

---

Aplicación de *linear graph modeling* en el modelado y análisis de sistemas eléctricos como base para el desarrollo de un futuro simulador universal

---

Edgar Manuel Antonio Chen Molina





UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ingeniería



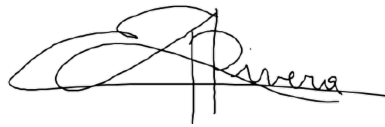
**Aplicación de *linear graph modeling* en el modelado y análisis  
de sistemas eléctricos como base para el desarrollo de un  
futuro simulador universal**

Trabajo de graduación presentado por Edgar Manuel Antonio Chen  
Molina para optar al grado académico de Licenciado en Ingeniería  
Mecatrónica

Guatemala,

2025

Vo.Bo.:



(f)

---

Dr. Luis Alberto Rivera Estrada



(f)

---

M.Sc. Carlos Esquit Hernández

Fecha de aprobación: Guatemala, 20 de noviembre de 2025.

## Agradecimientos

A Dios, por su guía constante a lo largo de este camino. Su presencia se manifestó en personas que llegaron justo cuando las necesitaba, en aprendizajes que aparecieron en momentos decisivos y en procesos que, aunque exigentes, moldearon mi carácter.

A mis padres, cuyo esfuerzo, dedicación y cariño sostuvieron cada paso de mi formación. Gracias por caminar conmigo, por celebrar cada avance y por creer siempre en mí. A mi hermano, por equilibrar mis días con su humor, compañía y apoyo genuino. A mis abuelas, por su amor constante, sus enseñanzas y la fe con la que siempre me acompañaron; sus gestos fueron raíces sobre las que crecí.

A mis amigos, por su amistad auténtica y por acompañarme sin condiciones durante los años más demandantes de esta carrera. Cada conversación, cada desvelo compartido y cada gesto de apoyo hizo más ligero un camino que no siempre fue sencillo.

A mi asesor, por su apoyo y comprensión durante todo este proceso. A los profesores que marcaron mi formación, por sus enseñanzas, sus consejos y por confiar en mi potencial. Sus aportes académicos y humanos dejaron una huella profunda en mi manera de pensar.

A la Universidad del Valle de Guatemala, por ofrecerme un entorno que me permitió crecer de formas que no imaginaba. Gracias por los espacios para aprender, participar, liderar y construir. La UVG fue más que un lugar de estudio: fue un ecosistema de oportunidades donde descubrí mi vocación, desarrollé criterio y asumí responsabilidades que hoy definen mi identidad.

<b>Prefacio</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>V</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>VI</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>3</b>
2.1. Sistemas dinámicos . . . . .	3
2.2. La teoría del <i>linear graph modeling</i> . . . . .	3
2.3. Aplicación de la teoría de <i>linear graph modeling</i> en circuitos eléctricos . . . . .	4
2.4. <i>Linear graph modeling</i> en la simulación de sistemas eléctricos . . . . .	4
<b>3. Justificación</b>	<b>6</b>
<b>4. Objetivos</b>	<b>7</b>
4.1. Objetivo general . . . . .	7
4.2. Objetivos específicos . . . . .	7
<b>5. Definición del problema</b>	<b>8</b>
<b>6. Marco teórico</b>	<b>10</b>
6.1. Fundamentos del análisis de circuitos eléctricos . . . . .	10
6.2. Modelo LTI en espacio de estados . . . . .	12
6.3. Correspondencia entre dominios físicos en <i>linear graph modeling</i> . . . . .	13
6.4. Aplicación del modelado gráfico lineal (LGM) a sistemas eléctricos y físicos . . . . .	14
6.5. Del grafo lineal al modelo en espacio de estados . . . . .	16
6.6. Obtención teórica y validación topológica a partir de datos experimentales . . . . .	18

<b>7. Modelado y selección de sistemas</b>	<b>20</b>
7.1. Selección de los sistemas eléctricos . . . . .	20
7.2. Fundamentos del modelado aplicado . . . . .	22
7.3. Aplicaciones del <i>linear graph modeling</i> . . . . .	25
<b>8. Simulación y validación experimental</b>	<b>32</b>
8.1. Simulación computacional y configuración experimental . . . . .	32
8.2. Validación experimental . . . . .	37
8.3. Identificación del sistema y aproximación del modelo . . . . .	40
<b>9. Extensión del modelo y primeros pasos hacia un simulador universal</b>	<b>44</b>
9.1. Modelado de sistemas mecánicos mediante LGM . . . . .	44
9.2. Integración de modelos hacia un simulador universal basado en grafos . . . . .	48
<b>10. Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>11. Recomendaciones</b>	<b>52</b>
<b>12. Referencias</b>	<b>53</b>
<b>13. Anexos</b>	<b>55</b>
13.1. Documentación general . . . . .	55
13.2. Repositorio GitHub . . . . .	55
13.3. Circuitos y grafos empleados . . . . .	55

---

## Índice de figuras

---

1.	Ejemplo de circuito RLC de segundo orden . . . . .	11
2.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al sistema analizado de izquierda a derecha . . . . .	15
3.	Circuito 7 utilizado para la deducción del modelo convencional . . . . .	23
4.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 7 (de izquierda a derecha) . . . . .	26
5.	Circuito 4 con amplificador operacional . . . . .	30
6.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 4 (de izquierda a derecha) . . . . .	30
7.	Modelo del circuito 3 implementado en Simulink . . . . .	34
8.	Esquema del circuito 4 implementado en LTspice . . . . .	34
9.	Respuesta al escalón de 5 V del circuito 4 . . . . .	35
10.	Respuesta al escalón de 1 V del circuito 4 . . . . .	35
11.	Respuesta al escalón de 5 V del circuito 7 . . . . .	36
12.	Respuesta al escalón de 1 V del circuito 7 . . . . .	37
13.	Montaje físico para la validación experimental . . . . .	38
14.	Respuesta experimental del circuito 4 . . . . .	39
15.	Respuesta experimental del circuito 7 . . . . .	39
16.	Respuesta al escalón obtenida mediante identificación del circuito 3 . . . . .	42
17.	Sistema mecánico masa–resorte–amortiguador . . . . .	46
18.	Grafos del sistema masa–resorte–amortiguador . . . . .	46
19.	Grafo lineal asociado al circuito 3 . . . . .	49
20.	Esquema del circuito 1 con red RLC en paralelo de orden 2 . . . . .	56
21.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 1 (de izquierda a derecha) . . . . .	56
22.	Esquema del circuito 2 con red RLC en paralelo y resistencia serie de orden 2 . . . . .	56
23.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 2 (de izquierda a derecha) . . . . .	57
24.	Esquema del circuito 3 con filtro pasabanda RC de orden 2 . . . . .	57

25.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 3 (de izquierda a derecha) . . . . .	57
26.	Esquema del circuito 4 con amplificador operacional y realimentación capacitiva de orden 3 . . . . .	58
27.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 4 (de izquierda a derecha) . . . . .	58
28.	Esquema del circuito 5 con integrador ideal y amplificador operacional de orden 1 . . . . .	58
29.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 5 (de izquierda a derecha) . . . . .	59
30.	Esquema del circuito 6 con integrador real de orden 1 . . . . .	59
31.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 6 (de izquierda a derecha) . . . . .	59
32.	Esquema del circuito 7 con red RLC multirango acoplada de orden 4 . . . . .	60
33.	Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 7 (de izquierda a derecha) . . . . .	60

---

## Índice de cuadros

---

1.	Analogía de esfuerzo/flujo en distintos dominios físicos . . . . .	14
2.	Resumen de los circuitos seleccionados para el estudio . . . . .	21
3.	Resultados de identificación para los siete circuitos . . . . .	41

El presente trabajo aplica la metodología *linear graph modeling* (LGM) al modelado, análisis y validación experimental de sistemas eléctricos, con el propósito de establecer una base teórica y práctica para el desarrollo futuro de un simulador universal de sistemas dinámicos. El LGM, derivado de la teoría de grafos energéticos formulada por Paynter y Rosenberg, permite representar la transferencia y conservación de energía entre los elementos de un sistema mediante una estructura topológica que separa el comportamiento constitutivo de la configuración física. A partir de esta representación se derivan las ecuaciones de estado en forma matricial, lo que facilita el análisis dinámico y la comparación directa entre distintos dominios físicos.

En este estudio se seleccionaron siete circuitos eléctricos representativos, incluyendo configuraciones RC, RL, RLC y filtros activos, los cuales fueron modelados mediante grafos lineales, simulados en MATLAB/Simulink y LTspice, y posteriormente implementados y medidos físicamente. Las mediciones se realizaron con instrumentos Tektronix, y los datos adquiridos fueron exportados en formato .csv para su procesamiento y análisis en MATLAB. A partir de las respuestas obtenidas se emplearon las herramientas Model Linearizer y System Identification Toolbox para estimar la topología del sistema a partir de ellos, verificando así la coherencia estructural y dinámica del método.

Los resultados experimentales mostraron concordancia entre las respuestas simuladas, teóricas y medidas, con diferencias dentro del margen esperado para sistemas físicos no ideales. Se comprobó que el LGM permite representar de manera precisa la dinámica de sistemas eléctricos lineales y establecer equivalencias energéticas con sistemas mecánicos de masa, resorte y amortiguador. Asimismo, se exploró la capacidad del método para aproximar modelos a partir de datos experimentales, logrando representar la dinámica observada sin reconstruir completamente la estructura del sistema. Como resultado, se consolida una base teórica y experimental que demuestra la versatilidad del *linear graph modeling* como herramienta unificadora para el modelado multidominio, constituyendo un paso esencial hacia la implementación de un simulador universal de sistemas dinámicos.

**Palabras clave:** *linear graph modeling* (LGM), sistemas dinámicos, modelado multidominio, ecuaciones de estado, simulador universal.

This work applies the *Linear Graph Modeling* (LGM) methodology to the modeling, analysis, and experimental validation of electrical systems, with the aim of establishing a theoretical and practical basis for the future development of a universal simulator of dynamic systems. LGM, derived from the energy-based graph theory formulated by Paynter and Rosenberg, represents the transfer and conservation of energy among the elements of a system through a topological structure that separates constitutive behavior from physical configuration. From this representation, state-space equations are derived in matrix form, which facilitates dynamic analysis and enables direct comparison across different physical domains.

Seven representative electrical circuits were selected for this study, including RC, RL, RLC configurations and active filters. These circuits were modeled using linear graphs, analyzed through simulations in MATLAB/Simulink and LTspice, and subsequently implemented and tested experimentally. Measurements were performed with Tektronix instruments, and the acquired data were exported in .csv format for processing and analysis in MATLAB. Based on the obtained responses, the Model Linearizer and System Identification Toolbox tools were used to estimate system topology from data, thereby verifying the structural and dynamic consistency of the proposed method.

The experimental results showed close agreement among simulated, theoretical, and measured responses, with discrepancies remaining within the expected range for non-ideal physical systems. It was verified that LGM accurately represents the dynamics of linear electrical systems and establishes energetic equivalences with mechanical mass-spring-damper systems. Furthermore, the ability of the method to approximate models directly from experimental data was explored, capturing the observed dynamics without fully reconstructing the internal structure of the system. As a result, a theoretical and experimental foundation is consolidated that demonstrates the versatility of *Linear Graph Modeling* as a unifying tool for multi-domain modeling, constituting an essential step toward the implementation of a universal simulator of dynamic systems.

**Keywords:** linear graph modeling (LGM), dynamic systems, multi-domain modeling, state-space equations, universal simulator.

El modelado dinámico de sistemas físicos constituye una herramienta esencial para comprender, predecir y validar el comportamiento de los circuitos eléctricos. Entre los distintos enfoques existentes, el método de *linear graph modeling* (LGM) ofrece una forma estructurada de representar las relaciones entre elementos mediante la topología del sistema, destacando por su coherencia energética y su capacidad de describir las variables de estado de forma directa.

El presente trabajo se desarrolla en el campo del análisis y modelado de circuitos eléctricos lineales, con el objetivo de comparar la formulación teórica obtenida a través del método LGM frente al método convencional basado en las leyes de Kirchhoff y en ecuaciones diferenciales. La finalidad principal es analizar la correspondencia entre ambos modelos y determinar cómo las variaciones en los componentes físicos influyen en el comportamiento del sistema.

Además del desarrollo teórico, el estudio incluye una etapa de validación experimental, en la cual se implementan y miden los circuitos en laboratorio. Estas pruebas permiten contrastar los resultados analíticos y computacionales con mediciones reales, verificando la precisión del modelo en condiciones prácticas. A partir de ello, se pretende comprobar que los parámetros obtenidos mediante el LGM son coherentes con la respuesta física del sistema ante variaciones en resistencias.

El procedimiento metodológico abarca tres fases: primero, la formulación matemática mediante la deducción de las matrices de espacio de estado; segundo, la simulación computacional de las respuestas temporales empleando software especializado como MATLAB, Simulink y LTspice; y finalmente, la ejecución de pruebas físicas donde se realiza la medición y comparación de resultados. Este proceso permite integrar teoría, simulación y experimentación bajo un mismo marco de análisis.

Los resultados obtenidos muestran la relación directa entre la estructura del circuito y la forma de sus ecuaciones de estado, así como la consistencia entre el comportamiento teórico y el experimental. En particular, se observa que el método LGM facilita la interpretación

energética del sistema y proporciona una base generalizable para el análisis de distintos tipos de configuraciones.

En conjunto, se busca evidenciar que el *linear graph modeling* representa una herramienta didáctica y analítica robusta para el estudio de sistemas eléctricos lineales, permitiendo una transición fluida entre el análisis teórico, la simulación numérica y la comprobación experimental. De esta manera, se promueve una comprensión más integral del comportamiento dinámico de los circuitos y de los principios que gobiernan su respuesta ante variaciones de parámetros.

## 2.1. Sistemas dinámicos

El estudio de los sistemas dinámicos proporciona una base teórica fundamental para comprender y modelar la evolución temporal de sistemas físicos. Estos sistemas se describen mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que relacionan las tasas de cambio de variables de estado con sus valores actuales y entradas externas. La representación en espacio de estados es una de las herramientas más utilizadas en este contexto, ya que permite expresar de forma compacta y estructurada tanto el comportamiento interno del sistema como sus interacciones con el entorno. A partir de esta formulación, es posible analizar propiedades como la estabilidad, la controlabilidad y la observabilidad, esenciales para evaluar la respuesta dinámica del sistema y modificar su comportamiento [1].

Los métodos contemporáneos incluyen además el diseño de controladores óptimos, técnicas para la linealización de sistemas no lineales y el uso de herramientas de simulación como MATLAB y Simulink para la implementación de los modelos, permitiendo representar visualmente los sistemas y realizar simulaciones para estudiar su comportamiento. El análisis de sistemas dinámicos, más allá de su formulación matemática, promueve una visión estructural y sistémica, en la que las propiedades físicas y topológicas del sistema determinan su evolución en el tiempo. Este enfoque es particularmente relevante en el contexto del modelado físico, donde se busca mantener correspondencia entre la estructura del modelo y la del sistema real. Esta correspondencia es también crucial para metodologías gráficas como los grafos lineales [2, 3].

## 2.2. La teoría del *linear graph modeling*

El *linear graph modeling* (LGM) es una metodología gráfica para el modelado de sistemas dinámicos basada en grafos orientados, en los cuales los nodos representan variables y las ramas representan relaciones físicas o ecuaciones elementales entre ellas. A partir del grafo

lineal, se pueden derivar directamente las ecuaciones de estado del sistema en su forma estándar, conservando de forma explícita la estructura del sistema.

El procedimiento general de esta técnica permite seleccionar las variables de estado a partir del grafo, formular las ecuaciones elementales y estructurales (compatibilidad y continuidad), y derivar matrices que describen completamente el comportamiento del sistema. Este proceso facilita el paso de una descripción física a un modelo matemático sin requerir reconstrucción algebraica completa, lo cual es particularmente útil en entornos donde se desea automatizar el modelado o verificar propiedades estructurales directamente a partir de la topología [4, 5].

Esta metodología es poderosa porque se puede aplicar a sistemas de múltiples dominios físicos (eléctrico, mecánico, térmico), y permite una representación sistemática de la estructura del sistema. Además, la selección de un conjunto base de ramas independientes (árbol del grafo) facilita la identificación de variables de estado y reduce la complejidad algebraica del modelo [6, 7]. En comparación con otras metodologías como los diagramas de bloques o las ecuaciones constitutivas puras, el *linear graph modeling* proporciona una visión estructural clara y modular del sistema [8, 9].

### 2.3. Aplicación de la teoría de *linear graph modeling* en circuitos eléctricos

En el *linear graph modeling*, los componentes eléctricos, como resistencias, capacitores, inductores o fuentes, pueden representarse mediante ramas en un grafo, mientras que los nodos del grafo reflejan las interconexiones entre estos elementos. Esta estructura permite aplicar directamente principios de conservación, como las leyes de Kirchhoff, que se traducen en ecuaciones de continuidad de corriente y compatibilidad de voltaje [4], [10].

En los circuitos eléctricos, el *linear graph modeling* permite obtener el modelo dinámico a partir de su topología, integrando de forma sistemática las ecuaciones constitutivas de los componentes y las relaciones estructurales del circuito. Este enfoque facilita la identificación directa de variables de estado como tensiones e intensidades asociadas a capacitores e inductores, y mejora la coherencia del modelo para su análisis, simulación y validación experimental. En la práctica, este procedimiento ha demostrado ser especialmente eficiente para representar el comportamiento dinámico de redes eléctricas bajo distintas condiciones operativas [7], [8], [9].

### 2.4. *Linear graph modeling* en la simulación de sistemas eléctricos

El modelado y simulación de circuitos eléctricos ha experimentado una evolución significativa, pasando de enfoques centrados únicamente en ecuaciones diferenciales formuladas manualmente, hacia métodos que consideran explícitamente la estructura topológica del sistema. Esta transición ha respondido a la necesidad de representar de manera más clara,

modular y escalable el comportamiento dinámico de los sistemas eléctricos, especialmente en contextos donde la complejidad o el tamaño del circuito dificultan los métodos tradicionales [4], [7].

En este proceso evolutivo, el *linear graph modeling* ha surgido como una alternativa poderosa. Al basarse en una representación gráfica del sistema, esta metodología permite integrar de forma sistemática las ecuaciones constitutivas de los componentes eléctricos con las relaciones estructurales que derivan de su interconexión. Esto no solo simplifica la formulación del modelo dinámico, sino que también favorece su análisis, validación y posterior simulación en entornos computacionales especializados. En investigaciones recientes, estas ventajas han sido aprovechadas para construir bibliotecas reutilizables, generar código simbólico y evaluar el desempeño de sistemas eléctricos complejos mediante simulaciones estructuradas [7], [9], [11].

La representación estructurada de sistemas dinámicos se ha vuelto fundamental en el desarrollo de soluciones de ingeniería, especialmente cuando se busca mejorar la comprensión, análisis y diseño de sistemas físicos complejos. En particular, los circuitos eléctricos han sido tradicionalmente modelados a partir de ecuaciones diferenciales obtenidas manualmente, utilizando las leyes de Kirchhoff y relaciones constitutivas de sus componentes. Si bien este enfoque ha sido ampliamente utilizado, presenta limitaciones de escalabilidad y es susceptible a errores cuando se trabaja con sistemas de mayor complejidad o que integran múltiples dominios físicos.

La teoría de *linear graph modeling* surge como una alternativa poderosa para representar de manera ordenada tanto la estructura como el comportamiento de un sistema mediante grafos, lo cual facilita la trazabilidad del modelo y la derivación automatizada de ecuaciones de estado. Además, su carácter multidominio habilita la integración de subsistemas eléctricos, mecánicos, térmicos e hidráulicos bajo un marco común, lo que lo convierte en una herramienta particularmente útil para el análisis de sistemas interconectados.

El presente trabajo se enmarca en un proyecto más amplio que busca establecer las bases para el desarrollo de un simulador universal de sistemas dinámicos, utilizando representaciones gráficas como núcleo común. En este contexto, el trabajo se fundamenta en el modelado de circuitos eléctricos mediante *linear graph modeling*, con un enfoque experimental que incluye el diseño de prototipos, la toma de datos y la validación de los modelos derivados. Esta aplicación concreta no solo permitirá evaluar la eficacia del enfoque en un dominio específico, sino también establecer una metodología replicable para su extensión a otros tipos de sistemas físicos.

La implementación del *linear graph modeling* en el contexto de circuitos eléctricos representa un avance significativo hacia la creación de un entorno de simulación modular, escalable y multidominio. Su desarrollo contribuirá al fortalecimiento de herramientas académicas y tecnológicas aplicables tanto en la enseñanza como en la investigación avanzada en ingeniería.

### 4.1. Objetivo general

Analizar la aplicación de la teoría de *linear graph modeling* en la identificación y análisis de sistemas dinámicos representados mediante circuitos eléctricos como base para el futuro desarrollo de un simulador universal.

### 4.2. Objetivos específicos

- Seleccionar y diseñar topologías de circuitos eléctricos que permitan aplicar de forma efectiva los principios de *linear graph modeling*.
- Examinar la relación entre la estructura física de un circuito eléctrico y su representación matemática mediante la teoría de *linear graph modeling* para establecer criterios reutilizables en otros dominios físicos.
- Implementar y medir experimentalmente circuitos eléctricos para obtener datos relevantes sobre su comportamiento dinámico que puedan utilizarse para la validación de la metodología *linear graph modeling*.
- Procesar y analizar los datos obtenidos experimentalmente para validar los modelos estructurales derivados de la teoría de *linear graph modeling*.

---

## Definición del problema

---

Esta investigación comprende el análisis, modelado y validación experimental de circuitos eléctricos lineales utilizando dos metodologías complementarias: el método convencional basado en las leyes de Kirchhoff y el método de *Linear Graph Modeling* (LGM). Se abordaron configuraciones de hasta cuarto orden que incluyan elementos pasivos —resistencias, inductancias y capacitancias— y, en algunos casos, amplificadores operacionales, con el propósito de evaluar la correspondencia entre los modelos teóricos, las simulaciones computacionales y los resultados experimentales.

El estudio se desarrolló en tres fases principales. En primer lugar, se realizó la formulación teórica de los sistemas mediante la deducción de ecuaciones diferenciales y la obtención de las matrices de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  a partir de cada enfoque. En segundo lugar, se llevaron a cabo simulaciones en MATLAB, Simulink y LTspice para analizar la respuesta dinámica de los circuitos ante señales de prueba, verificando la ubicación de los polos y el comportamiento transitorio del sistema. Finalmente, se implementaron los circuitos físicamente en laboratorio para realizar mediciones directas de voltaje y corriente, con el fin de comparar las respuestas reales con las predicciones obtenidas teóricamente y por simulación.

Este trabajo se enfoca en el análisis de sistemas lineales de baja complejidad y en condiciones estacionarias. No se consideraron efectos no lineales, pérdidas por temperatura, saturación magnética ni ruido electrónico, ya que el objetivo principal es validar la correspondencia entre el modelo matemático, la simulación y la medición física en condiciones ideales. Tampoco se abordaron diseños de control o compensación activa, limitando el estudio a la respuesta natural y forzada de los sistemas.

Los resultados obtenidos permitieron determinar el grado de equivalencia entre los métodos analíticos, identificar ventajas topológicas y estructurales del LGM, y establecer una metodología reproducible para el análisis experimental de circuitos eléctricos. De manera adicional, se documentó la influencia de la variación de componentes sobre la estabilidad y el amortiguamiento del sistema, con el propósito de fortalecer la comprensión del vínculo entre el modelo matemático y el comportamiento físico.

En síntesis, el alcance de este proyecto abarca la formulación teórica, la simulación computacional y la verificación experimental de circuitos eléctricos lineales, demostrando la coherencia entre el método LGM y el enfoque tradicional, y estableciendo una base metodológica para futuras investigaciones orientadas al modelado topológico y la simulación interdisciplinaria de sistemas dinámicos.

## 6.1. Fundamentos del análisis de circuitos eléctricos

El análisis de circuitos eléctricos lineales se fundamenta en las leyes de conservación de la energía y la carga eléctrica, las cuales describen cómo la energía se distribuye, almacena y disipa dentro de una red eléctrica. Estas leyes se formalizan en las leyes de Kirchhoff: la ley de corriente de Kirchhoff (KCL), que establece que la suma algebraica de las corrientes que entran a un nodo es igual a la suma de las que salen, y la ley de voltaje de Kirchhoff (KVL), que postula que la suma de las diferencias de potencial en cualquier lazo cerrado es igual a cero [1]. En conjunto, estas leyes garantizan la conservación de la energía eléctrica y constituyen la base para el desarrollo de modelos matemáticos que describen el comportamiento dinámico de los sistemas eléctricos.

Los circuitos eléctricos se componen principalmente de tres tipos de elementos pasivos —resistores, inductores y capacitores— cuyas relaciones entre las variables de voltaje y corriente se denominan relaciones constitutivas. Dichas relaciones permiten establecer el vínculo entre el esfuerzo eléctrico (voltaje) y el flujo eléctrico (corriente) para cada elemento ideal:

$$\text{resistor: } v(t) = R i(t), \quad \text{inductor: } v(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad \text{capacitor: } i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

Cada uno de estos elementos cumple una función energética específica: el resistor disipa energía en forma de calor, el inductor almacena energía en su campo magnético y el capacitor la almacena en su campo eléctrico. En términos energéticos, la energía instantánea asociada a estos dispositivos puede expresarse como:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t), \quad W_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t),$$

lo que evidencia su capacidad de almacenamiento temporal y la naturaleza reversible de la energía en sistemas lineales sin pérdidas.

A partir de estas relaciones y las leyes de Kirchhoff, es posible deducir ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico de los circuitos. En un circuito RLC de segundo orden —compuesto por una fuente, una resistencia, una inductancia y una capacitancia— la combinación de las ecuaciones de KCL y KVL da origen a una ecuación diferencial ordinaria (EDO) del tipo:

$$LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = V_{in}(t),$$

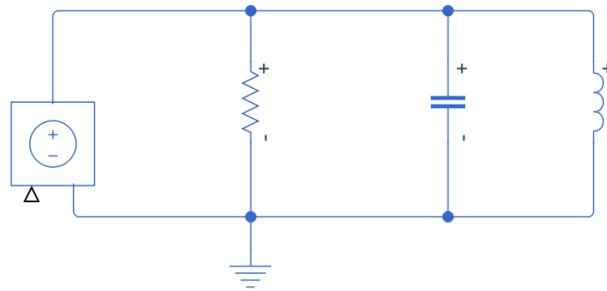
cuyos coeficientes dependen directamente de los valores físicos de los componentes. Las raíces de la ecuación característica asociada determinan los polos del sistema, los cuales definen la naturaleza de la respuesta temporal:

- Si las raíces son reales y distintas ( $\zeta > 1$ ): el sistema es sobreamortiguado.
- Si las raíces son reales e iguales ( $\zeta = 1$ ): el sistema es críticamente amortiguado.
- Si las raíces son complejas conjugadas ( $\zeta < 1$ ): el sistema es subamortiguado.

En todos los casos, la frecuencia natural no amortiguada está dada por  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , y el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ . Estos parámetros son esenciales para analizar la estabilidad, la velocidad de respuesta y el comportamiento transitorio de los circuitos.

El estudio de la respuesta temporal de los circuitos RLC como el presentado en la Figura 1 permite comprender cómo la energía fluye entre los componentes almacenadores (L y C) y el disipador (R). Esta energía oscila entre los campos magnético y eléctrico hasta que las pérdidas resistivas hacen que el sistema alcance el equilibrio. Esta interpretación energética resulta especialmente útil al vincular los modelos eléctricos con sus análogos mecánicos, como sistemas masa-resorte-amortiguador, los cuales se describen mediante ecuaciones de la misma forma matemática.

**Figura 1.** Ejemplo de circuito RLC de segundo orden



Nota. La imagen muestra el esquema del circuito RLC utilizado para ilustrar la aplicación de las leyes de Kirchhoff. Elaboración propia.

## 6.2. Modelo LTI en espacio de estados

Las ecuaciones diferenciales de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) pueden organizarse en forma matricial como [12, 13]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t),$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado (por ejemplo,  $v_C(t)$  e  $i_L(t)$ ),  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas (fuentes),  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de salidas (variables medidas), y  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  son matrices de dimensiones compatibles [2, 13, 14]. El término  $\mathbf{D}$  modela la transmisión directa o acoplamiento instantáneo entre entrada y salida; en circuitos puramente reactivos y con salidas “a través” de estados, típicamente  $\mathbf{D} = 0$  [4, 5, 13].

**Significado físico.** El modelo de espacio de estados proporciona una descripción estructurada de la dinámica interna del sistema. Cada matriz tiene una interpretación energética específica [4, 8, 13]:

- **A:** captura las interacciones internas y las pérdidas resistivas;
- **B:** representa cómo las entradas inyectan energía al sistema;
- **C:** determina las variables de salida observables;
- **D:** introduce acoplamientos directos entre entrada y salida.

Este enfoque permite analizar estabilidad, controlabilidad y observabilidad de forma general y unificada, sin depender del número de nodos o mallas del circuito [12, 15].

**Elección de los estados.** En circuitos eléctricos lineales, los estados más convenientes son los voltajes en capacitores y las corrientes en inductores, pues reflejan las energías almacenadas en los campos eléctrico y magnético. Esta elección produce modelos de primer orden y coherentes con la descripción energética de los sistemas físicos [4, 8, 10].

**Modelo MIMO y consistencia dimensional.** El modelo LTI es aplicable tanto a sistemas SISO como MIMO [2]. Las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  conservan coherencia dimensional entre voltajes (V), corrientes (A) y potencias (W), lo que facilita la validación experimental mediante mediciones de laboratorio y simulaciones computacionales [8, 13].

**Ejemplo de formulación.** Para el circuito RLC en paralelo mostrado en la Figura 1, con entrada  $u(t)$  proveniente de una fuente de voltaje y salida  $y(t) = v_C(t)$ , se define el vector de estado utilizando las variables dinámicas naturales del sistema: el voltaje en el capacitor y la corriente en el inductor:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix},$$

y las ecuaciones en espacio de estados quedan expresadas como:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t), \quad y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{D} = 0.$$

El sistema es estable siempre que  $R > 0$ ,  $L > 0$ ,  $C > 0$ , y los polos se determinan a partir de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  [12]. Este ejemplo constituye la base para extender el análisis hacia modelos derivados mediante el método de *linear graph modeling*, donde las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  se obtienen directamente de la topología del grafo y de las relaciones constitutivas de los elementos [13].

### 6.3. Correspondencia entre dominios físicos en *linear graph modeling*

El método *linear graph modeling* (LGM) se fundamenta en la representación energética de los sistemas físicos mediante pares de variables denominadas *esfuerzo* (*across variable*) y *flujo* (*through variable*). Estas describen cómo la energía se transfiere, almacena o disipa dentro de un sistema, y su producto instantáneo  $P = e \times f$  representa la potencia [8]. La formulación del LGM permite unificar distintos dominios físicos —eléctrico, mecánico, térmico o hidráulico— bajo un mismo marco matemático basado en la conservación de energía [8, 10].

**Fundamento teórico y correspondencia energética.** Todo sistema físico conserva la potencia en sus interconexiones, lo que implica que la suma de potencias en cada nodo o lazo de un grafo debe ser nula [8]. Esta propiedad generaliza las leyes de Kirchhoff a cualquier dominio energético: la compatibilidad (análoga a la ley de voltaje de Kirchhoff) asegura que los esfuerzos a lo largo de un lazo cerrado sumen cero, mientras que la continuidad (análoga a la ley de corriente de Kirchhoff) garantiza que la suma de flujos que entran y salen de un nodo también sea cero. Esta generalización constituye la base topológica del LGM, donde los nodos representan puntos de intercambio de energía y las ramas, los elementos físicos que la transportan o almacenan [10, 13].

**Analogía entre dominios.** La representación por variables de esfuerzo y flujo permite establecer correspondencias directas entre dominios energéticos [8, 10]. En el dominio eléctrico, el voltaje actúa como esfuerzo y la corriente como flujo; en el dominio mecánico traslacional, la fuerza equivale al esfuerzo y la velocidad al flujo; y en el dominio térmico, la temperatura cumple el rol de esfuerzo mientras el flujo de calor corresponde al flujo. Estas relaciones se resumen en el Cuadro 1, donde se aprecia que los principios físicos subyacentes —almacenamiento, disipación y transferencia de energía— son equivalentes en todos los casos [8].

**Cuadro 1.** Analogía de esfuerzo/flujo en distintos dominios físicos

Dominio	Esfuerzo ( <i>across</i> )	Flujo ( <i>through</i> )	Almacenamiento
Eléctrico	Voltaje (V)	Corriente (A)	$C$ (cap.), $L$ (ind.)
Mecánico (trasl.)	Fuerza (N)	Velocidad (m/s)	Masa, Resorte
Mecánico (rot.)	Par (N·m)	Vel. angular (rad/s)	Inercia, Resorte torsional
Térmico	Temperatura (K)	Flujo de calor (W)	Capacidad térmica
Hidráulico	Presión (Pa)	Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Compresibilidad/Inercia del fluido

Nota. El cuadro resume la analogía entre variables de esfuerzo y flujo empleadas en la formulación energética de sistemas físicos, base del enfoque de modelado mediante LGM. Elaboración propia basada en [4, 5].

**Equivalencia estructural.** La utilidad del LGM radica en que las ecuaciones diferenciales que describen sistemas de diferentes dominios adoptan formas matemáticas equivalentes. Por ejemplo, un circuito eléctrico RLC y un sistema mecánico masa–resorte–amortiguador se describen mediante ecuaciones de segundo orden formalmente idénticas:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t),$$

$$M \frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) + K \int v(t) dt = F(t),$$

Nota. La letra  $v$  denota voltaje en el sistema eléctrico y velocidad en el mecánico; el contexto de cada ecuación permite distinguir ambas magnitudes sin ambigüedad.

donde  $(v, i)$  y  $(F, v)$  constituyen pares esfuerzo–flujo en dominios diferentes. Esta equivalencia demuestra que la respuesta dinámica de sistemas eléctricos y mecánicos puede analizarse mediante el mismo conjunto de herramientas matemáticas, lo que favorece su integración en modelos multidominio [4, 10].

**Aplicación a la modelación multidominio.** A partir de esta correspondencia, el LGM proporciona una estructura formal para representar sistemas mixtos mediante matrices que relacionan topología y energía [13]. Su integración con entornos computacionales modernos, como MATLAB/Simulink y Simscape, permite construir modelos híbridos donde coexisten subsistemas eléctricos, mecánicos o térmicos bajo un mismo formalismo de ecuaciones de estado [16]. De esta forma, la formulación topológica basada en el principio de potencia mantiene la coherencia entre dominios y facilita el desarrollo de metodologías de simulación generalizadas.

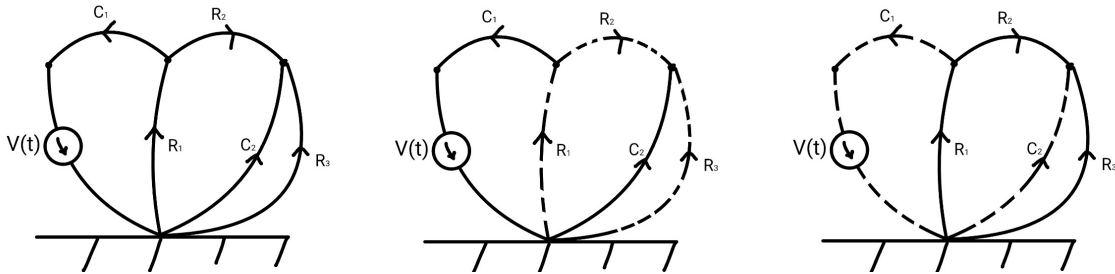
## 6.4. Aplicación del modelado gráfico lineal (LGM) a sistemas eléctricos y físicos

La correspondencia energética establecida en la sección anterior permite aplicar el *linear graph modeling* (LGM) al análisis estructural de sistemas eléctricos y de otros dominios físicos. Este enfoque se basa en representar el sistema mediante un grafo lineal, donde los

nodos simbolizan puntos de conexión o conservación de energía y las ramas representan los elementos que la transfieren o almacenan [10]. La estructura topológica del grafo define la relación entre las variables de esfuerzo y flujo, permitiendo formular las ecuaciones del sistema de forma sistemática y coherente con su configuración física [13].

**Compatibilidad (KVL).** En el grafo asociado a un sistema, se le denomina árbol a un subconjunto de ramas que conecta todos los nodos sin formar lazos cerrados; las ramas que no pertenecen al árbol se conocen como *links*. La Figura 2 ilustra, a partir del circuito considerado, las tres representaciones fundamentales empleadas en el análisis topológico mediante LGM: el grafo lineal, el árbol normal y el coárbol. En el grafo lineal (izquierda) se muestran todas las ramas del sistema, cada una asociada a un elemento físico. El árbol normal (centro) corresponde a un subconjunto de ramas sin lazos, seleccionado de manera que conecta todos los nodos del grafo; las ramas pertenecientes al árbol se representan con líneas continuas, mientras que los enlaces restantes se indican con líneas punteadas. Finalmente, el coárbol (derecha) resalta los enlaces o *links* que, al añadirse al árbol, generan los lazos fundamentales del sistema. Esta estructura permite visualizar directamente las variables asociadas a las ramas del árbol y a los *links*, así como los lazos fundamentales que subyacen a la ley de voltaje de Kirchhoff.

**Figura 2.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al sistema analizado de izquierda a derecha



Nota. Elaboración propia.

Cada rama externa al árbol —es decir, cada *link*— forma un lazo fundamental con un conjunto de ramas del árbol. Según la ley de voltaje de Kirchhoff (KVL), la suma algebraica de los voltajes en ese lazo debe ser cero. En el formalismo del LGM, esto implica que el voltaje de cada *link* está determinado por una combinación lineal de los voltajes de las ramas del árbol que integran dicho lazo. En forma matricial, esta relación se expresa como

$$\mathbf{v}_l = \mathbf{B}_f \mathbf{v}_t,$$

donde  $\mathbf{v}_l$  representa el vector de voltajes de los *links*,  $\mathbf{v}_t$  el vector de voltajes de las ramas del árbol, y  $\mathbf{B}_f$  es la matriz de lazos fundamentales que codifica la estructura topológica del sistema [13].

**Continuidad (KCL).** De modo dual, si se corta una rama del árbol se genera un corte fundamental por el cual debe conservarse la corriente total. Según la ley de corriente

de Kirchhoff (KCL), la suma de corrientes que entran y salen de un nodo es cero, lo que implica que la corriente en una rama del árbol puede expresarse como una combinación lineal de las corrientes que circulan por los *links*. A partir de la estructura mostrada en la Figura 2, las corrientes de las ramas del árbol pueden escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{i}_t = \mathbf{D}_f \mathbf{i}_l,$$

donde  $\mathbf{i}_t$  corresponde al vector de corrientes de las ramas del árbol,  $\mathbf{i}_l$  al vector de corrientes de los *links*, y  $\mathbf{D}_f$  es la matriz de cortes fundamentales [13].

**Aplicación práctica.** En sistemas eléctricos, esta formulación permite construir de manera sistemática las ecuaciones de compatibilidad y continuidad a partir de la topología del circuito, sin depender del número de nodos o mallas [13]. El mismo procedimiento puede aplicarse a sistemas mecánicos, térmicos o hidráulicos, conservando la coherencia energética gracias a la definición de pares esfuerzo–flujo [10]. De este modo, el LGM se convierte en una herramienta de modelado estructural que traduce la configuración física del sistema en un conjunto de ecuaciones en espacio de estados, adecuadas para análisis computacional y simulación.

## 6.5. Del grafo lineal al modelo en espacio de estados

Una vez definido el grafo lineal que representa al sistema físico, cada rama se asocia con un elemento ideal caracterizado por una relación constitutiva —resistiva, inductiva, capacitiva o de fuente— que vincula las variables de esfuerzo y flujo. La estructura topológica del grafo, determinada por la elección del árbol y los *links*, establece qué variables son independientes y cuáles se derivan a partir de las leyes de compatibilidad y continuidad, equivalentes a las leyes de Kirchhoff [13].

**Construcción del modelo.** El proceso de obtención del modelo dinámico a partir del grafo lineal sigue una secuencia sistemática:

1. Los voltajes de los *links* se expresan en función de los voltajes de las ramas del árbol, conforme a la condición de compatibilidad (KVL), mediante la matriz de lazos fundamentales.
2. Las corrientes de las ramas del árbol se expresan en función de las corrientes de los *links*, de acuerdo con la condición de continuidad (KCL), mediante la matriz de cortes fundamentales.
3. Las ecuaciones constitutivas de los elementos almacenadores (capacitores e inductores) y disipativos (resistores) se incorporan para definir las relaciones dinámicas entre esfuerzo y flujo.

Al combinar estas expresiones se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden que describen la evolución temporal de las variables de estado, las cuales

representan la energía almacenada en el sistema [13]. El conjunto mínimo de estados suele elegirse como:

$$\mathbf{x} = [v_{C_1}, v_{C_2}, \dots, i_{L_1}, i_{L_2}, \dots]^\top,$$

donde los voltajes de los capacitores y las corrientes de los inductores capturan la dinámica energética del sistema [8, 13].

**Formulación en espacio de estados.** Reorganizando las ecuaciones obtenidas del grafo se llega a la representación matricial estándar de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u},$$

donde:

- **A** contiene la información dinámica interna del sistema, determinada por las interconexiones entre elementos almacenadores y disipativos;
- **B** describe cómo las fuentes de entrada afectan a los estados;
- **C** define las combinaciones de estados que producen las salidas medibles;
- **D** modela la transmisión directa entre entrada y salida cuando existe acoplamiento instantáneo.

Las matrices **A**, **B**, **C**, **D** derivan directamente de la topología del grafo y de los parámetros físicos de los componentes, garantizando una correspondencia estructural entre el modelo matemático y el sistema real [13].

**Ventajas del enfoque LGM.** A diferencia del análisis tradicional basado en nodos o lazos, el enfoque de *linear graph modeling* separa explícitamente la información topológica —contenida en las matrices de lazos y cortes— de la información física, representada por las ecuaciones constitutivas de los elementos [13]. Esta separación aporta varias ventajas:

- Facilita la automatización del modelado y la simulación, al permitir que la topología se traduzca directamente en ecuaciones simbólicas.
- Favorece la modularidad y reutilización de subsistemas, dado que la descripción topológica puede mantenerse invariante frente a cambios en los parámetros.
- Extiende el mismo formalismo a diferentes dominios energéticos (eléctrico, mecánico, térmico o hidráulico), manteniendo coherencia matemática y energética [10].

Este procedimiento convierte al LGM en una herramienta poderosa para la obtención automática de modelos en espacio de estados a partir de la estructura física del sistema, lo cual constituye el fundamento teórico del desarrollo de simuladores universales en entornos como MATLAB/Simulink y Simscape.

## 6.6. Obtención teórica y validación topológica a partir de datos experimentales

El modelado de sistemas físicos no depende únicamente de su estructura conocida, sino también de la posibilidad de inferir su dinámica a partir de datos medidos. Desde una perspectiva teórica, los principios de identificación de sistemas permiten determinar las ecuaciones que describen un sistema lineal a partir de observaciones de entrada y salida [17]. Este proceso constituye el puente conceptual entre la medición experimental y la representación topológica que emplea el LGM [13]. A través de esta integración, se valida si las dinámicas observadas en las mediciones son coherentes con la estructura energética deducida mediante LGM.

### 6.6.1. Fundamento teórico de la identificación

En un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI), la relación entre una señal de entrada  $u(t)$  y su respuesta  $y(t)$  puede escribirse como

$$y(t) = (g * u)(t) + \eta(t),$$

donde  $g(t)$  es la respuesta impulsiva del sistema y  $\eta(t)$  modela ruido o perturbaciones no representadas. Al aplicar la transformada de Laplace, esta relación se expresa como

$$Y(s) = G(s)U(s) + \eta(s),$$

donde  $G(s)$  es la función de transferencia. La estimación de  $G(s)$  o de su forma equivalente en espacio de estados ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ) consiste en encontrar el modelo que mejor reproduce las observaciones bajo criterios de mínima energía del error o máxima verosimilitud [17]. Este procedimiento, conocido como identificación de sistemas, permite derivar modelos aun cuando la estructura interna no es completamente conocida.

### 6.6.2. Vínculo entre el modelo identificado y la topología física

Los términos proporcionales, integrales y derivativos que aparecen en las ecuaciones diferenciales de un sistema eléctrico se asocian, respectivamente, con resistencias, capacitancias e inductancias [18]. Este paralelismo posibilita traducir el modelo matemático identificado hacia una representación topológica: las ecuaciones determinan interconexiones entre variables de esfuerzo y flujo y, por tanto, las ramas y nodos del grafo correspondiente [13, 17]. La literatura reciente muestra además que ciertas dependencias entre variables medidas permiten inferir parcialmente estructuras de red [19].

### 6.6.3. Representación del sistema identificado en el marco LGM

Una vez inferido el modelo dinámico, su equivalencia con la formulación del LGM se establece al expresar las relaciones esfuerzo–flujo mediante las matrices de compatibilidad y

continuidad. Así, el sistema puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u,$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  reflejan tanto la dinámica observada como las restricciones topológicas. Las entradas  $u(t)$  representan fuentes, los estados  $x(t)$  las variables de almacenamiento (voltajes en capacitores o corrientes en inductores) y las salidas  $y(t)$  las variables observables; esta correspondencia mantiene la coherencia energética del LGM.

Este capítulo presenta el proceso de selección y modelado de una familia de sistemas eléctricos representativos, con el objetivo de evaluar la aplicabilidad del enfoque *linear graph modeling* (LGM) en circuitos reales. Se describe la lógica seguida para elegir topologías que varían en orden dinámico, complejidad estructural y tipo de elementos, abarcando desde configuraciones pasivas hasta redes con amplificadores operacionales. Posteriormente, se desarrollan modelos dinámicos mediante dos enfoques: el método convencional basado en leyes de Kirchhoff y análisis nodal, y el enfoque estructural LGM, fundamentado en la topología del sistema. La comparación entre ambos métodos permite validar la consistencia del modelado por grafos y sienta las bases para su generalización multidominio en capítulos posteriores.

## 7.1. Selección de los sistemas eléctricos

El propósito de esta etapa fue evaluar si una familia de circuitos eléctricos, representativa de distintos niveles de complejidad topológica y funcional, puede modelarse mediante el enfoque *linear graph modeling* (LGM) y si las matrices de espacio de estados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  derivadas a partir de dicho enfoque coinciden con las obtenidas mediante el método clásico basado en las leyes de Kirchhoff y el análisis nodal [18]. La comparación permite validar la consistencia del modelado por grafos lineales tanto en sistemas pasivos como en configuraciones activas, siguiendo la formulación estructural propuesta por Rosenberg para sistemas interconectados [20]. Este enfoque es compatible con la representación multidominio empleada en la literatura moderna de sistemas dinámicos [4].

### 7.1.1. Criterios de selección y propósito de cada circuito

Los circuitos fueron seleccionados siguiendo consideraciones prácticas y metodológicas:

1. **Simplicidad inicial y comportamiento conocido:** los primeros sistemas corresponden a configuraciones RLC clásicas que permiten contrastar el modelado teórico con respuestas bien establecidas en el análisis de circuitos [18].
2. **Incremento progresivo del orden y de la complejidad funcional:** se avanza desde redes de segundo orden hasta configuraciones acopladas de cuarto orden e integradores activos, de modo que el método pueda evaluarse en distintas dinámicas.
3. **Facilidad de construcción y medición:** todos los sistemas se implementaron sobre un mismo protoboard utilizando componentes comerciales, lo que permitió obtener mediciones consistentes del voltaje en el nodo de interés (capacitor o salida del amplificador operacional).
4. **Coherencia estructural para LGM:** las topologías se eligieron de forma que mantuvieran una correspondencia clara entre ramas físicas y arcos del grafo, facilitando la construcción del modelo topológico.
5. **Consistencia experimental:** los circuitos fueron excitados con la misma señal base de escalón de 5 V, complementada con un escalón de 1 V para verificar la linealidad. En el Circuito 7 se emplearon varios periodos de onda cuadrada para capturar su comportamiento transitorio de mayor orden.

En cada circuito se modificó una única resistencia en décadas (10  $\Omega$ , 100  $\Omega$ , 1 k $\Omega$ , 10 k $\Omega$ , 100 k $\Omega$ ). En los sistemas pasivos y en el filtro pasabanda, el parámetro variable corresponde a la resistencia marcada en los esquemas; en los integradores se ajustó la resistencia de entrada y, en el integrador real, la resistencia en paralelo con el capacitor. La variable medida fue el voltaje en la terminal positiva del capacitor principal, excepto en los circuitos con amplificador operacional, donde se midió la salida  $v_o$ , en conformidad con las especificaciones del dispositivo [21].

El Cuadro 2 resume los siete sistemas considerados en el estudio.

**Cuadro 2.** Resumen de los circuitos seleccionados para el estudio

Circuito	Tipo	Orden	Variable medida
1	Red RLC en paralelo	2	$v_C$
2	RLC en paralelo con resistencia serie	2	$v_C$
3	Filtro pasabanda RC	2	$v_{C_2}$
4	Circuito con amplificador operacional	3	$v_o$
5	Integrador ideal con amplificador operacional	1	$v_o$
6	Integrador real (resistencia en paralelo con el capacitor)	1	$v_o$
7	Red RLC acoplada multirango	4	$v_C$

Nota. El cuadro sintetiza las características principales de los siete circuitos analizados, incluyendo su tipo, orden dinámico y la variable utilizada para la validación experimental. Elaboración propia.

Los esquemas completos de los Circuitos 1 al 6 se incluyen en el Anexo 13.3 en formato reducido, con el fin de no interrumpir la continuidad del texto principal. El Circuito 7 se presenta más adelante en detalle, dado que constituye el caso de mayor orden y complejidad en el estudio.

El Circuito 7 se eligió como caso principal por su mayor orden y grado de acoplamiento, integrando simultáneamente elementos resistivos, capacitivos e inductivos en múltiples lazos. Esto permite demostrar de manera completa la deducción del modelo tanto por el método convencional como mediante LGM, y establecer la relación estructural con los circuitos de menor complejidad.

## 7.2. Fundamentos del modelado aplicado

El análisis de los siete sistemas eléctricos seleccionados se desarrolló empleando dos enfoques complementarios: (i) el método convencional basado en las leyes de Kirchhoff, análisis nodal y formulación matricial; y (ii) el enfoque estructural mediante *linear graph modeling* (LGM), el cual deriva el modelo dinámico a partir de la conectividad del sistema y de sus relaciones topológicas [13], [20].

Ambos métodos describen el mismo comportamiento físico, pero difieren en su proceso de formulación. Mientras el análisis convencional se basa en ecuaciones de voltaje y corriente aplicadas directamente sobre el circuito, LGM construye el modelo desde una perspectiva estructural apoyada en árboles, enlaces, ecuaciones de *cutset* y *loop*, lo que permite evidenciar de manera explícita la contribución topológica de cada elemento.

El uso conjunto de los dos enfoques proporciona una base metodológica robusta: permite validar consistencia entre modelos, facilita el análisis comparativo entre redes de distinta complejidad y prepara el marco conceptual para la extensión multienergía presentada en el Capítulo 9.

### 7.2.1. Justificación del enfoque dual (convencional + LGM)

La decisión de emplear simultáneamente el método convencional y el enfoque LGM obedece a tres propósitos principales:

1. **Validación cruzada del modelo.** Comparar las matrices de estado obtenidas por ambos métodos permite verificar que la dinámica derivada es consistente y que no se introducen errores algebraicos o topológicos durante la formulación. Este punto es especialmente relevante en los circuitos de orden alto y en aquellos con acoplamientos resistivos y capacitivos múltiples.
2. **Escalabilidad y claridad estructural.** El método convencional puede tornarse más complejo conforme aumenta el orden del sistema. LGM, al operar a partir de la estructura del circuito, mantiene un proceso sistemático y escalable basado en criterios de selección del árbol, ecuaciones de *cutset* y ecuaciones de *loop*. Este enfoque es ade-

cuando no solo para redes eléctricas pasivas, sino también para topologías que incluyen amplificadores operacionales mediante la representación con *nullor* [22], [23].

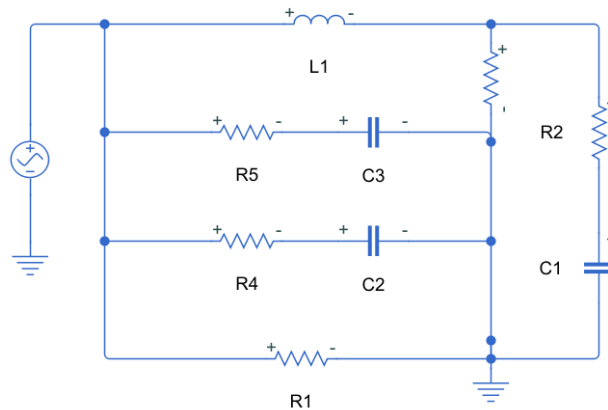
3. **Interpretación física y modularidad.** LGM evidencia explícitamente la relación topológica entre ramas, permitiendo visualizar cómo cada elemento contribuye al comportamiento dinámico. Esta perspectiva facilita la comparación entre circuitos de complejidad creciente y la extensión hacia modelos multienergía, como los estudiados posteriormente.

En conjunto, la aplicación del enfoque dual garantiza rigurosidad matemática, claridad estructural y capacidad de ampliación, aspectos fundamentales para la validación del Capítulo 8 y para la generalización interdisciplinaria desarrollada en el Capítulo 9.

### 7.2.2. Deducción completa del modelo del circuito 7 mediante el método convencional

El Circuito 7, mostrado en la Figura 3, representa el sistema de mayor orden dinámico dentro del conjunto estudiado y, por lo tanto, se utiliza como ejemplo principal del procedimiento clásico de modelado basado en las leyes de Kirchhoff y las relaciones constitutivas de los elementos [18], [22]. Esta deducción completa establece la referencia contra la cual se contrastará el modelo obtenido posteriormente mediante *linear graph modeling* (LGM).

**Figura 3.** Circuito 7 utilizado para la deducción del modelo convencional



Nota. La imagen muestra el esquema del Circuito 7 empleado en la obtención del modelo convencional. Elaboración propia.

Dicho circuito está compuesto por un inductor  $L$ , tres capacitores  $C_1, C_2, C_3$  y resistencias  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ , excitado por una fuente  $u(t) = V(t)$ . Se seleccionan como variables de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \iota_L(t) \\ v_{C_1}(t) \\ v_{C_2}(t) \\ v_{C_3}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = v_{C_3}(t).$$

Aquí  $\iota_L(t)$  denota la corriente en el inductor; se utiliza la letra griega iota en lugar de  $i_L(t)$  para evitar ambigüedad gráfica en la notación de la derivada temporal.

### Relaciones constitutivas

$$v_L = L \dot{\iota}_L = u - v_b, \quad (1)$$

$$C_1 \dot{v}_{C_1} = \frac{v_b - v_{C_1}}{R_2}, \quad C_2 \dot{v}_{C_2} = \frac{u - v_{C_2}}{R_4}, \quad C_3 \dot{v}_{C_3} = \frac{v_b - v_{C_3}}{R_5}. \quad (2)$$

### Ecuación de nodo en b

Aplicando KCL:

$$\iota_L = \frac{v_b}{R_3} + \frac{v_b - v_{C_1}}{R_2}. \quad (3)$$

Despejando  $v_b$ :

$$v_b = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \iota_L + \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_{C_1} \equiv \alpha \iota_L + \beta v_{C_1}. \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad \beta = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

### Ecuaciones de estado

#### Inductor

$$\dot{\iota}_L = \frac{1}{L} (u - \alpha \iota_L - \beta v_{C_1}).$$

#### Capacitor $C_1$

$$\dot{v}_{C_1} = \frac{R_3}{C_1(R_2 + R_3)} \iota_L - \frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} v_{C_1}.$$

Capacitor  $C_2$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{R_4 C_2} v_{C_2} + \frac{1}{R_4 C_2} u.$$

Capacitor  $C_3$

$$\dot{v}_{C_3} = \frac{\alpha}{R_5 C_3} v_L + \frac{\beta}{R_5 C_3} v_{C_1} - \frac{1}{R_5 C_3} v_{C_3}.$$

Forma matricial del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \quad y = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} u,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha}{\frac{L}{R_3}} & \frac{-\beta}{\frac{L}{1}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} & -\frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_5 C_3} & \frac{\beta}{R_5 C_3} & 0 & -\frac{1}{R_5 C_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{L}{R_3}} \\ \frac{1}{\frac{L}{1}} \\ \frac{1}{R_4 C_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ 1], \quad \mathbf{D} = 0.$$

Esta formulación constituye la referencia directa para la validación posterior del modelo obtenido mediante LGM, lo cual se desarrolla en la siguiente sección.

### 7.3. Aplicaciones del *linear graph modeling*

El enfoque de *Linear Graph Modeling* (LGM) se aplicó a los siete sistemas eléctricos con el objetivo de obtener modelos dinámicos directamente a partir de la estructura topológica de cada circuito. Este enfoque complementa al método convencional presentado en la Subsección 7.2.2, permitiendo verificar la consistencia entre ambas formulaciones y proporcionando una descripción estructural explícita de la dinámica del sistema [10], [13].

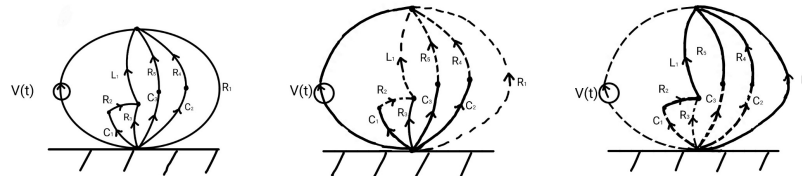
El circuito 7 se emplea como caso de referencia, por ser el de mayor orden y el que presenta el acoplamiento más completo entre elementos resistivos, capacitivos e inductivos. A partir de este caso se ilustra el procedimiento general de construcción del grafo, selección del árbol normal y obtención de las ecuaciones de estado. En las subsecciones posteriores se discute cómo este mismo proceso se extiende al resto de circuitos analizados.

### 7.3.1. Construcción del grafo y selección del árbol para el circuito 7

La Figura 4 muestra el grafo dirigido elaborado para el circuito 7, así como el árbol normal y el coárbol resultantes. El grafo fue digitalizado a partir del esquema eléctrico original y se construyó preservando la estructura topológica del circuito físico, asignando direcciones de rama de forma arbitraria pero consistente, tal como se recomienda en el modelado de sistemas mediante grafos lineales [10], [13].

Aunque los nodos no fueron etiquetados numéricamente, se mantuvo un nodo de referencia común (tierra), coherente con la formulación convencional presentada en la Sección 7.2.2. Esta consistencia permitió mantener el mismo criterio de orientación de variables en ambos enfoques y evitar ambigüedades durante la derivación de ecuaciones.

**Figura 4.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 7 (de izquierda a derecha)



Nota. La imagen muestra el grafo lineal, el árbol normal y el *coárbol* construidos para el Circuito 7. Elaboración propia.

El árbol normal del grafo se seleccionó manualmente siguiendo el criterio jerárquico de Rowell y Wormley, empleado en el modelado estructural de sistemas dinámicos [13]. En este trabajo se adoptó el siguiente orden de prioridad:

1. inclusión de la fuente de esfuerzo,
2. incorporación de los elementos almacenadores de esfuerzo (capacitores),
3. adición de resistencias necesarias para mantener la conectividad,
4. asignación de las ramas restantes al coárbol para evitar ciclos en el árbol.

De este modo, el árbol incluye la fuente, los tres capacitores y una resistencia que completa la conectividad sin cerrar lazos dentro del árbol. Las ramas que producirían ciclos fueron ubicadas en el coárbol, dando lugar a los lazos fundamentales del grafo. Para validar la selección se verificó que:

- el árbol tuviera exactamente  $n - 1$  ramas,
- todos los nodos permanecieran conectados,
- no existieran ciclos en el árbol,
- el coárbol generara los lazos fundamentales requeridos.

Adicionalmente, se compararon las matrices topológicas implícitas derivadas del grafo con las obtenidas indirectamente a partir del modelo convencional. La equivalencia entre ambas confirmó que la estructura del grafo, el árbol y el coárbol eran coherentes y adecuados para proceder con la formulación mediante LGM.

### Derivación algebraica de las ecuaciones de estado a partir del grafo

A partir del árbol y el coárbol de la Figura 4, la información topológica se organiza en *cutsets* fundamentales (asociados a ramas del árbol) y lazos fundamentales (asociados a ramas del coárbol). Sobre estas estructuras se proyectan las relaciones constitutivas de los elementos [13]:

$$e_L = L\dot{f}_L, \quad f_{C_k} = C_k\dot{e}_{C_k}, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad e_{R_j} = R_j f_{R_j}, \quad j \in \{1, \dots, 5\}, \quad e_V = u(t).$$

En lo que sigue se muestra cómo, a partir de los *loops* y *cutsets* del grafo, se obtienen las ecuaciones de estado que conducen al mismo modelo en espacio de estados presentado en la Sección 7.2.2.

**(a) Ecuación para la corriente del inductor  $i_L$ .** El lazo fundamental asociado a la rama de enlace del inductor recorre la fuente  $u(t)$ , la resistencia  $R_1$ , el propio inductor, la resistencia  $R_5$  y el capacitor  $C_3$ . La compatibilidad de esfuerzos se expresa como:

$$e_V - e_{R_1} - e_L - e_{R_5} - e_{C_3} = 0.$$

La estructura del grafo implica que la corriente que circula por estas ramas es la misma, de modo que  $f_{R_1} = f_L = i_L$ . Usando las relaciones constitutivas  $e_{R_1} = R_1 i_L$ ,  $e_L = L\dot{i}_L$  y sustituyendo el esfuerzo del nodo intermedio por  $v_b$  (voltaje común a  $R_2$ ,  $R_3$  y  $C_1$ ), la ecuación del lazo se reorganiza como:

$$L\dot{i}_L = u(t) - v_b.$$

El subgrafo formado por  $R_2$ ,  $R_3$  y  $C_1$  determina, mediante sus propios *loops* y *cutsets*, que el esfuerzo  $v_b$  puede expresarse como combinación lineal de  $i_L$  y  $v_{C_1}$ :

$$v_b = \alpha i_L + \beta v_{C_1}, \quad \alpha = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \quad \beta = \frac{R_3}{R_2 + R_3}.$$

Al sustituir esta relación se obtiene:

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} \left( u(t) - \alpha i_L - \beta v_{C_1} \right),$$

que corresponde a la primera fila del modelo en espacio de estados.

**(b) Ecuación para el voltaje del capacitor  $C_1$ .** El *cutset* fundamental asociado a la rama de árbol que contiene a  $C_1$  involucra las corrientes de  $C_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . La continuidad de flujo en este *cutset* impone:

$$f_{C_1} + f_{R_2} + f_{R_3} = 0.$$

En términos de variables eléctricas,  $f_{C_1} = C_1 \dot{v}_{C_1}$ ,  $f_{R_2} = (v_b - v_{C_1})/R_2$  y  $f_{R_3} = v_b/R_3$ . Sustituyendo y usando la expresión anterior de  $v_b$  se obtiene:

$$C_1 \dot{v}_{C_1} + \frac{v_b - v_{C_1}}{R_2} + \frac{v_b}{R_3} = 0,$$

lo que permite despejar:

$$\dot{v}_{C_1} = \frac{R_3}{C_1(R_2 + R_3)} i_L - \frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} v_{C_1},$$

que coincide con la segunda ecuación de estado del modelo.

**(c) Ecuación para el voltaje del capacitor  $C_2$ .** El capacitor  $C_2$  pertenece al árbol y se conecta a través de la rama resistiva  $R_4$ . El *cutset* fundamental asociado a  $C_2$  involucra únicamente la corriente del capacitor y la corriente de  $R_4$ , de modo que:

$$f_{C_2} + f_{R_4} = 0.$$

Con  $f_{C_2} = C_2 \dot{v}_{C_2}$  y  $f_{R_4} = (u(t) - v_{C_2})/R_4$  se obtiene:

$$C_2 \dot{v}_{C_2} + \frac{u(t) - v_{C_2}}{R_4} = 0,$$

$$\dot{v}_{C_2} = -\frac{1}{R_4 C_2} v_{C_2} + \frac{1}{R_4 C_2} u(t),$$

lo que explica la tercera fila de la matriz  $A$  y el tercer elemento de  $B$ .

**(d) Ecuación para el voltaje del capacitor  $C_3$ .** Finalmente, el *cutset* asociado a la rama de árbol que contiene a  $C_3$  involucra la corriente del capacitor y la corriente de la rama resistiva  $R_5$ . La continuidad de flujo dicta:

$$f_{C_3} + f_{R_5} = 0.$$

Usando  $f_{C_3} = C_3 \dot{v}_{C_3}$  y  $f_{R_5} = (v_b - v_{C_3})/R_5$ , con el mismo esfuerzo intermedio  $v_b = \alpha i_L + \beta v_{C_1}$ , se llega a:

$$C_3 \dot{v}_{C_3} + \frac{v_b - v_{C_3}}{R_5} = 0,$$

$$\dot{v}_{C_3} = \frac{\alpha}{R_5 C_3} i_L + \frac{\beta}{R_5 C_3} v_{C_1} - \frac{1}{R_5 C_3} v_{C_3}.$$

Las ecuaciones obtenidas en los incisos (a)–(d) pueden escribirse en forma compacta como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{L} & -\frac{\beta}{L} & 0 & 0 \\ \frac{R_3}{C_1(R_2 + R_3)} & -\frac{1}{C_1(R_2 + R_3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4 C_2} & 0 \\ \frac{\alpha}{R_5 C_3} & \frac{\beta}{R_5 C_3} & 0 & -\frac{1}{R_5 C_3} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ \frac{1}{R_4 C_2} \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

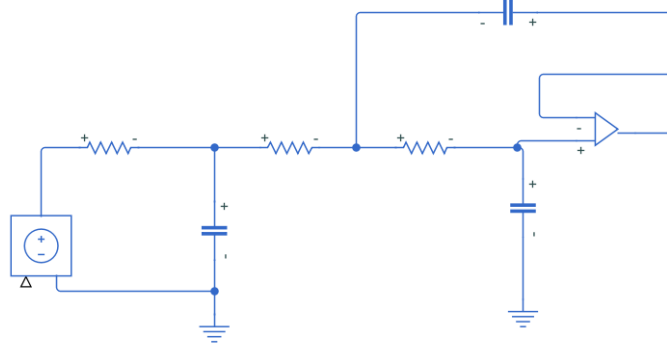
$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}, \quad \mathbf{D} = 0,$$

lo cual coincide con las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  deducidas por el método convencional en la Sección 7.2.2. De esta manera se evidencia que el enfoque LGM reconstruye el mismo modelo en espacio de estados a partir de los *cutsets* y lazos del grafo, utilizando como punto de partida únicamente la estructura topológica del sistema.

### 7.3.2. Modelado LGM en otros circuitos

El cuarto sistema analizado corresponde a una red pasivo–activa que incorpora un amplificador operacional en configuración no inversora, acompañado de tres resistencias ( $R_1, R_2, R_3$ ) y tres capacitores ( $C_1, C_2, C_3$ ) distribuidos en la cadena de realimentación. Este circuito extiende los casos puramente pasivos tratados previamente e introduce un elemento activo cuya representación topológica requiere el uso de un *nullor* [22], [23]. La Figura 5 muestra el esquema eléctrico utilizado tanto para simulación como para validación experimental.

**Figura 5.** Circuito 4 con amplificador operacional



Nota. La imagen muestra la topología completa del Circuito 4, incluyendo el modelo del amplificador operacional y los elementos pasivos asociados. Elaboración propia.

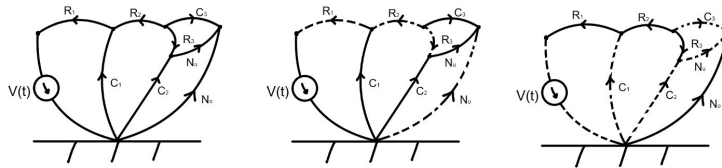
En concordancia con el formalismo topológico de los sistemas dinámicos y con los enfoques clásicos de modelado energético [6], [9], el amplificador operacional se modeló a través de un *nullor* (*nullator* + *norator*) [22], [23]. Esta representación mantiene la estructura de dependencia entre nodos del amplificador sin introducir dinámica adicional, permitiendo aplicar el formalismo LGM de manera estrictamente topológica.

### Representación mediante *nullor* y construcción del grafo

El *nullator* se conectó al nodo entre  $C_2$  y  $R_3$ , y al nodo superior que conduce a  $C_3$ , mientras que el *norator* se ubicó entre la salida del amplificador y tierra. Estas conexiones respetan la configuración no inversora y reproducen el comportamiento ideal del amplificador operacional: el *nullator* impone  $e_{N_u} = 0$  y  $f_{N_u} = 0$ , y el *norator* permite cualquier combinación de flujo y esfuerzo [22], [23].

El grafo, el árbol normal y el cóarbol obtenidos para este circuito se muestran en la Figura 6. La dirección de ramas se asignó conforme a las convenciones empleadas en Cellier [24] y de manera consistente con el análisis del circuito 7 [10], [13].

**Figura 6.** Grafo lineal, árbol normal y cóarbol asociados al circuito 4 (de izquierda a derecha)



Nota. La figura muestra la estructura topológica completa del Circuito 4, incluyendo el modelado del amplificador operacional mediante *nullor* y las ramas seleccionadas para el árbol y el cóarbol. Elaboración propia.

## Selección del árbol y rol del *nullor* en la estructura topológica

El árbol se construyó siguiendo el criterio jerárquico de Rowell [13]: (1) incluir primero las fuentes de esfuerzo, (2) luego los elementos almacenadores (capacitores), (3) posteriormente las resistencias, (4) y considerar el *nullor* como elemento estructural prioritario.

En este circuito, el *nullor* tuvo prioridad en el árbol debido a que fija directamente relaciones de voltaje y corriente en nodos críticos, evitando configuraciones que contradigan las restricciones internas del amplificador operacional. El coárbol se obtuvo verificando que: (i) no se generaran lazos redundantes, (ii) todos los nodos permanecieran conectados, (iii) se preservara la posibilidad de reconstruir los lazos fundamentales requeridos para obtener las ecuaciones de compatibilidad.

## Derivación algebraica y comparación con el método convencional

El proceso algebraico es análogo al presentado para el circuito 7. Los *cutsets* asociados a  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  generan las ecuaciones de continuidad de flujo, mientras que los lazos del coárbol permiten escribir las ecuaciones de compatibilidad de esfuerzos en torno a  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  [13]. El *nullor* añade las restricciones:

$$e_{N_u} = 0, \quad f_{N_u} = 0,$$

lo que fija las relaciones de nodo y elimina grados de libertad que producirían ecuaciones independientes adicionales en un amplificador operacional no ideal [22], [23].

Una vez ensambladas las ecuaciones constitutivas, las de lazo y las de *cutset*, la matriz de espacio de estados obtenida mediante LGM resultó idéntica a la deducida por el método convencional basado en leyes de Kirchhoff. Esta coincidencia valida nuevamente la consistencia del enfoque LGM en sistemas activos y sugiere que el *nullor*, lejos de complicar el procedimiento, estructura de manera natural la topología de realimentación del amplificador operacional.

## Consistencia del modelado entre todos los circuitos analizados

El procedimiento detallado para los circuitos 4 y 7 se aplicó del mismo modo al resto de los sistemas estudiados, que incluyen las redes RC simples, las configuraciones en serie, las redes multicapacitor y las etapas con amplificadores operacionales. En todos los casos, las matrices de espacio de estados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  obtenidas mediante el método convencional coincidieron con las derivadas por LGM. Esta concordancia sistemática demuestra que la estructura topológica capturada por el grafo es suficiente para reproducir con precisión la dinámica de cada circuito, independientemente de su orden, número de elementos pasivos o presencia de dispositivos activos.

---

## Simulación y validación experimental

---

La fase de simulación y validación experimental constituye el vínculo esencial entre los modelos desarrollados en el Capítulo 7 y el comportamiento físico de los circuitos analizados. En este capítulo se presenta el procedimiento seguido para comparar, bajo condiciones controladas, las respuestas generadas por las plataformas de simulación con las mediciones obtenidas en laboratorio. El objetivo es determinar en qué medida los modelos en espacio de estados deducidos —tanto por el enfoque convencional como mediante LGM— reproducen la dinámica real de los sistemas pasivos y activos estudiados, y establecer la consistencia estructural del método antes de extenderlo hacia otros dominios físicos.

### 8.1. Simulación computacional y configuración experimental

La simulación y la experimentación se ejecutaron en paralelo para validar los modelos deducidos en el Capítulo 7. Cada circuito fue analizado mediante dos plataformas computacionales —MATLAB/Simulink y LTspice— [16], [25] y posteriormente verificado mediante mediciones físicas con un osciloscopio Tektronix [26]. El objetivo consistió en establecer si las respuestas temporales obtenidas en simulación coinciden con las observadas experimentalmente, y en qué medida la estructura dinámica predicha por el enfoque LGM representa el comportamiento real de los sistemas eléctricos y activos estudiados.

#### 8.1.1. Configuración y herramientas MATLAB / Simulink / LTspice

El modelado computacional de los siete circuitos seleccionados se realizó utilizando dos herramientas principales: Simulink para la representación basada en bloques y LTspice para la simulación eléctrica de referencia. Ambas plataformas ofrecen entornos complementarios

que permiten contrastar la formulación en espacio de estados con la respuesta temporal esperada según las leyes de circuitos. La documentación técnica de Simulink [16] y LTspice [25] establece lineamientos precisos para la configuración de componentes eléctricos, su parametrización y la integración numérica de sistemas rígidos, los cuales fueron seguidos a lo largo de este trabajo.

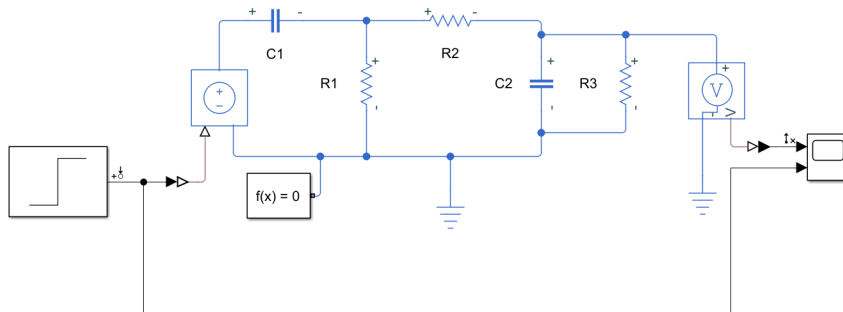
En Simulink, cada circuito fue implementado exclusivamente con bloques eléctricos de la biblioteca de Simscape Electrical [16], evitando representaciones idealizadas que omitieran dinámica interna. Los valores de los componentes fueron asignados caso por caso según los parámetros de diseño establecidos, y se introdujeron tolerancias explícitas en resistencias, inductores y capacitores con el fin de representar condiciones realistas y mitigar singularidades numéricas. En particular, el circuito 1 requirió la inclusión de pequeñas conductancias parasitarias para prevenir condiciones de *algebraic loops* y asegurar la convergencia del *solver*, tal como recomiendan los métodos numéricos estándar para sistemas continuos [16], [27].

La fuente de excitación empleada en todos los modelos fue un escalón de 5 V. En el circuito 7 se utilizaron múltiples periodos de una onda cuadrada de baja frecuencia con el fin de observar la dinámica asociada a la carga progresiva de los capacitores y capturar la evolución del régimen permanente. Además, se aplicó un escalón adicional de 1 V en varias simulaciones para evaluar linealidad, propiedad fundamental de los sistemas LTI, la cual será contrastada posteriormente con el experimento físico.

De forma complementaria, LTspice fue utilizado para validar la estructura de cada topología y obtener referencias adicionales mediante un motor de simulación SPICE [25]. En esta etapa se modelaron directamente los elementos activos presentes en los circuitos, incluyendo el amplificador operacional TL082 y sus características internas según la hoja de datos del fabricante [21]. El uso simultáneo de ambas plataformas permitió verificar la consistencia entre la dinámica generada por el *solver* físico de SPICE y el modelo en espacio de estados derivado en Simulink.

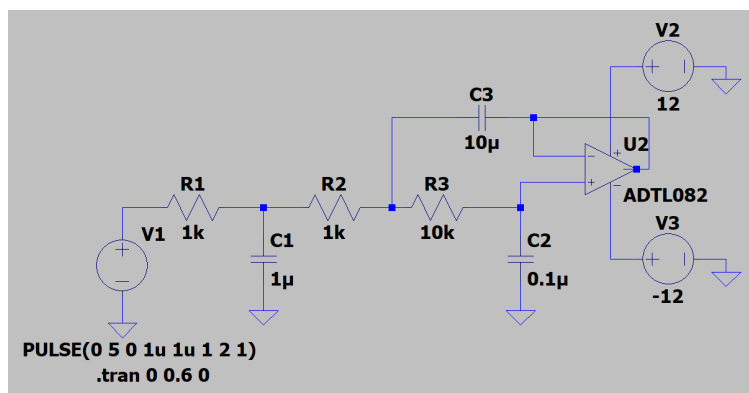
La Figura 7 presenta la implementación en Simulink del circuito 3, empleada como caso representativo de la familia pasiva. Adicionalmente, la Figura 8 muestra el esquema completo del circuito 4 en LTspice, incluyendo el TL082 y sus conexiones internas, utilizado para validar el comportamiento del sistema activo.

**Figura 7.** Modelo del circuito 3 implementado en Simulink



Nota. La figura muestra la construcción del modelo del Circuito 3 empleando exclusivamente componentes eléctricos de Simscape Electrical. Elaboración propia.

**Figura 8.** Esquema del circuito 4 implementado en LTspice



Nota. La imagen muestra el esquema del circuito 4 simulado en LTspice, incluyendo el amplificador operacional TL082. Elaboración propia.

### 8.1.2. Respuestas simuladas

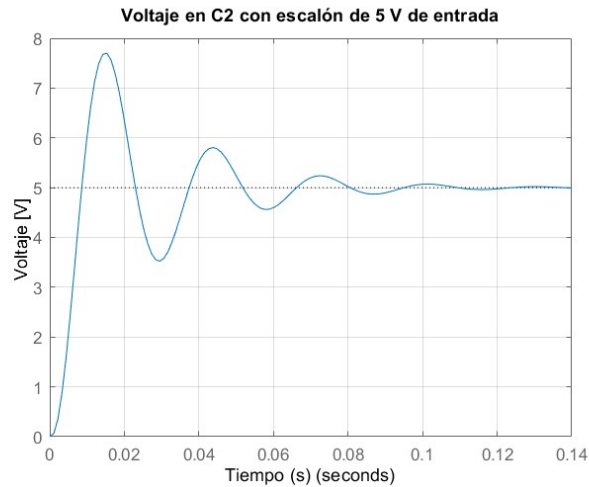
Una vez generados los modelos en espacio de estados y verificado que las matrices **A**, **B**, **C**, **D** coincidieran entre el enfoque convencional y el obtenido mediante LGM, se procedió a simular la dinámica temporal de los siete circuitos bajo las mismas condiciones de operación utilizadas posteriormente en el laboratorio. Conforme a MathWorks [16] y Chapra y Canale [27], se empleó integración con paso variable y tolerancias relativas entre  $10^{-3}$  y  $10^{-4}$  para asegurar estabilidad y precisión sin incrementar excesivamente el tiempo de cómputo.

En todas las simulaciones se aplicó un escalón de 5 V como excitación principal, ya que permite observar claramente el régimen transitorio y estacionario. Además, se aplicó un escalón de 1 V con el objetivo de evaluar linealidad, siguiendo criterios de Ogata [2] y Nise [3]. La comparación entre ambas excitaciones permite verificar que el sistema se mantiene dentro del régimen lineal esperado para topologías pasivas y activas con amplificador

operacional idealizado.

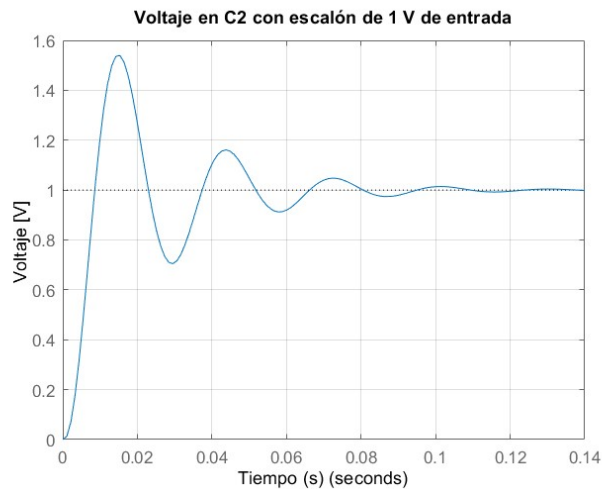
Para evitar redundancia en el cuerpo principal, en esta sección se presentan únicamente las respuestas correspondientes a los circuitos 4 y 7, representativos de dos casos contrastantes: (i) un circuito activo con amplificador operacional y múltiples redes RC acopladas, y (ii) una red RLC multirringo de cuarto orden.

**Figura 9.** Respuesta al escalón de 5 V del circuito 4



Nota. La figura muestra la respuesta simulada del circuito 4 ante un escalón de 5 V, obtenida mediante MATLAB. Elaboración propia.

**Figura 10.** Respuesta al escalón de 1 V del circuito 4

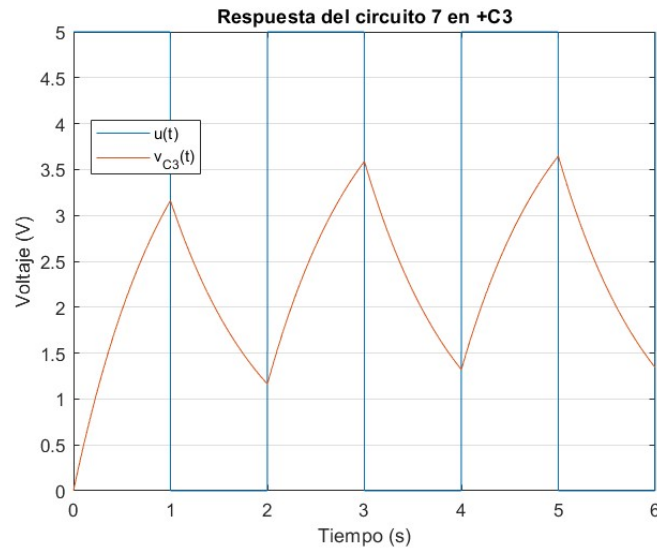


Nota. La figura muestra la respuesta simulada del circuito 4 ante un escalón de 1 V, empleada como prueba de linealidad del sistema. Elaboración propia.

La salida del amplificador operacional presenta un comportamiento característico de una red con realimentación capacitiva: una fase inicial dominada por la integración del capacitor en lazo y posteriormente un asentamiento determinado por la interacción  $R_2-R_3-C_2$ . La simulación reproduce con fidelidad la dinámica esperada según el modelo analítico obtenido en el Capítulo 7.

La señal mantiene exactamente la misma forma que la obtenida con 5 V, variando únicamente la amplitud por un factor de cinco. Esto confirma la linealidad del modelo del amplificador operacional empleado en simulación, consistente con la representación mediante *nullor* descrita en la Sección 7.3.

**Figura 11.** Respuesta al escalón de 5 V del circuito 7



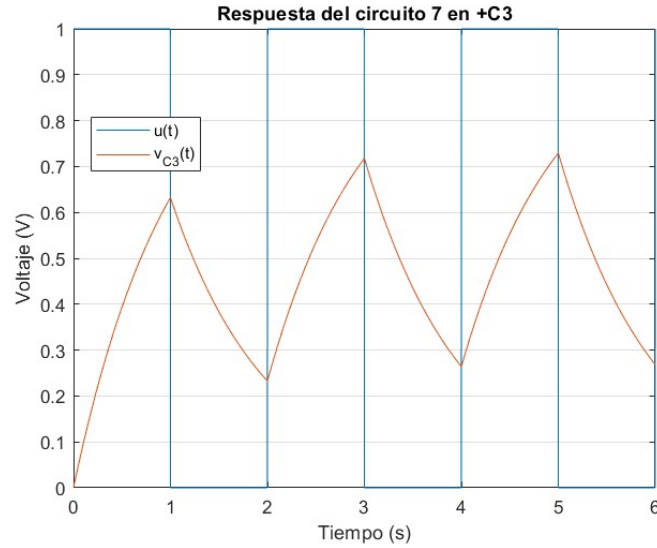
Nota. La figura muestra la respuesta simulada del circuito 7 ante un escalón de 5 V, utilizada para analizar su comportamiento dinámico. Elaboración propia.

La dinámica del Circuito 7 es más compleja debido a la presencia simultánea de un inductor, tres capacitores y múltiples caminos resistivos. Se observa un crecimiento progresivo del valor pico en los primeros ciclos, fenómeno que ya había sido anticipado en el análisis topológico mediante LGM, donde se identificó la existencia de múltiples ramas de almacenamiento energético actuando de forma acoplada.

El escalado proporcional entre ambas señales confirma que, pese a su mayor complejidad, la red se comporta como un sistema lineal dentro del rango operativo empleado. Este resultado será verificado experimentalmente en la siguiente subsección.

El procedimiento aplicado en esta subsección —definición del modelo, construcción del esquema en Simulink, asignación de tolerancias, aplicación de los escalones de 5 V y 1 V, y análisis de la respuesta temporal— se realizó de la misma manera para los siete circuitos. Los casos 4 y 7 se muestran aquí únicamente como ejemplos representativos; no obstante, todos los circuitos fueron simulados bajo el mismo criterio y produjeron respuestas coherentes con las matrices **A**, **B**, **C**, **D** obtenidas por ambos métodos de modelado.

**Figura 12.** Respuesta al escalón de 1 V del circuito 7



Nota. La figura muestra la respuesta simulada del circuito 7 ante un escalón de 1 V, empleada como prueba de linealidad del sistema. Elaboración propia.

## 8.2. Validación experimental

### 8.2.1. Preparación del experimento físico

La validación experimental se realizó construyendo físicamente los siete circuitos en un entorno controlado de laboratorio, utilizando una fuente de señal Tektronix AFG y un osciloscopio digital TBS2000 [26], siguiendo lineamientos estándar para mediciones analógicas en protoboard [23], [28]. Antes del montaje, todos los componentes fueron caracterizados individualmente, obteniéndose resistencias con tolerancia de  $\pm 5\%$ , inductores alrededor de 10.3 mH y capacitores dentro del rango 10–10.4  $\mu\text{F}$ . Estas mediciones se incorporaron en las simulaciones de Simulink, de acuerdo con las buenas prácticas de modelado eléctrico con componentes discretos [16].

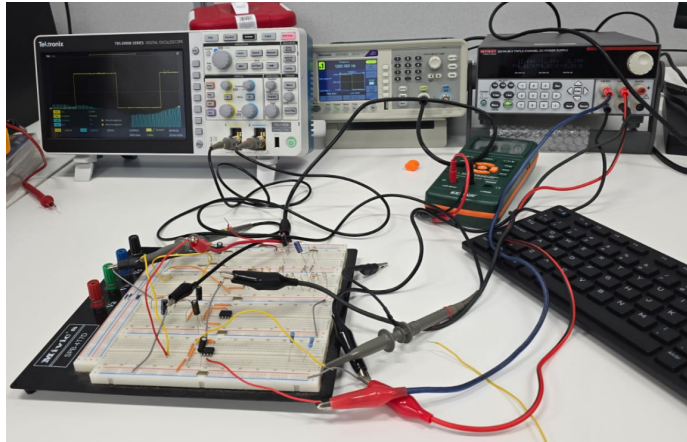
En el caso del Circuito 4, que incluye un amplificador operacional, se seleccionaron valores ideales específicos para los capacitores con el fin de controlar de manera precisa la dinámica del sistema:

$$C_1 = 1 \mu\text{F}, \quad C_2 = 0.1 \mu\text{F}, \quad C_3 = 10 \mu\text{F}.$$

Estos valores ideales fueron utilizados tanto en el modelo computacional como en el montaje físico, manteniendo coherencia entre simulación y experimento.

Los circuitos se ensamblaron sobre protoboard manteniendo una única referencia de tierra, replicando el enrutamiento lógico utilizado en las simulaciones. Las señales se midieron exactamente en los nodos definidos en Simulink y LTspice, y se aplicaron dos excitaciones: un escalón de 5 V y uno de 1 V para evaluar la respuesta en condiciones de baja amplitud y verificar linealidad.

**Figura 13.** Montaje físico para la validación experimental



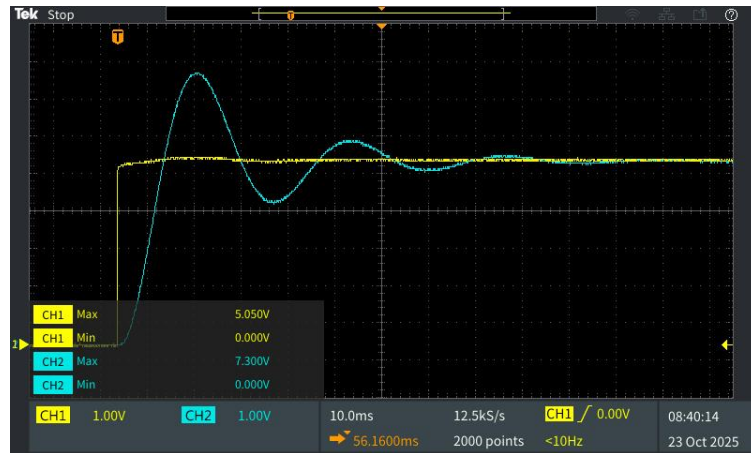
Nota. La figura muestra el montaje físico utilizado durante la fase de validación experimental, incluyendo instrumentos empleados para obtener los datos del estudio. Elaboración propia.

### 8.2.2. Comparación entre simulación y mediciones experimentales

La validación final de los modelos consistió en comparar, para los circuitos 4 y 7, las respuestas obtenidas mediante simulación (MATLAB, Simulink y LTspice) con las señales medidas físicamente en laboratorio. En todos los casos, la variable utilizada como salida fue la misma empleada durante el modelado: la salida del amplificador operacional para el circuito 4 y el voltaje en la rama positiva del capacitor  $C_3$  para el circuito 7. Las simulaciones fueron consistentes entre sí, ya que los tres entornos produjeron respuestas idénticas en forma y magnitud.

**Circuito 4 (salida del amplificador operacional).** La forma general de la señal experimental coincide con la obtenida por simulación: la respuesta presenta un pequeño sobrepaso inicial y una fase transitoria con oscilaciones suaves antes de estabilizarse en su valor final. El tiempo de subida y el tiempo de establecimiento coincidieron dentro de los límites esperados para las tolerancias de los componentes [23], [28]. La diferencia principal fue una amplitud ligeramente menor y la presencia de ruido de baja intensidad, atribuible al entorno del laboratorio y a la sensibilidad del osciloscopio.

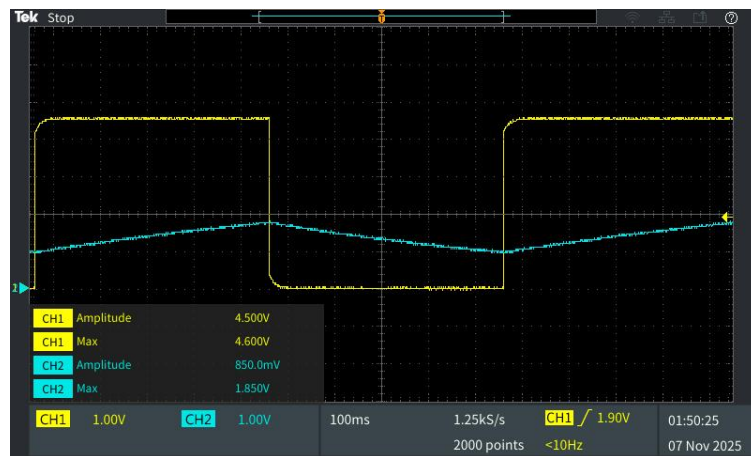
**Figura 14.** Respuesta experimental del circuito 4



Nota. La figura muestra la respuesta experimental obtenida en la salida del amplificador operacional del circuito 4, utilizada para comparar el comportamiento real con el modelo simulado. Elaboración propia.

**Circuito 7 (salida en  $v_{C_3}$ ).** La respuesta experimental del circuito 7 conservó la estructura prevista por el modelo: una señal periódica que se aproxima a una forma triangular, evidenciando el comportamiento de tipo integrador del sistema. Para un mismo tiempo transcurrido, ambas curvas presentaron el mismo patrón dinámico y valores máximos comparables. Las diferencias se limitaron a menor amplitud, presencia de ruido y una respuesta física más suave, asociada al ESR de los capacitores y pérdidas reales [18], [28].

**Figura 15.** Respuesta experimental del circuito 7



Nota. La figura muestra la respuesta experimental del circuito 7 obtenida en la rama positiva del capacitor  $C_3$ , utilizada para comparar el comportamiento real con el modelo simulado. Elaboración propia.

**Observaciones adicionales.** En el circuito 5 las primeras mediciones presentaron un nivel de ruido inusual, por lo que el experimento fue repetido posteriormente, obteniendo

señales consistentes con las demás.

**Síntesis.** Para los circuitos 4 y 7 la correspondencia entre simulación y experimento fue satisfactoria: la forma de onda, el comportamiento transitorio, el tiempo de establecimiento, la evolución temporal y el valor máximo coincidieron dentro de los márgenes esperados. Las diferencias observadas—ruido, menor amplitud y una respuesta más suave—son coherentes con las tolerancias de los componentes y el comportamiento físico real de los sistemas electrónicos [23], [28]. Las respuestas de los siete circuitos fueron verificadas siguiendo el mismo procedimiento.

Al cierre de este capítulo, se confirma que los modelos en espacio de estados obtenidos tanto por el método convencional como mediante LGM son capaces de reproducir el comportamiento dinámico de los siete circuitos analizados. La concordancia entre simulaciones (MATLAB, Simulink y LTspice) y mediciones experimentales, dentro de las tolerancias de los componentes, proporciona una base sólida para extender el modelado hacia otros dominios físicos en el Capítulo 9.

### 8.3. Identificación del sistema y aproximación del modelo

Además del modelado analítico y basado en LGM, se exploró el uso de técnicas de identificación de sistemas para aproximar modelos dinámicos a partir de las respuestas medidas de los siete circuitos eléctricos [2], [17]. El objetivo no fue reconstruir la topología original a partir de los datos, sino evaluar hasta qué punto es posible recuperar un modelo en espacio de estados o una función de transferencia que reproduzca la dinámica observada, y comparar estos resultados con los modelos obtenidos por métodos clásicos y por LGM.

#### 8.3.1. Configuración de la identificación de sistemas

El proceso de identificación se realizó en dos etapas. En primer lugar, para cada circuito se utilizó la herramienta Model Linearizer de Simulink [16] sobre el modelo simulado, excitándolo con un escalón en el mismo nodo utilizado en las mediciones de laboratorio. A partir de esta linealización se obtuvo una función de transferencia nominal para cada circuito, junto con el número de polos y ceros dominantes. Esta etapa se empleó únicamente como referencia estructural (orden del sistema y presencia de ceros), no como modelo final.

En la segunda etapa se utilizaron directamente los datos experimentales obtenidos con el osciloscopio. Las señales de salida de cada circuito, medidas en los mismos puntos que en la simulación, se exportaron e incorporaron a la System Identification Toolbox de MATLAB [17], [29]. Para cada circuito se estimaron:

- una función de transferencia continua,
- y, cuando fue posible, un modelo en espacio de estados de orden comparable al deducido analíticamente.

En ambos casos se utilizó la métrica de ajuste estándar de la herramienta (porcentaje

de *fit* sobre los datos de estimación) y, adicionalmente, se evaluó de forma cualitativa la coincidencia en la forma de la respuesta temporal. Esta evaluación cualitativa se codificó mediante tres niveles descriptivos:

- **Buena:** la forma de la respuesta coincide claramente con la referencia.
- **Aceptable:** la forma se aproxima, pero con diferencias visibles.
- **Deficiente:** la forma no reproduce adecuadamente la respuesta observada.

En los casos en que no se obtuvo un modelo de cierto tipo (por ejemplo, sólo se estimó espacio de estados pero no función de transferencia, o viceversa), o no se evaluó cualitativamente su forma, se indica explícitamente como no identificado o no evaluada.

### 8.3.2. Resultados de ajuste y análisis de las aproximaciones

El Cuadro 3 resume los resultados obtenidos para cada circuito. Se reporta el porcentaje de ajuste de la función de transferencia identificada (FT), el ajuste del modelo en espacio de estados (EE) y la evaluación cualitativa de la forma de la señal para ambas representaciones.

**Cuadro 3.** Resultados de identificación para los siete circuitos

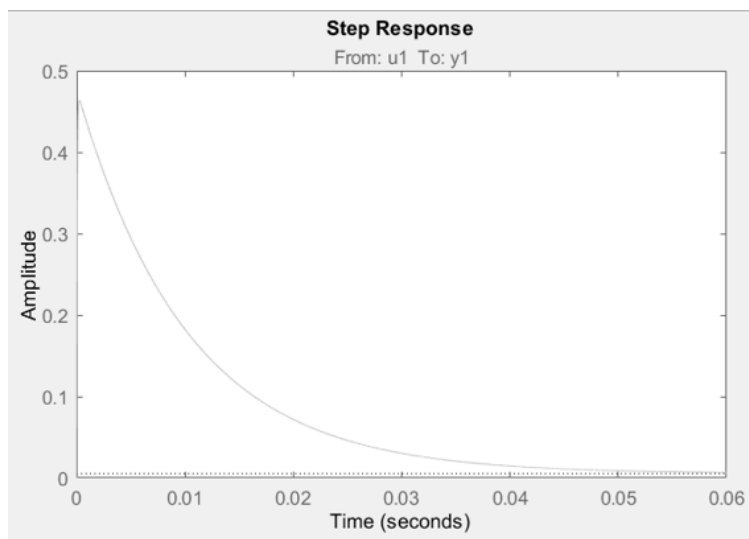
Circuito	Ajuste FT [%]	Ajuste EE [%]	Coincidencia FT	Coincidencia EE
1	95.71	95.53	Aceptable	Aceptable
2	98.97	88.99	Deficiente	Buena
3	90.36	90.81	Buena	Buena
4	98.91	No identificado	No identificado	Aceptable
5	94.43	94.60	Deficiente	Deficiente
6	89.42	93.40	Deficiente	Deficiente
7	No identificado	87.81	No identificado	Deficiente

Nota. El cuadro resume los resultados de identificación obtenidos para los siete circuitos estudiados, mostrando los porcentajes de ajuste por función de transferencia (FT) y ecuaciones de estado (EE), junto con la coincidencia cualitativa entre el modelo y la respuesta experimental. Elaboración propia.

Los resultados muestran que es posible obtener porcentajes de ajuste elevados en la mayoría de los circuitos, tanto para funciones de transferencia como para modelos en espacio de estados. Sin embargo, un buen porcentaje de ajuste no garantiza por sí mismo que la forma de la respuesta temporal coincida con la observada en el sistema real. En los circuitos 5, 6 y 7, por ejemplo, los modelos identificados alcanzan ajustes superiores al 87 %, pero la forma de la señal no reproduce adecuadamente la dinámica medida (coincidencia clasificada como Deficiente).

La Figura 16 ilustra un caso representativo en el que la identificación sí resulta exitosa. Para el circuito 3, tanto la función de transferencia como el modelo en espacio de estados identificados reproducen con fidelidad la forma de la respuesta al escalón, con ajustes numéricos en torno al 90 % y coincidencia cualitativa clasificada como Buena en ambos modelos.

**Figura 16.** Respuesta al escalón obtenida mediante identificación del circuito 3



Nota. La figura muestra la respuesta al escalón del modelo identificado para el circuito 3, obtenida a partir de los datos experimentales. Esta respuesta corresponde al sistema estimado mediante el uso de System Identification. Elaboración propia.

Como complemento al análisis mostrado en la Figura 16, se presentan explícitamente las funciones de transferencia asociadas al Circuito 3. La primera corresponde al modelo identificado a partir de los datos experimentales para dicho circuito:

$$G_{id}(s) = \frac{1.044 \times 10^4 s + 1.142 \times 10^4}{s^2 + 2.208 \times 10^4 s + 2.154 \times 10^6},$$

mientras que la función de transferencia analítica derivada directamente del modelo físico del Circuito 3 es:

$$G_{real}(s) = \frac{100 s - 2.01 \times 10^{-12}}{s^2 + 400 s + 3 \times 10^4}.$$

La comparación entre ambas funciones muestra que, aunque los coeficientes difieren en magnitud debido al ruido de medición, la variabilidad de los parámetros reales y la ambigüedad inherente al problema inverso, ambos modelos comparten un comportamiento dinámico de segundo orden con una estructura cualitativa similar en la respuesta al escalón. Esto explica por qué el ajuste obtenido para el Circuito 3 es satisfactorio tanto en sentido numérico como en forma de onda, coherente con los resultados presentados en el Cuadro 3.

En contraste, para otros circuitos la identificación produce modelos con buen ajuste numérico pero forma de respuesta claramente distinta. Esto indica que, a partir de una única realización temporal y sin imponer restricciones adicionales sobre la estructura del modelo, el problema inverso es intrínsecamente ambiguo: existen múltiples conjuntos de parámetros y, en ocasiones, múltiples estructuras de modelo que pueden aproximar los mismos datos dentro de un margen de error dado [17].

Finalmente, las matrices de espacio de estados estimadas mediante identificación no coincidieron numéricamente con las matrices ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ) derivadas a partir de los valores de componentes utilizados en la experimentación. Aunque algunos polos estimados resultan cercanos a los teóricos, en general los coeficientes difieren y la estructura matricial no es la misma. Esto es consistente con el hecho de que el mapeo desde la topología del circuito hacia su respuesta temporal es bien definido, pero el mapeo inverso —de una respuesta dada hacia una topología y un conjunto de parámetros únicos— no es uno a uno. La identificación de sistemas permite obtener un modelo dinámico equivalente desde el punto de vista de entrada-salida, pero no garantiza la recuperación de la estructura física original ni de las matrices exactas deducidas mediante LGM [17].

En el contexto de este trabajo, estos resultados sugieren que la identificación numérica puede emplearse como herramienta complementaria para ajustar parámetros o validar el orden del modelo, mientras que la obtención de la estructura y de las matrices de estado físicamente interpretables sigue dependiendo del análisis topológico y de las deducciones analíticas desarrolladas en capítulos previos.

---

## Extensión del modelo y primeros pasos hacia un simulador universal

---

El objetivo de este capítulo es extender el enfoque desarrollado en los capítulos anteriores y mostrar que la estructura topológica empleada en LGM —basada en grafos lineales, árboles, coárboles y matrices asociadas— no es exclusiva del dominio eléctrico, sino que puede reutilizarse de forma natural en otros sistemas físicos [4], [10], [13]. A través del análisis de un sistema mecánico equivalente y de la integración de modelos obtenidos por identificación, representación analítica y formulación topológica, se sientan las bases conceptuales para avanzar hacia un futuro simulador universal multidominio sustentado en grafos.

### 9.1. Modelado de sistemas mecánicos mediante LGM

La extensión del enfoque de *linear graph modeling* (LGM) hacia otros dominios de energía se ilustra mediante el análisis de un sistema mecánico masa–resorte–amortiguador excitado por una fuerza externa. El objetivo es mostrar que la misma estructura topológica utilizada en los circuitos eléctricos —grafo lineal, selección de árbol y coárbol, y deducción de las matrices de espacio de estados— puede reutilizarse sin cambios conceptuales para describir sistemas mecánicos lineales [4], [6], [13].

#### 9.1.1. Analogía electro–mecánica y mapeo de variables

Se adopta la analogía esfuerzo–flujo entre los dominios eléctrico y mecánico [4], [6], de forma que:

$$\begin{array}{lll}
\text{esfuerzo eléctrico: } e \equiv v(t) & \longleftrightarrow & \text{esfuerzo mecánico: } F(t), \\
\text{flujo eléctrico: } f \equiv i(t) & \longleftrightarrow & \text{flujo mecánico: } v_m(t),
\end{array}$$

donde  $v(t)$  es el voltaje,  $i(t)$  la corriente,  $F(t)$  la fuerza aplicada y  $v_m(t)$  la velocidad de la masa. Bajo esta correspondencia, las relaciones constitutivas de los elementos mecánicos adoptan una forma análoga a la de los elementos eléctricos:

$$\begin{array}{lll}
\text{masa:} & F = M \dot{v}_m(t) & \longleftrightarrow & v_L(t) = L \dot{i}(t), \\
\text{resorte:} & F = k x(t) & \longleftrightarrow & v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt, \\
\text{amortiguador viscoso:} & F = b v_m(t) & \longleftrightarrow & v_R(t) = R i(t),
\end{array}$$

donde  $M$  es la masa,  $k$  la constante del resorte,  $b$  el coeficiente de amortiguamiento y  $x(t)$  el desplazamiento. En esta analogía:

- la masa  $M$  es equivalente a un inductor  $L$ ,
- la flexibilidad del resorte  $1/k$  es equivalente a un capacitor  $C$ ,
- el amortiguador  $b$  es equivalente a una resistencia  $R$ .

Esta estructura formal permite reutilizar directamente la notación de esfuerzo y flujo empleada en LGM y aplicar las mismas reglas de construcción de árboles y coárboles que se utilizaron en los circuitos eléctricos [13].

### 9.1.2. Grafo mecánico, modelo en espacio de estados y comparación estructural

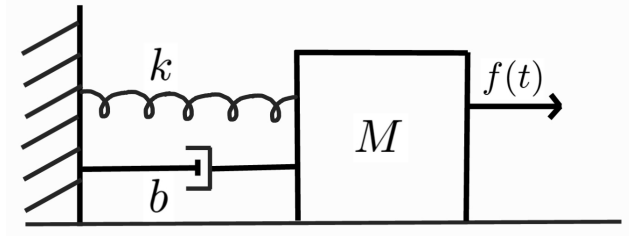
El sistema mecánico considerado se muestra en la Figura 17. Está constituido por una masa  $M$  unida a un resorte de constante  $k$  y a un amortiguador viscoso con coeficiente  $b$ , todos conectados en paralelo respecto al punto de referencia fijo. El sistema se excita mediante una fuerza externa  $u(t) = f(t)$  aplicada sobre la masa.

Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de fuerzas sobre la masa se obtiene la ecuación diferencial:

$$M \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + k x(t) = f(t). \quad (5)$$

Desde la perspectiva de LGM, la dinámica (5) se obtiene partiendo del grafo lineal del sistema mostrado en la Figura 18, donde cada elemento mecánico se representa como una rama: la masa  $M$ , el resorte  $k$ , el amortiguador  $b$  y la fuente de fuerza  $f(t)$  [4], [13]. El

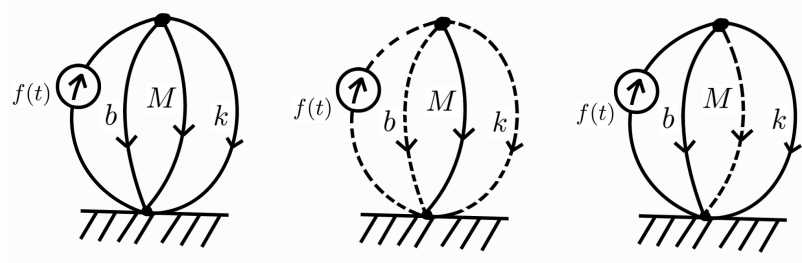
**Figura 17.** Sistema mecánico masa–resorte–amortiguador



Nota. La figura muestra el sistema mecánico masa–resorte–amortiguador sometido a una fuerza externa  $f(t)$ . Elaboración propia.

árbol normal se construyó siguiendo el mismo criterio empleado en los circuitos eléctricos: en primer lugar la fuente de esfuerzo, luego el elemento elástico asociado al almacenamiento tipo capacitivo y posteriormente los elementos necesarios para preservar la conectividad del grafo [13]. El cóarbol se utilizó para verificar la conectividad del grafo y la ausencia de lazos redundantes, de manera análoga al procedimiento aplicado al Circuito 7.

**Figura 18.** Grafos del sistema masa–resorte–amortiguador



Nota. La figura muestra el grafo lineal, el árbol normal y el cóarbol correspondientes al sistema masa–resorte–amortiguador, de izquierda a derecha. Elaboración propia.

A partir del árbol y el cóarbol de la Figura 18, la información topológica se organiza en *cutsets* fundamentales (asociados a las ramas del árbol) y lazos fundamentales (asociados a las ramas del cóarbol) [13]. Sobre estas estructuras se proyectan las relaciones constitutivas de masa, resorte y amortiguador, lo que conduce a una ecuación de lazo que expresa el equilibrio de esfuerzos sobre la masa

$$M \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + k x(t) = f(t),$$

y a ecuaciones de *cutset* que garantizan la continuidad de flujo en cada rama. El resultado final coincide con la ecuación diferencial (5), evidenciando que el modelo puede obtenerse exclusivamente a partir del grafo y de las leyes de esfuerzo y flujo del dominio mecánico.

Para formular el modelo en espacio de estados a partir de (5), se definen las variables

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t),$$

de modo que  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$  y

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M} x_1(t) - \frac{b}{M} x_2(t) + \frac{1}{M} u(t).$$

El vector de estado se escribe como

$$\mathbf{x}_{\text{mec}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

y se adopta el desplazamiento como salida,  $y(t) = x(t) = x_1(t)$ . Con estas definiciones, el modelo en espacio de estados queda:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{mec}}(t) = \mathbf{A}_{\text{mec}} \mathbf{x}_{\text{mec}}(t) + \mathbf{B}_{\text{mec}} u(t), \quad y(t) = \mathbf{C}_{\text{mec}} \mathbf{x}_{\text{mec}}(t), \quad (6)$$

con

$$\mathbf{A}_{\text{mec}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{mec}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{mec}} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D}_{\text{mec}} = 0. \quad (7)$$

El modelo (6) es formalmente equivalente al de un sistema eléctrico de segundo orden, como los Circuitos 1 y 2 estudiados previamente: en ambos casos el sistema se describe mediante dos variables de estado, una ecuación diferencial de segundo orden y matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  con la misma estructura algebraica —un integrador en cascada y una dinámica de segundo orden determinada por dos parámetros de almacenamiento y un parámetro disipativo [2], [12].

Bajo la analogía adoptada, la masa  $M$  desempeña el papel de inductor, la flexibilidad del resorte  $1/k$  se comporta como un capacitor y el amortiguador  $b$  es análogo a una resistencia. La fuente de fuerza  $f(t)$  juega el mismo rol que la fuente de voltaje o corriente en los circuitos RLC. Esta correspondencia confirma que el esquema general empleado en los capítulos anteriores —construcción del grafo, selección de árbol y coárbol, deducción de las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  y simulación de la respuesta temporal— no depende del dominio físico específico [4], [13], y sirve como punto de partida para las secciones siguientes sobre identificación y aproximación de modelos.

## 9.2. Integración de modelos hacia un simulador universal basado en grafos

El recorrido desarrollado en este trabajo —desde la deducción analítica de modelos, la verificación experimental y la identificación numérica, hasta la representación topológica mediante grafo lineal— muestra que sistemas provenientes de distintos dominios físicos pueden describirse dentro de un mismo marco estructural [4], [7], [13]. Esta sección sintetiza dicho flujo y establece los elementos fundamentales que justifican la posibilidad de construir un simulador universal sustentado en grafos y en matrices asociadas a su topología.

### 9.2.1. Convergencia de modelos desde los datos hasta la estructura dinámica

Para ilustrar la conexión entre las distintas representaciones vistas a lo largo del trabajo, se emplea nuevamente el Circuito 3 únicamente como ejemplo integrador. A partir de los datos experimentales, la identificación produce una función de transferencia que captura adecuadamente la dinámica dominante del sistema:

$$G_{\text{id}}(s) = \frac{1.044 \times 10^4 s + 1.142 \times 10^4}{s^2 + 2.208 \times 10^4 s + 2.154 \times 10^6}.$$

De forma independiente, el modelo físico del circuito permite derivar la función de transferencia analítica:

$$G_{\text{real}}(s) = \frac{100 s - 2.01 \times 10^{-12}}{s^2 + 400 s + 3 \times 10^4}.$$

Aunque los coeficientes no coinciden —debido a ruido, tolerancias de componentes y a la naturaleza no invertible del problema— ambas expresiones comparten la misma estructura dinámica de segundo orden [17]. Este punto es crucial: más allá del método utilizado, los modelos convergen a una clase estructural común.

A partir de  $G_{\text{real}}(s)$  se obtiene un modelo en espacio de estados del tipo:

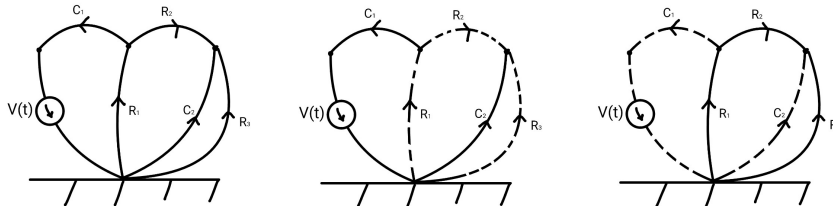
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u,$$

que describe la misma dinámica desde una perspectiva matricial [2], [12]. De esta manera, función de transferencia e identificación numérica conducen a modelos equivalentes desde la óptica entrada–salida, mientras que el espacio de estados abre la puerta a conectar el sistema con su estructura topológica.

### 9.2.2. Representación topológica del grafo como núcleo estructural

La formulación en espacio de estados puede reconstruirse a partir del grafo lineal del sistema, en el cual cada elemento físico corresponde a una rama orientada y las interconexiones se codifican en las matrices de lazos y *cutsets* fundamentales [10], [13]. La Figura 19 muestra un único grafo representativo del Circuito 3, suficiente para ilustrar la idea central: la dinámica del sistema puede derivarse directamente de su estructura topológica sin necesidad de recurrir inicialmente a ecuaciones diferenciales.

**Figura 19.** Grafo lineal asociado al circuito 3



Nota. La estructura codifica la conectividad del sistema y permite reconstruir las matrices del modelo dinámico. Elaboración propia.

El punto clave es que esta estructura —un conjunto de ramas, un árbol normal y sus enlaces— no es propia únicamente de sistemas eléctricos, sino que puede extenderse a otros dominios físicos [4], [13]. En la Sección 9.1 se aplicó exactamente la misma lógica a un sistema mecánico masa–resorte–amortiguador. En ambos casos, los modelos resultantes comparten una misma forma algebraica y una misma organización matricial  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , independientemente del dominio físico.

### 9.2.3. Hacia un simulador universal multidominio sustentado en grafos

La integración observada en los ejemplos eléctrico y mecánico sugiere un principio general: *la estructura topológica de un sistema determina una clase de modelos dinámica común, independientemente del dominio físico y del método de obtención del modelo* [4], [7], [13].

Este principio habilita la construcción de un futuro simulador universal basado en grafos, cuya propuesta puede basarse en lo siguiente:

- el simulador genera de manera automática el grafo lineal multidominio, interpretando cada elemento como una rama y cada conexión como un nodo, independientemente de si el sistema es eléctrico, mecánico o de cualquier otro dominio;
- mediante un algoritmo de selección, el simulador determina un árbol normal adecuado y construye automáticamente los lazos y *cutsets* fundamentales del sistema;
- a partir de dicha estructura, se generan de manera sistemática las matrices topológicas  $\mathbf{B}_f$  y  $\mathbf{D}_f$ , gracias a la formulación esfuerzo–flujo propia de LGM;

- combinando estas matrices con las relaciones constitutivas de cada rama, el simulador ensambla automáticamente el modelo dinámico en forma de espacio de estados, obteniendo las matrices **A**, **B**, **C**, **D**;
- finalmente, la misma estructura permite derivar funciones de transferencia, simular la respuesta temporal y comparar con modelos identificados, sin necesidad de rehacer el análisis para cada dominio o familia de sistemas.

En este enfoque, los modelos dejan de formularse caso por caso: emergen directamente de la estructura gráfica, preservando coherencia entre dominios y permitiendo incorporar modelos identificados, analíticos o híbridos sin modificar el flujo base.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que identificación, modelado analítico y representación topológica no son metodologías aisladas, sino componentes de un mismo marco estructural. La convergencia observada en sistemas eléctricos y mecánicos demuestra que un simulador multidominio sustentado en grafos es conceptualmente viable. Más que una herramienta finalizada, lo que se propone es una arquitectura conceptual para la construcción de dicho simulador, basada en la unificación de funciones de transferencia, modelos en espacio de estados, identificación de sistemas y grafos lineales.

- La teoría de *linear graph modeling* es adecuada para el modelado, análisis e interpretación de sistemas dinámicos representados mediante circuitos eléctricos, cumpliendo el objetivo general de este trabajo y proporcionando una base para el desarrollo futuro de un simulador universal de sistemas lineales.
- La selección y diseño de siete circuitos eléctricos lineales permitió aplicar de forma progresiva los principios de LGM, verificando que la metodología se mantiene consistente al incrementar la complejidad topológica y el orden dinámico del sistema.
- Las matrices de espacio de estados (**A**, **B**, **C**, **D**) obtenidas mediante el método convencional (leyes de Kirchhoff, análisis nodal y formulación matricial) coincidieron con las derivadas a partir de los grafos lineales. Esta equivalencia confirma que la estructura física del circuito queda correctamente codificada en la representación topológica y que el LGM reproduce fielmente la dinámica del sistema.
- La implementación y medición experimental de los circuitos permitió obtener respuestas temporales coherentes con las simulaciones realizadas en MATLAB/Simulink y LTspice. Las diferencias observadas se mantuvieron dentro del margen esperado por tolerancias de componentes y no idealidades de los instrumentos, validando los modelos estructurales derivados del LGM con datos reales.
- La construcción de modelos mecánicos equivalentes mediante analogías energía–esfuerzo demostró que la misma estructura en espacio de estados obtenida con LGM para los circuitos eléctricos puede emplearse para describir sistemas masa–resorte–amortiguador, evidenciando el potencial de la metodología como herramienta de modelado multidominio.
- El procesamiento de las respuestas físicas de los circuitos mediante herramientas de identificación y linealización permitió obtener modelos en espacio de estados que aproximan adecuadamente la dinámica observada, aunque sin reconstruir por completo la estructura interna del sistema. Esto muestra que la combinación de LGM con técnicas de system identification es una estrategia viable para estimar y ajustar modelos en el contexto de un simulador universal de sistemas dinámicos.

- Extender el análisis de *linear graph modeling* (LGM) a circuitos de orden superior dentro del dominio eléctrico, con el fin de evaluar su precisión en configuraciones más complejas y con mayor grado de acoplamiento.
- Profundizar en los estudios paramétricos incorporando variaciones en capacitores e inductores, para analizar la sensibilidad del modelo ante cambios en componentes dinámicos y validar su rango de aplicabilidad.
- Incorporar de manera controlada elementos no lineales —como diodos o transistores— para explorar la extensión del método más allá de sistemas estrictamente lineales y evaluar sus limitaciones en escenarios mixtos.
- Continuar refinando la comparación entre resultados analíticos, simulaciones en MATLAB, Simulink y LTspice, y mediciones físicas, con el propósito de fortalecer la validación cruzada entre modelos.
- Mantener consistencia en la organización de datos experimentales y archivos de simulación, empleando un formato unificado que facilite la trazabilidad, la replicabilidad y la revisión externa del trabajo.
- Explorar métodos básicos de identificación automática a partir de datos experimentales, tales como técnicas de regresión o agrupamiento, que permitan asistir la detección de patrones topológicos simples en diferentes configuraciones.
- Comparar el desempeño del LGM con otras técnicas de modelado —como ecuaciones de estado derivadas por métodos clásicos o enfoques de tipo *Bond Graph*— con el fin de identificar ventajas, limitaciones y potenciales integraciones en herramientas de simulación.

- 
- [1] R. C. Dorf y R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 12.<sup>a</sup> ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011, ISBN: 978-0-13-602458-3.
  - [2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5.<sup>a</sup> ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010, ISBN: 978-0-13-615673-4.
  - [3] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*, 7.<sup>a</sup> ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2015, ISBN: 978-1-118-17051-9.
  - [4] D. C. Karnopp, D. L. Margolis y R. C. Rosenberg, *System Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems*, 5.<sup>a</sup> ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012, ISBN: 978-0-470-88908-4.
  - [5] J. U. Thoma, *Simulation by Bondgraphs: Introduction to a Graphical Method*. Berlin: Springer-Verlag, 1990, ISBN: 978-3-540-51640-8.
  - [6] H. M. Paynter, *Analysis and Design of Engineering Systems*. Cambridge, MA: MIT Press, 1961.
  - [7] W. Borutzky, *Bond Graph Methodology: Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. London: Springer, 2010, ISBN: 978-1-84882-881-0. DOI: 10.1007/978-1-84882-882-7.
  - [8] D. Rowell, *Energy and Power Flow in State Determined Systems*, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 2.151 Advanced System Dynamics and Control, Course notes, revised January 30, 2003, 2003.
  - [9] P. J. Gawthrop y G. P. Bevan, «Bond-graph modeling: A tutorial introduction for control engineers,» *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, n.º 2, págs. 24-45, 2007. DOI: 10.1109/MCS.2007.338279.
  - [10] D. Rowell, *Linear Graph Modeling: One-Port Elements*, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 2.151 Advanced System Dynamics and Control, Course notes, revised January 30, 2003, 2003.
  - [11] J. A. Kypuros, *System Dynamics and Control with Bond Graph Modeling*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2013, ISBN: 978-1-4665-6075-8. DOI: 10.1201/b14676.

- [12] R. A. DeCarlo, *Linear Systems: A State Variable Approach with Numerical Implementation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989, ISBN: 978-0-13-536814-5.
- [13] D. Rowell, *Linear Graph Modeling: State Equation Formulation*, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 2.151 Advanced System Dynamics and Control, Course notes, revised September 16, 2004, 2004.
- [14] R. C. Dorf y R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, 13.<sup>a</sup> ed. Boston: Pearson, 2017, ISBN: 978-0-13-440762-3.
- [15] G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 7.<sup>a</sup> ed. Boston: Pearson, 2015, ISBN: 978-0-13-349659-8.
- [16] MathWorks, *Simulink Documentation*, Online documentation, 2023. dirección: <https://www.mathworks.com/help/simulink/>.
- [17] E. M. M. Kivits, «Modelling and Identification of Physical Linear Networks,» Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 2024, ISBN: 978-90-386-5931-2.
- [18] J. W. Nilsson y S. A. Riedel, *Electric Circuits*, 11.<sup>a</sup> ed. Boston: Pearson, 2020, ISBN: 978-0-13-474696-8.
- [19] G. B. Giannakis, Y. Shen y G. V. Karanikolas, «Topology Identification and Learning over Graphs: Accounting for Nonlinearities and Dynamics,» *Proceedings of the IEEE*, vol. 106, n.º 5, págs. 787-807, 2018. DOI: 10.1109/JPROC.2018.2804318.
- [20] R. C. Rosenberg, «Graph-Theoretic Modeling of Multi-Energy Dynamic Systems,» *Journal of the Franklin Institute*, vol. 285, n.º 2, págs. 137-156, 1968.
- [21] Texas Instruments, *TL080, TL081, TL082, TL084, TL081A, TL082A, TL084A, TL081B, TL082B, TL084B, TL082Y, TL084Y JFET-Input Operational Amplifiers: Data Sheet*, 2018. dirección: <https://www.ti.com/lit/ds/symlink/tl081.pdf>.
- [22] L. O. Chua, C. A. Desoer y E. S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*. New York: McGraw-Hill, 1987, ISBN: 978-0-07-010898-1.
- [23] A. S. Sedra y K. C. Smith, *Microelectronic Circuits*, 7.<sup>a</sup> ed. New York: Oxford University Press, 2015, ISBN: 978-0-19-933913-6.
- [24] F. E. Cellier, *Continuous System Modeling*. New York: Springer-Verlag, 1991, ISBN: 978-0-387-97502-3. DOI: 10.1007/978-1-4757-3922-0.
- [25] Analog Devices Inc., *LTspice*, Online documentation, 2025. dirección: <https://www.analog.com/en/resources/design-tools-and-calculators/ltspice-simulator.html>.
- [26] Tektronix, *TBS2000 Series Oscilloscopes User Manual*, Revision C, document 077-1147-01, Tektronix, Inc., Beaverton, OR, 2016. dirección: <https://download.tek.com/manual/TBS2000-User-RevC-EN-077114701.pdf>.
- [27] S. C. Chapra y R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7.<sup>a</sup> ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015, ISBN: 978-0-07-339792-4.
- [28] P. Horowitz y W. Hill, *The Art of Electronics*, 3.<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2015, ISBN: 978-0-521-80926-9.
- [29] MathWorks, *System Identification Toolbox Documentation*, Online documentation, 2023. dirección: <https://www.mathworks.com/help/ident/>.

### 13.1. Documentación general

La documentación completa asociada a este trabajo, incluyendo notas de laboratorio, archivos de simulación y material complementario, se encuentra disponible en el enlace:

- <https://uvgt.sharepoint.com/:f:/r/sites/Test399/Documentos%20compartidos/29%20-%20Linear%20graph%20modeling/2025/2025%20-%20Edgar%20Chen?csf=1&web=1&e=SpqxTR>

### 13.2. Repositorio GitHub

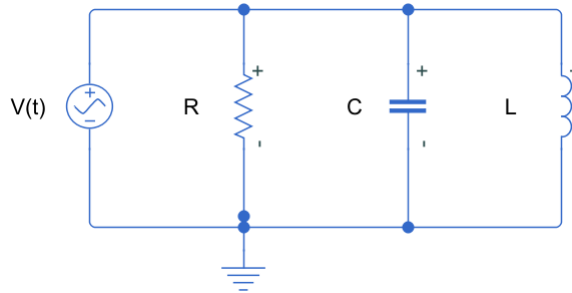
El código utilizado para el procesamiento de datos, simulaciones, generación de figuras y herramientas auxiliares desarrolladas durante este proyecto puede consultarse en:

- <https://github.com/edgarchen3/Trabajo-de-graduaci-n.git>

### 13.3. Circuitos y grafos empleados

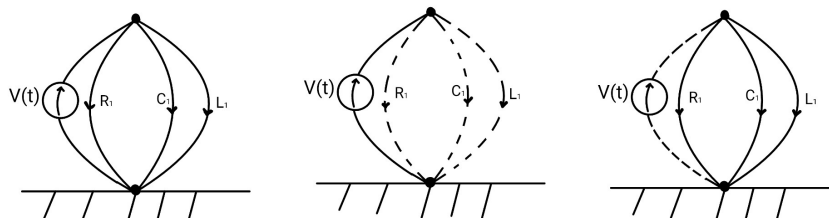
En esta sección se incluyen los esquemas eléctricos y los grafos lineales utilizados para el modelado topológico mediante LGM en los siete circuitos analizados. Todas las figuras fueron trazadas específicamente para este trabajo con el fin de documentar la estructura de cada sistema. Los grafos muestran el árbol normal y el coárbol empleado en cada caso, siguiendo los lineamientos metodológicos descritos en el Capítulo 7. Todas las imágenes son de elaboración propia.

**Figura 20.** Esquema del circuito 1 con red RLC en paralelo de orden 2



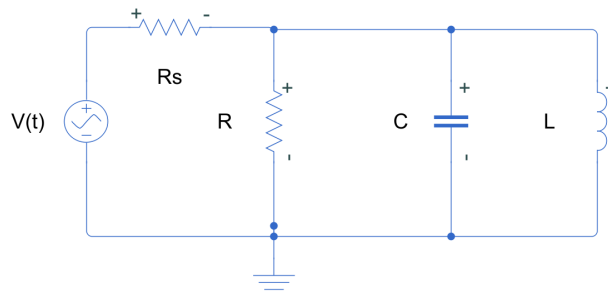
Nota. La imagen muestra el circuito RLC en paralelo utilizado en el Capítulo 3. Elaboración propia.

**Figura 21.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 1 (de izquierda a derecha)



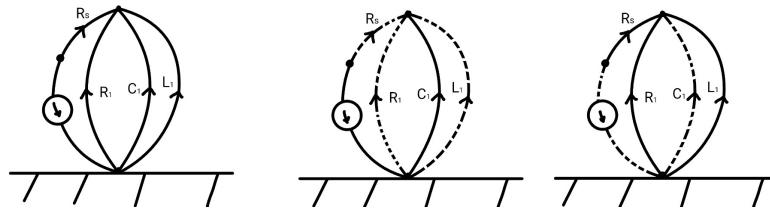
Nota. El grafo representa los enlaces asociados al inductor, capacitor y resistencia, así como las ramas del árbol normal. Elaboración propia.

**Figura 22.** Esquema del circuito 2 con red RLC en paralelo y resistencia serie de orden 2



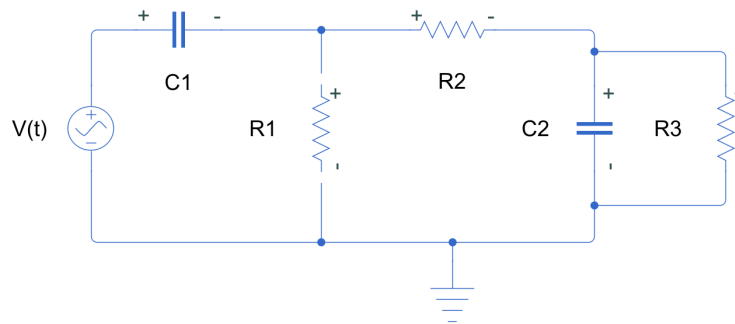
Nota. El diagrama muestra la resistencia serie añadida al lazo principal. Elaboración propia.

**Figura 23.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 2 (de izquierda a derecha)



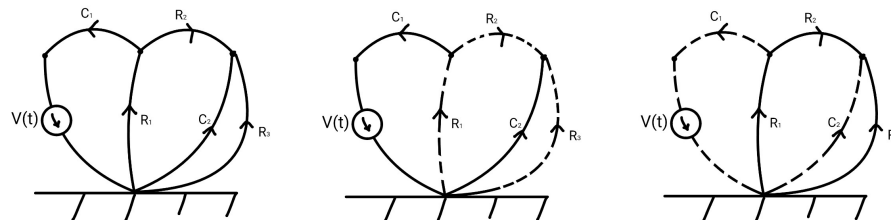
Nota. El grafo evidencia el cambio estructural debido a la resistencia serie. Elaboración propia.

**Figura 24.** Esquema del circuito 3 con filtro pasabanda RC de orden 2



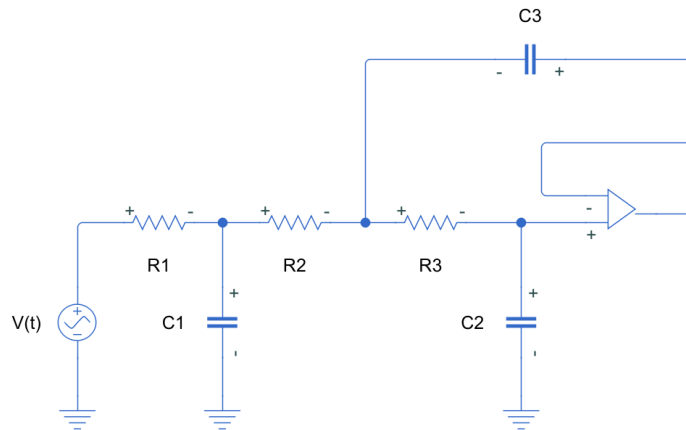
Nota. El circuito implementa una red RC acoplada que actúa como filtro pasabanda. Elaboración propia.

**Figura 25.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 3 (de izquierda a derecha)



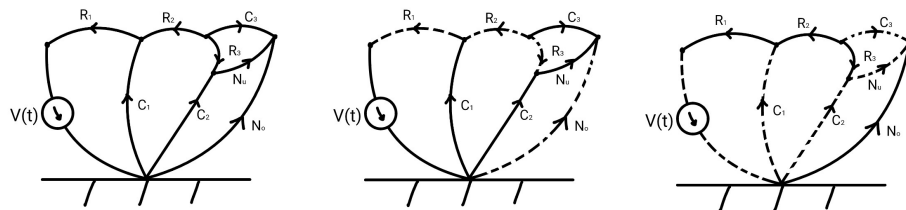
Nota. El grafo incluye los componentes resistivos y capacitivos en la topología pasabanda. Elaboración propia.

**Figura 26.** Esquema del circuito 4 con amplificador operacional y realimentación capacitiva de orden 3



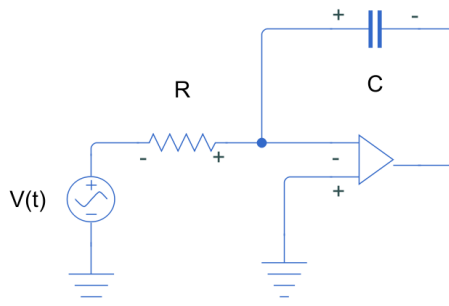
Nota. El circuito incorpora un amplificador operacional ideal, siguiendo la representación mediante *nullor* del Capítulo 7. Elaboración propia.

**Figura 27.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 4 (de izquierda a derecha)



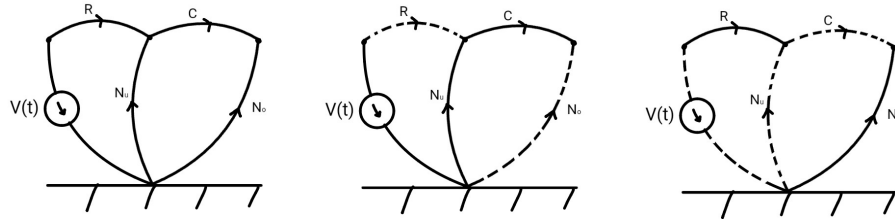
Nota. El grafo incluye la rama del *nullor* y los elementos de realimentación. Elaboración propia.

**Figura 28.** Esquema del circuito 5 con integrador ideal y amplificador operacional de orden 1



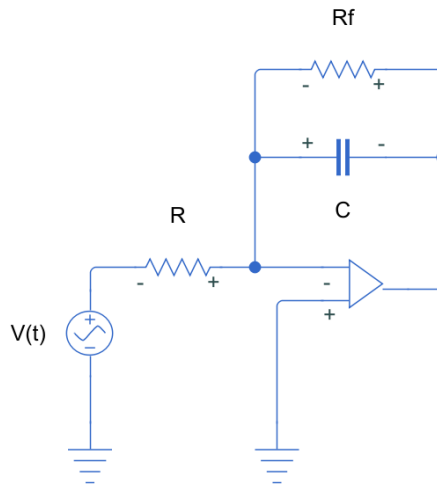
Nota. Implementación clásica del integrador ideal, utilizado para validar LGM en topologías de primer orden. Elaboración propia.

**Figura 29.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 5 (de izquierda a derecha)



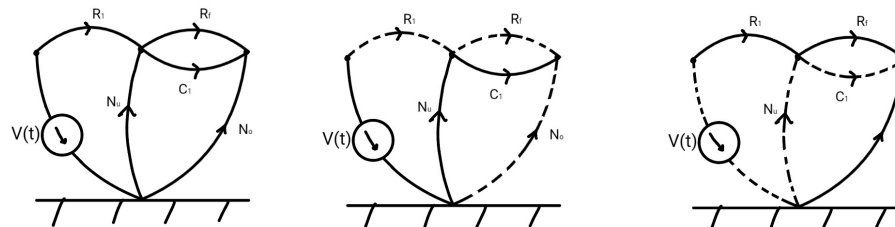
Nota. El grafo evidencia la rama del capacitor como enlace del árbol.  
Elaboración propia.

**Figura 30.** Esquema del circuito 6 con integrador real de orden 1



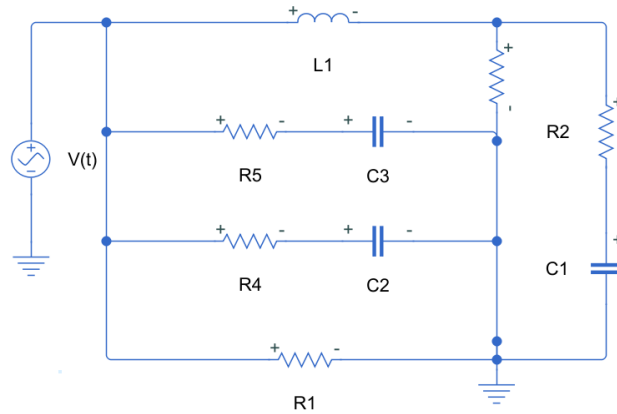
Nota. El capacitor se encuentra en paralelo con una resistencia, generando el integrador real. Elaboración propia.

**Figura 31.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 6 (de izquierda a derecha)



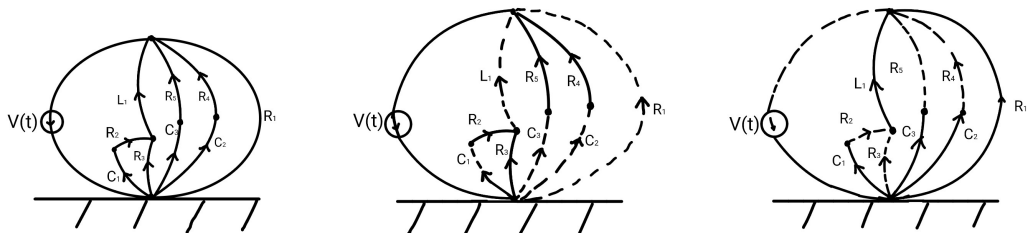
Nota. El grafo ilustra el enlace resistivo adicional del integrador real.  
Elaboración propia.

**Figura 32.** Esquema del circuito 7 con red RLC multirango acoplada de orden 4



Nota. La topología incluye múltiples caminos resistivos y tres elementos de almacenamiento. Elaboración propia.

**Figura 33.** Grafo lineal, árbol normal y coárbol asociados al circuito 7 (de izquierda a derecha)



Nota. El grafo muestra la estructura multirrama que conduce al comportamiento acoplado descrito en el Capítulo 7. Elaboración propia.