).$$

3. Calcular las probabilidades que cada evento sea de fondo ($\Pr(u_i = 0)$) o desencadenado ($\Pr(u_i \neq 0)$).
4. Empleando estimaciones de densidad con kernel, obtener una nueva tasa de eventos de fondo $\hat{\mu}^*(x, y)$ con la ecuación 5.47.
5. Se calcula la variación de la tasa de eventos de fondo en el paso 4. Si $\max_{x,y} |\hat{\mu}^*(x, y) - \hat{\mu}(x, y)| > \epsilon$, para un parámetro preestablecido de tolerancia ϵ , entonces se actualiza μ y se vuelve al paso 2. De lo contrario, se termina el algoritmo.

De esta forma, no solo se ajusta óptimamente la función desencadenante sino que se logra una valoración de la tasa verdadera de eventos de fondo en el espacio, logrando modelar un fenómeno caracterizado por un proceso puntual auto-activado. En caso que existan demasiados datos y la dimensión del problema haga del algoritmo anteriormente descrito demasiado ineficiente, se pueden emplear métodos de Monte Carlo para realizar muestras aleatorias de los datos (Mohler *et al.*, 2011).

5.4.2. Victimización repetida

El crimen tiende a concentrarse no solo en regiones espaciales si no en períodos de tiempo (Pitcher y Johnson, 2011). Este patrón se puede atribuir a distintas razones pero una de las que mayor sustento y congruencia tiene es la victimización repetida y victimización repetida cercana («repeat and near repeat victimization» en inglés). La victimización repetida y la victimización repetida cercana son un fenómeno espacio-temporal donde el riesgo de ocurrencia de crímenes no solo se concentran en espacio sino en el tiempo que le sigue a eventos ocurridos anteriormente (Chen y Kurland, 2020). Es decir, criminales vuelven a cometer ofensas cerca de donde ya cometieron poco tiempo después de haberlas cometido en primer lugar.

Chen y Kurland (2020) recopilan distintos estudios de victimización repetida. Entre su recopilación, existe evidencia que diversos tipos de crímenes siguen este patrón: robo residencial (o «burglary»), tiroteos, asalto a mano armada, incendios maliciosos, robo de autos, ataques marítimos y actividad insurgente, entre otros.

Existen dos hipótesis principales para abordar este fenómeno. La hipótesis de «flag» sostiene que las víctimas tenían propiedades desde un inicio que constituían un riesgo elevado de ser blancos de un crimen o que atrajeron a ofensores (Chen y Kurland, 2020). Por ejemplo, ciertos vehículos en determinados lugares y horarios pueden ser muy atractivos para asaltantes, razón por la que pueden ser victimizados y revictimizados. Por otro lado, la hipótesis de «boost» o «boosting» dice que al cometer una ofensa hacia cierto blanco, el criminal aprende en el proceso y esto facilita que vuelva a hacerlo en el futuro (Pitcher y Johnson, 2011). Por ejemplo, un ladrón puede aprender a burlar medidas de seguridad de un vecindario luego de haber operado en él (Short *et al.*, 2008).

En el caso particular de robo residencial, luego de un evento existe una alta probabilidad que suceda un segundo en la misma ubicación o sus alrededores, pero esta decae exponencialmente con el tiempo (Pitcher y Johnson, 2011). Este impulso en la probabilidad de subsiguientes crímenes se encuentran más en la línea de la hipótesis de «boosting» (Fisher y Lab, 2010).

Cabe resaltar, sin embargo, que el alcance de este fenómeno de victimización repetida varía entre distintos contextos. Dentro de la recopilación literaria de Chen y Kurland (2020), estudios en Estados Unidos, el Reino Unido y Australia proyectan que un robo residencial aumenta el riesgo de otro en

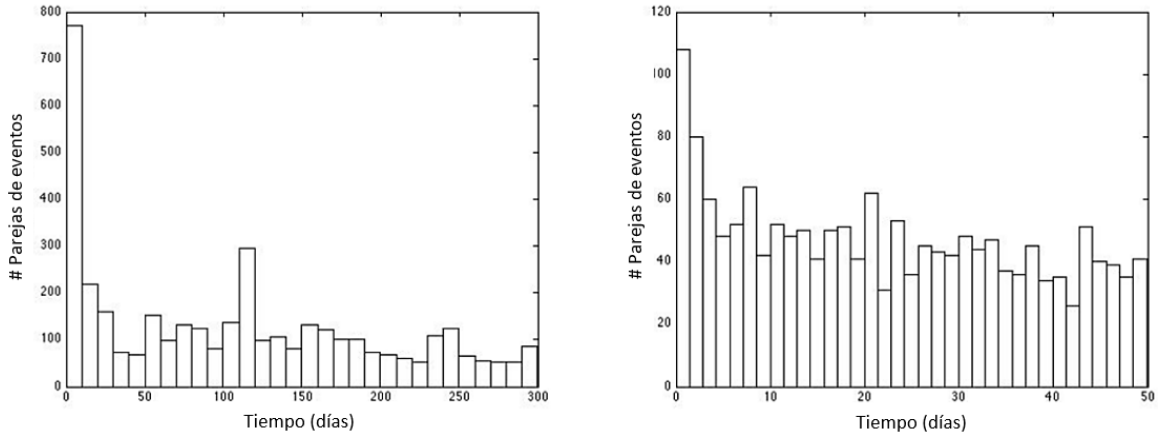


Figura 5.6: Comparación de bandas temporales de eventos sísmológicos y criminales.

En la Figura izquierda se muestra un histograma con la cantidad de parejas de sismos con magnitud mayor a 3.0, a menos de 110 km de distancia en términos del tiempo entre la ocurrencia de estos. En la Figura derecha se muestra, similarmente, la cantidad de parejas de robos a casas separadas por menos de 200 m de distancia, en términos del tiempo entre ellos, en Baja California. Fuente: Mohler *et al.* (2011)

ubicaciones a una distancia entre 200 m y 1200 m y que este riesgo disminuye entre dos y ocho semanas (Johnson *et al.*, 2007) - mientras que estudios en Beijing reflejan que el riesgo solo se eleva en ubicaciones con una distancia menor de 200 m y perdura hasta tres semanas (Chen, Yuan, y Li, 2012). Otro estudio (Chainey y da Silva, 2016) en Belo Horizonte, Brazil, muestra que los efectos de la victimización repetida son todavía menores, probablemente debido a la densidad poblacional y tipo de vivienda vertical. Estas diferencias reflejan que el impulso que recibe la probabilidad de subsiguientes crímenes luego de un primero tienen una forma general que puede ajustarse a distintos contextos, característica recordativa de funciones desencadenantes.

Existe amplia documentación que demuestra que la ocurrencia de un terremoto genera réplicas, o bien, aumenta la probabilidad que en el espacio-tiempo cercano vuelvan a haber otros sismos. Son descritos por modelos ETAs como el de la ecuación isotrópica (5.41), modelados como un proceso puntual auto-activado con cierta función desencadenante. En comparación directa, el fenómeno de victimización repetida tiene un comportamiento análogo. En la Figura 5.6 se muestra lado a lado como un sismo ocasiona más sismos cercanos en los días que le siguen e igual los robos residenciales, ilustrando porque ambos se modelan como procesos puntuales auto-activados. Habiendo establecido este vínculo entre la sismología y criminología, se presta el marco conceptual y metodológico desarrollado para el estudio de sismos y se aplica al modelado de crímenes. De hecho, el modelo de difusión de conducta colectiva de Strang y Tuma (1993) mencionado anteriormente es una aplicación directa de estos modelos ETAs, pero en lugar de construirse alrededor de eventos espacio-temporales, toma estados discretos (conductas) de individuos en el tiempo.

Mohler *et al.* (2011) toman una muestra de 706 robos residenciales ocurridos entre el año 2004 y 2005 en una zona de 18×18 km de Los Ángeles, y sobre ella ajustan un modelo de proceso puntual auto-activado. Encuentran que de los 706 eventos, el 63 % son victimización repetida en una misma vivienda y que la auto-activación se da más a lo largo de una misma calle o avenida. Por último, las predicciones que brinda el modelo de proceso puntual auto-activado son mejores que las de un mapa de calor (o zonas rojas) regular.

6.1. Modelo discreto de difusión de crimen

El objetivo general de este trabajo es el de ilustrar los aportes que la física puede brindar al estudio de otras problemáticas cotidianas, usando al crimen como ejemplo. Específicamente, en este trabajo se propone el desarrollo de un modelo de agentes individuales en un espacio finito que simule la dinámica de ladrones que delinquen en una zona y posteriormente generalizar este modelo a uno abstracto y analítico que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno. Para ello, se replica el trabajo de Short *et al.* (2008), ampliando el marco teórico en el que se basa, simulando alternativamente el modelo que se desarrolla y profundizando en la discusión de resultados y potenciales líneas de trabajo en el futuro.

6.1.1. Construcción de modelo discreto de difusión de crimen

Existen diversos marcos conceptuales y metodológicos para abordar el crimen, así como disciplinas que lo estudian. En particular, el estudio del crimen desde el enfoque económico surge en la segunda mitad del siglo XX - comúnmente atribuido a Becker (1968) - y este ha tenido gran incidencia en la concepción de políticas para enfrentarlo, así como en leyes criminales y penales (Dubber, Hörnle, y Fisher, 2014). Una característica importante de este marco es la comprensión de los criminales como actores racionales, capaces de recopilar información y analizarla, que buscan su propio bienestar. Ellos deciden cometer ofensas criminales cuando el posible beneficio (monetario u otro) asociado a hacerlas sea mayor que el costo y riesgo (probabilidad o severidad del castigo) de intentarlas (Campbell y Ormerod, 1997; Ramírez de Garay, 2014). En pocas palabras, bajo el enfoque económico, los criminales actúan bajo una percepción de costo-beneficio.

Construida sobre este principio de criminales racionales, la teoría de crimen de actividades rutinarias (L. E. Cohen y Felson, 1979) afirma que los crímenes -o por lo menos aquellos que no buscan victimizar a un objetivo en particular- suceden «[...]al converger tres factores: potenciales ofensores, posibles víctimas y ausencia de guardianes que protejan a las víctimas» (Smith y Brooks, 2013). Entre los crímenes explicados por esta teoría se encuentra el robo común, asalto a mano armada o

violaciones de parte de delincuencia común (L. E. Cohen y Feson, 1979).

Short *et al.* (2008) desarrollan un modelo para caracterizar el crimen, enmarcado en dicha teoría de actividades rutinarias. Por la facilidad de tener posibles víctimas estáticas, su modelo se centra en el crimen de robo en residencias o «hurto agravado en moradas» según se tipifica en el Código Penal de Guatemala (Congreso de la República de Guatemala, 1973). La construcción de los modelos de difusión del crimen presentados en este capítulo se basan en la línea de investigación de robo residencial en áreas urbanas desarrollada por la universidad de California (Short, Bertozzi, y Brantingham, 2010; Short, Brantingham, Bertozzi, y Tita, 2010; Short *et al.*, 2008).

Según la teoría de actividades rutinarias, si bien los robos no son cometidos buscando perjudicar a un objetivo específico, existen heterogeneidades en las viviendas que ocasionan que los ladrones sean atraídos a algunas y repelidos de otras (D’Orsogna y Perc, 2015). Estas diferencias pueden surgir desde las medidas de seguridad o guardianes en cada vivienda, objetos de valor, el conocimiento de la zona que tenga el ladrón, entre otras variables, pero finalmente se deben a la apreciación de costo-beneficio que perciben los potenciales ladrones de cada sitio (Pitcher y Johnson, 2011; Short *et al.*, 2008). Adicionalmente, esta valoración se divide en dos componentes principales: la atracción intrínseca que tiene cada vivienda por sí sola y una atracción dinámica a causa de la actividad criminal anterior en esa vivienda o su alrededor (ya sea por signos de desorden social como indica la teoría de la ventana rota (Wilson y Kelling, 1982) o por la hipótesis de «boosting» del crimen como proceso auto-activado (Chen y Kurland, 2020; Fisher y Lab, 2010; Johnson, 2008)).

Los criminales suelen cometer ofensas en proximidades cercanas a sus rutas diarias, con una probabilidad monótonamente decreciente de realizarlas a mayores distancias (D’Orsogna y Perc, 2015). Este hecho, junto a la teoría de actividades rutinarias donde los criminales no victimizan por razones ulteriores específicas, permite modelar a los ladrones en poblados urbanos como agentes realizando paseos aleatorios en un área. Acá, cada punto o ubicación en el área simboliza una vivienda que los ladrones pueden robar. Añadiendo la existencia de heterogeneidades entre las distintas moradas y la dinámica de atracción por eventos anteriores, los ladrones realizan caminatas aleatorias sesgadas hacia ubicaciones (residencias) más atractivas (Pitcher y Johnson, 2011; Short *et al.*, 2008). Suponiendo que la valoración de costo-beneficio es igual para todos los ladrones y que todos deducen la misma información de cada ubicación, la atracción se convierte en una propiedad arraigada a cada sitio s representada por un campo:

$$A_s(t) = A_s^0 + B_s(t), \quad (6.1)$$

donde A_s es el campo de atracción en el sitio s , A_s^0 representa una atracción intrínseca de la vivienda y $B_s(t)$ la atracción dinámica en el tiempo debido a robos anteriores. Con ello, los ladrones realizan los paseos aleatorios sesgados tomando los valores de $A(t)$ como pesos para definir probabilidades de transición, tal como se ve en la ecuación 4.28. Aquí, un sitio s se refiere a una subdivisión discreta del área en cuestión y la caminata aleatoria sesgada lleva a un ladrón de un sitio s a alguno de los sitios vecinos $s \sim s'$.

La ecuación 6.1 es análoga a un proceso puntual auto activado sin marcas como el de la ecuación 5.37. La analogía entre el crimen y los procesos puntuales auto activados es congruente, primero, porque los crímenes tienden a conglomerarse espacio-temporalmente (Farrell y Pease, 2014; Mohler *et al.*, 2011) de la misma manera y luego porque concuerda con la existencia de un riesgo «de fondo» de ser victimizado y que a este se adiciona el riesgo de ser victimizado luego de eventos ocurridos anteriormente en ubicaciones cercanas (Johnson, 2008; Pitcher y Johnson, 2011).

Continuando con la analogía del robo de residencias como proceso puntual auto-activado, el campo de atracción A se interpreta como la tasa media de ocurrencia de robos (ecuación 5.36). Por lo tanto, en un período de tiempo δt , un ladrón ubicado en s tiene una probabilidad $p_s(t)$ de robar exitosamente, dada por

$$p_s(t) = 1 - e^{-A_s(t)\delta t}. \quad (6.2)$$

Esta probabilidad se deduce de una distribución de Poisson (ecuación 4.14 con $\lambda = A_s(t)\delta t$ donde la probabilidad de que ocurra un robo es el complemento de la probabilidad que no ocurra ninguno.

En cada período δt , un ladrón elige si roba o si se traslada a un sitio vecino $s' \sim s$ a través de la caminata aleatoria sesgada. Para simular esta toma de decisión, se genera un número pseudo aleatorio $r \in U[0, 1)$ y si $r < p_s(t)$, entonces se comete el robo - de lo contrario se traslada. En el caso se cometer el robo, se registra el evento E y se retira al ladrón del sistema, simulando que huye de la escena del crimen y que se abstiene de cometer más crímenes por el momento (Short *et al.*, 2008).

Para compensar el hecho que se retiran del sistema a los ladrones que cometen robos, existe una tasa Γ uniforme en todo el área de generación de nuevos criminales. Esta simula a los ladrones que retornan a cometer actividades delictivas luego de haberse abstenido por un período de tiempo. De esta manera, en un período δt se generan $\Gamma\delta t$ ladrones en cada sitio del área - en el caso que la magnitud sea menor a 1, entonces se interpreta la probabilidad de generarse un ladrón en cada sitio. De esta forma, se tiene una nueva distribución de ladrones en el área a partir de cada periodo.

Recuperando el fenómeno de la victimización repetida del crimen y su analogía con un proceso puntual auto-activado, el factor dinámico del campo de atracción $B(t)$ también evoluciona en el período δt y se actualiza según los eventos que ocurran en él:

$$B_s(t + \delta t) = B_s(t)(1 - \omega\delta t) + \theta E_s(t). \quad (6.3)$$

En esta ecuación se tiene que la atracción en s aumenta con un factor θ por cada evento registrado ahí E_s que se registró durante el último período, mas decae con una tasa de $1 - \omega\delta t$. Esta dinámica corresponde a una función desencadenante para la atracción de ladrones, congruente con observaciones empíricas (Pitcher y Johnson, 2011) de victimización repetida exacta que decae exponencialmente con el tiempo. Considerando, además, el factor de victimización repetida cercana, la ecuación 6.3 se convierte en

$$B_s(t + \delta t) = [(1 - \eta)B_s(t) + \frac{\eta}{z} \sum_{s' \sim s} B_{s'}(t)](1 - \omega\delta t) + \theta E_s(t). \quad (6.4)$$

z es la cardinalidad de los vecinos de s ($s' \sim s$), por lo que esta nueva ecuación significa que un factor η de $B_s(t)$ se difunde a sus vecinos y que el promedio de $B_{s'}(t)$ se difunde hacia s por ese mismo factor η . En pocas palabras, η es un factor de esparcimiento espacial del campo dinámico de atracción (Short *et al.*, 2008). La lógica detrás de este factor es que la atracción de robar una residencia se contagia hacia sus vecinas: por ejemplo, una vivienda poco atractiva tiene baja probabilidad de ser victimizada si se analiza independientemente, pero si está rodeada de moradas más atractivas, el riesgo de ser victimizada aumenta (Pitcher y Johnson, 2011).

Esta misma ecuación puede simplificarse con el operador laplaciano discreto de B:

$$\Delta B_s(t) = \left(\sum_{s' \sim s} B_{s'}(t) - zB_s(t) \right) / l^2, \quad (6.5)$$

con l siendo la distancia de separación entre el sitio en cuestión s y sus vecinos s' . Con este operador se escribe nuevamente a la ecuación 6.4 como

$$B_s(t + \delta t) = [B_s(t) + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s(t)](1 - \omega\delta t) + \theta E_s(t). \quad (6.6)$$

Se tiene entonces un modelo de ladrones en un área residencial urbana, donde estos se encuentran sujetos a un campo de atracción A . Sea una función $n(s, t) = n_s(t)$ que indica cuántos ladrones están en el sitio s del área en el momento t , un sistema parte con valores iniciales para $n(s, t = 0)$ y el campo de atracción $A(s, t = 0)$. Este modelo consiste en evolucionar este sistema por iteraciones (o intervalos discretos de tiempo δt). Durante cada iteración, los ladrones eligen victimizar en sus respectivas ubicaciones y huir o trasladarse a sitios vecinos, se actualiza el campo de atracción según los robos registrados y se generan aleatoriamente más ladrones. El diagrama de flujo general de este modelo se presenta en la Figura 6.1 y posterior a los anexos se encuentra una lista de símbolos.

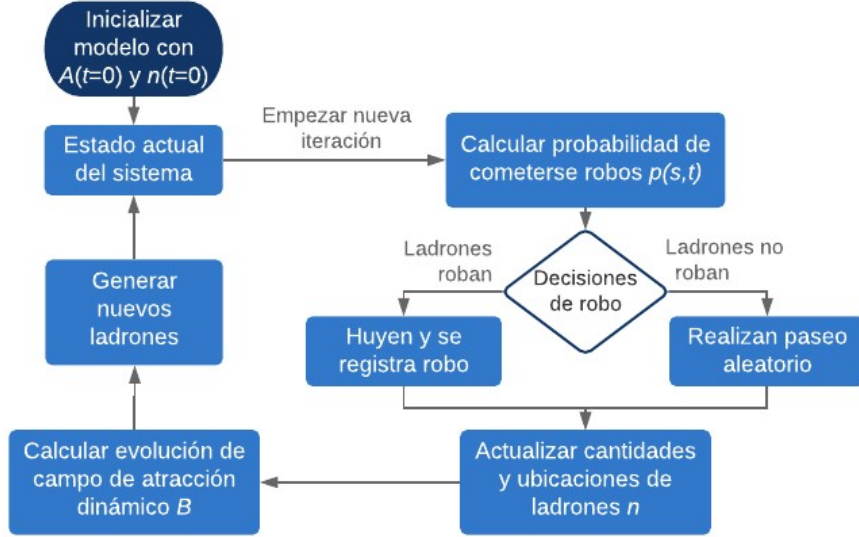


Figura 6.1: Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen.
Fuente: elaboración propia basada en Short *et al.* (2008); Pitcher y Johnson (2011)

Recapitulando, este modelo se construye de la teoría de actividades rutinarias - crimen particular que ocurre al coincidir potenciales criminales, potenciales víctimas y ausencia de guardianes. Se considera el crimen de robo residencial, donde las posibles víctimas ocupan todo el espacio y no tienen una dinámica particular. Sobre este espacio se modelan a los criminales como agentes realizando paseos aleatorios, sesgados hacia viviendas más atractivas. Este sesgo ocurre por un campo de atracción que permea a todo el espacio que consta de un factor estático y otro que depende del historial de robos -en el factor estático se encuentra implícitamente el tercer elemento de la teoría de actividades rutinarias: los guardianes. La dinámica de los criminales y su sesgo son recordativos de partículas brownianas en presencia de fuerzas. El campo de atracción interactúa con los ladrones tal que los guía a ubicaciones con más riesgo de ser víctimas y aumenta la probabilidad que cometan robos en esos sitios. Por otro lado, los ladrones también inciden en el campo de atracción con cada robo perpetrado. De esta forma, los ladrones y el campo de atracción forman un circuito de retroalimentación y el modelo está caracterizado por una dinámica no lineal que depende sustancialmente de los parámetros y condiciones iniciales del sistema.

A considerarse en este trabajo es el caso del sistema en equilibrio espacial homogéneo (Short *et al.*, 2008). Este caso se obtiene cuando el valor promedio de A tiende a ser constante a lo largo del tiempo, así como la cantidad de ladrones n . Para que exista este equilibrio en A , se debe cumplir que, en promedio, el aumento en B por los eventos que ocurren en una iteración debe tener la misma magnitud que el decaimiento que sufre por el paso del tiempo. Tomando la notación de \bar{x} para denotar el promedio espacial de x , el equilibrio en A significa que

$$\omega \bar{B} \delta t = \theta \bar{E} = \theta \bar{n} \bar{p}. \quad (6.7)$$

Por otro lado, para que la cantidad de ladrones se conserve a lo largo del tiempo, la cantidad promedio de robos en una iteración debe ser igual a la cantidad promedio de ladrones que se generan:

$$\bar{E} = \bar{n} \bar{p} = \Gamma \delta t. \quad (6.8)$$

Despejando las ecuaciones 6.7 y 6.8 se obtienen los valores de equilibrio homogéneo para el campo de atracción y cantidad de ladrones,

$$\bar{B} = \frac{\theta \Gamma}{\omega}, \text{ y} \quad (6.9)$$

$$\bar{n} = \frac{\Gamma \delta t}{\bar{p}} = \frac{\Gamma \delta t}{1 - e^{-\bar{A} \delta t}}. \quad (6.10)$$

Finalmente, las condiciones iniciales para el modelo discreto de difusión del crimen construido son

$$B(s, t = 0) = \bar{B}, \quad n(s, t = 0) = \bar{n}.$$

6.1.2. Implementación de modelo discreto de difusión del crimen

Se busca realizar una simulación computacional de este modelo construido para analizar su comportamiento bajo distintos parámetros, verificando los resultados de (Short *et al.*, 2008) y analizar la viabilidad de implementarlo para datos reales. Con ello en mente, se recurre al lenguaje de programación Python por su mezcla de eficiencia y versatilidad, empleando en particular los módulos *NumPy* por sus estructuras de datos y *matplotlib* por sus visualizaciones gráficas.

Caminata aleatoria sesgada

Uno de los elementos principales del modelo es la caminata aleatoria sesgada por la atracción A que realizan los ladrones cuando deciden no robar en su posición actual. La implementación de este elemento sirve como base para el resto del modelo.

Para iniciar, se simula el espacio de víctimas o el área del que se ha hablado hasta ahora como una rejilla rectangular de dimensión $N \times N$. Un nodo de esta rejilla, representado por las coordenadas (i, j) tal que $i, j \in 0, 1, 2, \dots, N$ e ilustrado por la Figura 6.2, se interpreta como una morada o bien un sitio s . Luego, los sitios vecinos $s' \sim s$ son aquellos que están a una unidad (l) de separación de s y tienen respectivamente las coordenadas $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$, y $(i, j + 1)$. Para esta simulación se establecen condiciones cíclicas, de modo que la rejilla rectangular del área realmente representa un toroide tal que $f(i = N, j) = f(i = 0, j)$ y $f(i, j = N) = f(i, j = 0)$.

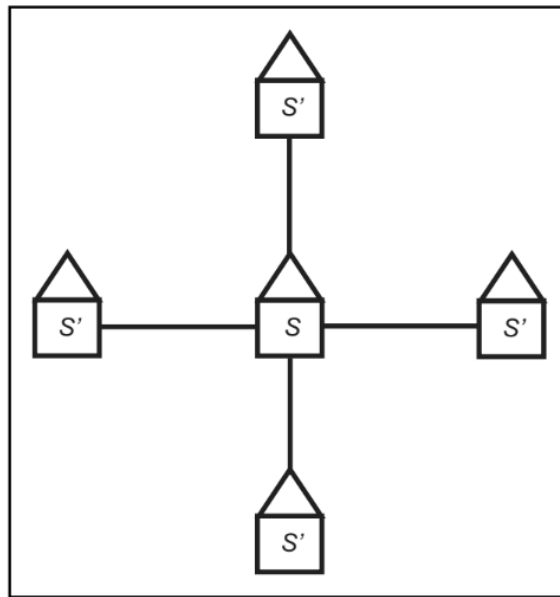


Figura 6.2: Un nodo de la rejilla que representa un sitio del área del sistema.
Fuente: Pitcher y Johnson (2011)

Por otro lado, la información de cuántos ladrones hay en el sistema y cómo están distribuidos en un determinado momento ($n(t)$) se puede representar por una matriz de dimensión $N \times N$, donde cada la entrada n_{ij} corresponde a la cantidad de ladrones en el nodo ij . El campo de atracción $A(t)$ es representado igualmente por una matriz de $N \times N$, con entradas A_{ij} .

Una caminata aleatoria consiste en decidir por medio de métodos Monte Carlo el próximo estado (o movimiento en este caso) del agente en cuestión. Para ello, se revisan los posibles estados o la vecindad del actual, se le asignan probabilidades a cada uno y se genera un número aleatorio que corresponda a alguna de estas probabilidades.

Por ejemplo, una forma de implementar esta caminata aleatoria sesgada en esta rejillas es ir a la ubicación del agente y normalizar la atracción que siente hacia cada uno de los cuatro nodos aledaños: el superior(1), el inferior(2), el izquierdo (3) y el derecho(4).

$$T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \quad (6.11)$$

$$A_1^* = A_1/T, \quad (6.12)$$

$$A_2^* = A_2/T,$$

$$A_3^* = A_3/T \text{ y}$$

$$A_4^* = A_4/T.$$

Luego, construir una $\text{cdf}(x)$ de las probabilidades de movimiento que tiene el agente desde esa posición:

$$\text{cdf}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < A_1^*, \\ 2, & \text{si } A_1^* \leq x < A_1^* + A_2^*, \\ 3, & \text{si } A_1^* + A_2^* \leq x < A_1^* + A_2^* + A_3^*, \\ 4, & \text{si } A_1^* + A_2^* + A_3^* \leq x \end{cases} \quad (6.13)$$

Por último, se genera $r \in U(0, 1)$ un número aleatorio y se decide la traslación del agente con $\text{cdf}(r)$.

Implementación por bucles

Habiendo establecido un mecanismo para simular las caminatas aleatorias sesgadas, se sigue entonces el algoritmo establecido en la Figura 6.1: se ingresan condiciones iniciales a un sistema y se evoluciona por iteraciones. Cada iteración consiste en que cada ladrón del sistema robe y se retire o de un paso aleatorio, actualizar el campo de atracción según los robos y finalmente colocar más ladrones en el sistema. Como sea, para lograr cubrir todo ladrón, decidir su ruta de acción y ejecutar sus robos o caminatas, se debe cubrir la totalidad de los ladrones en cada sitio y la totalidad de sitios en el área. De esta forma, este primer paso en cada iteración del sistema requiere establecer bucles para considerar todos los ladrones, tal como se muestra en el diagrama de flujo ilustrando en la Figura 6.3.

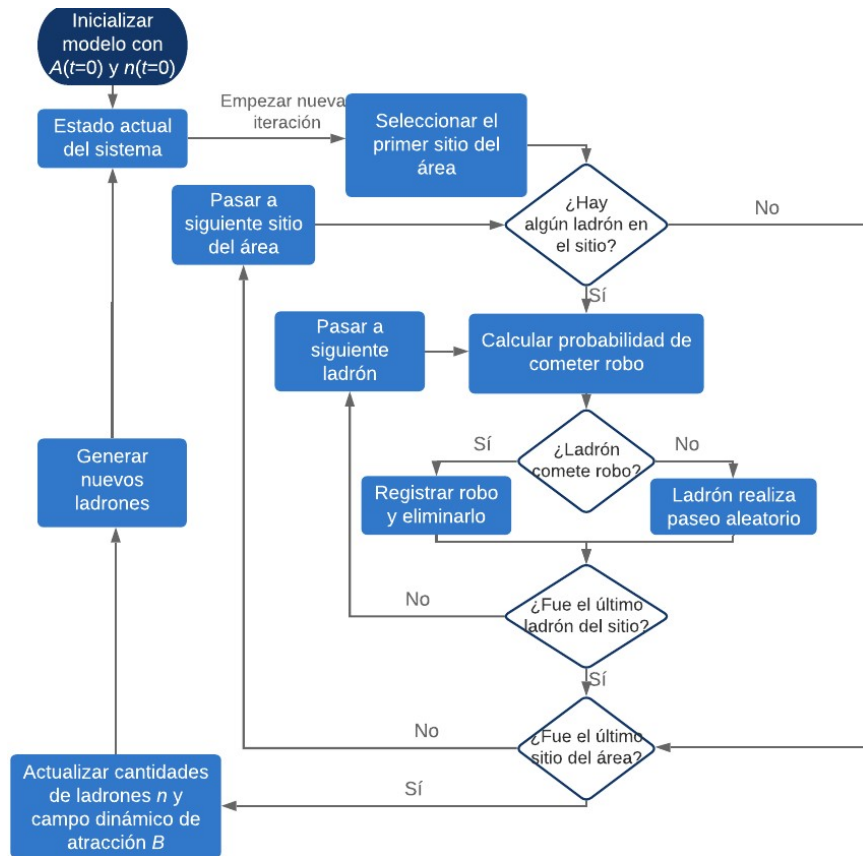


Figura 6.3: Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen, desarrollado por bucles. Fuente: elaboración propia

Este esquema para implementar el modelo resulta ineficiente conforme aumenta el tamaño del área y la cantidad de ladrones, dado que las operaciones más pesadas de cada iteración se tendrían que repetir para cada ladrón (seleccionar ladrón, obtener su probabilidad de cometer robo, decidir si comete el robo y en el caso que no, acceder a la atracción de sitios vecinos, normalizar sus atracciones y por último decidir a donde se traslada).

No se visualiza en el diagrama, pero empleando la misma logística para actualizar $B_s(t + \delta t)$ y $n_s(t + \delta t)$, habría que iterar sitio por sitio y utilizar la ecuación 6.4 para el campo de atracción y sumarle a los ladrones que se trasladaron en la última iteración los ladrones generados con $\Gamma\delta t$ (que en sí es otro proceso de Monte Carlo) para el caso de la cantidad de ladrones.

Esta implementación es programable y puede brindar una simulación para el modelo discreto, no obstante, es un método de fuerza bruta poco eficiente en cuanto a recursos computacionales.

Implementación del modelo vectorizado

Recordando que la atracción $A(t)$ se definió como una matriz con entradas $A_s(t)$, sus componentes estático A^0 y dinámico $B(t)$ también son matrices. De esta cuenta, la ecuación 6.3 de evolución de B_S con repetición repetida exacta puede generalizarse a operación matricial:

$$B(t + \delta t) = B(t)(I - \omega\delta t) + \theta E(t), \quad (6.14)$$

Donde I se refiere a una matriz identidad y $E(t)$ es una matriz con entradas de la cantidad de robos en cada sitio entre t y $t + \delta t$. Con el objetivo de ahorrar recursos computacionales, el realizar esta ecuación matricial sustituye el operar la ecuación por sitio y reiterarlo por todos los sitios. Este es un ejemplo de vectorización- aprovechar estructuras de datos y funciones que permiten operar paralelamente conjuntos de datos (van der Walt, Colbert, y Varoquaux, 2011).

Este principio de vectorización puede aplicarse a la ecuación de evolución de B con victimización repetida 6.4, donde las condiciones de frontera cíclicas permiten plantear a las matrices de vecinos como la misma matriz original pero corrida una fila o columna para su lado. Por ejemplo, la matriz de vecinos superiores se logra al correr las entradas de la matriz una fila para abajo. En el extremo inferior de la matriz, las entradas de la última fila a pasan de ser las entradas de la primera fila, aprovechando la condición de frontera cíclica que se adoptó para la implementación. De esta forma, la evolución temporal de B se realiza de forma completamente matricial (vectorizada) y se ahorra esfuerzo evadiendo iterar una sola función en varias entradas.

Este concepto de vectorización se puede aplicar para la decisión de ladrones de robar o trasladarse aleatoriamente y posteriormente para una fracción de la caminata aleatoria sesgada.

El módulo NumPy (van der Walt *et al.*, 2011) para Python ofrece una estructura de datos llamada *Arrays* que permite agrupar varias entradas numéricas en matrices o vectores. Luego, el paquete ofrece funciones de soporte como la generación de *Arrays* con entradas de números generados aleatoriamente e incluso operaciones matemáticas simultáneas para todas las entradas de un mismo *Array*. Esto se aprovecha primero para calcular la probabilidad de robo que existe en cada sitio de forma vectorizada, i.e., se calcula 6.2 para todas las entradas de la matriz $A(t)$ paralelamente. Luego, con la generación de números aleatorios se vuelve posible comparar simultáneamente la probabilidad de robo de todos los ladrones en el sistema con números generados aleatoriamente y así decidir su ruta de acción, nuevamente, en paralelo. Este procedimiento vectorizado, que evita el tener que recurrir a bucles e iterar operaciones una alta cantidad de veces, optimiza recursos computacionales (Langtangen, 2017).

Según procedimiento vectorizado, en lugar de ubicar cada ladrón, identificar sus sitios aledaños y después determinar sus probabilidades de movimiento, se construye una sola matriz de transición de Markov que contenga todas las probabilidades de movimiento para cada sitio en la rejilla. De esta forma, por cada ladrón solo se genera un número aleatorio $r \in U[0, 1)$ y se decide su movimiento con la $\text{cdf}(r)$ que hace referencia a la matriz previamente construida.

Al final, la vectorización resulta en una simplificación significativa con respecto a la implementación por bucles original; en cada iteración en vez de dar lugar a 8 procesos por cada uno de todos los ladrones y luego actualizar individualmente los valores de n y B por cada sitio, se realiza matricialmente el calculo de robos, actualización del estado del sistema y solo se itera por el paseo aleatoria de ladrones que no roban. El diagrama de flujo con la implementación vectorizada del modelo se puede apreciar en la Figura 6.4.

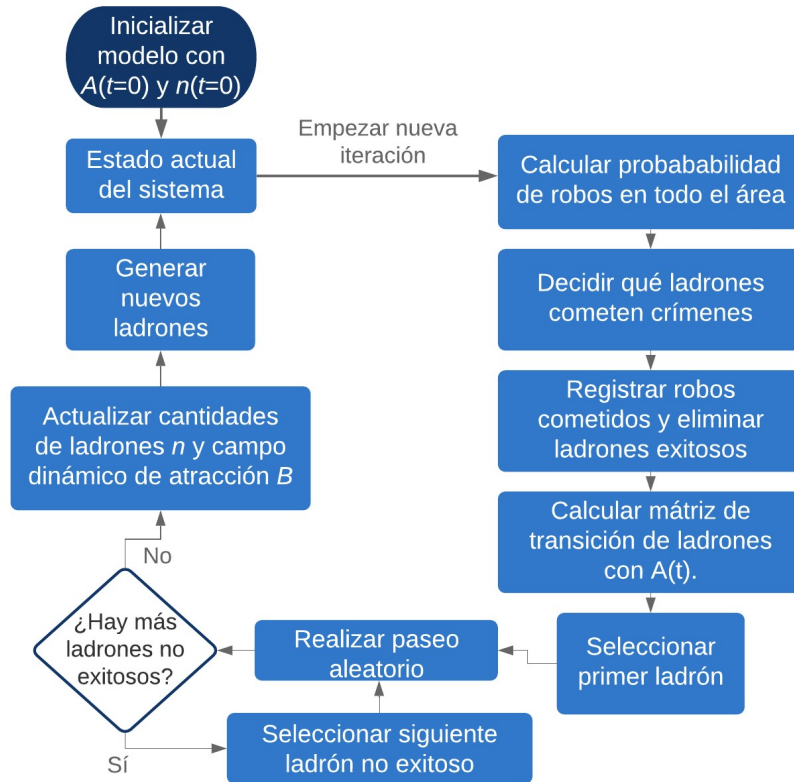


Figura 6.4: Algoritmo de modelo discreto de difusión de crimen, vectorizado.
Fuente: elaboración propia

Con el objetivo de estudiar este modelo, a continuación se muestran se realizan distintas simulaciones computacionales de él, implementando el algoritmo vectorizado en el lenguaje de programación Python. El código empleado se muestra en los anexos de este trabajo.

Las figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 muestran la evolución del campo dinámico de atracción B de un área con dimensión $N = 100$, $\delta t = 1/100$, $l = 1$, $\omega = 1/15$, campo estático de atracción $A^0 = 1/30$ y distintos valores para η , θ y Γ . La magnitud del campo dinámico de atracción se denota por una escala de color, donde rojo intenso corresponde a $B = 2\bar{B}$, el color blanco a $B = \bar{B}$ y azul oscuro a $B = 0$. Estas figuras realzan el hecho que pequeñas variaciones en los parámetros pueden resultar en patrones de comportamiento diversos para el sistema. Aquí las unidades espaciales pueden interpretarse como casas o cuadras, mientras que las unidades temporales como días (Short *et al.*, 2008).

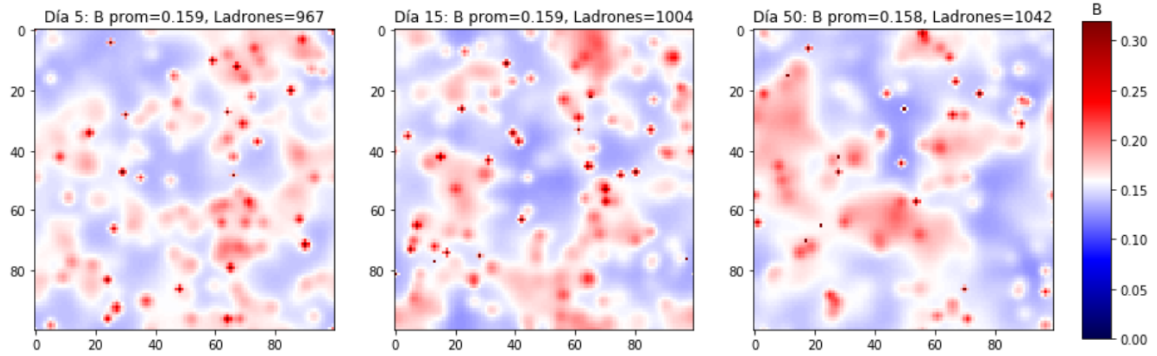


Figura 6.5: Corrida de modelo discreto (a).

Se muestra el campo dinámico de atracción a los 5, 15 y 50 días con los parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.019$ y $\theta = 0.56$. Bajo estos parámetros, el sistema tiene un campo dinámico de atracción medio de $\bar{B} = 0.1596$ y una cantidad media de ladrones de $\bar{n} \cdot N^2 = 985.8$.

Fuente: elaboración propia

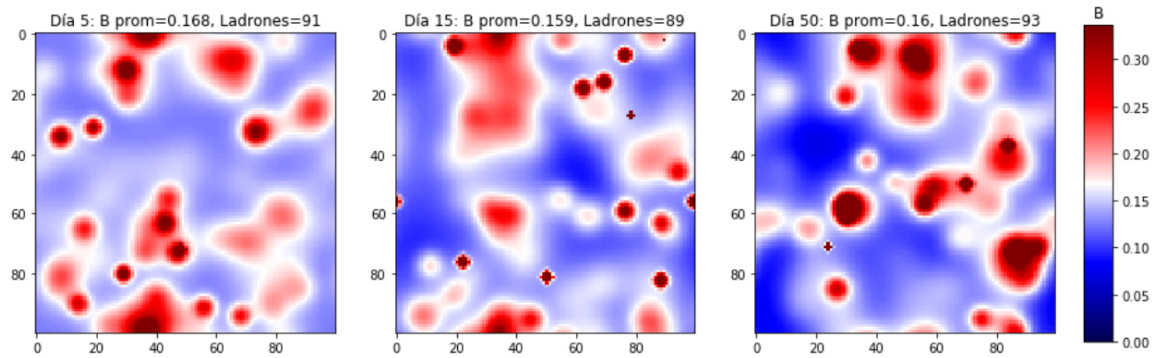


Figura 6.6: Corrida de modelo discreto (b).

Se muestra el campo dinámico de atracción a los 5, 15 y 50 días con los parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$. Bajo estos parámetros, el sistema tiene un campo dinámico de atracción medio de $\bar{B} = 0.168$ y una cantidad media de ladrones totales de $n \cdot N^2 = 99.4$.

Fuente: elaboración propia

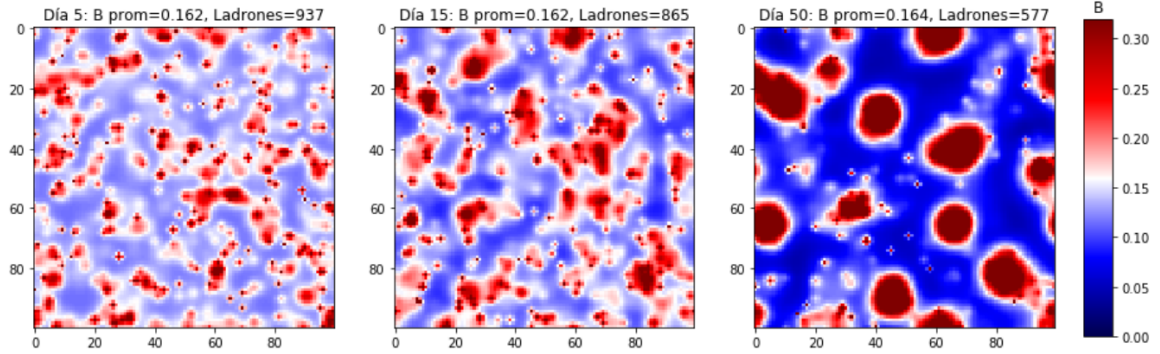


Figura 6.7: Corrida de modelo discreto (c).

Se muestra el campo dinámico de atracción a los 5, 15 y 50 días con los parámetros $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.019$ y $\theta = 0.56$. Bajo estos parámetros, el sistema tiene un campo dinámico de atracción medio de $\bar{B} = 0.1596$ y una cantidad media de ladrones totales de $\bar{n} \cdot N^2 = 985.74$.

Fuente: elaboración propia

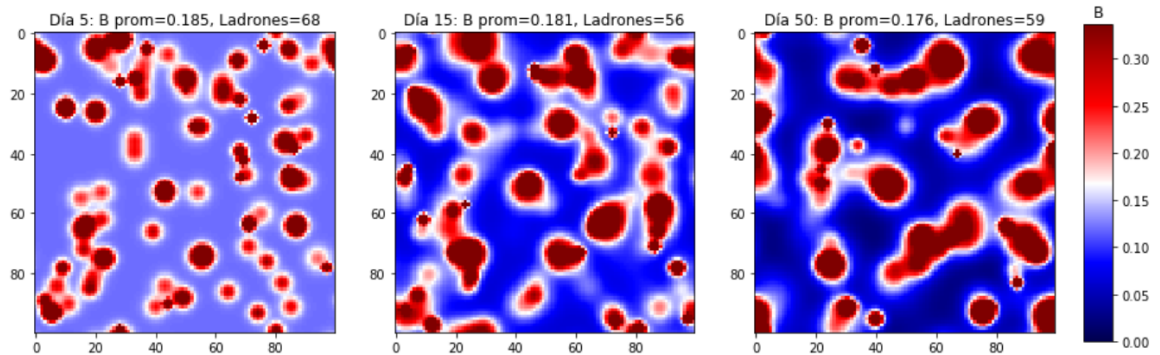


Figura 6.8: Corrida de modelo discreto (d).

Se muestra el campo dinámico de atracción a los 5, 15 y 50 días con los parámetros $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$. Bajo estos parámetros, el sistema tiene un campo dinámico de atracción medio de $\bar{B} = 0.168$ y una cantidad media de ladrones totales de $\bar{n} \cdot N^2 = 103.76$.

Fuente: elaboración propia

6.1.3. Análisis del modelo discreto de difusión del crimen

Construcción

A modo de revisar el modelo construido, a continuación se enumeran los supuestos empleados para su formulación e implementación.

1. Todo ladrón actúa oportunamente y sin motivos particulares hacia alguna víctima.
2. Los ladrones actúan racionalmente, recopilando información y realizando valoraciones de costo-beneficio antes de actuar.
3. Cada intento de robo es exitoso.
4. La dinámica de ladrones se modela con caminatas aleatorias sesgadas.

5. Existe una probabilidad estática de fondo de ser victimizado para todo sitio en el espacio.
6. Los intervalos temporales del modelo δt son suficientemente pequeños como para que un ladrón pueda victimizar únicamente a una ubicación o trasladarse a una ubicación vecina.
7. Los ladrones solo pueden apreciar la atracción de sitios vecinos inmediatos.
8. Los ladrones se abstienen de cometer ofensas adicionales inmediatamente después de haber robado.
9. Todos los ladrones perciben una misma atracción y probabilidad de de un mismo sitio, incluyendo la atracción dinámica por la historia de crimen en la región del sitio actual.
10. Todo robo eleva la atracción del sitio en un factor θ ; todos los ladrones comunes tienden a la victimización repetida.
11. Decaimiento exponencial del dinámico de atracción con una tasa constante $1 - \omega$ para todo sitio en cualquier momento.
12. El campo de atracción dinámico también se difunde espacialmente.
13. En promedio, la cantidad de ladrones en el sistema permanece constante a lo largo del tiempo, al igual que la atracción A .
14. Condiciones cíclicas en las fronteras del espacio.

Los supuestos 1 y 2 surgen al acuñar la teoría criminológica de actividades rutinarias y delimitan el fenómeno a abarcar: hurto en moradas a manos de ladrones comunes y racionales. Esta delimitación no excluye a la realidad guatemalteca, ya que según percepciones de habitantes en la ciudad de Guatemala al año 2007 (Programa de Seguridad Ciudadana and Prevención de la Violencia del PNUD Guatemala, 2007), los principales delincuentes en el 58.9% de las colonias son ladrones comunes y la racionalidad de ofensores es central al código penal (Congreso de la República de Guatemala, 1973). El supuesto 3 surge del hecho que los ladrones son agentes racionales. La decisión de intentar un robo o no se basa en la información que recopilan y un número aleatorio. Este último puede interpretarse como las circunstancias, habilidades o factores en general que afectan la decisión de cometerlo. Ya que son entes racionales, si intentan el robo es porque tienen certeza de ser exitosos.

El cuarto supuesto es uno de los que mayor importancia tiene en todo el modelo. Sabiendo que los ladrones son racionales, estos en cada iteración evalúan la atracción que perciben por cada uno de los sitios vecinos $s' \sim s$. Bajo el marco económico del modelo, buscan maximizar su beneficio y minimizar sus costos - se sabe por observaciones empíricas, además, que tienden a quedarse en distancias cercanas a sus rutas diarias (D'Orsogna y Perc, 2015) por lo que se reconoce que la traslación de ladrones en cada iteración se pueden tomar como traslaciones a ubicaciones inmediatamente cercanas. Profundizando en la dinámica de los ladrones, en realidad cada ladrón en cualquier instante está sumido en una inmensidad de circunstancias particulares y factores que influyen en su decisión de trasladarse a alguna u otra ubicación de $s' \sim s$. Si todas estas circunstancias y todas las variables que rodean a un ladrón llegaran a conocerse, entonces sería posible predecir el comportamiento del ladrón con un cierto grado de seguridad- un proceso prácticamente imposible.

Esta idea es una directa analogía al comportamiento de partículas brownianas: se sabe que el movimiento de las partículas es parte de un sistema determinista y que esta dinámica exacta podría predecirse si se tuviera conocimiento de condiciones iniciales de todas las partículas en el sistema que interaccionan con las partículas brownianas - cosa que por la inmensa cantidad de grados de libertad sería cerca de imposible de resolver. Afortunadamente, este sinnúmero de factores e interacciones que afectan a las partículas brownianas no poseen una dirección preferencial sino que su impacto neto sobre ellas puede considerarse uniformemente arbitrario. Por esta razón, es posible modelar a las partículas brownianas como partículas realizando caminatas aleatorias simples.

Lo mismo le sucedería a ladrones en áreas en un campo de atracción A uniforme: la gran cantidad de particularidades y motivaciones de cada ladrón tendrían un efecto neto sobre ellos uniformemente arbitrario. Bajo una atracción A uniforme e intervalos temporales δt pequeños (supuesto 6), los ladrones realizarían caminatas aleatorias simples en búsqueda de víctimas. A pesar que las partículas brownianas y la toma de decisiones de ladrones son fenómenos fundamentalmente distintos, con uno siendo de naturaleza física y el otro siendo un fenómeno social o psicológico, aquí la intuición matemática y el marco metodológico desarrollado para el primero guía el estudio del segundo. Esta es la misma idea que emplearon Bahr y Passerini (1998b) para su modelo de Mecánica estadística para el comportamiento Colectivo o que Mohler *et al.* (2011) emplearon para comparar la victimización repetida con sismos. Continuando con esta lógica de guiar el modelado del fenómeno del crimen con metodologías y marcos conceptuales para fenómenos físicos, se introduce un sesgo en las caminatas aleatorias ocasionado por A y este se opera como una matriz de pesos, según su desarrollo empleado para redes y procesos de Markov (Shim, Sengupta, y Roy, 2018).

El supuesto 5 es una simplificación para obviar la diversidad de características en el espacio de víctimas. Por un lado, implica que todos los sitios en el espacio son potenciales víctimas- condición congruente en poblados urbanos con alta densidad- y por el otro, se supone que no sufren de variaciones en cuanto a costo-beneficio o guardianes durante el periodo de estudio. Intuitivamente, se reconoce que este tipo de cambios intrínsecos a nivel local que puedan afectar significativamente la atracción de fondo ocurren en escalas temporales mayores a meses. En todo caso, a la atracción estática de fondo se le podrían agregar fases temporales globales, entendiendo que la actividad de ladrones comunes o presencia de guardianes podría variar en todo el sistema a lo largo escalas temporales. Por ejemplo, en ciertos días de la semana podrían haber menos personas (guardianes) en sus hogares.

De cualquier forma, el supuesto 5 junto a los supuestos 6, 7 y 8 sirven para evadir la complejidad en el comportamiento de los ladrones y evitar que se pierda la analogía con fenómenos físicos.

El supuesto 9 nace de suponer que los ladrones operan en conjunto y hay un flujo constante de información entre ellos. A pesar de no encontrarse información que valide este supuesto en Guatemala, cabe intuitivamente que si ladrones comunes operan a una escala local y son reducidos en cantidad, entonces es probable que estén asociados.

El supuesto 10 también es fundamental al modelo y consta de dos elementos; el que todo criminal del modelo tiende a la victimización repetida (en concordancia con el supuesto 9) y el que el aumento de la atracción por cada robo en un sitio sea constante en todo el sistema. El primero nace de observaciones del crimen concentrándose en regiones reducidas de espacio-tiempo y tiene una amplia cantidad de estudios y análisis estadísticos que respaldan su existencia. Existen críticas a esta conceptualización porque puede que las observaciones de este fenómeno tengan un sesgo del superviviente en que los ladrones que tienden a victimizar repetidamente son los que se detectan - en contraste de potenciales ladrones con otros comportamientos no detectados (Eck y Liu, 2008; Pitcher y Johnson, 2011). No obstante, esta crítica es hipotética y la información existente respalda la victimización repetida. Por otro lado, el que todo robo aumente la atracción en una misma medida es una simplificación al sistema que mantiene los patrones de víctimas y victimarios lo más sencillos posibles. Pitcher y Johnson (2011) proponen que en lugar de ser un parámetro constante θ el aumento de riesgo, que sea un factor $\theta X_s^t(1 - B_s^t/k)$, donde X_s^t corresponde a un valor probabilístico derivado de una distribución de Poisson y B_s^t/k sirve para limitar el crecimiento del riesgo a un sitio tras un cierto límite, suponiendo que guardianes automáticamente impiden que se siga elevando. Dado que en este trabajo no se considera explícitamente el comportamiento de guardianes, se conserva el aumento constante.

El onceavo supuesto coincide con el decaimiento exponencial de la probabilidad de revictimización observada en robos residenciales (Chen y Kurland, 2020). El aumento en la atracción dinámica θ por cada robo, esta tasa de desvanecimiento de la atracción y su difusión espacial (supuesto 12) son la función desencadenante « g » de los procesos puntuales auto activados. Según se discutió en

el capítulo anterior, el fenómeno de victimización repetida (exacta y cercana) posee una g distinta por cada área en cuestión; si bien aparentan compartir una difusión espacial y decaimiento temporal (Chen y Kurland, 2020), se debe identificar los parámetros que caracterizan el fenómeno en una región para que este modelo cobre sentido en ella.

El supuesto 13 se introduce para mantener al sistema, en promedio, en un estado de equilibrio estático. Implica que la cantidad de ladrones en todo el área tiende a conservarse y que para ellos globalmente no existe una pérdida o aumento de interés en seguir victimizando en el presente espacio. Al igual que la atracción de fondo, se puede suponer cantidad e interés de ladrones globalmente invariables por las escalas de tiempo a considerar en el sistema.

El último supuesto es consecuencia de adoptar condiciones de frontera cíclicas para el sistema. Se basa en la idea que el área en cuestión es solo la fracción de un poblado urbano donde el fenómeno se presenta de la misma forma y que el flujo neto de ladrones, así como de la atracción, del área es nulo, apoyando al supuesto de conservación de ladrones y atracción global en el sistema. En otros ejercicios sería igualmente viable establecer condiciones de frontera tal que no hay movimiento de ladrones o difusión de atracción hacia los bordes del área, simbolizando el límite del poblado, o bien, que el sistema está completamente aislado.

En conclusión, a pesar que todos estos supuestos delimitan el fenómeno de la distribución de hurtos a analizar y lo centran para solo ser aplicable a un selecto tipo de situaciones, se llega a construir un marco de referencia para estudiarle - impulsado por el desarrollo teórico conceptual y metodológico de fenómenos físicos.

Otro punto a resaltar de este modelo es que no ahonda en la causalidad del fenómeno del hurto en residencias- parte de la existencia previa de victimarios motivados y de víctimas con distintos grados de idoneidad para los victimarios (que hasta ahora se han enmarcado como atracción para victimarios, pero equivale a riesgo desde la perspectiva de potenciales víctimas). Por lo pronto, el modelo es aplicable para estudiar y predecir la distribución de eventos de hurto residencial bajo una perspectiva cuantitativa, sin ánimos de entender o demostrar los factores o razones subyacentes que lo llevan a existir en primer lugar. Este acercamiento no pretende sustituir los estudios clásicos del crimen como un fenómeno social, psicológico, económico, político, etcétera, si no complementarlos bajo el formalismo, abstracción y comprensión cuantitativa que ofrece la física.

Implementación

Las simulaciones ilustradas por las figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 poseen un campo de atracción promedio \bar{A} bastante similar pero difieren en su comportamiento según la magnitud de la difusión espacial de A , la cantidad de ladrones en el sistema y el impacto que tiene cada robo. La primera de estas figuras muestra como una alta densidad de ladrones en el sistema y un alto coeficiente de difusión espacial η resulta en un sistema donde no se forman zonas calientes y el sistema entero tiende a ser homogéneo. La segunda Figura (b) muestra un sistema con relativamente pocos ladrones y robos, pero donde cada uno tiene un fuerte pero momentáneo impacto en la atracción del sistema- la corta temporalidad de estos impactos aparenta que el sistema tiende a un estado homogéneo también. En cambio, las figuras (c) y (d) muestran formaciones de zonas calientes a pesar de distintas densidades de ladrones. En (c), existe una mucho mayor cantidad de ladrones pero también las zonas calientes se distinguen definitivamente y se mantienen localizadas, dada una baja cantidad de difusión espacial del crimen y la especialización de criminales en ciertas regiones. La Figura (d), por su lado, son menos ladrones que forman zonas calientes más transitorias, propensas a disolverse o a trasladarse.

Los parámetros empleados para estas simulaciones corresponden directamente a los que utilizan originalmente Short *et al.* (2008) para ilustrar a su modelo discreto del crimen (anexos 11.1, 11.2, 11.3 y 11.4). Al comparar sus resultados con los que presentan en este trabajo, se encuentran diferencias

de forma debido al comportamiento estocástico y caótico del sistema pero similitudes en cuanto a los patrones generales que siguen en cada caso. Esto valida los resultados de Short *et al* y significa que la implementación del modelo vectorizada y por matrices de transición es exitosa.

Retomando la discusión de Short *et al.* (2008), en el caso (a) no se forman zonas calientes de crimen y en general el riesgo en todo el área es homogéneo, en el caso (b) la atracción es homogénea con eventuales perturbaciones por robos, el caso (c) refleja la concentración de la atracción en zonas calientes estáticas (y por lo tanto el crimen también) y el caso (d) muestra el crimen concentrándose en zonas calientes sujetas a deformaciones y traslaciones. De estos comportamientos, las perturbaciones para el caso (b) y las deformaciones de las zonas calientes del caso (d) surgen porque las acciones arbitrarias de ladrones no se compensan cuando solo hay una reducida cantidad - son manifestaciones de la naturaleza discreta del modelo que responden a las limitaciones finitas de su implementación.

Dejando por un lado los efectos producidos por las limitaciones finitas, un resultado primordial de este modelo discreto es la conglomeración del crimen en zonas calientes aparentemente concéntricas, cuya tasa de creación y concentración depende de los parámetros del sistema. Dado que se conserva el promedio espacial de la atracción \bar{A} y de la cantidad de ladrones \bar{n} , la existencia de zonas con mayor incidencia criminal implican regiones desprovistas del crimen; el sistema se polariza entre zonas de alto y bajo riesgo.

Interesa en un futuro el poder aterrizar este modelo teórico a datos de crímenes reales, buscando estudiar los patrones de crimen en algún contexto local y predecir sobre ellos. Un primer paso para unir el modelo a fenómenos criminalísticos reales es adaptar la rejilla que simula el espacio del sistema a las características geográficas y urbanísticas particulares del área a simular. Para ello, la implementación del modelo con matrices de transición permitiría simular el contorno de la ciudad, distintas condiciones de frontera, opciones más realistas de movimiento de los ladrones e incluso simular las vías de influencia entre sitios (por ejemplo, la atracción de un segmento urbano no se esparce a otro segmento vecino si entre ellos existe un río imposible de atravesar). Incluso, a partir de las matrices de transición podrían estudiarse distintos comportamientos de los componentes del sistema; víctimas, victimarios, guardianes y sus interacciones. Este análisis se sale de los alcances de este trabajo pero una posible modificación en el comportamiento de ladrones es traslación por medio de vuelos de Levy (Chaturapruek, Breslau, Yazdi, Kolokolnikov, y McCalla, 2013).

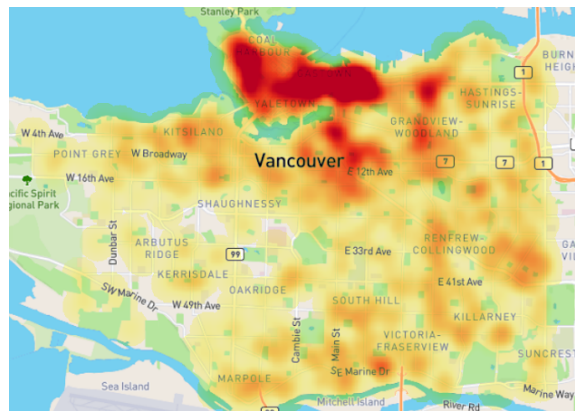


Figura 6.9: Mapa de calor ilustrativo de hurto en la ciudad de Vancouver, extraído el 29 de junio de 2020 de <https://www.geodose.com/2017/11/qgis-heatmap-using-kernel-density.html>.

En el capítulo anterior se presentó un algoritmo para ajustar procesos puntuales auto activados a datos reales - esencialmente consta de identificar la tasa de generación de eventos de fondo y los parámetros de la función desencadenante. Este no sería aplicable al modelo actual dado que este depende adicionalmente de agentes con una naturaleza estocástica no determinista y cuya infor-

mación no es necesariamente adquirible de observaciones empíricas (existen datos de ocurrencia de crímenes, pero no de donde surgen ladrones motivados o sus trayectos). Sin embargo, los parámetros del modelo teórico pueden ser aproximados a valores explicativos para el fenómeno real. Se conoce que el modelo resulta en concentraciones espaciales del campo de atracción -o bien, una tasa media de eventos por sitio. Esta tasa media de crímenes es perfectamente comparable con mapas criminales de calor (densidad espacial de eventos con una función kernel) al tener una estimación de la presente cantidad de criminales motivados. Visto de otra forma, la cantidad media observada de ladrones y de crímenes enmarcan a los parámetros θ , ω y Γ por medio de las ecuaciones (6.9) y (6.10), suponiendo una distribución inicial de la atracción de fondo $A^0(s, t)$.

Por último, el estudio de mapas criminales de calor a lo largo del tiempo es la clave para adoptar concretamente los parámetros para simular el fenómeno real. De ellos se puede deducir el radio y duración de la victimización repetida, además de la concentración del crimen en espacios. Estas mismas características en las simulaciones del modelo discreto se vieron moduladas por las variables θ , Γ y η , por lo que podrían determinarse si se conociera su relación con los patrones de zonas calientes y así caracterizar el fenómeno del crimen con el modelo construido de difusión del crimen.

De esta cuenta, la tarea en manos es determinar la relación entre las variables θ , Γ , η y ω con los patrones de comportamiento de la atracción en el modelo construido. Sabiendo que el modelo discreto está sesgado por limitaciones finitas y ruido estocástico, es necesario generalizar el modelo a un margen continuo y analítico.

6.2. Modelo continuo de difusión de crimen

El modelo discreto es una herramienta para simular los patrones de criminales y representarlos cuantitativamente bajo una serie de supuestos, construida a partir de observaciones empíricas y una visión fenomenológica. Este podría llegar a usarse para compararse con datos reales de crímenes, entender la dinámica del crimen en un área urbana y proponer políticas públicas para mitigarlo. Tal como se vio con simulaciones computacionales, este modelo puede adoptar distintos comportamientos según las condiciones iniciales y parámetros electos. Como sea, algunos de los fenómenos que muestra pueden no ser resultados del modelo construido como tal sino efectos que surgen por limitaciones en la implementación de sus simulaciones; por ejemplo, excepciones o patrones atípicos por el uso de números aleatorios o distorsiones por la discretización del tiempo y espacio.

Con el objetivo primordial de comprender las zonas calientes del crimen predichas por el modelo desde los parámetros empleados, se procede a llevar este modelo de difusión del crimen de hurto agravado en moradas a un límite continuo y así expresarlo analíticamente a través de ecuaciones dinámicas. En particular, se busca llegar a ecuaciones que puedan describir la evolución del sistema en términos del campo de atracción $A(t)$ y la cantidad (o densidad) de ladrones n .

6.2.1. Derivación de modelo continuo de difusión de crimen

Llevar el modelo a un límite continuo implica que los periodos temporales con los que evoluciona el sistema se convierten en infinitesimalmente pequeños, al igual que el área que ocupa cada sitio s . Como consecuencia de ello, se deja de considerar eventos discretos E donde ocurre un crimen (1) o no ocurre (0), y en su lugar considera la probabilidad $p \in [0, 1) = 1 - e^{-A\delta t}$ que tienen de ocurrir.

La derivación para la evolución del campo dinámico parte del la ecuación (6.6). Como ya no se toma la ocurrencia de eventos discretos si no solo la probabilidad que sucedan, se sustituye $E_s(t)$ por $n_s(t)p_s(t)$:

$$B_s(t + \delta t) = (B_s(t) + \frac{\eta l^2}{z} \Delta B_s(t)) (1 - \omega \delta t) + \theta n_s(t) p_s(t). \quad (6.15)$$

Luego, la cantidad de ladrones en un sitio $n_s(t)$ deja de tener sentido conforme el área del sitio tiende a reducirse ($l \rightarrow 0$), razón por la que se define la densidad de ladrones

$$\rho_s(t) = \frac{n_s(t)}{l^2}$$

y se sustituye en la ecuación 6.15. Luego, a esto se le resta $B_s(t)$ y todo se divide dentro de δt , con miras de construir la definición de derivada para $B_s(t)$;

$$\frac{B_s(t + \delta t) - B_s(t)}{\delta t} = \frac{l^2}{\delta t} \frac{\eta}{z} \Delta B_s(t) (1 - \omega \delta t) - B_s(t) \omega + \frac{l^2}{\delta t} \rho_s(t) p_s(t). \quad (6.16)$$

Aquí se definen como constantes

$$D = \frac{l^2}{\delta t}, \text{ y } \theta \delta t = \varepsilon,$$

donde D es precisamente la constante de difusión que se ha presentado anteriormente con respecto a difusión de partículas aleatorias en una rejilla discreta (ecuación (4.27)). Luego, ε corresponde al aumento de atracción dinámica en una unidad del espacio por una unidad de tiempo a causa de una probabilidad de robo. Empleando estas constantes, se tiene que

$$\frac{B_s(t + \delta t) - B_s(t)}{\delta t} = \frac{\eta D}{z} \Delta B_s(t) (1 - \omega \delta t) - B_s(t) \omega + \varepsilon D \rho_s(t) p_s(t). \quad (6.17)$$

El último paso para llegar al límite continuo es hacer que las variables de la escala de espacio y tiempo tiendan a ser infinitamente pequeñas, o bien, $\delta t, l^2 \rightarrow 0$, sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} = \alpha$ y que el lado izquierdo de la ecuación (6.17) equivale a la derivada temporal de B_s . Además, dado que la ecuación se cumple para el espacio entero, puede expresarse de forma general ($B(t, s)$) en lugar de localizada ($B_s(t)$). Por tanto, se llega a que

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\eta D}{z} \nabla^2 B - \omega B + \varepsilon D \rho A \quad (6.18)$$

y con ello la evolución temporal del campo dinámico es expresado en una ecuación analítica continua.

Similarmente, la construcción de una ecuación continua para $n(t)$ parte de la evolución discreta de los ladrones en el sistema. Se sabe que todo ladrón presente en un sitio s luego de una iteración llegó ahí por medio de una caminata aleatoria desde algún sitio vecino o se generó con el término $\Gamma \delta t$:

$$n_s(t + \delta t) = A_s(t) \sum_{s' \sim s} \frac{n_{s'}(t) [1 - p_{s'}(t)]}{T_{s'}(t)} + \Gamma \delta t. \quad (6.19)$$

En la sumatoria, el término $n_{s'}(t) [1 - p_{s'}(t)]$ es la cantidad probabilística de ladrones que no cometen crimen. Además,

$$T_{s'}(t) = \sum_{s'' \sim s'} A_{s''}(t) \quad (6.20)$$

y por lo tanto, $A_s/T_{s'}$ da la probabilidad de trasladarse a s desde un sitio $s' \sim s$. De esta forma se recupera la cantidad probabilística de ladrones que viene de otros sitios. Al dividir la ecuación (6.19) en l^2 y definir $\Gamma/l^2 = \gamma$, se obtiene la evolución discreta de la densidad de ladrones

$$\rho_s(t + \delta t) = A_s(t) \sum_{s' \sim s} \frac{\rho_{s'}(t) [1 - p_{s'}(t)]}{T_{s'}(t)} + \gamma \delta t. \quad (6.21)$$

Posteriormente, se busca escribir la sumatoria de los ladrones provenientes de caminatas aleatorias como un proceso difusivo, tal como se hizo en la ecuación 6.6:

$$\rho_s(t + \delta t) = A_s(t) l^2 \Delta \left(\frac{\rho_s(t) [1 - p_s(t)]}{T_s(t)} \right) + z A_s(t) \frac{\rho_s(t) [1 - p_s(t)]}{T_s(t)} + \gamma \delta t. \quad (6.22)$$

Llevando la expresión a la forma de derivada temporal, (6.22) se transforma a

$$\frac{\rho_s(t + \delta t) - \rho_s(t)}{\delta t} = DA_s(t)\Delta \left(\frac{\rho_s(t)[1 - p_s(t)]}{T_s(t)} \right) + zA_s(t)\frac{\rho_s(t)[1 - p_s(t)]}{T_s(t)\delta t} + \gamma. \quad (6.23)$$

Finalmente, estableciendo los límites continuos $\delta t, l^2 \rightarrow 0$ y simplificando por medio de identidades de cálculo vectorial, se llega a una ecuación continua de la evolución de la densidad de ladrones en el sistema

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{D}{z} \nabla \cdot \left[\nabla \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla A \right] - \rho A + \gamma. \quad (6.24)$$

Las ecuaciones resultantes (6.18) y (6.24) describen completamente la dinámica determinista del sistema generalizado a un esquema continuo. A pesar de abstraerse a probabilidades de ocurrencia de hurtos y a densidades teóricas de ladrones, esta generalización abre la posibilidad de estudiar al fenómeno del hurto y sus patrones de forma analítica. Particularmente de interés, con este nuevo modelo continuo pueden simularse la creación de zonas calientes de crimen sin las distorsiones estocásticas y discretas del modelo construido originalmente.

6.2.2. Implementación de modelo continuo

La implementación computacional de este modelo se realiza por medio de la evolución temporal en diferencias finitas de las ecuaciones de estado del sistema (6.18) y (6.24). Esta dinámica se implementa con el método numérico de Runge-Kutta de orden 4. Con el objetivo de relajar la cantidad de parámetros en el sistema y simplificar la implementación y su análisis, se desarrolla en términos de variables adimensionales generales.

Derivación de ecuaciones de estado adimensionales

Las ecuaciones dinámicas para A y ρ pueden reescribirse al considerarse métricas generales que caractericen el sistema. Short *et al.* (2008) proponen el período de la activación de un sitio s al ocurrir un evento en él, que está dado por $\tau = 1/\omega$ y la distancia típica que recorre un ladrón en este período

$$\ell_c \equiv \sqrt{\frac{D}{\omega}}.$$

Con estas métricas se reescalan las variables de dominio y de estado del sistema: $\tilde{A} = A/\omega$, $\tilde{\rho} = \ell_c^2 \rho$, $\tilde{x} = \sqrt{z}x/\ell_c$ y $\tilde{t} = \omega t$. Tomando las variables reescaladas (y obviando la notación de tildes), las ecuaciones dinámicas del modelo (6.18) y (6.24) se convierten en:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \nabla^2 B - B + \rho A \quad y \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\nabla \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla A \right] - \rho A + \bar{B}. \quad (6.26)$$

Al expandirse la ecuación 6.26, se lee como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla^2 \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla^2 A - \frac{2}{A} \nabla \rho \cdot \nabla A + \frac{2\rho}{A^2} \nabla A \cdot \nabla A - \rho A + \bar{B}.$$

De esta forma, el modelo construido originalmente a partir de seis parámetros libres ($\eta, \Gamma\omega, \theta, A^0, z$) se reduce a solo tres (η, \bar{B}, A^0) y el sistema queda desarrollado sin tener que considerar escalas y unidades específicas. A continuación se desarrollan brevemente los métodos empleados para simularlas y su implementación numérica.

Diferenciación numérica

Para llegar a simular numéricamente las ecuaciones de estado, debe calcularse una aproximación de derivadas de funciones. La diferenciación numérica de una función $f(x)$ se desprende de su desarrollo en series de Taylor, tal como se muestra en (Bravo Yuste, 2006). Suponiendo que se conocen los valores de la función f en puntos equiespaciados x_n que se denotan por

$$x_n \equiv hn, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$f_n \equiv f(x_n).$$

Pretendiendo aproximar a un valor para $f'(0)$, se desarrolla a $f(x)$ en su serie de Taylor

$$f(x) = f_0 + xf'_0 + \frac{x^2}{2!}f''_0 + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}_0 + \dots \quad (6.27)$$

Luego, esta serie de Taylor con el resto de Lagrange (Bravo Yuste, 2006) es

$$f(x) = f_0 + xf'_0 + \frac{x^2}{2!}f''_0 + \dots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}f_0^{(N-1)} + \frac{x^N}{N!}f_0^{(N)}(\xi), \quad (6.28)$$

con $\xi \in (0, x)$. En particular,

$$f_{\pm 1} = f_0 \pm hf'_0 + \frac{h^2}{2!}f''_0 \pm \frac{h^3}{3!}f_0'''(\xi_{\pm}), \quad (6.29)$$

y restándolos se obtiene

$$f_1 - f_{-1} = 2hf'_0 + \frac{h^3}{3!}[f_0'''(\xi'_+) - f_0'''(\xi'_-)]. \quad (6.30)$$

Despejando para la primera derivada, f'_0 ,

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{12}[f_0'''(\xi'_+) - f_0'''(\xi'_-)] = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2). \quad (6.31)$$

Despreciando los términos de orden h^2 , finalmente se llega a la *primera derivada en diferencias centrales de tres puntos* (Bravo Yuste, 2006):

$$f'_0 \simeq \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \quad (6.32)$$

Similarmente, denotando un término adicional en la ecuación (6.29) se tiene que

$$f_{\pm 1} = f_0 \pm hf'_0 + \frac{h^2}{2!}f''_0 \pm \frac{h^3}{3!}f_0''' + \frac{h^4}{4!}f_0^{(4)}(\xi_{\pm}). \quad (6.33)$$

De ello al hacer $f_1 + f_{-1}$ y despejar para f''_0 , se obtiene una expresión para la segunda derivada

$$f''_0 = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{4!}[f_0^{(4)}(\xi_+) + f_0^{(4)}(\xi_-)] = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (6.34)$$

y esta expresión se aproxima a la *segunda derivada en diferencias centrales de tres puntos* (Bravo Yuste, 2006) cuando se desprecian los términos de orden h^2 :

$$f''_0 \simeq \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \quad (6.35)$$

Por tanto, el operador gradiente de una función f puede ser aproximado con derivadas en diferencias centrales, al igual que el operador divergencia y laplaciano. En particular para coordenadas cartesianas, el operador gradiente se aproxima como

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \hat{y} \simeq \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h_x} \hat{x} + \frac{f(x, y+h) - f(x, y-h)}{2h_y} \hat{y}, \quad (6.36)$$

y el operador laplaciano como

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \hat{y} \simeq \\ &= \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) - 2f(x, y)}{h_x^2} + \frac{f(x, y+h) + f(x, y-h) - 2f(x, y)}{h_y^2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Si se tuviese que el tamaño de los pasos en ambas dimensiones espaciales es igual, o bien que $h_x = h_y = h$, entonces

$$\nabla^2 f(x, y) \simeq \frac{f(x+h, y) + f(x-h, y) + f(x, y+h) + f(x, y-h) - 4f(x, y)}{h^2}.$$

Método de Euler

Sea una ecuación diferencial ordinaria con forma

$$\phi'(a) = g(a, \phi(a)),$$

tiene una solución exacta $\phi(a)$ y que posee una condición inicial $\phi(a_0) = \phi_0$. Al resolver numéricamente esta ecuación, se estima una solución $b_a \simeq \phi(a)$ sobre un conjunto finito de puntos a_i , $i = 0, 1, 2, \dots$. Sea una cantidad constante de espacio h entre cada punto, entonces se denota al n -ésimo punto del dominio $a_n = a_0 + nh$ y a la estimación de la solución en él como $b_n \simeq \phi(a_n)$. Integrando la ecuación diferencial, entre a_0 y a_1 ,

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \phi'(a) da = \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(a, \phi(a)) da$$

se llega a

$$\phi(a_{i+1}) = \phi(a_i) + \int_{a_i}^{a_{i+1}} g(a, \phi(a)) da. \quad (6.38)$$

Aproximando el valor de la integral de g con la regla del rectángulo, o bien

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} g(a, \phi(a)) da \simeq g(a_i, \phi(a_i))(a_{i+1} - a_i),$$

la ecuación de 6.38 se estima como

$$\phi(a_{i+1}) = \phi(a_i) + g(a_i, \phi(a_i))h + O(h^2) \quad (6.39)$$

Con esta relación recursiva para estimar $\phi(a)$ y partiendo desde la condición inicial $\phi(x_0) = b_0$, se encuentra la solución aproximada de la ecuación b_i :

$$\phi(a_{i+1}) \simeq b_{i+1} = b_i + g(a_i, b_i)h. \quad (6.40)$$

Este método iterativo para aproximar numéricamente la solución exacta de una ecuación diferencial es conocido como el Método de Euler. Evidenciado por el error de aproximar la integración con la regla de cuadrado, este método tiene un error asociado en función de h^2 .

Con este método, por ejemplo, la solución de la ecuación de difusión en dos dimensiones rectangulares

$$\frac{\partial U(x, y; t)}{\partial t} = k \nabla^2 U(x, y; t),$$

se puede aproximar con un error de orden $O(dx^2)$ la relación iterativa

$$U_{i+1}(x, y) = U_i(x, y) + \frac{kdt}{(dx)^2} [U_i(x+dx, y) + U_i(x-dx, y) + U_i(x, y+dx) + U_i(x, y-dx)]. \quad (6.41)$$

Esta aproximación es estable para $kdt/(dx^2) \leq 1/4$ (Bravo Yuste, 2006) y además puede aplicarse de la exacta forma a una ecuación de reacción difusión bajo el mismo criterio de estabilidad (B. Higgins, 2013; Bravo Yuste, 2006).

Método de Runge-Kutta

La aproximación empleada para resolver la ecuación diferencial expresada en 6.39 es equivalente a una expansión en series de Taylor de la función $\phi(a_{i+1} = a_i + h)$ alrededor de a_i y truncada a partir de h^2 . Es decir,

$$\phi(a_{i+1} = a_i + h) = \phi(a_i) + \left. \frac{d\phi}{da} \right|_{a=a_i} h + O(h^2) = \phi(a_i) + g(a_i, \phi(a_i))h + O(h^2). \quad (6.42)$$

Por lo tanto, si la expansión en series se trunca en un orden mayor, podría generarse una expresión mejor aproximada a $\phi(a_{n+1})$. Por ejemplo, una serie de Taylor truncada en m

$$\phi(a_{n+1}) = \phi(a_n) + h \left. \frac{d\phi}{da} \right|_{a=a_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2\phi}{da^2} \right|_{a=a_i} + \cdots + \frac{h^m}{m!} \left. \frac{d^m\phi}{da^m} \right|_{a=a_i} + O(h^{m+1}) \quad (6.43)$$

puede generar una expresión para aproximar a $\phi(a_{n+1})$ con un error de orden de $m + 1$. Este es precisamente el principio de un Método de Runge-Kutta con orden m . «Siendo más precisos, en el método de Runge-Kutta de orden m se reproducen los m términos de la serie (truncada) de Taylor de [la ecuación 6.43] mediante la fórmula» (Bravo Yuste, 2006)

$$b_{n+1} = b_n + \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 \cdots + \lambda_m k_m, \quad (6.44)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= g(a_n, b_n)h, \\ k_2 &= g(a_n + \alpha_1 h, b_n + \beta_{21} k_1)h, \\ k_3 &= g(a_n + \alpha_2 h, b_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2)h, \\ &\vdots \\ k_m &= g(a_n + \alpha_m h, b_n + \beta_{m1} k_1 + \beta_{m2} k_2 + \cdots + \beta_{m(m-1)} k_{m-1})h. \end{aligned}$$

Estos coeficientes λ , α , β se determinan de forma tal que $\phi(a_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{m+1})$ para orden m (Bravo Yuste, 2006). Para Runge-Kutta de orden 4, un subconjunto particular de coeficientes resulta en

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6.45)$$

y

$$\begin{aligned} k_1 &= g(a_n, b_n)h, \\ k_2 &= g(a_n + \frac{h}{2}, b_n + \frac{k_1}{2})h, \\ k_3 &= g(a_n + \frac{h}{2}, b_n + \frac{k_2}{2})h, \\ k_4 &= g(a_n + h, b_n + k_3)h. \end{aligned}$$

Finalmente, este resultado puede generalizarse a un sistema de ecuaciones parciales: las ecuaciones 6.25 y 6.26, o bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \mu(B, \rho) = \eta \nabla^2 B - B + \rho A \quad y \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \nu(B, \rho) = \nabla^2 \rho - \frac{2\rho}{A} \nabla^2 A - \frac{2}{A} \nabla \rho \cdot \nabla A + \frac{2\rho}{A^2} \nabla A \cdot \nabla A - \rho A + \bar{B}. \end{aligned}$$

Adoptando nuevamente la notación de subíndices para denotar la iteración temporal, el método número de Runge-Kutta de 4to orden para este sistema está dado por

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (6.46)$$

$$\rho_{n+1} = \rho_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \quad (6.47)$$

donde se define

$$\begin{aligned} k_1 &= \mu(B_n, \rho_n)dt, \\ l_1 &= \nu(B_n, \rho_n)dt, \\ k_2 &= \mu\left(B_n + \frac{k_1}{2}, \rho_n + \frac{l_1}{2}\right)dt, \\ l_2 &= \nu\left(B_n + \frac{k_1}{2}, \rho_n + \frac{l_1}{2}\right)dt, \\ k_3 &= \mu\left(B_n + \frac{k_2}{2}, \rho_n + \frac{l_2}{2}\right)dt, \\ l_3 &= \nu\left(B_n + \frac{k_2}{2}, \rho_n + \frac{l_2}{2}\right)dt, \\ k_4 &= \mu(B_n + k_3, \rho_n + l_3)dt, \\ l_4 &= \nu(B_n + k_3, \rho_n + l_3)dt. \end{aligned}$$

La función de gradiente ∇ se aproxima numéricamente con diferencias finitas (ecuación 6.36), al igual que el laplaciano ∇^2 (ecuación 6.37). La derivación de Runge-Kutta para este sistema puede entenderse como una ampliación del método de Euler para dos ecuaciones de difusión-reacción al tomar los componentes de la expansión en Taylor hasta orden 4.

En los anexos puede apreciarse el código en Python donde se implementa vectorizadamente el método de Runge-Kutta de orden 4 para simular el comportamiento del sistema caracterizado por el modelo continuo adimensional de crimen derivado en esta sección. Adicionalmente, en los anexos también se encuentra una ilustración con simulaciones elaboradas por Short *et al* de este mismo modelo por fines comparativos.

Simulación de actividad criminal con distintos parámetros

Las siguientes simulaciones empleadas para ilustrar el modelo continuo de difusión del crimen corresponden a exactamente los mismos parámetros empleados para las simulaciones del modelo discreto: se realizaron en una rejilla de 100×100 nodos, discretizando el tiempo en intervalos discretos $dt = 1/100$, con distancia entre nodos $l = dx = dy = 1$, $\omega = 1/15$ y campo estático de atracción de fondo $A^0 = 1/30$, mientras que por cada Figura varía γ , θ y η que igualmente corresponden por inciso. Dado que el modelo continuo sí tiene un comportamiento determinista y sin limitaciones inherentes de diferencias finitas, en lugar de tener condiciones iniciales uniformes para B y ρ , se tiene que $B(0, \mathbf{x}) = \bar{B}m(\mathbf{x})$ y $\rho(0, \mathbf{x}) = \bar{\rho}m(\mathbf{x})$, donde $m(\mathbf{x})$ es un factor aleatorio obtenido de una distribución normal con $\mu = 1$ y $\sigma = 0.05$, con el objetivo de darle pequeñas variaciones al sistema para que llegue a desarrollar patrones no triviales.

A pesar de estas variaciones impuestas en las condiciones iniciales, la evolución determinista del sistema provoca cambios graduales que son imperceptibles dentro de la escala de colores comprendida entre 0 y $2\bar{B}$, razón por la que se muestra el sistema al cabo de 300 días y no a lo largo de una progresión.

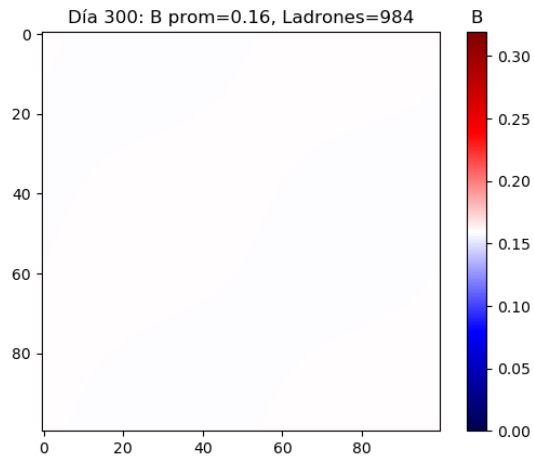


Figura 6.10: Corrida de modelo continuo (a).

Se muestra el campo dinámico de atracción B a los 300 días de iniciar la simulación con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.019$ y $\theta = 0.56$. Se muestra una distribución completamente uniforme; $B(x, t) = \bar{B}$.
 Fuente: elaboración propia

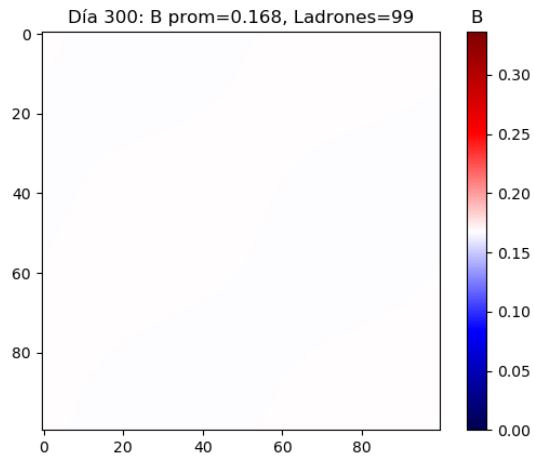


Figura 6.11: Corrida de modelo continuo (b).

Se muestra el campo dinámico de atracción B a los 300 días de iniciar la simulación con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$. Se muestra una distribución completamente uniforme; $B(x, t) = \bar{B}$.
 Fuente: elaboración propia

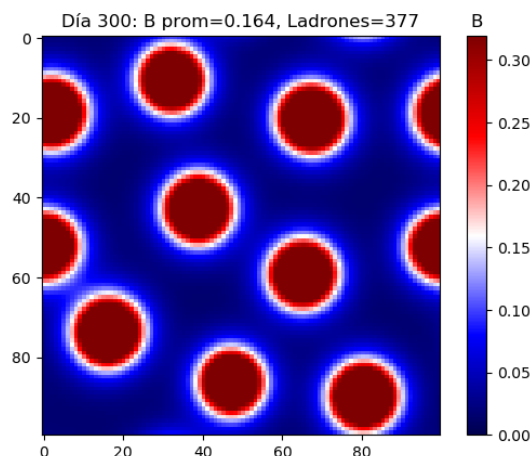


Figura 6.12: Corrida de modelo continuo (a).

Se muestra el campo dinámico de atracción B a los 300 días de iniciar la simulación con parámetros $\eta = 0.03$, $\gamma = 0.019$ y $\theta = 0.56$. Surgen inestabilidades con el mismo tamaño, intensidad y con simetría radial a lo largo del espacio.

Fuente: elaboración propia

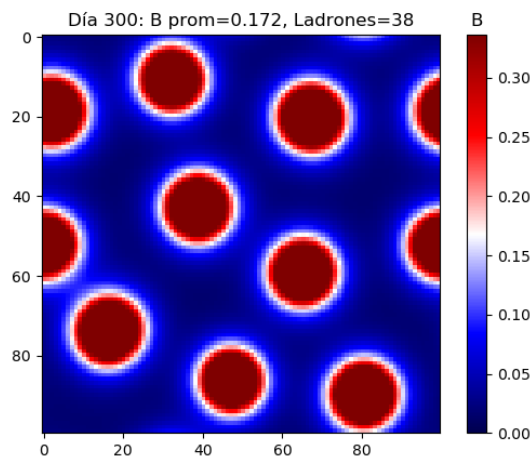


Figura 6.13: Corrida de modelo continuo (d).

Se muestra el campo dinámico de atracción B a los 300 días de iniciar la simulación con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$. Surgen inestabilidades con el mismo tamaño, intensidad y con simetría radial a lo largo del espacio que coinciden con las mostradas en la Figura 6.12.

Fuente: elaboración propia

6.2.3. Análisis de modelo continuo

El resultado principal de la construcción de este modelo continuo de difusión de crimen es el haber logrado plasmar el marco teórico y analítico de la dinámica de ladrones racionales en una urbe mediante las ecuaciones dinámicas de B y ρ . La diferencia primordial entre este modelo y el discreto desarrollado anteriormente es la esencia probabilística en lugar de determinista en sus procesos.

Como tal, este nivel de abstracción permite salir del marco microscópico donde las 'decisiones' se dan a aleatoriamente a nivel de cada agente (ladrón) e idealizar la distribución de potenciales agentes y eventos.

Ecuación de reacción-difusión

La ecuación de difusión ha sido discutida anteriormente en este trabajo; narra las fluctuaciones que tiene la densidad o concentración de agentes o un fluido u en un espacio. Al agregarle un término adicional a esta ecuación, i.e.,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 + f(u) \quad (6.48)$$

esta se convierte en una ecuación de reacción-difusión. El nuevo término agrega un cambio presente, no necesariamente difusivo en el espacio, a u . Además, este término de cambio puede no solo depender de u y el espacio, si no puede depender de su derivada (∇u) o incluso de otras variables o sustancias en el sistema (Kuttler, 2011).

Las ecuaciones de tipo reacción-difusión dan un acercamiento al modelado de distintos fenómenos en la física, principalmente aquellos donde cantidades locales en un espacio -partículas, densidades, potenciales, etcétera- interactúan entre sí. Por lo mismo, surgen comúnmente en sistemas constituidos de componentes microscópicos de mecánica estadística o en redes complejas (Colizza, Pastor-Satorras, y Vespignani, 2007). El que el modelo continuo de crimen haya resultado en un sistema de ecuaciones acopladas de este tipo no es sorprendente dado que sus componentes principales son la difusión espacial de criminales (partículas en movimiento aleatorio), la difusión espacial del campo dinámico de atracción (fenómeno de actividad repetida cercana o dinámica de un campo) y la interacción entre campo y criminales (los criminales reaccionan al campo y el campo a los crímenes). La ecuación 6.18 da a conocer que el campo de atracción dinámico se difunde en el espacio, se disipa con el tiempo y aumenta proporcionalmente a la actividad criminal, producto de el campo de atracción y densidad de ladrones. Por el otro lado, la ecuación de densidad de criminales, ecuación 6.24, evidencia como los ladrones se generan a una tasa fija γ y desaparecen con la actividad criminal. El primer término de la ecuación dinámica de ρ también muestra el movimiento difusivo de los ladrones en el espacio y el movimiento advectivo de los ladrones hacia ubicaciones con mayor atracción a una velocidad inversamente proporcional al valor de la atracción local. Este comportamiento de parte de los ladrones puede entenderse bajo la ley de rendimientos decrecientes, o que un ladrón no se sentirá motivado a sitios ligeramente más atractivos, si ya se encuentra en uno suficientemente atractivo (Short *et al.*, 2008).

Sin embargo, las ecuaciones de difusión-reacción no son propias de la física - se aplican también para el estudio matemático de múltiples fenómenos a lo largo de diversas disciplinas como lo son la ecología, bioquímica o epidemiología (Kuttler, 2011). Incluso, como su nombre lo dice, estas ecuaciones se utilizan ampliamente en química para comprender la dinámica de materia sufriendo reacciones químicas.

En particular, una aplicación de las ecuaciones de difusión-reacción son los modelos de dinámica poblacional o ecosistémica. En principio, estos constan de miembros de una especie u difundándose sobre una región habitable ($\nabla^2 u$) y respondiendo a una función de reacción que traduce matemática su comportamiento o interacciones $f(u)$ con su ecosistema. En esa vía, funciones de reacción incluyen crecimiento logístico y el efecto «Alle» para la población, función de presas-depredadores, competición o relación simbiótica entre especies, entre otras (Kuttler, 2011). Por ejemplo, los patrones espaciales y dinámica poblacional de coyotes en Yellowstone (Moorcroft, Lewis, y Crabtree, 2006) puede ser igualmente reducido a dos ecuaciones de estado de difusión-reacción; el movimiento aleatorio de coyotes con sesgo a favor o en contra de olores de manadas y la dinámica de los olores que dejan como rastro. La derivación del modelo SIR para epidemias, empleado también para modelar crimen (Sooknanan *et al.*, 2013), parte de una lógica análoga de la dinámica poblacional de un sistema - agregándole efectos difusivos también se convierte en un sistema de acción-reacción.

La comparación del modelo de crimen derivado con uno de estos sistemas ecológicos de difusión-reacción es adecuada dado que, a pesar de tomar su formalismo y planteamiento desde la geofísica y termodinámica, se caracteriza a los ladrones como agentes individuales con determinado comportamiento y teniendo determinadas interacciones con la urbe impregnada por el campo de atracción. De esta cuenta se evidencia el acercamiento alternativo de la matemática biológica para el estudio o revisión del modelo de crimen construido originalmente por Short *et al.* (2008) desde la física. Por el contrario, también evidencian como el formalismo y herramientas analíticas de la física puedan llegar a complementar fenómenos ecológicos o demográficos - en particular aquellos cuya premisa es la dinámica de agentes o componentes microscópicos y sus interacciones con el sistema.

Uno de los principales exponentes en el estudio de sistemas de ecuaciones de difusión-reacción y, en específico, sistemas bidifusivos con reacciones acopladas es Allan Turing. En 1952, propone un sistema de ecuaciones de dos sustancias difusivas que interactúan entre sí como mecanismo para explicar la morfogénesis (o proceso con el cuál células, tejidos u organismos desarrollan su forma) (Turing, 1952). Este sistema de ecuaciones precisamente es un sistema de difusión-reacción y, a pesar de no contar con suficiente evidencia en su momento, «se ha adaptado por investigadores matemáticos que han demostrado que una amplia variedad de patrones observados en organismos pueden ser replicados por ecuaciones por el modelo de reacción-difusión» (Kondo, 2017). En el modelo de Turing, las sustancias P y S inicialmente se encuentran homogéneamente distribuidas en el espacio. Luego, P activa la producción de más sustancia P así como de S , mientras que S inhibe la producción de P . A partir de la dinámica específica de este sistema activador-inhibidor, la distribución de las sustancias puede resultar en patrones espaciales de concentración de las sustancias como manchas, rayas o redes; se les denomina como patrones de Turing (Kondo, 2017). De especial interés para este trabajo, Turing también determina que diferencias en las tasas de difusión de las sustancias inhibidora y activadora resultan en la formación de inestabilidades que dan lugar a concentraciones espaciales de las sustancias que siguen una longitud de onda específica o longitud de onda de Turing (Zelnik y Tzuk, 2017). Estos patrones y concentraciones de las sustancias son recordativo del fenómeno observado en las simulaciones del modelo continuo del crimen.

Short *et al.* (2008) incluso asimilan el modelo continuo del crimen al ampliamente trabajado modelo Keller-Segel para quimiotaxis - o el movimiento de células o microorganismos dirigido por sustancias químicas. A pesar que los modelos no tienen exactamente el mismo comportamiento y que por lo mismo se desconoce la existencia de una solución global para el modelo del crimen, puede utilizarse el mismo método para caracterizarlos: encontrar la solución en el estado de equilibrio y con análisis de estabilidad lineal determinar las condiciones que llevan a distribuciones heterogéneas.

Solución del sistema de ecuaciones

Al igual que el modelo discreto de difusión del crimen, en el modelo continuo interesan las soluciones de equilibrio dinámico y se consideran condiciones de frontera periódicas. De esta manera, se tiene que los ladrones y la incidencia del campo de atracción se mantiene completamente dentro del sistema y que su flujo total es nulo. Por lo tanto, al agregar la densidad de ladrones y el campo de atracción sobre todo el espacio, los términos de difusión son nulos. Retomando la notación de barra para promedios espaciales, entonces,

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\omega \bar{B} + \varepsilon D \bar{\rho} \bar{A}, \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\bar{\rho} \bar{A} + \gamma. \quad (6.50)$$

La dinámica del sistema promediada espacialmente en un tiempo $t \in [t, t + dt)$ está compuesta por tres procesos simultáneos:

1. generación constante de ladrones dada por γ ;

2. los ladrones cometen una densidad promedio $\bar{\rho}\bar{A}$ de robos, se retiran y provocan una activación promedio en el campo de atracción de $\epsilon D\bar{\rho}\bar{A}$; y
3. el campo dinámico de atracción se disipa proporcionalmente ($\omega\bar{B}$).

El primer proceso implica una activación constante para la densidad de ladrones en todo el espacio, mientras que el segundo habla de una activación del campo dinámico de atracción a partir de ambas concentraciones y el tercero es una auto-inhibición para la atracción. El sistema es uno de activación-inhibición, que si bien no es el mismo desarrollado por Turing, es congruente con la idea que manifieste inestabilidades al considerar la difusión de las variables de estado.

De esta dinámica de activación-inhibición, se reconoce la existencia de una solución de equilibrio tal que $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 0$, significando que la disipación (inhibición) de \bar{B} tiene la misma magnitud que la incidencia promedio de los crímenes ocurridos, regulado a su vez por la tasa constante de generación de ladrones (activación). Este valor de equilibrio para \bar{B} es completamente análogo a la condición de equilibrio empleada en el modelo discreto y en término de los parámetros del modelo continuo es

$$\bar{B} = \frac{\epsilon D \gamma}{\omega}. \quad (6.51)$$

Al igual que en las simulaciones realizadas para el modelo discreto, si se toma el campo de atracción de fondo A^0 constante para todo el espacio, entonces $\bar{A} = A^0 + \bar{B}$. De esta cuenta, la densidad promedio de ladrones para el estado de equilibrio se despeja de 6.50 y resulta en

$$\bar{\rho} = \frac{\omega}{\epsilon D} \left(\frac{\bar{B}}{A^0 + \bar{B}} \right).$$

O en términos de las variables de estado adimensionales, resulta en

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{B}}{A^0 + \bar{B}}.$$

Estas soluciones promediadas espacialmente presentan un hallazgo importante: sin importar los valores locales de B o ρ o incluso el parámetro η , \bar{B} y $\bar{\rho}$ se conservan. Incluso, esta conservación de \bar{B} es el parteaguas para reducir al modelo continuo de siete parámetros a su versión adimensional de tres parámetros. Esta conservación de las variables de estado también dan sentido a la creación de hotspots de crimen tanto en el modelo continuo como en el discreto; áreas de alta atracción criminal deben balancearse con áreas de baja atracción para conservarse \bar{B} , que es precisamente lo que se observa en las figuras.

Análisis de estabilidad lineal

Habiéndose encontrado una solución promedio para el estado estacionario del sistema, resta el análisis de estabilidad lineal para terminar de caracterizar el surgimiento de áreas de alta incidencia criminal. Siguiendo el procedimiento de Short *et al.* (2008), se propone como solución exacta para el sistema la solución promediada espacialmente de las variables más una perturbación con una fase en el espacio y tiempo, de forma que la solución exacta de las variables estado está dada por:

$$A(\mathbf{x}, t) = \bar{A} + \delta_A e^{\sigma t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (6.52)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho} + \delta_\rho e^{\sigma t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (6.53)$$

Con \mathbf{k} siendo un número de onda igual para A y ρ dado que perturbaciones con números distintos decaen en el tiempo, siendo las dos variables de estado difusivas y retro alimentándose entre sí.

Sustituyendo esta solución en el sistema de ecuaciones adimensionales 6.25 y 6.26, se llega a las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -\eta|\mathbf{k}|^2 - 1 + \bar{\rho} & \bar{A} \\ \frac{2\bar{\rho}}{\bar{A}}|\mathbf{k}|^2 - \bar{\rho} & -|\mathbf{k}|^2 - \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_\rho \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

Para que la perturbación no decaiga en el tiempo, o bien para que existan inestabilidades en el sistema, se debe cumplir que $\sigma < 0$. Esto significa que la determinante de la matriz del lado izquierdo debe ser mayor a 0. De este hecho se deriva una primera condición para que el modelo presente regiones de alta concentración de crimen,

$$\eta|\mathbf{k}|^4 - (3\rho - \eta\bar{A} - 1)|\mathbf{k}|^2 + \bar{A} < 0. \quad (6.55)$$

A partir de esta desigualdad se define los números de onda posibles ($|\mathbf{k}|^2$) para las formaciones de inestabilidades, y puede calcularse el número de onda máximo. Resolviendo la desigualdad cuadrática para $|\mathbf{k}|^2$, se obtiene una segunda condición para la existencia de inestabilidad y es que

$$3\rho - \eta\bar{A} - 1 < 2\sqrt{\eta\bar{A}}. \quad (6.56)$$

La ecuación 6.56 puede desarrollarse en términos de \bar{A}^0 y \bar{B} y despejarse para η . Al hacerlo, se encuentra que se debe cumplir que

$$\bar{B} > \frac{A^0}{2} \quad (6.57)$$

y

$$\eta < \frac{3\bar{\rho} + 1 - \sqrt{12\bar{\rho}}}{\bar{A}} \quad (6.58)$$

para que exista la inestabilidad lineal en el sistema, explicando los resultados de las simulaciones. El Cuadro 6.1 ilustra los parámetros de cada una en términos de las variables adimensionales con las que se ha desarrollado el análisis de estabilidad lineal, así como el cumplimiento de condiciones de inestabilidad.

Simulación	η	A^0	\bar{B}	$\bar{\rho}$	$\bar{B} > A^0/2$	$\eta < \frac{3\bar{\rho}+1-\sqrt{12\bar{\rho}}}{\bar{A}}$
a	0.2	0.5	2.394	0.827	Verdadero	Falso
b	0.2	0.5	2.520	0.834	Verdadero	Falso
c	0.03	0.5	2.394	0.827	Verdadero	Verdadero
d	0.03	0.5	2.520	0.834	Verdadero	Verdadero

Cuadro 6.1: Parámetros y cumplimientos de condiciones para inestabilidad en términos de las variables adimensionales de simulaciones de actividad criminal.

Un punto que relevante que ilustra el Cuadro 6.1 es que si bien cada simulación se construyó con parámetros libres (γ y θ) variables, las simulaciones a y b son prácticamente idénticas entre sí y lo mismo pasa con las simulaciones c y d. Esto explica porque las primeras dos muestran el mismo valor uniforme de B en todo el espacio, mientras que las simulaciones c y d muestran esencialmente los mismos hotspots de crimen. A su vez, esta observación valida la idea que las diferencias entre el comportamiento de a y b y entre c y b en el modelo discreto se debe primordialmente a las diferencias finitas que le componen. Luego, a pesar que las cuatro simulaciones tienen valores muy cercanos de \bar{A} y $\bar{\rho}$, la diferencia primordial entre las ilustran hotspots y las que no es el parámetro de difusión del campo dinámico de atracción η , dado que según este se cumple una condición para la inestabilidad lineal del sistema.

La dependencia de las inestabilidades en el parámetro η es congruente con el planteamiento de Turing que las diferencias en la tasa de difusión de las llamadas sustancias dan lugares a estos patrones de concentraciones desiguales. De ello se sabe que las inestabilidades surgen que la distribución

espacial de las inestabilidades está relacionada con la longitud de onda de Turing, o $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. Luego, existe un número de onda \mathbf{k}_* con el máximo crecimiento de inestabilidad y la longitud de onda de este número predomina es aproximadamente de la separación promedio entre los hotspots; $\lambda_* = 2\pi/|\mathbf{k}_*|$. El número de onda con máximas inestabilidades puede demostrarse (Short *et al.*, 2008) que equivale a

$$|\mathbf{k}_*|^2 = (1-\bar{A})/(1-\eta) - \bar{\rho}(5-\eta)/(1-\eta)^2 + \sqrt{\eta(1+\eta)^2 \bar{\rho}[(\bar{A}(3-\eta) - 2)(1-\eta) + 2\rho(3-\eta)]/\eta(1-\eta)^2}. \quad (6.59)$$

El campo dinámico de atracción tiene un valor promedio dado por la ecuación 6.51 y este que Figura dentro de la ecuación 6.59. Esto explica porque a pesar de tener valores de parámetros distintos, las simulaciones del modelo continuo c y d (figuras 6.12 y 6.11) tienen aproximadamente el mismo tamaño de inestabilidades y separación promedio entre ellas.

Para seguir caracterizando este modelo de difusión de crimen y entender más a profundidad la condición de inestabilidad dada por 6.58, Short *et al* estudian el caso $A^0 = 0$ donde se simplifica a

$$\bar{B}\eta < 4 - 2\sqrt{3}. \quad (6.60)$$

Retomando las variables con dimensionales y usando la definición de \bar{B} , 6.60 equivale a

$$\frac{\epsilon\eta D}{\omega} \frac{\gamma}{\omega} < 4 - 2\sqrt{3}. \quad (6.61)$$

La fracción $\epsilon\eta D/\omega$ representa el área de incidencia de cada robo - el área alrededor de un suceso que tiene un aumento perceptible en B antes que decaiga en el tiempo. La fracción γ/ω da la cantidad de eventos promedio que suceden por unidad de área en un período $1/\omega$ en el estado de equilibrio; el inverso de esta fracción es el área promedio por evento en estado de equilibrio. Sea I la variable de incidencia de cada robo y S el área promedio por evento en estado de equilibrio, entonces la desigualdad se expresa simplificada como

$$\bar{B}\eta = \frac{\epsilon\eta D}{\omega} \frac{\gamma}{\omega} = \frac{I}{S} < 4 - 2\sqrt{3} \approx 0.535898... \quad (6.62)$$

De esta desigualdad se percibe entonces que las inestabilidades en el sistema en estado de equilibrio o los hotspots de crimen ocurren cuando el área de incidencia de cada robo es aproximadamente la mitad que el área promedio por cada suceso. En otras palabras, «regiones aisladas de alta concentración de B existen solo si estas regiones están suficientemente alejadas como para no interactuar entre sí» (Short *et al.*, 2008); suceden cuando la victimización repetida se difunde localmente pero no tanto como para vincularse con crímenes lejanos. Este resultado se ilustra en la Figura 6.14 y es congruente con las simulaciones del modelo.

La razón por la que estas inestabilidades de la concentración del crimen con una longitud de onda constante no se aprecian en datos reales probablemente se debe a heterogeneidades en la distribución de la atracción de fondo A^0 que en este análisis se supuso como constante o nula. En realidad, la atracción de fondo probablemente tenga diferencias significativas dentro de un área urbana según la topografía, medidas de seguridad y factores sociales. Si estas diferencias son suficientemente grandes, la incidencia de fondo A^0 puede sobreponerse a la atracción dinámica B derivada de victimización repetida (la condición 6.57) y la distribución de crimen tender a la atracción de fondo.

En la ciudad de Guatemala, por ejemplo, desigualdades en riqueza, geografía variable y fuerzas de seguridad dinámicas dentro de cada zona podrían ser factores de porqué no se perciben concentraciones equi-espaciadas de crimen.

A manera de cierre del capítulo, con este desarrollo no solo se construye un modelo para estudiar la potencial distribución del crimen del robo residencial urbano sino que además se lleva este modelo a términos analíticos que logran estudiarse para comprender los patrones de conducta que se observan en las simulaciones del modelo. Se encuentra que , según este modelo, la concentración del crimen

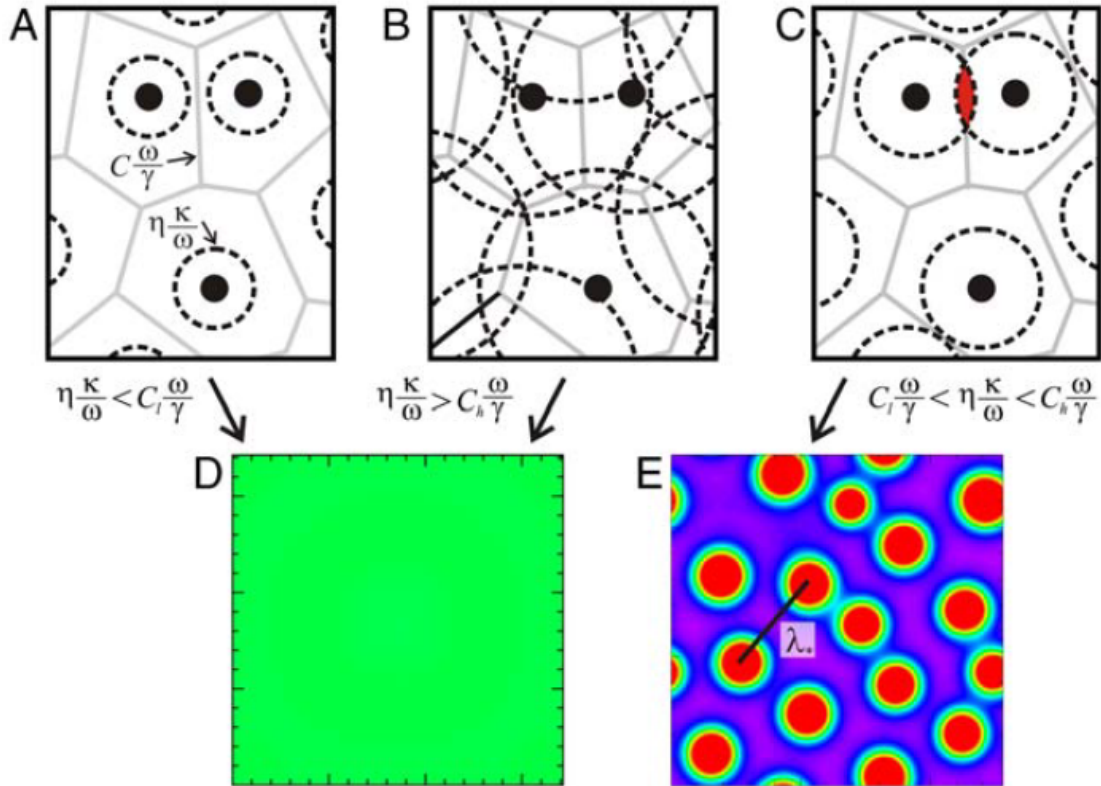


Figura 6.14: Ilustración de diferentes condiciones en el modelo continuo de difusión de crimen que llevan a un estado de equilibrio uniforme (D) o con hotspots de crimen (E).

Los crímenes están representados por puntos negros, el área de incidencia I está delimitada por la línea negra punteada y el área promedio por cada crimen S está delimitada por las líneas grises. En el escenario (A), el área de incidencia de cada crimen es demasiado pequeña como para existir victimización repetida y en el escenario (B) el área de incidencia de cada crimen es tan grande que se superpone con crímenes lejanos, por lo que ambos resultan en un campo de atracción uniforme.

El escenario C tiene áreas de incidencia tal que se súper ponen con las de otros crímenes locales pero no con crímenes lejanos, ocasionando concentración de crimen en regiones.

Fuente: Short, Brantingham, *et al.* (2010)

en regiones o hotspots surge cuando el fenómeno de victimización repetida derivada de un solo crimen tiene suficiente incidencia dentro de un sub espacio local como para atraer a ladrones a seguir operando en ese mismo sub espacio, pero no tanta incidencia como para que salga de este sub espacio y atraer a ladrones fuera de él. De esta forma, se desarrollan hipótesis que al explorarse podrían brindar mayor entendimiento del fenómeno del crimen en cuestión. A partir del modelo construido partiendo desde la intuición de la física, se abren posibilidades para seguir estudiando y abordando este fenómeno de interés social.

En artículos posteriores, Short, Brantingham, *et al.* (2010); Short, Bertozzi, y Brantingham (2010) continúan estudiando el sistema de ecuaciones del modelo continuo de difusión del crimen. Al hacer análisis de estabilidad no lineal débil, se encuentra que las inestabilidades pueden ocurrir no solo debido a las restricciones espaciales del área de incidencia de los crímenes sino por concentraciones atípicas dentro del estado de equilibrio que superen a la estabilidad lineal (Short, Bertozzi, y Brantingham, 2010). Por otro lado, al añadir elementos de supresión de actividad criminal (reducciones de B cuando este llegue a cierto índice), se determina que las regiones de concentración de crimen pueden desaparecer completamente, trasladarse o resurgir según la duración de la intervención y el

patrón que dio lugar al hotspot en primer lugar (Short, Brantingham, *et al.*, 2010). Se espera entonces que con subsiguientes estudios de este modelo y su subsiguiente validación con datos reales puedan explorarse aún más hipótesis que permitan entender mejor la distribución de eventos criminales.

Posibles conexiones con modelo físico de Ising

7.1. Modelo de Ising

El modelo de difusión de crimen desarrollado en el capítulo anterior parte de asociar ladrones como partículas brownianas en un campo dinámico de atracción que les sesga. Finalmente, este se llega a expresar como un sistema de difusión-reacción, destacando cómo la probabilidad de ocurrencia hurtos en cada sitio está vinculada a la historia de los sitios aledaños y destacando que el riesgo de crimen puede concentrarse en regiones según las condiciones en el sistema. Dichas propiedades del modelo construido pueden asociarse con las de otros fenómenos físicos, abriendo la posibilidad de desarrollar modelos alternativos del crimen basándose en otros modelos de la física. A continuación se discutirá sobre el Modelo de Ising como posible acercamiento a modelos alternativos para abordar al crimen.

Es importante resaltar que esta discusión queda a manera de recomendación para futuros estudios y exploración. Adicionalmente, si bien los modelos físicos guían la intuición y formulación de marcos para estudios sociales como el crimen, los supuestos e hipótesis necesarias para estos marcos deben tener una validación desde sus propias disciplinas.

7.1.1. Marco teórico

En la mecánica clásica, un objeto rígido puede tener un momento orbital angular asociado al movimiento de su centro de masa ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$), así como un momento angular asociado a la rotación alrededor de su centro de masa. El segundo momento realmente responde al momento orbital angular que tiene cada unidad de masa del objeto alrededor de su centro pero suele expresarse en términos del momento de inercia del objeto rígido y su velocidad angular ($\mathbf{S} = I\omega$). Al traducirse a la mecánica cuántica, una partícula como un electrón conserva un momento orbital angular pero al ser una estructura puntual que no puede descomponerse en partes, no tiene un momento asociado a su rotación. En su lugar, las partículas poseen una magnitud intrínseca similar a esa inexistente rotación que se denomina como espín (Griffiths, 2013). Una característica del espín es que estos solo pueden tomar valores discretos, contrario a lo que se esperaría de su contraparte clásica. Partículas

distintas tienen distintas magnitudes y orientaciones posibles de espín; los electrones tienen espín $1/2$, a $s = \hbar/2 \cdot \sigma$, donde $\sigma = 1, -1$. Esto fue demostrado por el experimento de Stern-Gerlach, donde un haz de electrones sujeto a un campo magnético uniforme perpendicular es desviado a favor o en contra de este campo gracias a que el espín de los electrones actúa como un dipolo magnético.

En algunos metales, los espines en los electrones de átomos de una región se polarizan en una misma dirección debido a la interacción de cada espín con los que le rodean, dando lugar a campos magnéticos macroscópicos. Sin embargo, conforme la temperatura aumenta, los espines tienden a dejar de polarizarse y con ello se disminuye el tamaño de los campos magnéticos macroscópicos hasta llegar a una temperatura crítica donde la orientación de los espines es completamente aleatoria y el campo magnético neto es nulo. Las sustancias que muestran este comportamiento son las ferromagnéticas.

El modelo de Ising «es un intento crudo de simular la estructura física de [los dominios de] las sustancias ferromagnéticas» (Huang, 1987). Tiene la particularidad de evidenciar transiciones de fases físicas en el sistema y de ser ampliamente trabajado por la mecánica estadística. Este modelo consiste en una rejilla de n dimensiones, con N nodos, donde cada nodo de la rejilla corresponde a un electrón. La única variable de interés de este modelo es el espín en una dimensión de cada electrón (típicamente el espín en \hat{z} , tal que el electrón $i = 1, \dots, N$ tiene un espín «up» ($\sigma_i = 1$) o un espín «down» ($\sigma_i = -1$). Luego, el espín de cada electrón tiene una incidencia sobre los demás, aproximadamente la energía del sistema disminuye si la orientación de dos vecinos inmediatos coincide o incrementa si son diferentes. Además, el modelo también admite un campo magnético externo paralelo a los espines que sesga sus orientaciones. De esta forma, el hamiltoniano $H(\{\sigma\})$ del sistema es

$$H(\{\sigma\}) = - \sum_{\langle i, j \rangle} J \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i. \quad (7.1)$$

Aquí, $\langle i, j \rangle$ se refiere a todos los vecinos inmediatos j que tiene un nodo i . En el caso de tratarse de una rejilla bidimensional rectangular, cada nodo tiene cuatro vecinos (o al menos así para condiciones de frontera cíclicas). Luego, J es una constante para la energía de interacción entre cada par de espines vecinos - si esta es mayor a 0 es una sustancia ferromagnética, si es menor es antiferromagnética y si es igual a 0 entonces los espines no interactúan entre sí. La constante de interacción podría ser distinta entre cada par de vecinos $J = J_{ij}$ pero por simplicidad suele suponerse un sistema isotrópico. Por otro lado, h es la magnitud del campo magnético externo incidiendo sobre los espines.

La probabilidad $P(E(\{\sigma_i\}))$ de encontrar al sistema en un estado de energía por una configuración de espines ($\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N$) está dada por la distribución de Boltzmann (Tong, 2012). Con ello, resulta que

$$P(E(\{\sigma_i\})) = \frac{e^{-\beta H(\{\sigma_i\})}}{Z_\beta} = \frac{e^{-\beta E(\{\sigma_i\})}}{Z_\beta}. \quad (7.2)$$

β es el inverso de la constante de Boltzmann y la temperatura del sistema ($\beta = 1/k_B T$), mientras que Z_β es la función de partición que normaliza las probabilidades de cada estado de energía:

$$Z_\beta = \sum_i e^{-\beta E(\{\sigma_i\})}. \quad (7.3)$$

Con esta información se logran determinar otros parámetros relevantes del sistema como lo son la magnetización promedio, susceptibilidad magnética o calor específico (Tong, 2012), teniendo la ecuación de observables

$$\langle f \rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} f P(\{\sigma_i\}). \quad (7.4)$$

El modelo de Ising puede ser simulado por medio del algoritmo Monte Carlo de Metropolis-Hastings. Este algoritmo, desarrollado en capítulos anteriores (4.7), permite simular sistemas con micro estados solo sabiendo la densidad de probabilidad teórica que posee cada posible configuración.

Sea una configuración del sistema denotada por a y otra configuración igual pero con la variación de un solo espín denotada con b , es decir a denota una configuración $\{\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N\}$ y b una segunda configuración $\{\sigma_1, \dots, -\sigma_j, \dots, \sigma_N\}$. La probabilidad $P(a|b)$ de pasar de la configuración a a la configuración b está dada por la probabilidad de elegir el espín a 'volar' (σ_j) multiplicado por la probabilidad que el cambio de orientación sea aceptado. Si la probabilidad de tomar un cierto espín de la rejilla es aleatoria, esta es una constante uniforme con valor $1/N$. Sea $W(a|b)$ la probabilidad o criterio de aceptación del cambio de a a b , entonces

$$\frac{P(a \rightarrow b)}{P(b|a)} = \frac{\frac{1}{N}W(a|b)}{\frac{1}{N}W(b|a)} = \frac{\frac{1}{Z}e^{-\beta E_b}}{\frac{1}{Z}e^{-\beta E_a}} = \frac{W(a|b)}{W(b|a)} = e^{-\beta(E_b - E_a)}. \quad (7.5)$$

De ello, se obtiene el criterio de aceptación

$$W(a|b) = \begin{cases} e^{-\beta(E_b - E_a)} & \text{si } E_b > E_a \\ 1 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Por tanto, aplicado al modelo de Ising, el algoritmo de Metropolis-Hastings consiste en:

1. Generar una rejilla con N nodos, cada uno con un espín asignado aleatoriamente.
2. Tomar aleatoriamente uno de los N nodos y calcular el cambio en energía del sistema si se cambiase la orientación a su espín.
3. Generar un número aleatorio $r \in U[0, 1)$.
4. Si $r \geq A(a \rightarrow b)$, efectuar el cambio en la orientación del espín.
5. Repetir los pasos 2 a 4 una determinada cantidad de veces que permita llevar al sistema a un estado que tienda al equilibrio.
6. Registrar los observables del sistema (energía del sistema, magnetización promedio, susceptibilidad magnética o calor específico).
7. Repetir los pasos 1 a 6 de forma que se lleven rejillas al estado de equilibrio y se registren sus observables una determinada cantidad de iteraciones.
8. Promediar las mediciones que se realizaron en cada iteración para tener medidas finales del algoritmo.

A continuación, se discuten posibles vínculos que el modelo de Ising puede tener para el estudio del crimen, donde también se incluyen algunas simulaciones ilustrativas. Estas fueron realizadas en una rejilla rectangular con $N = 60 \times 60$ nodos, condiciones de fronteras periódicas y tomándose $k_b = 1$ por facilidad. El código de Python empleado para generarlas se encuentra en los anexos.

7.1.2. Vínculo con estudio del crimen

El modelo de Ising emula la naturaleza cuántica del espín de un electrón; cada microestado toma uno de dos posibles valores. Al traducir el formalismo de este modelo al contexto de crimen, este podría simular un sistema cuyos componentes microscópicos están en una dicotomía como *alta propensión a delinquir* y *baja propensión a delinquir* o *ubicación insegura* y *ubicación segura*, donde el estado de cada componente influye el de sus vecinos. El ejemplo de delincuencia-asistencia del modelo de comportamiento colectivo de Bahr y Passerini (1998b, 1998a) sigue precisamente esta lógica: cada componente es una persona con una de dos conductas y sus 'vecinos' son aquellas personas en las que ejerce influencia. Si bien el modelo de Ising tiene un hamiltoniano distinto y

suele usarse bajo geometrías uniformes que relacionen sencillamente a los nodos vecinos (J uniforme en lugar de una J_{ij} heterogénea), igualmente podría aplicarse para determinar la propagación de comportamiento criminal dentro de redes sociales y emplear una constante de acoplamiento variable. Una diferencia significativa es que el tiempo no está definido directamente en el modelo tradicional de Ising, por lo que una alternativa paliativa es tomar la cantidad de iteraciones (propuestas de cambio de orientación de espín) dividido el total de nodos en la rejilla como medida de progresión del sistema.

Otra forma de relacionar el modelo de Ising, el modelo de Bahr y Passerini y el crimen es el estudio de actividad criminal a escalas de lugares poblados como lo que Figura en el estudio de análisis de datos espacial del crimen de Villareal y Flores (2015). Podría explorarse el trabajar cada lugar poblado como un nodo en una rejilla cuyo estado discreto de actividad criminal tiende a acoplarse al de los lugares vecinos. La medición de ciertos observables como la magnetización promedio o la susceptibilidad magnética incluso podrían usarse para caracterizar la actividad macroscópica, similar a los indicadores locales de asociación espacial que usan J. Cohen y Tita (1999) o el Indicador Global Moran's I que emplean Villareal y Flores.

Dibujando una analogía con el modelo de difusión del crimen (hurto residencial) trabajado en el capítulo anterior, cada nodo en la rejilla podría simular una vivienda o cuadra y su «orientación» a su vez podría significar si es atractiva o no para criminales racionales. La influencia entre ubicaciones vecinas se explicaría, entonces, como una difusión del campo de atracción y estaría regulada por la constante de acoplamiento J . Esta influencia puede ser el resultado de la incidencia de actividad criminal anterior (sin decaimiento), signos de desorden social como la ventana rota o especialización de agentes criminales en zonas. Adicionalmente, en esta analogía la *no atracción criminal* también se difunde en el espacio y esta difusión podría interpretarse como factores disuasivos del crimen; por ejemplo medidas de seguridad contagiosas (prácticas de los hogares u obstáculos a criminales) o guardianes. Tal como la Figura 7.1 evidencia, simulaciones del modelo de Ising pueden resultar en regiones polarizadas, ya sea seguras o inseguras, así como en un régimen prácticamente aleatorio con exceso (magnetización) nulo. El modelo de difusión de crimen visto anteriormente y este modelo de Ising responden a la simulación de fenómenos físicos distintos con características bastante diversas, pero comparten la regionalización de microestados bajo ciertos parámetros o una distribución casi uniforme o aleatoria bajo otros. Esta similitud alude a la posibilidad de utilizar Ising para el crimen.

A diferencia del modelo de difusión del crimen, el de Ising contempla explícitamente a la temperatura como parámetro del sistema. Esta brinda un nivel de desorden bajo el cual los cambios en el sistema no son solo reflejo de la optimización energética si no que responden a un grado de arbitrariedad. Serviría un fin análogo al de la «Temperatura Social» que introducen Bahr y Passerini a su modelo de comportamiento colectivo, pero ahora en el marco de atracción de crimen. En el caso de la Figura 7.1 donde la constante de acoplamiento J es uniforme y el campo magnético es nulo, la diferencia en el régimen de comportamiento de cada progresión se debe exclusivamente a esta temperatura. Dada la premisa de las orientaciones de cada nodo significado la atracción local para criminales, esta temperatura podría significar una percepción variable arbitraria o incluso irracional desde los criminales o recurrentes cambios inesperados en cada ubicación.

Se sabe, incluso, que hay una temperatura crítica tal que a partir de ella la distribución de microestados en el sistema es efectivamente aleatoria. Esta temperatura marca una transición de fase, y el modelo de Ising en dos dimensiones con una geometría rectangular tiene la particularidad de ser el único «ejemplo no trivial de transición de fase que puede ser trabajado con rigor matemático» (Huang, 1987). Adicionalmente, el modelo de Ising «unifica el estudio de transiciones de fase en sistemas tan diversos como sustancias ferromagnéticas, gases-líquidos, mezclas líquidas, aleaciones binaras, etcétera» (Pathria, 1996). De esta cuenta, entonces, el modelo de Ising también abre la posibilidad de estudiar al crimen desde un punto de vista de transiciones de fase: dadas unas características y parámetros en un sistema, ¿qué condiciones deben cumplirse para que muestre uno u otro régimen de comportamiento asociado al crimen?

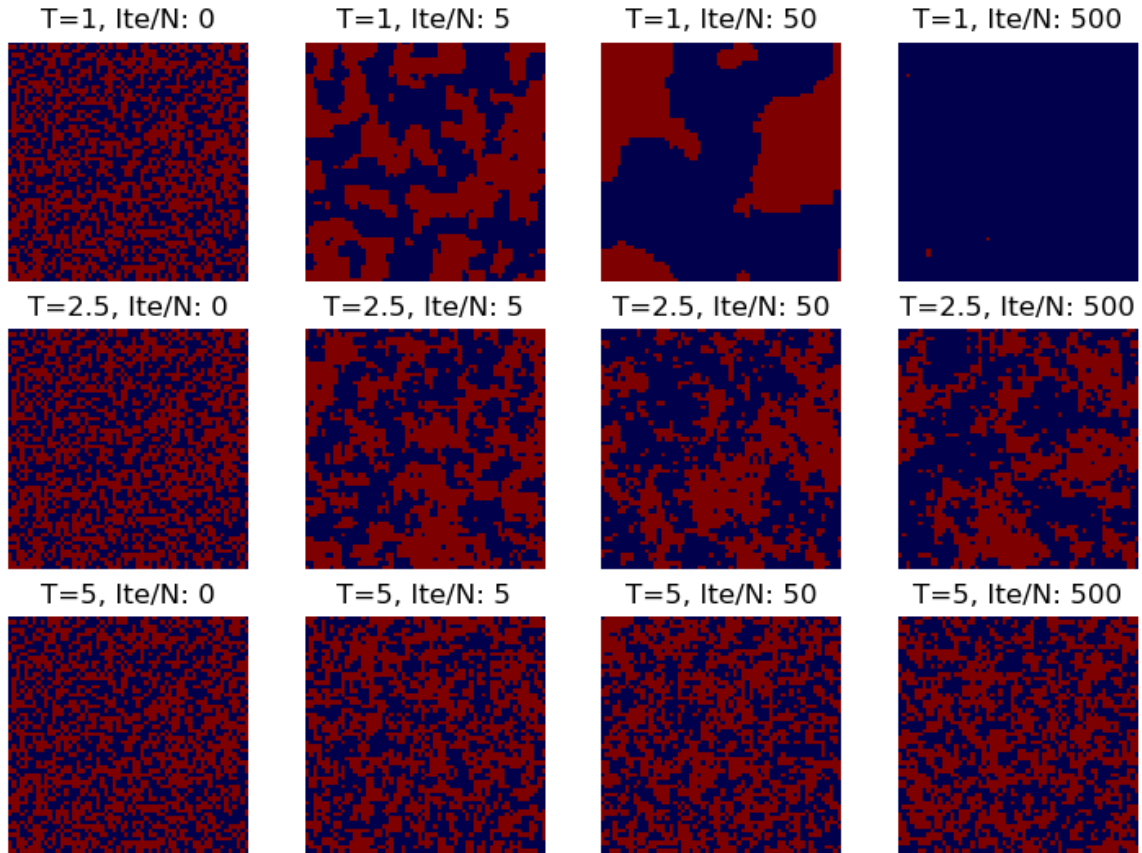


Figura 7.1: Simulación del modelo de Ising en dos dimensiones con el algoritmo de Metrópolis Hastings. Cada fila muestra la progresión de una misma cadena con parámetros $J = 1$ y $H = 0$ pero con temperaturas distintas. La primera fila tiene una temperatura $T = 1$, la segunda $T = 2.5$ y la tercera $T = 5$.

Fuente: elaboración propia

Un ejemplo del estudio del crimen desde transiciones de fase corresponde a Matjaz *et al* (2013) (Perc, Donnay, y Helbing, 2013). En este, se modela una sociedad como una rejilla cuyos nodos son los agentes, tal como se ha discutido anteriormente. Cada actor puede adoptar racionalmente una de tres conductas: cometer crímenes, ser inspector y vigilar que no ocurran o solo ser espectador. Cada una de estas conductas tiene asociada una función de recompensa que considera parámetros generales y el estado de los actores vecinos. Por ejemplo, el ser ladrón es apremiado por cada vecino espectador o ladrón pero es penado por cada inspector vecino, mientras que cada inspector tiene un costo intrínseco pero es apremiado por cada ladrón vecino. La evolución del sistema, entonces, gira en torno a la optimización de la recompensa de los actores. Finalmente, el sistema cae en una de tres fases o regímenes de comportamiento según los parámetros del sistema, ilustrando la dinámica compleja entre conductas de justicia social y conductas abiertamente criminales. Este mismo ejercicio de dar sentido real a las fases de un sistema podría replicarse para un modelo del crimen basado en el formalismo de Ising.

La Figura 7.1 muestra la progresión de la cadena con acoplamiento uniforme y temperaturas variables, pero un campo magnético externo podría sesgar el acoplamiento hacia una dirección preferencial hacia una dirección preferencial u otra. Aplicado al crimen, podría explorarse un «campo magnético» que varíe localmente y que influencia la orientación de los nodos de diferentes maneras. La Figura 7.2 ilustra un campo magnético hipotético con variaciones locales y los resultados de correr una misma cadena sujeta a este campo magnético a tres temperaturas distintas, correspondientes a

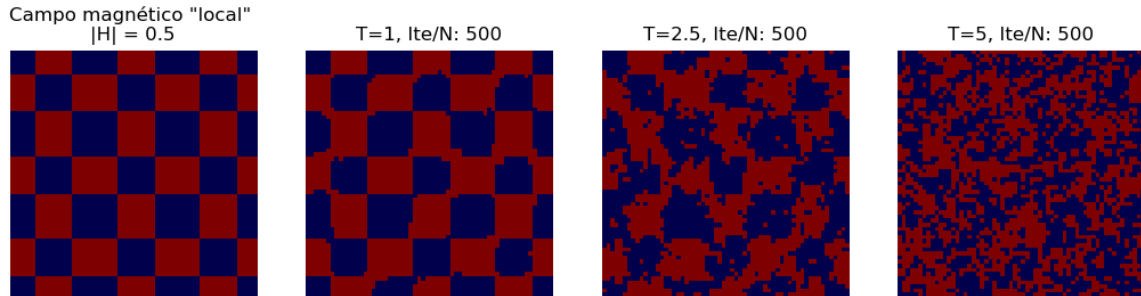


Figura 7.2: Simulación del modelo de Ising en dos dimensiones con el algoritmo de Metropolis Hastings con un campo magnético con variaciones locales. Se corre el modelo a una misma cadena bidimensional de espines a tres temperaturas distintas con una constante de acoplamiento $J = 1$ al igual que en 7.1, pero esta vez también están sujetas a un campo magnético con variaciones locales. Este campo magnético toma valores de $H = \pm 5$ y su distribución se muestra en la Figura de hasta la izquierda, mientras que las otras tres gráficas muestran el resultado de correr el modelo luego de un promedio de 500 iteraciones por cada nodo a las tres temperaturas distintas.

Fuente: Short, Brantingham, *et al.* (2010)

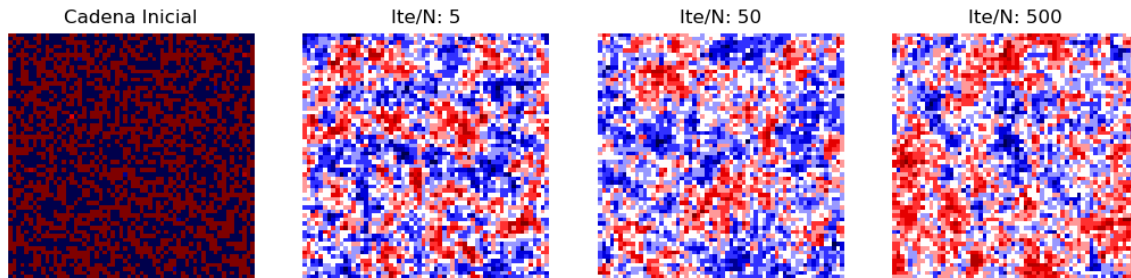


Figura 7.3: Promedio de simulaciones del modelo de Ising en dos dimensiones. Partiendo de una misma cadena inicial, se corrió 10 veces el algoritmo de Metropolis Hastings bajo los mismos parámetros: $J = 1, H = 0, T = 2.5$. Luego, se promediaron los valores que tuvieron las 10 corridas en tres etapas de su progresión y estos promedios se muestra en la figura.

Fuente: Short, Brantingham, *et al.* (2010)

las de la Figura 7.1. Este campo magnético con variaciones locales no tiene sentido físico en términos del modelo de Ising para substancias ferromagnéticas a escalas cuánticas, pero podría adoptarse como un campo de atracción local de fondo para actividad criminal - justo como se adaptó el campo de atracción en el modelo de difusión a partir de un potencial externo que sesgaba las caminatas aleatorias. Continuando con esta lógica, el campo magnético local podría tener no solo orientación sino magnitud variable a lo largo del espacio, y este campo magnético podría ser dinámico en el tiempo y responder a cambios en la configuración de microestados. De esta forma, podría explorarse el estudio de actividad criminal con agentes microscópicos con estados discretos, acoplados entre sí e influenciados por un campo dinámico de atracción análogo al trabajado por Short *et al.* El campo magnético no es el único elemento del modelo de Ising que valdría la pena explorar para este fin; la existencia de un campo dinámico de atracción podría basarse alternativamente en el acoplamiento J_{ij} entre cada par de estados, o incluso el campo podría estar vinculado a ambos aspectos con uno de los dos elementos brindando un componente estático y el otro uno dinámico, por ejemplo.

Por otro lado, el marco formal del modelo de Ising y su simulación mediante el algoritmo de Metropolis-Hastings podría llegar a emplearse para predicciones de la distribución de actividad criminal a partir de condiciones iniciales. Una propuesta, entre otras, es el tomar una cadena inicial de espines y correr el algoritmo sobre ella repetidas veces, registrar la cadena resultante en cada

instancia y promediar las cadenas resultantes para tener una distribución final. Esta propuesta se ejemplifica por medio de la Figura 7.3.

Un desafío persistente, sin embargo, de la adaptación del modelo de Ising a fenómenos del crimen es la inclusión de una variable temporal. Sí se llegase a superar este obstáculo, su viabilidad aumentaría considerablemente.

7.1.3. Modelos de Ising cinéticos y ecuación de Ginzburg-Landau

En 1963, Roy Glauber efectivamente «desarrolla una forma del modelo de Ising cuyo comportamiento puede seguirse exactamente, en términos estadísticos, como una función del tiempo» (Glauber, 1963), siendo el primero en elaborar un modelo de Ising cinético. Este modelo propone trabajar las N partículas fijas con posibles valores ± 1 del modelo de Ising tradicional como funciones estocásticas temporales $\sigma_i(t)$ ($i=1,2,3,\dots,N$). La construcción de este modelo parte del supuesto que cada partícula pasa de un estado a otro por influencia de la temperatura del sistema y los estados de partículas vecinas, dando lugar a correlaciones estadísticas entre vecindades.

Sin entrar a detalles de su desarrollo, Glauber primero genera una expresión para determinar el estado de una sola partícula con posibles orientaciones ± 1 de espín en un reservorio de calor, donde el cambio de espín sucede aleatoriamente pero con una tasa conocida. Habiendo identificado la probabilidad que el espín se encuentre en una orientación a partir de su estado inicial, después hace el mismo ejercicio para una cadena unidimensional de espines, acoplado la probabilidad de cambio de cada espín al estado presente del de sus vecinos junto a la temperatura. De esta forma, si se define el acoplamiento entre espines como se hace en modelos ferromagnéticos (o anti ferromagnéticos), se aterriza en el modelo de Ising, con lo cual se espera una probabilidad de configuración al llegar al equilibrio dada por la distribución de Boltzmann. Recuperando estos distintos elementos, Glauber llega a una expresión que describe la probabilidad en el tiempo que una partícula de una cadena (o anillo al considerar condiciones cíclicas) se encuentre en una u otra orientación, dada una temperatura y condiciones iniciales. Por último, este descubrimiento permite la construcción de una ecuación «maestra» markoviana con la que se obtiene la evolución temporal de la probabilidad de ocurrencia de cada posible configuración del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P(\{\sigma_i\}, t) = & - \sum_{j=1}^N W(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N | \sigma_1, \dots, -\sigma_j, \dots, \sigma_N) P(\{\sigma_i\}, t) \\ & + \sum_{j=1}^N W(\sigma_1, \dots, -\sigma_j, \dots, \sigma_N | \sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N) P(\{\sigma_i'\}, t) \end{aligned} \quad (7.6)$$

La primera sumatoria significa la pérdida de probabilidad de aterrizar en la configuración $\{\sigma_i\}$ debido a que si ya se está en esa configuración, el cambio de cualquier espín puede cambiarla a otra configuración $\{\sigma_i'\}$, mientras que la segunda sumatoria es la probabilidad que ocurra lo inverso y que de cualquier otra configuración con un espín distinto se llegue a $\{\sigma_i\}$. Con esto, $W(\{\sigma_i\}|\{\sigma_i'\})$ realmente es una matriz de transición markoviana, y su forma debe ser tal que en el equilibrio la distribución de probabilidad de configuraciones cumpla con la distribución de Boltzmann (ecuación 7.2) y la geometría del sistema.

La propuesta ilustrada en la Figura 7.3 de correr una simulación varias veces y obtener la distribución media es una aproximación con Monte Carlo de las probabilidades que podrían calcularse analíticamente mediante un modelo de Ising Cinético, con la excepción que este incluye formalmente al tiempo. Específicamente, este modelo de Ising cinético sería precisamente una generalización del modelo presentado inicialmente por Glauber a dos dimensiones. Por tanto, los modelos de Ising cinéticos son potenciales herramientas para analizar la distribución del nivel de crimen en un sistema al establecer y validar analogías entre las ciencias físicas y criminalistas.

Desde Glauber, modelos de Ising cinéticos han sido continuamente estudiados dada su simplicidad y capacidad de resolución analítica, especialmente por el interés en las transiciones de fase. IncurSIONES se han hecho, por ejemplo, para el estudio de la dinámica fuera del estado de equilibrio (Menyhard y Ódor, 2000) o en cadenas de espines con distintos grados de aleatoriedad (Huber, 1981; Malmi-Kakkada, Valls, y Dasgupta, 2014). Al igual que en el caso del modelo de Ising tradicional, el desarrollo del modelo de Ising cinético abre la puerta para el estudio de diversos fenómenos físicos en mecánica estadística y materia condensada (d'Auriac y Rammal, 1988). Más allá, sin embargo, estos modelos tienen aplicaciones diversas en campos como la geología (Ross, 1991), dinámica de polímeros (Skinner, 1983) o sistemas financieros (Campajola, Gangi, Lillo, y Tantari, 2020), asegurando que existen conceptos o herramientas que puedan aplicarse igualmente al estudio del crimen.

Ecuación de Ginzburg-Landau dependiente en el tiempo

Los modelos de Ising cinéticos tienen una alta relevancia en el estudio de los procesos dinámicos que ocurren cerca de y durante las transiciones de fase (Puri, 2011). Persiguiendo este interés, es posible llegar a un punto de encuentro con la teoría de Ginzburg-Landau. Esta teoría originalmente fue desarrollada como un modelo fenomenológico de la teoría de campos para entender las características de materiales superconductores -materiales similares a los ferromagnéticos pero en lugar de aumentar su susceptibilidad magnética gradualmente conforme la temperatura tiende a 0, la resistencia eléctrica en estos desaparece abruptamente bajo una temperatura crítica (Eltsov, 2017). En esta sección se explora este punto en común entre modelos de Ising cinéticos y la teoría de Ginzburg-Landau, siguiendo el trabajo de (Puri, 2011), como un posible acercamiento alternativo para modelos del crimen.

Este punto de encuentro consta de la dinámica de un sistema ferromagnético con $h = 0$ que se encuentra inicialmente en $T > T_c$ para tiempos $t < 0$, pero que en $t = 0$ la temperatura cambia rápidamente a $T < T_c$. De esta forma, el sistema evoluciona rápidamente de un estado desordenado (con características paramagnéticas) a uno donde los componentes se ordenan por regiones separadas de espines arriba o abajo, atravesando una transición de fase. La magnetización en este fenómeno es un parámetro que describe al estado del sistema y el proceso dinámico puede desarrollarse en términos de él.

El modelado de este sistema parte del trabajo desarrollado por Glauber. Al estudiar las transiciones de fase en las ecuaciones cinéticas de Ising, Suzuki y Kubo (Suzuki y Kubo, 1968) trabajan la matriz de probabilidades de transición y llegan a que

$$W(\{S_i\}|\{S_i'\}) = \frac{\lambda}{2} \left[1 - S_j \tanh \left(\beta J \sum_{L_j} S_{L_j} + \beta j \right) \right]. \quad (7.7)$$

Aquí, la matriz de transición se denota como $W(\{S_i\}|\{S_i'\})$, con $\{S_i\}$ siendo una determinada configuración de espines y $\{S_i'\}$ siendo cualquier otra configuración que difiera de $\{S_i\}$ solo por un espín. Luego, L_j son los vecinos del espín j y $1/\lambda$ es una escala temporal de procesos en el sistema fuera del equilibrio (también se cambia la notación a $S_k = \frac{\hbar}{2}\sigma_k$). La magnetización promedio del sistema está dado por

$$\langle S_k \rangle = \sum_{\{S_i\}} S_k P(\{S_i\}, t), \quad (7.8)$$

con lo que al combinarse con la ecuación maestra se obtiene una relación para la evolución dinámica

de la magnetización promedio:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S_k \rangle = & -\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\{S_i\}} S_k \left[1 - S_j \tanh \left(\beta J \sum_{L_j} S_{L_j} + \beta h \right) \right] P(\{S_i\}, t) \\ & + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\{S_i'\}} S_k \left[1 - S_j \tanh \left(\beta J \sum_{L_j} S_{L_j} + \beta h \right) \right] P(\{S_i'\}, t) \end{aligned} \quad (7.9)$$

o al despejarse y tomando $h = 0$,

$$\lambda^{-1} \frac{d}{dt} \langle S_k \rangle = -\langle S_k \rangle + \left\langle \tanh \left(\beta J \sum_{L_k} S_{L_k} \right) \right\rangle. \quad (7.10)$$

La ecuación 7.10 puede resolverse analíticamente en una dimensión- su solución se encuentra entre el trabajo que hizo Glauber (Glauber, 1963). Sin embargo, para dos dimensiones en adelante no puede calcularse una solución exacta, debiéndose entonces recurrir a una aproximación numérica. Esta aproximación numérica forma parte la solución de campo medio para el modelo de Ising (Puri, 2011). Para hacer esta aproximación, primero se obvia la correlación entre espines vecinos, permitiendo llegar a

$$\lambda^{-1} \frac{d}{dt} \langle S_k \rangle = -\langle S_k \rangle + \tanh \left(\beta J \sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle \right). \quad (7.11)$$

Cuando el sistema llega al estado de equilibrio, $\frac{d}{dt} \langle S_k \rangle = 0$, de forma que

$$\langle S_k \rangle^{eq} = \tanh \left(\beta J \sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle^{eq} \right). \quad (7.12)$$

La segunda parte de la aproximación de campo medio sucede al expandir a función tanh en series y tomar solo los primeros términos:

$$\langle S_k \rangle^{eq} = \beta J \sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle^{eq} - \frac{(\beta J \sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle^{eq})^3}{3} + \frac{2(\beta J \sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle^{eq})^5}{15} + \dots \quad (7.13)$$

Se sabe que un sistema llega a equilibrio termodinámico al minimizar la Energía Libre de Gibbs G . Habiendo encontrado la forma de la magnetización media del sistema $\langle S_k \rangle$, ahora se procede a definir la energía libre de Gibbs para luego deducir una ecuación dinámica del sistema en términos de ella como un parámetro de orden. Sea la magnetización espacialmente uniforme $\langle S_k \rangle = \phi$, la energía del sistema puede aproximarse como $E(\Psi) \simeq -J \sum_{\langle i,j \rangle} = -\frac{NqJ}{2} \Psi$. Adicionalmente, la probabilidad que un sitio esté orientado en ± 1 está dada por $S = p_{\pm} = \frac{1 \pm \Psi}{2}$, implicando una entropía

$$S(\Psi) = -Nk_B \left[\left(\frac{1 + \Psi}{2} \right) \ln \left(\frac{1 + \Psi}{2} \right) + \left(\frac{1 - \Psi}{2} \right) \ln \left(\frac{1 - \Psi}{2} \right) \right] \quad (7.14)$$

y una energía libre de Gibbs por cada espín de

$$\begin{aligned} g(T, h, \Psi) = G(T, h, \Psi)/N = & \frac{E(\Psi) - h(N\Psi) - TS(\Psi)}{N} \\ = & \frac{1}{2}(k_B T - qJ)\Psi^2 - h\Psi + \frac{k_B T}{12}\Psi^4 + O(\Psi^6) - k_B T \ln 2, \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde q es la cantidad de vecinos que tiene cada espín. Optimizando la energía libre de Gibbs con T fijo y $h = 0$, es posible encontrar el valor de equilibrio de Ψ y la temperatura crítica

$$T_c = \frac{qJ}{k_B}. \quad (7.16)$$

Retomando el hecho que $\langle S_k \rangle = \Psi$ y usando a como la separación entre cada par de espines,

$$\sum_{L_k} \langle S_{L_k} \rangle \simeq q\Psi(\bar{r}_k, t) + a^2 \nabla_k^2 \Psi(\bar{r}_k, t) + \text{términos de orden superior} \quad (7.17)$$

Finalmente, al combinar la solución en el estado de equilibrio de $\langle S_k \rangle$ (ec. 7.13) e introduciendo el formalismo del parámetro de orden Ψ (ec. 7.15, 7.16 y 7.17), la ecuación 7.11 se convierte en

$$\lambda^{-1} \frac{d}{dt} \Psi(\bar{r}, t) = \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right) \Psi - \frac{1}{3} \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 \Psi^3 + \frac{T_c}{qT} a^2 \nabla^2 \Psi + \text{términos de orden superior}, \quad (7.18)$$

En resumen, del modelo de Glauber (dinámica de espines individuales en el tiempo) se dedujo la evolución del sistema ferromagnético que es arrojado de su fase desordenada a la ordenada en términos del observable de la magnetización. Luego, se hizo una traducción de la magnetización como un observable derivado de propiedades microscópicas a la magnetización como un parámetro de orden del sistema, generalizando la evolución del sistema y poniéndola en términos de este campo escalar. Esta es la ecuación 7.18, también conocida como la ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo (TGDL) y modela «la relajación disipativa (o sobreamortiguada) de un sistema ferromagnético hacia su mínimo de energía libre» (Puri, 2011):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\bar{r}, t) = -\Gamma \frac{\delta G[\Psi]}{\delta \Psi} + \theta(\bar{r}, t). \quad (7.19)$$

$\theta(\bar{r}, t)$ es un término de ruido que para el presente análisis se obvia, $\Gamma = \beta\lambda$ es el coeficiente de amortiguamiento inverso y $G[\Psi]$ es el funcional de la energía libre de Gibbs,

$$\begin{aligned} G[\Psi] &= \int d\bar{r} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right) \Psi^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 \Psi^4 + \frac{T_c}{2qT} a^2 (\nabla \Psi)^2 \right], \\ &= \int d\bar{r} \left[-\frac{a(T_c - T)}{2} \Psi^2 + \frac{b}{4} \Psi^4 + K(\nabla \Psi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

$a, b > 0$ se toman como parámetros del campo magnético mientras que K se toma como medida asociada a energía cinética. De esta forma, la ecuación de Ginzburg-Landau puede leerse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\bar{r}, t) = -\Gamma [a(T_c - T)\Psi - b\Psi^3 + K\nabla^2 \Psi] + \theta(\bar{r}, t) \quad (7.21)$$

Finalmente, reescalando las variables, se consigue la versión simplificada de TDGL.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\bar{r}, t) = \Psi - \Psi^3 + \nabla^2 \Psi + \theta(\bar{r}, t) \quad (7.22)$$

La relevancia que tiene esta ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo y todo el desarrollo hasta este momento es que constituye «al modelo de Ising cinético más simple para campos escalares no conservativos $\phi(\bar{r})$ » (Singh, 2014). En otras palabras, por medio de la magnetización esperada empleada como un parámetro de orden, se logra construir un modelo de Ising cinético, superando la barrera que tenía el modelo de Ising tradicional de no conocerse su dinámica a través del tiempo, solo las distribuciones teóricas que alcanzaría. Así mismo, esta ecuación que constituye ensimisma al modelo de Ising cinético es precisamente una generalización analítica y estocástica del esfuerzo de predecir la orientación de cada espín que se ilustra en la Figura 7.3. En términos de la propuesta para el estudio del crimen, esta ecuación podría presentar un marco para el estudio dinámico de la probabilidad que un sitio sea seguro o inseguro. Esta ecuación, que suele usarse para el estudio de superconductores y los efectos de borde que estos puedan tener, también tiene el

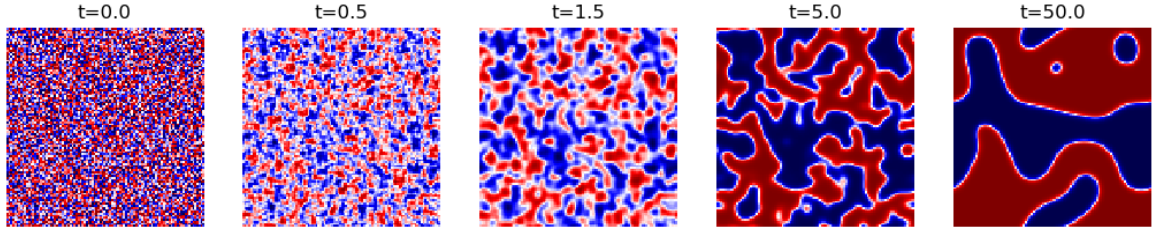


Figura 7.4: Simulación de la ecuación simplificada de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo (7.18), mostrando la transición de una substancia ferromagnética desde una fase desordenada hacia un estado de equilibrio ordenado, obviando la función de ruido θ .

Fuente: Short, Brantingham, *et al.* (2010)

potencial de estudiar zonas limítrofes entre las regiones polarizadas de riesgo a ser victimizadas, y potenciar la comprensión de la distribución de la actividad criminal y su incidencia en el espacio o urbe.

Una simulación de esta ecuación con el método de Runge-Kutta de orden 4 en una rejilla de $N = 100 \times 100$ nodos que empieza con una distribución aleatoria $\Psi(\mathbf{x}, 0) = r_x \in U(-1, 1)$ se ilustra en la Figura 7.4 y el código empleado se encuentra en los anexos. Esta figura justamente ilustra la creación de regiones polarizadas en el tiempo a partir de un estado desordenado, coincidiendo con la transición de fases vista desde el modelo de Ising e incluso desde el modelo de difusión del crimen.

Cabe resaltar que el desarrollo de la ecuación TDGL se hizo por simplicidad en la ausencia de un campo magnético ($h = 0$), pero efectivamente puede ser parte de este modelo y con ello rescatar la idea de un 'campo magnético local' que incida sobre el modelo, tal como se discutía anteriormente, para simular la atracción o sesgo de criminales a ciertas ubicaciones. Incluso, podría plantearse un sistema de ecuaciones de forma que ese campo de atracción sea dinámico y responda a Ψ y vice versa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\bar{r}, t, h) &= \Psi - \Psi^3 + \nabla^2 \Psi + \theta(\bar{r}, t) + h \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{r}, t, \Psi) &= f(\bar{r}, t, \Psi). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Otro aspecto a resaltar de la ecuación TDGL es que precisamente es una ecuación de tipo reacción-difusión, recordativa nuevamente de la esencia del modelo de difusión del crimen del capítulo 6. Lo interesante de esta similitud es que el modelo de difusión del crimen se construyó fenomenológicamente a partir de la dinámica de agentes microscópicos que generan patrones a nivel macro; la propuesta de construir un modelo de crimen desde el modelo de Ising sigue esta lógica fenomenológica dado que se basa en el acoplamiento de microestados vecinos. Esta lógica es, inclusive, análoga con el modelo ecosistémico de la distribución de coyotes de Moorcroft *et al.* (2006). Sin embargo, el punto de encuentro con la teoría de campos ofrece una perspectiva totalmente distinta para el desarrollo de modelos de crimen. Con ella pueden llegar a desarrollarse modelos que en lugar de partir desde la dinámica específica de agentes individuales, se basen en parámetros generales de orden que definan criminal. De esta forma, desde la física se estaría abriendo la puerta a otros estudios del crimen con mayor abstracción y que podrían abordar características más relevantes que la simple distribución de eventos o conductas criminales.

El objetivo central de este trabajo es mostrar el potencial que yace en conocimientos de física para contribuir a problemáticas sociales, ejemplificado mediante contribuciones para el estudio del crimen. Este objetivo se cumplió a lo largo del trabajo de tres maneras. La primera corresponde al capítulo 5 de este trabajo, «El crimen desde la física». En dicho capítulo cabe resaltarse la revisión del modelo de conductas colectivas de Bahr y Passerini (1998a) que se basa en la intuición de ensambles de mecánica estadística y que tiene potenciales aplicaciones a conductas delictivas, así como la revisión de la victimización cercana repetida modelada como procesos puntuales auto-activado desarrollados por sismología. Se ilustra que efectivamente existen modelos para estudiar fenómenos asociados al crimen que han sido desarrollados gracias a herramientas matemáticas propias de la física. Es decir, el crimen permanece como un objeto de estudio fuera del campo de la física, mas la intuición y herramientas de una disciplina pueden aplicarse para la otra. Respetando la esencia del objeto de estudio, es posible trazar analogías entre fenómenos sociales y fenómenos físicos que permitan aplicar el formalismo conceptual y rigor matemático de modelos físicos para guiar la construcción de modelos de fenómenos sociales.

En acordanza con la idea expresada anteriormente, la segunda manera en la que se cumplió el objetivo consistió en replicar y estudiar el trabajo de difusión de crimen Short *et al.* (2008). Ello responde a los objetivos específicos de construir fenomenológicamente un modelo discreto y estocástico para caracterizar la dinámica de criminales y posteriormente generalizarlo probabilísticamente para deducir información de él, haciendo una analogía entre ladrones individuales con partículas brownianas y entre su atracción hacia ciertas víctimas con un campo potencial con variaciones locales. Esto se hace bajo una serie de supuestos que fueron discutidos, incluyendo la suposición que ladrones actúan de manera racional, desarrollando actividades rutinarias y compartiendo una misma apreciación de costo-beneficio. Para lograr simular estos modelos, se empleó herramientas matemáticas que comúnmente se utilizan en física. Una de ellas son los métodos de Monte Carlo que permiten aproximar la dinámica de fenómenos cuya distribución de sucesos se deriva de una distribución probabilística y otra fue la construcción de matrices de transición markovianas - son la clave para simular la interrelación entre componentes microscópicos de un sistema, sean estos los componentes de un espacio físico o sean agentes que formen parte de una red de incidencia entrelazada.

Al correr las simulaciones del modelo discreto, se llegan a observar dos comportamientos macroscópicos distintos dentro del sistema, la concentración de agentes y del campo de atracción en zonas locales o una distribución uniforme. Al estudiar el modelo desde un enfoque analítico se culmina en un sistema de ecuación-reacción que enmarca la interacción de los agentes con el campo de atracción.

Este sistema de ecuaciones es relevante al objetivo del trabajo puesto que este comparte similitudes con otros sistemas de ecuaciones de otros fenómenos estudiados bajo otras disciplinas, tales como bioquímica y ecología - sugiere que los conceptos físicos utilizados para la analogía con el crimen podrían llegar a utilizarse para analogías con otras disciplinas y aportar a ellas.

Por otro lado, el sistema de ecuaciones logrado permite la comprensión analítica de las condiciones que llevan al sistema a uno u otro régimen de conducta. Esto a su vez plantea una hipótesis sobre la distribución de actividad criminal común (de hurto en moradas): cuando la influencia para re-victimizar localidades es suficiente para atraer ladrones que operan en áreas cercanas pero no para atraer criminales lejanos, llevando a la concentración de ladrones en delimitadas áreas. Al concentrar la presencia de ladrones, estas áreas dejan a las regiones aledañas con relativa ausencia de ladrones. En cambio, si la influencia de cada crimen trasciende la densidad promedio de robos o, al contrario, si la influencia de cada robo es insignificante, entonces los efectos de la victimización repetida son despreciables y el crimen se distribuye uniformemente en la urbe. Si bien esta hipótesis surge del análisis de estabilidad del sistema de ecuaciones, debe recordarse que el modelo se construye sobre la adopción de supuestos de actividad criminal sin el aporte de expertos en la materia. Como tal, el modelo y las hipótesis que provengan de él deberán ser revisadas por científicos sociales que se especialicen en crimen, deberán ser comparadas con datos reales y deberán sostenerse bajo escrutinio científico para tener validez real. No obstante, este modelo y los resultados que sugiere ilustran nuevamente como la física podría llegar a aportar al estudio de problemáticas fuera de su propio campo.

La tercera y última manera con la que este trabajo cumple el objetivo general es la propuesta de modelos de Ising, fungiendo como base para modelos físicos de sistemas con componentes microscópicos que tienen acoplamiento entre sí y están sujetos a reservorios de calor y sesgos externos, también sean la base para desarrollar nuevos modelos del crimen. Desde ellos podría analizarse como el estado de actividad criminal de una localidad puede afectar el de la vecina, cómo transiciones de fase ocurren en el comportamiento macroscópico del sistema según la variación de los parámetros externos o incluso simular el crimen bajo parámetros de control y seguir aportando a la resolución de problemáticas cotidianas que afronta la sociedad.

Recomendaciones

Al hablar de crimen en todo este trabajo, se refirió únicamente a la distribución espacio-temporal de delitos o conductas delictivas. Se optó por desarrollar el trabajo en esta ruta puesto que ella es una de las facetas del crimen más populares y trabajadas desde la matemática y física, generalmente dentro del marco de «policía predictiva»: el uso de técnicas analíticas para identificar objetivos para intervenciones policiales con el fin de prevenir crímenes, resolver crímenes pasados y identificar potenciales víctimas y criminales (Perry, McInnis, Price, Smith, y Hollywood, 2013). Como sea, este marco en ningún momento se detiene a considerar las causas estructurales dentro de las sociedades que dan lugar a las distintas manifestaciones de crimen en primer lugar. Este marco únicamente responde a mitigar la incidencia del crimen como síntoma de problemáticas subyacentes. Incluso, teorías de interacción social para comprender el origen del crimen sostienen que el etiquetar a individuos como criminales o potenciales criminales (resultado de policía predictiva) es una de las principales causas de crimen en primer lugar (Universidad de Minnesota, s.f.). En el año 2020, más de 1400 científicos de departamentos de matemáticas de instituciones en Estados Unidos decidieron boicotear la producción científica relacionada a policía predictiva porque ella puede promover el racismo estructural y brutalidad o represión policial (Castelvecchi, 2020).

Se reconoce, entonces, la importancia de abarcar problemáticas tan complejas como lo es el crimen con coherencia, sensibilidad y discreción - se reitera que lo desarrollado en este trabajo de graduación sirve como ejemplo para aplicar conocimiento de física al estudio de fenómenos de otras disciplinas. Por tanto, se recomienda a futuros físicos u otros científicos naturales que desde su formación y experiencia incursionen al estudio de estas problemáticas complejas, pero que lo hagan en torno a una profunda comprensión del origen de las mismas (desintegración de tejido social, profundas desigualdades históricas, incapacidad de satisfacer necesidades básicas, etcétera) y buscando reducir la exclusión social en cualquiera de sus formas.

Dicho lo anterior, si futuros investigadores quisieran perseguir el estudio de distribución eventos o conductas asociadas al crimen, únicamente como un ejercicio analítico y con los cuidados pertinentes para que ello no promueva la exclusión social, se hacen las siguientes sugerencias:

- Generar mapas de calor a partir de registros de crímenes pasados para validar con evidencia los supuestos empleados para la construcción del modelo de difusión del crimen del capítulo 6 (victimización repetida, teoría económica y racional del crimen, entre otros). En caso que ello se lograra, se recomendaría encontrar a partir de estos mapas de calor el área de influencia de cada crimen y a partir de ello ajustar el modelo a datos reales.

- Continuar explorando estos modelos de difusión de crimen:
 1. Variar la dinámica de los criminales. Por ejemplo, extender el alcance de la visión de ladrones o que no den paseos aleatorios sino tengan un traslado con distancia dada por una distribución normal. Otra posible variación es la inclusión de distintas afiliaciones delictivas, donde la comunicación y campo dinámico de atracción se comparta solo entre los ladrones de la misma afiliación.
 2. Encontrar soluciones exactas globales y buscar caracterizar el modelo fuera de estados de equilibrio.
 3. Introducir la idea de guardianes dinámicos, por medio de una dimensión adicional o por inclusión en la dinámica del campo de atracción.
 4. Aplicarlo a otros delitos donde las víctimas no son estáticas, sino que tienen una propia dinámica que puede ser reaccionaria a la de los criminales. Por ejemplo, podría trabajarse el asalto armado para robar teléfonos, suponiendo diferentes distribuciones espaciales de potenciales víctimas a lo largo del día.
 5. Con un enfoque de inteligencia artificial, complejizar las relaciones entre víctimas, victimarios, guardianes y su entorno. Pueden generarse distintos comportamientos dentro de agentes de cada tipo que interactúan de diferentes maneras con los demás. Este enfoque también puede ser complementado desde la teoría de juegos como se ve en (D'Orsogna y Perc, 2015).
 6. Tratar de descomponer el campo de atracción en los diferentes factores que este resume y modelarlo a partir de ellos. «Aparte de problemáticas estructurales como el desempleo y privación económica, estudios han demostrado que la interconexión compleja entre la demografía, cultura juvenil, instituciones locales, desarrollo urbano, pero también legitimidad política o sistema de justicia da origen a tendencias de crimen» (Perc *et al.*, 2013).
 7. Comparar este modelo de crimen con modelos de otras disciplinas, como la bioquímica o geofísica.
 8. Generar matrices de influencia o tráfico de personas que reflejen la geografía de localidades reales o la composición de sociedades. Esta es la clave para llegar a simular modelos que más se asemejen a la realidad cotidiana.

Por último, se recomienda al lector que abrace la multidisciplinariedad y la diversidad como punto de partida para cualquier contribución a la resolución de las complejas problemáticas que nos rodean.

- Bahr, D. B., y Passerini, E. (1998a). Statistical mechanics of collective behavior: Macro-sociology. *The Journal of Mathematical Sociology*, 23(1), 29–49. Descargado de <https://doi.org/10.1080/0022250x.1998.9990211> doi: 10.1080/0022250x.1998.9990211
- Bahr, D. B., y Passerini, E. (1998b). Statistical mechanics of opinion formation and collective behavior: Micro-sociology. *The Journal of Mathematical Sociology*, 23(1), 1–27. Descargado de <https://doi.org/10.1080/0022250x.1998.9990210> doi: 10.1080/0022250x.1998.9990210
- Barbaro, C. L., A. B. T., y D’Orsogna, M. R. (2013). Territorial developments based on graffiti: A statistical mechanics approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(1), 252–270. Descargado de <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.08.001> doi: 10.1016/j.physa.2012.08.001
- Becker, G. S. (1968). Crime and punishment: An economic approach. *Journal of Political Economy*, 76(2), 169–217. Descargado de <https://doi.org/10.1086/259394> doi: 10.1086/259394
- Bravo Yuste, S. (2006). *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*. Cáceres, España: Universidad de Extremadura.
- Campajola, C., Gangi, D. D., Lillo, F., y Tantari, D. (2020). *Modelling time-varying interactions in complex systems: the score driven kinetic ising model*.
- Campbell, M., y Ormerod, P. (1997). *Social interactions and the dynamics of crime* (Inf. Téc.).
- Castelvecchi, D. (2020, junio). Mathematicians urge colleagues to boycott police work in wake of killings. *Nature*. Descargado de <https://doi.org/10.1038/d41586-020-01874-9> doi: 10.1038/d41586-020-01874-9
- Chainey, S. P., y da Silva, B. F. A. (2016, febrero). Examining the extent of repeat and near repeat victimisation of domestic burglaries in belo horizonte, brazil. *Crime Science*, 5(1). Descargado de <https://doi.org/10.1186/s40163-016-0049-6> doi: 10.1186/s40163-016-0049-6
- Chaturapruek, S., Breslau, J., Yazdi, D., Kolokolnikov, T., y McCalla, S. G. (2013). Crime modeling with lévy flights. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 73(4), 1703–1720. Descargado de <https://doi.org/10.1137/120895408> doi: 10.1137/120895408
- Chen, P., y Kurland, J. (2020). The impact of “strike hard” on repeat and near-repeat residential burglary in beijing. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 9(3), 150. Descargado de <https://doi.org/10.3390/ijgi9030150> doi: 10.3390/ijgi9030150
- Chen, P., Yuan, H., y Li, D. (2012, octubre). Space-time analysis of burglary in beijing. *Security Journal*, 26(1), 1–15. Descargado de <https://doi.org/10.1057/sj.2011.4> doi: 10.1057/sj.2011.4
- Cohen, J., y Tita, G. (1999). Diffusion in homicide: Exploring a general method for detecting spatial diffusion processes. *Journal of Quantitative Criminology*, 15(4), 451–493. Descargado de <https://doi.org/10.1023/a:1007596225550> doi: 10.1023/a:1007596225550

- Cohen, L. E., y Feson, M. (1979). Social change and crime rate trends: a routine activity approach. *American Sociological Review*, 588–608.
- Colizza, V., Pastor-Satorras, R., y Vespignani, A. (2007). Reaction–diffusion processes and meta-population models in heterogeneous networks. *Nature Physics*, 3(4), 276–282. Descargado de <https://doi.org/10.1038/nphys560> doi: 10.1038/nphys560
- Congreso de la República de Guatemala. (1973). *Código penal de guatemala. decreto no. 17-73*. Guatemala.
- d'Auriac, J. C. A., y Rammal, R. (1988). On kinetic ising models in one dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(3), 763–768. Descargado de <https://doi.org/10.1088/0305-4470/21/3/031> doi: 10.1088/0305-4470/21/3/031
- D'Orsogna, M. R., y Perc, M. (2015). Statistical physics of crime: A review. *Physics of Life Reviews*, 12, 1–21. Descargado de <https://doi.org/10.1016/j.plrev.2014.11.001> doi: 10.1016/j.plrev.2014.11.001
- Dubber, M. D., Hörnle, T., y Fisher, T. (2014). Economic analysis of criminal law. En *The oxford handbook of criminal law*. Oxford University Press. Descargado de <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199673599.013.0003> doi: 10.1093/oxfordhb/9780199673599.013.0003
- Eck, J., y Liu, L. (2008). Contrasting simulated and empirical experiments in crime prevention. *Journal of Experimental Criminology*(4), 195–213.
- Eckhard, R. (1987). Stan ulam, john von neumann, and the monte carlo method. *Los Alamos Science*(15), 131-143. Descargado de http://www-star.st-and.ac.uk/~kw25/teaching/mcrt/MC_history_3.pdf
- Eltsov, V. (2017). Lecture notes: Theory of superconductivity - ginzburg-landau theory. *University of Altoo*. Descargado de https://mycourses.aalto.fi/pluginfile.php/426627/mod_resource/content/3/tsc3.pdf
- Farrell, G., y Pease, K. (2014). Prediction and crime clusters. En *Encyclopedia of criminology and criminal justice* (pp. 3862–3871). Springer New York. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5690-2_206 doi: 10.1007/978-1-4614-5690-2_206
- Fisher, B., y Lab, S. (2010). Theories of repeat victimization. En *Encyclopedia of victimology and crime prevention* (pp. 769–774). SAGE Publications, Inc. Descargado de <https://doi.org/10.4135/9781412979993.n259> doi: 10.4135/9781412979993.n259
- Galam, S. (2012). *Sociophysics : a physicist's modeling of psycho-political phenomena*. New York: Springer.
- Glauber, R. J. (1963). Time-dependent statistics of the ising model. *Journal of Mathematical Physics*, 4(2), 294–307. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.1703954> doi: 10.1063/1.1703954
- Griffiths, D. (2013). *Introduction to quantum mechanics*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education Limited.
- Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 83–90. Descargado de <https://doi.org/10.1093/biomet/58.1.83> doi: 10.1093/biomet/58.1.83
- Higgins, B. (2013). Finite difference analysis of reaction diffusion systems: Turing patterns.
- Higgins, P. C., y Albrecht, G. L. (1977, junio). Hellfire and delinquency revisited. *Social Forces*, 55(4), 952. Descargado de <https://doi.org/10.2307/2577564> doi: 10.2307/2577564
- Hjorth-Jensen, M. (2010). *Computational physics*. Oslo: University of Oslo.
- Huang, K. (1987). *Statistical mechanics*. New York: John Wiley Sons.
- Huang, K. (2010). *Introduction to statistical physics*. Boca Raton: CRC Press.
- Huber, A. (1981). The fictitious equilibrium ensemble in the theory of quenched disordered systems. En *Recent developments in condensed matter physics* (pp. 139–147). Springer New York. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4684-3899-4_19 doi: 10.1007/978-1-4684-3899-4_19
- Instituto Nacional de Estadística. (2016). *Encuesta nacional de condiciones de vida 2014*. Ciudad de Guatemala.
- Johnson, S. D. (2008). Repeat burglary victimisation: a tale of two theories. *Journal of Experimental Criminology*, 4(3), 215–240. Descargado de <https://doi.org/10.1007/s11292-008-9055-3>

- doi: 10.1007/s11292-008-9055-3
- Johnson, S. D., Bernasco, W., Bowers, K. J., Elffers, H., Ratcliffe, J., Rengert, G., y Townsley, M. (2007, junio). Space–time patterns of risk: A cross national assessment of residential burglary victimization. *Journal of Quantitative Criminology*, 23(3), 201–219. Descargado de <https://doi.org/10.1007/s10940-007-9025-3> doi: 10.1007/s10940-007-9025-3
- Kaplan, H. L. (1981). Effective random seeding of random number generators. *Behavior Research Methods & Instrumentation*, 13(2), 283–289. Descargado de <https://doi.org/10.3758/bf03207952> doi: 10.3758/bf03207952
- Kondo, S. (2017). An updated kernel-based turing model for studying the mechanisms of biological pattern formation. *Journal of Theoretical Biology*, 414, 120–127. Descargado de <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2016.11.003> doi: 10.1016/j.jtbi.2016.11.003
- Kuttler, C. (2011). *Reaction-diffusion equations with applications*. Munich, Alemania: Universidad Técnica de Munich. Descargado de http://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_reaktidiff.pdf
- Langtangen, H. (2017). *Finite difference computing with pdes : a modern software approach*. Cham, Switzerland: Springer.
- Lewenstein, M., Nowak, A., y Latané, B. (1992). Statistical mechanics of social impact. *Physical Review A*, 45(2), 763–776. Descargado de <https://doi.org/10.1103/physreva.45.763> doi: 10.1103/physreva.45.763
- Magoga, A. (2014). *Desarrollo humano, estado de derecho and violencia en las américas*. Ciudad de Guatemala: Instituto de Transformación de Conflictos para la Construcción de Paz en Guatemala, Universidad Rafael Landívar.
- Malmi-Kakkada, A. N., Valls, O. T., y Dasgupta, C. (2014). Ising model on a random network with annealed or quenched disorder. *Physical Review B*, 90(2). Descargado de <https://doi.org/10.1103/physrevb.90.024202> doi: 10.1103/physrevb.90.024202
- Malthe-Sørenssen, A. (2015). *Introduction to diffusion and random walks*. Oslo: Department of Physics, University of Oslo. Descargado de https://www.uio.no/studier/emner/matnat/fys/FYS2160/h17/simuleringsopgaver/virrevandrer_diffusjon.pdf
- Mantegna, R. (2000). *An introduction to econophysics : correlations and complexity in finance*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press.
- Mendoza, C. (2006). Structural causes and diffusion processes of collective violence: Understanding lynch mobs in post-conflict guatemala. *American Journal of Sociology*. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/237235035_Structural_Causes_and_Diffusion_Processes_of_Collective_Violence_Understanding_Lynch_Mobs_in_Post-Conflict_Guatemala
- Mendoza, C. (2019). *Informe anual sobre la violencia homicida en guatemala del 1 de julio de 2018 al 30 de junio de 2019*. Ciudad de Guatemala: Observatorio de la Violencia, Diálogos.
- Menyhard, N., y Ódor, G. (2000). Nonequilibrium kinetic ising models: Phase transitions and universality classes in one dimension. *Brazilian Journal of Physics*, 30(1), 113–127. Descargado de <https://www.scielo.br/pdf/bjp/v30n1/v30n1a11.pdf>
- Mohler, G. O., Short, M. B., Brantingham, P. J., Schoenberg, F. P., y Tita, G. E. (2011). Self-exciting point process modeling of crime. *Journal of the American Statistical Association*, 106(493), 100–108. Descargado de <https://doi.org/10.1198/jasa.2011.ap09546> doi: 10.1198/jasa.2011.ap09546
- Moorcroft, P. R., Lewis, M. A., y Crabtree, R. L. (2006). Mechanistic home range models capture spatial patterns and dynamics of coyote territories in yellowstone. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 273(1594), 1651–1659. Descargado de <https://doi.org/10.1098/rspb.2005.3439> doi: 10.1098/rspb.2005.3439
- Myers, D. J. (2000). The diffusion of collective violence: Infectiousness, susceptibility, and mass media networks. *American Journal of Sociology*, 106(1), 173–208. Descargado de <https://doi.org/10.1086/303110> doi: 10.1086/303110
- Nelson, E. (1967). *Dynamical theories of brownian motion*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

- Neyman, J. (1937). Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 236(767), 333–380. Descargado de <https://doi.org/10.1098/rsta.1937.0005> doi: 10.1098/rsta.1937.0005
- Oficina de las Naciones Unidas contra la Droga and el Delito. (2019). *Global study on homicide 2019*. Vienna.
- Oscariz, J. (2012). *Probability and statistics for particle physicists*. Paris, France: Université Paris-Diderot and Laboratoire de physique nucléaire et des hautes énergies LPNHE.
- Pathria, R. K. (1996). *Statistical mechanics*. Oxford Boston: Butterworth-Heinemann.
- Perc, M., Donnay, K., y Helbing, D. (2013). Understanding recurrent crime as system-immanent collective behavior. *PLoS ONE* 8 (2013) e76063. doi: 10.1371/journal.pone.0076063
- Perry, W. L., McInnis, B., Price, C. C., Smith, S., y Hollywood, J. S. (2013). *Predictive policing: The role of crime forecasting in law enforcement operations*. Santa Monica, CA: RAND Corporation. doi: 10.7249/RR233
- Petters, A. O., y Dong, X. (2016). Stochastic calculus and geometric brownian motion model. En *An introduction to mathematical finance with applications* (pp. 253–327). Springer New York. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4939-3783-7_6 doi: 10.1007/978-1-4939-3783-7_6
- Pitcher, A. B., y Johnson, S. D. (2011). Exploring theories of victimization using a mathematical model of burglary. *Journal of Research in Crime and Delinquency*, 48(1), 83–109. Descargado de <https://doi.org/10.1177/0022427810384139> doi: 10.1177/0022427810384139
- Ponciano, J. A., Chang, J. D., y Quiroa, F. (2018). Modelo epidémico para el estudio regional de la chikungunya. *Ciencia, Tecnología and Salud*, 5(1), 63–72.
- Programa de Seguridad Ciudadana and Prevención de la Violencia del PNUD Guatemala. (2007). *Informe estadístico de la violencia en guatemala*. Ciudad de Guatemala: Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo. Descargado de https://www.who.int/violence_injury_prevention/violence/national_activities/informe_estadistico_violencia_guatemala.pdf
- Puri, S. (2011). Lecture notes: Kinetics of phase transitions. *College of Arts & Sciences, University of Kentucky*. Descargado de <http://www.pa.uky.edu/~murthy/INES2011Kolkata/Lectures/Sanjay-Puri-Ch1.pdf>
- Ramírez de Garay, L. D. (2014). Crimen y economía: una revisión crítica de las explicaciones económicas del crimen. *Argumentos (México, D.F.)*, 27, 261 - 290. Descargado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-57952014000100010&nrm=iso
- Reinhart, A. (2018). A review of self-exciting spatio-temporal point processes and their applications. *Statistical Science*, 33(3), 299–318. Descargado de <https://doi.org/10.1214/17-sts629> doi: 10.1214/17-sts629
- Ross, C. R. (1991). Ising models and geological applications. En *Advances in physical geochemistry* (pp. 51–90). Springer US. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9019-0_2 doi: 10.1007/978-1-4613-9019-0_2
- Shim, Y., Sengupta, A., y Roy, K. (2018). Biased random walk using stochastic switching of nanomagnets: Application to SAT solver. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 65(4), 1617–1624. Descargado de <https://doi.org/10.1109/ted.2018.2808232> doi: 10.1109/ted.2018.2808232
- Shonkwiler, R. W., y Franklin, M. (2009). Introduction to monte carlo methods. En *Undergraduate texts in mathematics* (pp. 1–49). Springer New York. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-0-387-87837-9_1 doi: 10.1007/978-0-387-87837-9_1
- Short, M. B., Bertozzi, A. L., y Brantingham, P. J. (2010). Nonlinear patterns in urban crime: Hotspots, bifurcations, and suppression. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 9(2), 462–483. Descargado de <https://doi.org/10.1137/090759069> doi: 10.1137/090759069
- Short, M. B., Brantingham, P. J., Bertozzi, A. L., y Tita, G. E. (2010). Dissipation and displacement of hotspots in reaction-diffusion models of crime. *Proceedings of the National Academy of*

- Sciences*, 107(9), 3961–3965. Descargado de <https://doi.org/10.1073/pnas.0910921107> doi: 10.1073/pnas.0910921107
- Short, M. B., D’Orsogna, M. R., Pasour, V. B. G., Tita, E., Bertozzi, A. L., y Chayes, L. B. (2008). A statistical model of criminal behaviour. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(1), 1249–1267. Descargado de <https://doi.org/10.1142/s0218202508003029> doi: 10.1142/s0218202508003029
- Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. London New York: Chapman and Hall.
- Singh, R. (2014). Ising model - model of phase transition in statistical physics. *Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge*. Descargado de <https://rajeshrinet.github.io/blog/2014/ising-model/>
- Skinner, J. L. (1983). Kinetic ising model for polymer dynamics: Applications to dielectric relaxation and dynamic depolarized light scattering. *The Journal of Chemical Physics*, 79(4), 1955–1964. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.445976> doi: 10.1063/1.445976
- Smith, C. L., y Brooks, D. J. (2013). Physical security. En *Security science* (pp. 105–127). Elsevier. Descargado de <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-394436-8.00005-9> doi: 10.1016/b978-0-12-394436-8.00005-9
- Sooknanan, J., B., B., y Comissiong, D. (2013). Catching a gang - a mathematical model of the spread of gangs in a population treated as an infectious disease. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 83(1). Descargado de <https://doi.org/10.12732/ijpam.v83i1.4> doi: 10.12732/ijpam.v83i1.4
- Stark, R., Kent, L., y Doyle, D. P. (1982, enero). Religion and delinquency: the ecology of a "lostrelationship". *Journal of Research in Crime and Delinquency*, 19(1), 4–24. Descargado de <https://doi.org/10.1177/002242788201900102> doi: 10.1177/002242788201900102
- Strang, D., y Tuma, N. B. (1993). Spatial and temporal heterogeneity in diffusion. *American Journal of Sociology*, 99(3), 614–639. Descargado de <https://doi.org/10.1086/230318> doi: 10.1086/230318
- Suzuki, M., y Kubo, R. (1968). Dynamics of the ising model near the critical point. i. *Journal of the Physical Society of Japan*, 24(1), 51–60. Descargado de <https://doi.org/10.1143/jpsj.24.51> doi: 10.1143/jpsj.24.51
- Tong, D. (2012). *Lecture notes on statistical physics*. University of Cambridge. Descargado de <https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>
- Turing, A. M. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641), 37–72. Descargado de <https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012> doi: 10.1098/rstb.1952.0012
- Universidad de Minnesota, p. . U. y. . . a. . M. i. . ., title = Social problems : continuity and change. (s.f.).
- van der Walt, S., Colbert, S. C., y Varoquaux, G. (2011). The NumPy array: A structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, 13(2), 22–30. Descargado de <https://doi.org/10.1109/mcse.2011.37> doi: 10.1109/mcse.2011.37
- Villareal, A., y Flores, M. (2015). Exploring the spatial diffusion of homicides in mexican municipalities through exploratory spatial data analysis. *Cityscape: A Journal of Policy Development and Research*, 17(1), 451–493.
- Wilson, J. Q., y Kelling, G. L. (1982). Broken windows: The police and neighborhood safety. *The Atlantic*.
- Zambom, A. Z., y Dias, R. (2012). A review of kernel density estimation with applications to econometrics. Descargado de <https://arxiv.org/abs/1212.2812>
- Zelnik, Y. R., y Tzuk, O. (2017). Wavelength selection beyond turing. Descargado de <https://doi.org/10.1140/epjst/e2017-70034-x> doi: 10.1140/epjst/e2017-70034-x
- Zhuang, J., Ogata, Y., y Vere-Jones, D. (2002). Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences. *Journal of the American Statistical Association*, 97(458), 369–380. Descargado de <https://doi.org/10.1198/016214502760046925> doi: 10.1198/016214502760046925
- Zlatic, V., Gabrielli, A., y Caldarelli, G. (2010). Topologically biased random walk and community finding in networks. *Physical Review E*, 82(6). Descargado de <https://doi.org/10.1103/>

physreve.82.066109 doi: 10.1103/physreve.82.066109

Anexo A. Código de modelo de difusión discreto

```

#importar librerias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

##Función para una iteración del ciclo de crimen
def momento_entero(rho,Ao,Bo,dt,omega,nu,teta,gamma):
    """
    #Al inicio se generan las funciones a emplear en el algoritmo
    #Una iteración del algoritmo completa:
    #Primero, por cada ladrón en cada cuadro de la rejilla se calcula si se comete un crimen. (influye el c
    #De lograrlo, se elimina el ladrón y se registra la cantidad de eventos.
    #De no lograrlo, el ladrón hace un paseo aleatorio a los cuadros adyacentes.
    #Posteriormente, a partir de los eventos ocurridos en la iteracion, se calcula el campo
    de riesgo sobre la rejilla para la siguiente iteracion.
    #Por último, se generan ladrones a cierta tasa en toda la rejilla.
    """

    #####FUNCIONES INTERNAS#####
    def robos(A, cant, dt, nx, ny):
        """
        #Funcion para calcular cuantos y donde ocurren robos exitosos en la malla.
        #Simultaneamente se obtiene la probabilidad de que ocurra un robo en cada sitio de la malla.
        #Se desglosa la matriz de cantidad de criminales en una suma de matrices de 1s y 0s, esto se le mul
        #Generar números aleatorios y decidir éxitos en cada ubicación de la malla, desglosada en matrices
        #Sumar los éxitos de cada matriz para tener agregados de éxitos por cada retícula de la malla.
        """
        probs=np.ones((nx,ny))-np.e**(-1*A*dt) #probs generalizadas
        desc_probs_cant=[]
        desc_exito_al=[]
        cant=cant.astype(int)
        for i in range(1, int(np.ndarray.max(cant)+1)):
            desc_probs_cant.append(np.greater_equal(cant,i)*probs) #desglose de matriz de cantidades por su
            desc_exito_al.append(np.less(np.random.rand(nx,ny),desc_probs_cant[i-1])) #generar numero aleato
        exitos=np.array(sum(desc_exito_al)) #agregado

```

```

return exitos, desc_probs_cant, desc_exito_al

def caminata(fracasos, B, nx, ny):
    """
    #Tomar los intentos fracasados y el campo dinámico de atracción para calcular desplazamiento aleato
    #Se genera una matriz de markov (cada agente se puede mover a cualquiera de las 4 posiciones físicam
    #con matriz de markov, una distribucion acumulativa de probabilidad y número aleatorio se decide de
    #Devuelve el nuevo conteo de criminales en la malla después de todos los desplazamientos.
    """
    #####funciones internas de funcion de caminata####
    def gen_markov(B, nx, ny):
        """
        #Genera matriz de markov.
        #construye matrices de atraccion apartir de la dada corridas una fila o columna en ambos sentid
        #es la atraccion relativa de una posicion hacia cada una de las cuatro posiciones aledañas, sím
        #Habiendo obtenido las atracciones relativas, se asignan valores a matriz de markov.
        """
        #Atraccion neta
        p_x_menos=np.vstack((B[1:], B[0]))
        p_x_mas=np.vstack((B[-1], B[:-1]))
        p_y_menos=np.hstack((B[:, -1][:, np.newaxis], B[:, :-1]))
        p_y_mas=np.hstack((B[:, 1:], B[:, 0][:, np.newaxis]))
        p_tot=p_x_mas+p_x_menos+p_y_mas+p_y_menos #atraccion total
        #Atraccion relativa
        p_x_menos=p_x_menos/p_tot
        p_x_mas=p_x_mas/p_tot
        p_y_menos=p_y_menos/p_tot
        p_y_mas=p_y_mas/p_tot
        Bf=np.ndarray.flatten(B) #aplstar matriz de dim Nx x Ny a arreglo de 1 x (Nx*Ny)
        markov=np.zeros((len(Bf), len(Bf))) #generar matriz de (Nx*Ny) x (Nx*Ny)
        #asignar atracciones relativas de cada posicion a sus aledañas
        for l in np.arange(len(Bf)):
            markov[(1//ny)*ny+(1+1)%ny][l]=p_y_mas[1//ny][l%ny]
            markov[(1//ny)*ny+(1-1)%ny][l]=p_y_menos[1//ny][l%ny]

            markov[(1+ny)%(nx*ny)][l]=p_x_menos[1//ny][l%ny]
            markov[(1-ny)%(nx*ny)][l]=p_x_mas[1//ny][l%ny]
        return markov

    def cf(a,b,c,d):
        """
        #funcion de eleccion monte carlo con distribucion cumulativa de probabilidad
        #Cada una de las 4 opciones de movimiento se le asigna un intervalo y se genera un numero aleat
        #Se genera numero aleatorio y devuelve el intervalo seleccionado por el mismo.
        """
        rand=np.random.rand() #generar numero aleatorio
        #comparar con cada uno de los intervalos
        if (rand<=a):
            return 0
        if (rand>a and rand<=a+b):
            return 1
        if (rand>a+b and rand<=a+b+c):
            return 2
        if (rand>a+b+c):
            return 3
    #####fin de funciones internas de funcion de caminata####

    #CUERPO DE FUNCION DE CAMINATA##
    fracasos_flat=np.ndarray.flatten(fracasos) #fracasos en una sola dimension
    markov=gen_markov(B, nx, ny) #generar matriz de markov
    res_ind=np.argwhere(markov) #obtener cuales posiciones de la matriz de markov no son 0
    markov_ubis=(np.ndarray.flatten(res_ind)[1::2]).reshape(len(markov),4) #determinar hacia qué direcc
    migras=np.zeros((nx*ny, nx*ny)) #matriz vacia para contabilizar desplazamientos
    for i in np.arange(len(markov)): #por cada posicion de la malla con por lo menos un fracaso
        if fracasos_flat[i]>=1: #determinar las opciones de movimiento
            a=markov[markov_ubis[i][0]][i]
            b=markov[markov_ubis[i][1]][i]
            c=markov[markov_ubis[i][2]][i]
            d=markov[markov_ubis[i][3]][i]

```

```

        d=markov[markov_ubis[i][3]][i]
        for cont in np.arange(fracasos_flat[i]): #elegir con montecarlo una opcion
            elec=cf(a,b,c,d)
            migras[markov_ubis[i][elec]][i]+=1 #registrar movimiento
        migras2=(sum(migras.transpose())).reshape(nx,ny) #nuevo conteo de criminales en malla
        return migras2, markov_ubis, migras, markov

def av_campo(Bs,E,dt,omega,nu,teta):
    """
    #Actualiza el campo dinámico de atracción a partir de campo actual, los sucesos ocurridos
    y los parámetros globales del sistema. (Eq. 2.5 de A STATISTICAL MODEL OF CRIMINAL BEHAVIOR- 2008- )
    """
    #calcula la atraccion total de campos aledaños
    B_x_menos=np.vstack((Bs[1:], Bs[0]))
    B_x_mas=np.vstack((Bs[-1], Bs[:-1]))
    B_y_menos=np.hstack((Bs[:, -1][:, np.newaxis], Bs[:, :-1]))
    B_y_mas=np.hstack((Bs[:, 1:], Bs[:, 0][:, np.newaxis]))
    B_tot_al=B_x_mas+B_x_menos+B_y_mas+B_y_menos
    #ecuacion por pedazos
    a=(1-nu)*Bs; b=nu/4*B_tot_al; c=(1-omega*dt); d=teta*E
    return (a+b)*c+d
#####FIN FUNCIONES INTERNAS#####

#dimensiones de malla
nx=rho.shape[0]
ny=rho.shape[1]
#Eventos y fracasos
robos_ejec=robos(Ao+Bo, rho, dt, nx, ny) #ejecutar función de robos
E=robos_ejec[0] #robos exitosos
F=rho-E #fracaso=total Ladrones - Ladrones exitosos
#Caminata de fracasos
desp=caminata(F, Ao+Bo, nx, ny)[0] #ejecutar función de caminata con Ladrones restantes
#actualizacion campo dinamico
B_new=av_campo(Bo,E,dt,omega,nu,teta)

```

```

#actualizar cantidad de ladrones
a=np.random.rand(nx,ny) #numeros aleatorios para calculo
nuevos=gamma*dt*np.ones((nx,ny))*np.ones((nx,ny)) #calcular cantidad de Ladrones teorica
nuevos_dec=nuevos-nuevos.astype(int) #cantidad de Ladrones decimal
nuevos_dec2=np.less(a,nuevos_dec) #residuos generan Ladrones con monte carlo
rho_new0= desp + nuevos.astype(int)+nuevos_dec2 #sumar Ladrones enteros más decimales

return B_new, rho_new0, E

#Función para hacer una debida cantidad de iteraciones del ciclo de crimen
def iteraciones(rho,Ao,Bo,dt,omega,nu,teta,gamma,it):
    #Iniciar listas de registro de corrida
    lista_rho=[rho] #Ladrones iniciales
    lista_B=[Bo] #campo dinámico inicial
    Ev=np.zeros((rho.shape[0],rho.shape[1]))
    lista_Ev=[Ev] #eventos iniciales = 0
    for i in np.arange(it): #iterar el ciclo del modelo una cantidad de veces
        m=momento_entero(lista_rho[i],Ao,lista_B[i],dt,omega,nu,teta,gamma)
        lista_B.append(m[0])
        lista_rho.append(m[1])
        lista_Ev.append(m[2])
    return lista_rho, lista_B, lista_Ev

def graficar_modelo_cuadro(l_rho, l_B, lista_E, Ao, no_it, Bprom):
    fig, ax1 = plt.subplots(1)
    ax1.imshow((l_B[no_it]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic') , vmin=0, vmax=2*Bprom)
    ax1.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(no_it))
    fig.canvas.draw() # draw the canvas, cache the renderer
    image = np.frombuffer(fig.canvas.tostring_rgb(), dtype='uint8')
    image = image.reshape(fig.canvas.get_width_height()[::-1] + (3,))
    plt.close()
    return image

```

```

def main(dt, omega, nu, teta, gamma, A0, no_it, Nx, Ny):
    """
    Función general del modelo
    """
    #Valores promedio
    Bprom=teta*gamma/omega #campo dinamico
    prob_prom=(1-np.exp(-(A0+Bprom)*dt)) #probabilidad de robo
    num_rho_prom=gamma*dt/prob_prom*np.ones((Nx,Ny)) #ladrones
    dec_rho_prom=num_rho_prom-num_rho_prom.astype(int) #ladrones (decimales)
    #generar ladrones decimales con montecarlo
    a=np.random.rand(Nx,Ny)
    rho_prom=np.less(a, dec_rho_prom) + num_rho_prom.astype(int)
    #creacion de malla s
    rho_0=rho_prom #numero de criminales inicial
    A0_m=A0*np.ones((Nx,Ny)) #campo estatico inicial
    B0_m=Bprom*np.ones((Nx,Ny)) #campo dinamico inicial
    #calcular progresion de sistema
    l_rho,l_B,l_Ev=iteraciones(rho_0,A0_m, B0_m,dt,omega,nu,teta,gamma,no_it)
    return l_rho, l_B, l_Ev

if __name__ == "__main__":
    #Parámetros generales
    no_it=5000 #numero de iteraciones
    Nx=100 #dimension de eje x
    Ny=100 #dimension de eje y
    dt=1/100 #intervalo de tiempo de cada iteracion
    #Parámetros de control
    uni_deca=15 # cantidad de unidades diferenciales de tiempo para que campo dinámico decaiga totalmente
    omega=uni_deca**(-1) #factor de decaimiento de atraccion
    teta=0.56 #factor de magnitud por evento
    gamma=0.019 #tasa de generacion de nuevos criminales
    A0=1/30 #campo estatico
    eta=0.3
    rho, B, Ev = main(dt, omega, eta, teta, gamma, A0, no_it, Nx, Ny)

```

Anexo B. Simulaciones de modelo discreto de Short *et al*, 2008

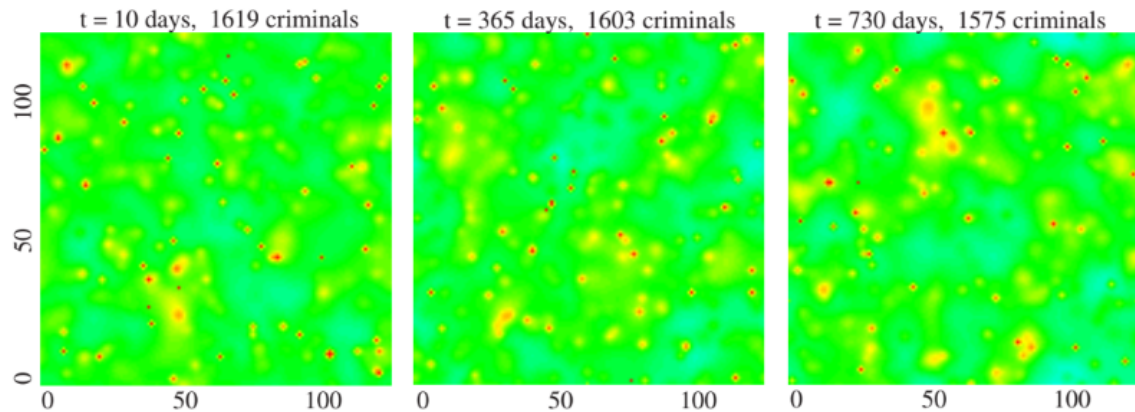


Figura 11.1: Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short *et al*. (2008), con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.

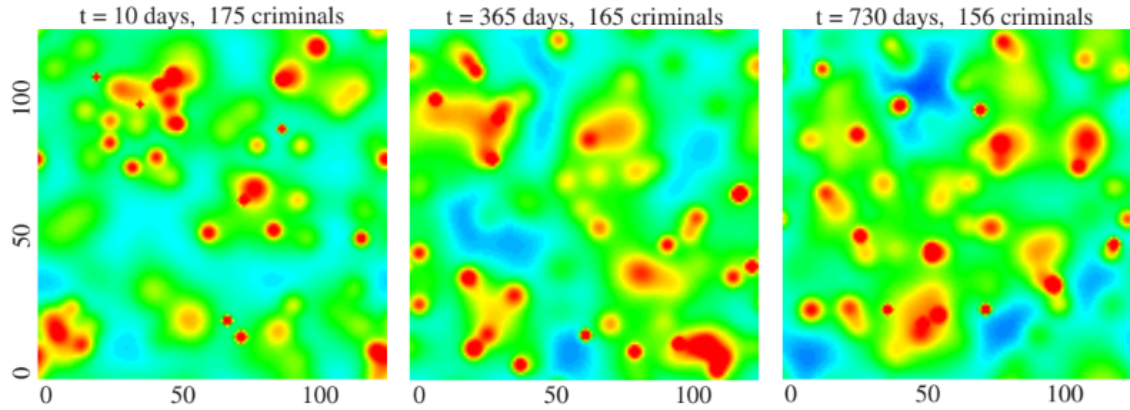


Figura 11.2: Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short *et al.* (2008), con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.

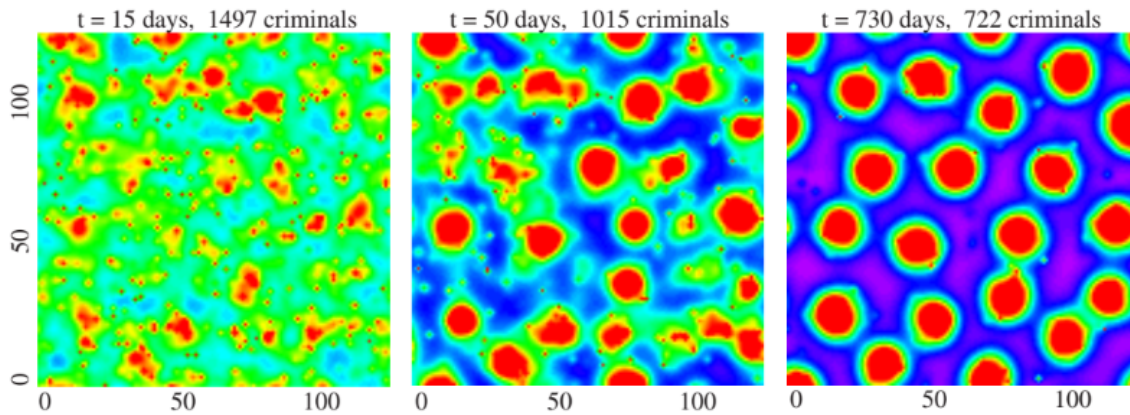


Figura 11.3: Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short *et al.* (2008), con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.

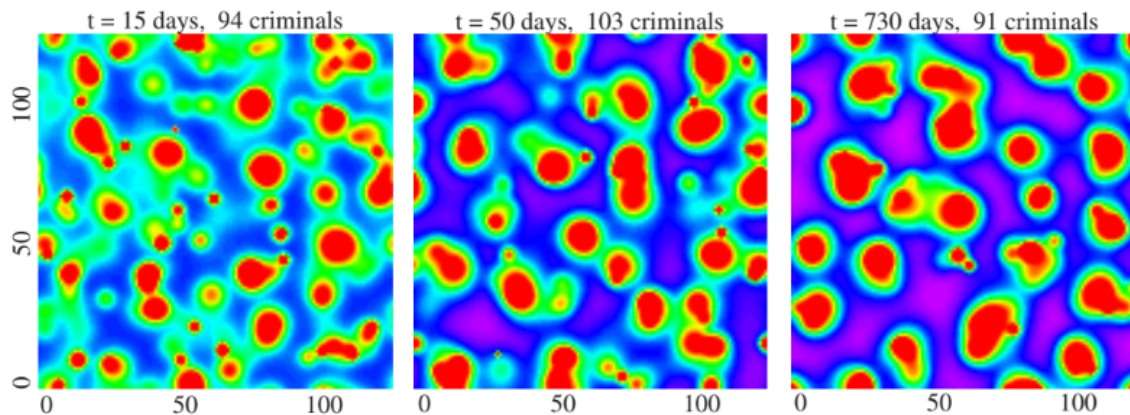


Figura 11.4: Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen de Short *et al.* (2008), con parámetros $\eta = 0.2$, $\gamma = 0.002$ y $\theta = 5.6$.

Anexo C. Código de modelo de difusión continuo

```

####PAQUETES PARA PROGRAMA
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Función general de evolución del sistema
def met_runge_kutta4(no_it, dx, dt, As, rho0, B0, eta, Bslash):
    """
    Método de Runge Kutta de orden 4 para la evolución dinámica en diferencias finitas
    del sistema caracterizado por las funciones dinámicas adimensionales del campo .
    """
    def dB_t(dx, dt, As, rho0, B0, eta):
        """
        Calcula por medio de diferencias finitas la derivada del campo dinámico de riesgo B.
        """
        #####PARA EL LAPLACIANO#####
        #constante de Laplaciano
        c=eta/(dx**2) #Se asume dx=dy
        #reescribe la matriz "corrida" en una dirección: +i, -i, +j, -j.
        Bimas=np.vstack((B0[-1], B0[:-1]))
        Bimenos=np.vstack((B0[1:], B0[0]))
        Bjmas=np.hstack((B0[:,1:], B0[:,0][:,np.newaxis]))
        Bjmenos=np.hstack((B0[:, -1][:,np.newaxis], B0[:, :-1]))
        #Al sumar estas matrices "corridas" se obtiene la suma de las cuatro posiciones aledañas para todo
        lap2=(c*(Bimas +Bimenos +Bjmas +Bjmenos -4*B0))
        #####VALOR DE DERIVADA#####
        dB=lap2-B0+rho0*(As+B0)
        return dB

    def drho_t(dx, dt, As, rho0, B0, Bslash):
        """
        Calcula por medio de diferencias finitas la derivada de la densidad de ladrones.
        """

        A=As+B0
        c=1/dx**2 #constante de Laplacianos
        #####PARA EL LAPLACIANO DE RHO#####
        rhoimas=np.vstack((rho0[-1], rho0[:-1]))
        rhoimenos=np.vstack((rho0[1:], rho0[0]))
        rhojmas=np.hstack((rho0[:,1:], rho0[:,0][:,np.newaxis]))
        rhojmenos=np.hstack((rho0[:, -1][:,np.newaxis], rho0[:, :-1]))
        #Al sumar estas matrices "corridas" se obtiene la suma de las cuatro posiciones aledañas para todo
        lap2rho=c*(rhoimas +rhoimenos +rhojmas +rhojmenos -4*rho0)

        #####PARA EL LAPLACIANO DE A#####
        Aimas=np.vstack((A[-1], A[:-1]))
        Aimenos=np.vstack((A[1:], A[0]))
        Ajmas=np.hstack((A[:,1:], A[:,0][:,np.newaxis]))
        Ajmenos=np.hstack((A[:, -1][:,np.newaxis], A[:, :-1]))
        #Al sumar estas matrices "corridas" se obtiene la suma de las cuatro posiciones aledañas para todo
        lap2A=c*(Aimas +Aimenos +Ajmas +Ajmenos -4*A)

        #####DERIVADAS Y GRADIENTES#####
        der_x_rho=(rhoimas-rhoimenos)/(2*dx) #derivada parcial en x con diferencias finitas de rho
        der_y_rho=(rhojmas-rhojmenos)/(2*dx) #derivada parcial en y con diferencias finitas de rho
        der_x_A=(Aimas-Aimenos)/(2*dx) #derivada parcial en x con diferencias finitas de A
        der_y_A=(Ajmas-Ajmenos)/(2*dx) #derivada parcial en y con diferencias finitas de A
        gradA_gradrho=der_x_A*der_x_rho+der_y_A*der_y_rho #Producto punto grad(A).grad(rho)
        gradA_gradA=der_x_A**2+der_y_A**2 #Producto punto grad(A).grad(A) (norma al cuadrado)

        #####VALOR DE DERIVADA#####
        drho= lap2rho -2*rho0/A**2*lap2A -2/A*gradA_gradrho +2*rho0/(A**2)*gradA_gradA -rho0*A + Bslash
        return drho

```

```

#####CUERPO RUNGE KUTTA ORDEN 4#####
#Iniciar método con valores iniciales
B=[B0]
rho=[rho0]
for i in np.arange(no_it): #iterrar cantidad de veces predefinida
    #tomar valores actuales
    B_act=B[i]
    rho_act=rho[i]
    #Coeficientes de Runge Kutta para valores actuales de B y Phi.
    K1_B=dt*dB_t(dx, dt, As, rho_act, B_act, eta)
    K1_rho=dt*drho_t(dx, dt, As, rho_act, B_act, Bslash)
    K2_B=dt*dB_t(dx, dt, As, rho_act+K1_rho/2, B_act+K1_B/2, eta)
    K2_rho=dt*drho_t(dx, dt, As, rho_act+K1_rho/2, B_act+K1_B/2, Bslash)
    K3_B=dt*dB_t(dx, dt, As, rho_act+K2_rho/2, B_act+K2_B/2, eta)
    K3_rho=dt*drho_t(dx, dt, As, rho_act+K2_rho/2, B_act+K2_B/2, Bslash)
    K4_B=dt*dB_t(dx, dt, As, rho_act+K3_rho, B_act+K3_B, eta)
    K4_rho=dt*drho_t(dx, dt, As, rho_act+K3_rho, B_act+K3_B, Bslash)
    #actualizar B y Rho
    B.append(B[i]+(K1_B + 2*K2_B + 2*K3_B + K4_B)/6)
    rho.append(rho_act+(K1_rho + 2*K2_rho + 2*K3_rho + K4_rho)/6)
return B, rho

#####PARÁMETROS DEL SISTEMA#####
nx=ny=100
no_it=3500
As=0
omega=1/15
l=1
dt=1/10**(4)
eta=0.03
theta=0.56
gamma=0.019

```

```

rhoprom=gamma*dt/(1-np.exp(-(As+Bprom)*dt))

#####VARIABLES NORMALIZADAS#####
D=1**2/dt
gamma2=gamma/l**2
epsilon=theta*dt
l_c=(D/omega)**(1/2)
Bslash=epsilon*D*gamma2/omega

dt_tilde=omega*dt
dx_tilde=2*l/l_c
As_tilde=As/omega
Bprom_tilde=Bslash/omega
rhoprom_tilde=Bprom_tilde/(Bprom_tilde+As_tilde)

#####cumplimiento de condiciones
(3*rhoprom_tilde+1-(12*rhoprom_tilde)**(1/2))/(As+Bprom_tilde)
Bprom_tilde>As_tilde/2
eta<(3*rhoprom_tilde+1-(12*rhoprom_tilde)**(1/2))/(As+Bprom_tilde)

#####ESTADOS INICIALES DEL SISTEMA)
dist_inicial_B = abs(np.random.normal(1, 0.05, nx*ny)).reshape(nx,ny)
dist_inicial_rho = abs(np.random.normal(1, 0.05, nx*ny)).reshape(nx,ny)

As_tildem=As_tilde*np.ones((nx,ny))
Bprom_tildem=Bprom_tilde*dist_inicial_B
rhoprom_tildem=rhoprom_tilde*dist_inicial_rho
Bslashm=Bslash*np.ones((nx,ny))

```

```

#####CORRER METODO DE RUNGE KUTTA PAA RESOLVER SISTEMA####
l_B,l_rho=met_runge_kutta4(no_it,dx_tilde,dt_tilde,As_tilde,rhoprom_tildem,Bprom_tildem,eta,Bslashm)

#####COJNSEGUIR PROMEDIO Y SD DE B RHO####
l_proms_B=[]
l_sd_B=[]
l_proms_rho=[]
l_sd_rho=[]

for i in np.arange(len(l_B)): #desempacar y calcular Las medidas de tendencia / dispersión
    l_proms_B.append(l_B[i].mean())
    l_sd_B.append(l_B[i].std()/(l_B[i].mean()))
    l_proms_rho.append(l_rho[i].mean())
    l_sd_rho.append(l_rho[i].std()/(l_rho[i].mean()))

#####Graficar####
#####promedios
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2,1)
ax1.scatter(np.arange(no_it+1),l_proms_B)
ax2.scatter(np.arange(no_it+1),l_proms_rho)

#####promedios
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2,1)
ax1.scatter(np.arange(no_it+1),l_sd_B)
ax2.scatter(np.arange(no_it+1),l_sd_rho)

```

```

#####Progresion B
fig, (ax1, ax2, ax3, ax4) = plt.subplots(1,4)
ax1.imshow((l_B[10]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax1.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(10))
ax2.imshow((l_B[1000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax2.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(1000))
ax3.imshow((l_B[10000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax3.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(10000))
ax4.imshow((l_B[30000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax4.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(30000))

#####Progresion rho
fig, (ax1, ax2, ax3, ax4) = plt.subplots(1,4)
ax1.imshow((l_rho[10]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax1.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(10))
ax2.imshow((l_rho[1000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax2.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(1000))
ax3.imshow((l_rho[10000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax3.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(10000))
ax4.imshow((l_rho[30000]).transpose(), cmap = plt.get_cmap('seismic'))
ax4.set(xlabel='Y', ylabel='X', title='Ite No.' + str(30000))

```

Anexo D. Simulaciones de modelo continuo de Short *et al*, 2008

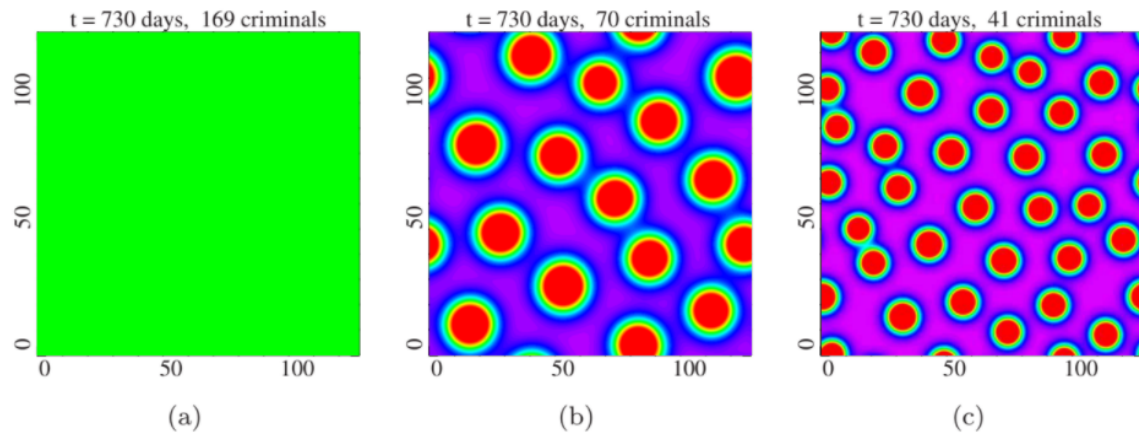


Figura 11.5: Campo dinámico de atracción del modelo de difusión de crimen continuo de Short *et al.* (2008), con parámetros: (a), (b) y (c).

Anexo E. Código de Ising en dos dimensiones (Algoritmo de Metropolis-Hastings)

```
#importar librerias
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Crear función base
def progresion_cadena(cadena, numero, Bet, nx, ny, J, H):
    """
    Función que devuelva toda la evolución de una cadena bidimensional en el modelo
    de Ising.
    Devuelve un listado con las cadenas luego de cada iteración.
    """
    def paso_cadena(cadena, Bet, J, H, nx, ny):
        """
        Función para hacer una interacción: "proponer y aceptar o rechazar" un cambio.
        """
        def dif_energia(So, i, j, nx, ny, J, H):
            """
            Calcula la diferencia en energía en la configuración al cambiar un determinado espín.
            """
            Eo = -So[i][j]*(J*(So[(i+1)%nx][j] + So[(i-1)%nx][j] + So[i][(j+1)%ny] + So[i][(j-1)%ny]) + H)
            return -2*Eo

        #Elegir aleatoriamente un espín
        pos_randomx = int(nx*np.random.random())
        pos_randomy = int(ny*np.random.random())
        #Calcular la diferencia en energía al cambiar ese espín
        delta_en = dif_energia(cadena, pos_randomx, pos_randomy, nx, ny, J, H)
        copia_cadena = np.copy(cadena) #Copiar cadena
        r = np.random.random() #generar un número aleatorio entre 0 y 1
        #criterio de aceptación
        if r < min(1, np.exp(-Bet*delta_en)):
            copia_cadena[pos_randomx][pos_randomy] *= -1
        return copia_cadena
```

```

l_cadenas=[] #empezar lista con la cadena inicialmente
#realizar un número de iteraciones del algoritmo y agregar el resultado de cada uno a la lista
nueva_cadena=cadena
for i in np.arange(numero):
    nueva_cadena=np.array(paso_cadena(nueva_cadena, Bet, J, H, nx, ny))
    if (i==0) or (i==nx*ny*5) or (i==nx*ny*50) or (i==nx*ny*500-1):
        l_cadenas.append(nueva_cadena)
return l_cadenas

####Comparación de evolución de cadenas a baja, mediana y alta temperatura####

####Parámetros generales de gráfica
J=1 #Parámetro de acoplamiento
H=0 #campo magnético
nx=ny=60 #dimensiones rejilla
numero=nx*ny*500 #cantidad de iteraciones
kb=1

#Cadenas particulares
cadena_a=np.random.randint(2, size=(nx,ny))*2-1 #cadena inicial
cadena_b=np.array(cadena_a)
cadena_c=np.array(cadena_a)

Ta=1 #temperatura 1
Beta=1/(Ta*kb) #Beta 1
l_cada=progresion_cadena(cadena_a, numero, Beta, nx, ny, J, H) #funcion para sacar progresion de cadenas

Tb=2.5 #temperatura 2
Betb=1/(Tb*kb) #Beta 2
l_cadb=progresion_cadena(cadena_b, numero, Betb, nx, ny, J, H) #funcion para sacar progresion de cadenas

```

```

Tc=5 #temperatura 3
Betc=1/(Tc*kb) #Beta 3
l_cadc=progresion_cadena(cadena_c, numero, Betc, nx, ny, J, H) #funcion para sacar progresion de cadenas

#Graficar
fig, ax = plt.subplots(3,4, figsize=(15,10))
#T=1
ax[0,0].imshow(l_cada[0], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[0,0].set(title='T=' +str(Ta) +', Ite/N: '+ str(0)); ax[0,0].axis('off')
ax[0,1].imshow(l_cada[1], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[0,1].set(title='T=' +str(Ta) +', It/Ne: '+ str(5)); ax[0,1].axis('off')
ax[0,2].imshow(l_cada[2], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[0,2].set(title='T=' +str(Ta) +', Ite/N: '+ str(500)); ax[0,2].axis('off')
ax[0,3].imshow(l_cada[3], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[0,3].set(title='T=' +str(Ta) +', Ite/N: '+ str(5000)); ax[0,3].axis('off')
#T=2
ax[1,0].imshow(l_cadb[0], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[1,0].set(title='T=' +str(Tb) +', Ite/N: '+ str(0)); ax[1,0].axis('off')
ax[1,1].imshow(l_cadb[1], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[1,1].set(title='T=' +str(Tb) +', It/Ne: '+ str(5)); ax[1,1].axis('off')
ax[1,2].imshow(l_cadb[2], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[1,2].set(title='T=' +str(Tb) +', Ite/N: '+ str(500)); ax[1,2].axis('off')
ax[1,3].imshow(l_cadb[3], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[1,3].set(title='T=' +str(Tb) +', Ite/N: '+ str(5000)); ax[1,3].axis('off')
#T=3
ax[2,0].imshow(l_cadc[0], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[2,0].set(title='T=' +str(Tc) +', Ite/N: '+ str(0)); ax[2,0].axis('off')
ax[2,1].imshow(l_cadc[1], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[2,1].set(title='T=' +str(Tc) +', It/Ne: '+ str(5)); ax[2,1].axis('off')
ax[2,2].imshow(l_cadc[2], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[2,2].set(title='T=' +str(Tc) +', Ite/N: '+ str(500)); ax[2,2].axis('off')
ax[2,3].imshow(l_cadc[3], cmap = plt.get_cmap('seismic') )
ax[2,3].set(title='T=' +str(Tc) +', Ite/N: '+ str(5000)); ax[2,3].axis('off')

```

```

def metropolis_Tvar(numero, T_min, T_max, nx, ny, cant_pasos, ite_metropolis, J, H ):
    """Algoritmo de metropolis para TEMPERATURA variable.
    Se hace una lista de valores para TEMPERATURA. Para cada valor de T, se genera una rejilla aleatoria y
    """
    def metropolis(cadena, no_it, Bet, J, H, nx, ny):
        """Esta función toma una rejilla. A esta rejilla se le modifica un solo valor. Se calcula la energía
        """
        def paso_cadena(cadena, Bet, J, H, nx, ny):
            """Función para hacer una interacción: "proponer y aceptar o rechazar" un cambio.
            """
            def dif_energia(So, i, j, nx, ny, J, H):
                """Calcula la diferencia en energía en la configuración al cambiar un determinado espín.
                """
                Eo=-So[i][j]*(J*(So[(i+1)%nx][j] +So[(i-1)%nx][j] +So[i][(j+1)%ny] +So[i][(j-1)%ny]) +H)
                return -2*Eo

                #Elegir aleatoriamente un espín
                pos_randomx=int(nx*np.random.random())
                pos_randomy=int(ny*np.random.random())
                #Calcular la diferencia en energía al cambiar ese espín
                delta_en=dif_energia(cadena, pos_randomx, pos_randomy, nx, ny, J, H)
                copia_cadena=np.copy(cadena) #Copiar cadena
                r=np.random.random() #generar un número aleatorio entre 0 y 1
                #criterio de aceptación
                if r<min(1,np.exp(-Bet*delta_en)):
                    copia_cadena[pos_randomx][pos_randomy]*=-1
                return copia_cadena
            cadena_f=np.array(cadena)
            for i in np.arange(no_it):
                cadena_f=np.array(paso_cadena(cadena_f, Bet, J, H, nx, ny))
            return cadena_f

```

```

#Funciones de valores esperados
def sum_energia(So, J, H):
    """Calcula la energía de todo el sistema.
    """
    So_i_mas=np.vstack((So[-1], So[:-1]))
    So_j_mas=np.hstack((So[:,1:], So[:,0][:,np.newaxis]))
    Sij=-J*So*(So_i_mas+ So_j_mas)
    return (Sij-H*So).sum()

def prom_mag(cadena, nx, ny):
    """Calcula la magnetización promedio (exceso de magnetización en cadena es espíns)
    """
    return sum(cadena)/(nx*ny)

#Generar lista de valores de temperatura
lista_T=np.linspace(T_min,T_max,numero)
lista_ene=[]; lista_mag=[]

#iterar algoritmo para cada valor de temperatura
for i in range(0,numero):
    ene=[]; mag=[]
    for i in np.arange(ite_metropolis): #repetir por cada temperatura el algoritmo de metropolis
        cadena=np.random.randint(2, size=(nx,ny))*2-1
        res=metropolis(cadena, cant_pasos, 1/lista_T[i], J, H, nx, ny)

        #guardar valores esperados locales
        ene.append(sum_energia(res,J,H)); mag.append(prom_mag(res, nx, ny))
    #guardar a lista de valores por temperatura el promedio de los valores locales con cada una
    lista_ene.append(sum(ene)/ite_metropolis)
    lista_mag.append(sum(mag)/ite_metropolis)

return lista_T, lista_ene, lista_mag

```

Anexo F. Código de Ginzburg-Landau

```
#####PAQUETES PARA PROGRAMA
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#####FUNCIÓN BASE####
def met_runge_kutta4(no_it, dx, dt, Phi0):
    """
    Método de Runge Kutta de orden 4 para la evolución dinámica en diferencias finitas
    del sistema caracterizado por la función de potencial.
    """
    def dphi_t(dx, dt, Phi0):
        """
        Función para calcular derivada del potencial según su función analítica.
        Se calcula el laplaciano con diferencias finitas.
        """
        #####PARA EL LAPLACIANO#####
        #constante de laplaciano
        c=1/(dx**2) #Se asume dx=dy
        #reescribe la matriz "corrida" en una dirección: +i, -i, +j, -j.
        Phi_imas=np.vstack((Phi0[-1], Phi0[:-1]))
        Phi_imenos=np.vstack((Phi0[1:], Phi0[0]))
        Phi_jmas=np.hstack((Phi0[:,1:], Phi0[:,0][:,np.newaxis]))
        Phi_jmenos=np.hstack((Phi0[:, -1][:,np.newaxis], Phi0[:, :-1]))
        #Al sumar estas matrices "corridas" se obtiene la suma de las cuatro posiciones
        #aledañas para todo enésimo elemento de la matriz.
        lap2=(c*(Phi_imas +Phi_imenos +Phi_jmas +Phi_jmenos -4*Phi0))
        #####VALOR DE DERIVADA#####
        dPhi=Phi0-Phi0**3+lap2
        return dPhi

    #Iniciar lista de valores de potencial con condiciones iniciales
    Phi=[Phi0]
    #Iterar evolución de phi
    for i in np.arange(no_it):
        Phi_act=Phi[i] #recuperar valor actual de phi
        #Valores de Runge Kutta
        K1=dt* dphi_t(dx, dt, Phi_act)
        K2=dt* dphi_t(dx, dt, Phi_act+K1/2)
        K3=dt* dphi_t(dx, dt, Phi_act+K2/2)
        K4=dt* dphi_t(dx, dt, Phi_act+K3)
        #Actualizar valor de potencial
        Phi.append(Phi[i]+(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)/6)
    return Phi

#####PARÁMETROS DEL SISTEMA#####
nx=ny=100;
no_it=5001
dx=1
dt=0.01
###Generar estado inicial de sistema
magnitud=np.random.random((nx, ny))
signo=np.random.randint(0,2, (nx, ny))*2-1
Phi0 = magnitud*signo
###CORRER METODO DE RUNGE KUTTA PAA RESOLVER SISTEMA###
r=met_runge_kutta4(no_it, dx, dt, Phi0)
###Graficar resultados###
fig, ax = plt.subplots(1,5, figsize=(20,10))
ax[0].imshow(r[0], cmap=plt.get_cmap('seismic'));ax[0].set(title='t='+str((0*dt)));ax[0].axis('off')
ax[1].imshow(r[50], cmap=plt.get_cmap('seismic'));ax[1].set(title='t='+str((50*dt)));ax[1].axis('off')
ax[2].imshow(r[150], cmap=plt.get_cmap('seismic'));ax[2].set(title='t='+str((150*dt)));ax[2].axis('off')
ax[3].imshow(r[500], cmap=plt.get_cmap('seismic'));ax[3].set(title='t='+str((500*dt)));ax[3].axis('off')
ax[4].imshow(r[5000], cmap=plt.get_cmap('seismic'));ax[4].set(title='t='+str((5000*dt)));ax[4].axis('off')
```