
Análisis de una lámpara de lava utilizando física computacional y aprendizaje automático

Javier Andrés Bocanegra Fuentes



UVG | UNIVERSIDAD
DEL VALLE
DE GUATEMALA

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Fuente: elaboración propia

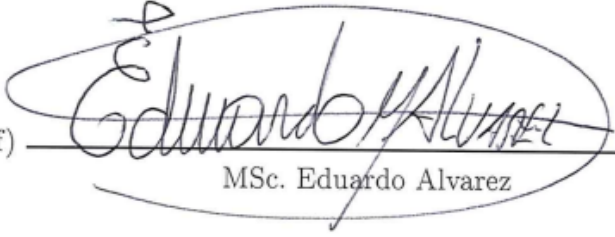
**Análisis de una lámpara de lava utilizando física
computacional y aprendizaje automático**

Trabajo de graduación presentado por Javier Andrés Bocanegra Fuentes
para optar al grado académico de Licenciado en Física

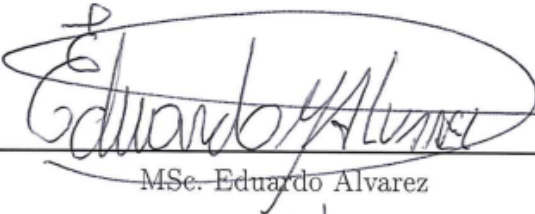
Guatemala,

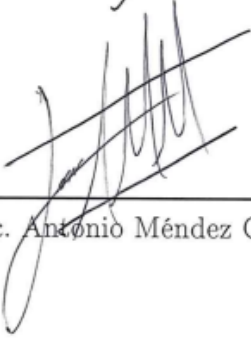
2025

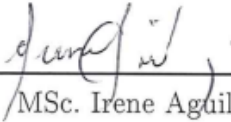
Vo.Bo.:

(f) 
MSc. Eduardo Alvarez

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Eduardo Alvarez

(f) 
MSc. Antonio Méndez Giono

(f) 
MSc. Irene Aguilar

Fecha de aprobación: Guatemala, 23 de septiembre de 2025.

Prefacio

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a quienes me apoyaron durante la realización de esta tesis y a lo largo de mi carrera.

En primer lugar, a mi director de carrera y asesor de tesis, MSc. Eduardo Álvarez, por su guía y disposición. Agradezco mucho su ayuda y empuje para lograr terminar este trabajo a tiempo, lo cual fue clave para poder dar el siguiente paso y comenzar mi maestría. De igual forma, gracias a mis maestros de la universidad por los conocimientos y las bases académicas que me brindaron durante estos años.

A mis amigos, agradezco su compañía y apoyo a lo largo de esta etapa universitaria, así como las tardes de sushi y pizza. De manera especial, conservo un profundo aprecio por Fernando, mi mejor amigo, cuya amistad ocupa un lugar importante en mi vida y cuyo recuerdo me acompaña en cada uno de mis logros.

Finalmente, dedico este trabajo a mi familia: a mi papá, por su respaldo y por impulsarme siempre a alcanzar mis metas; a mi hermana, por su compañía y apoyo constante; y a mi mamá, quien siempre me motivó a aspirar a lo más alto.

Prefacio	III
Lista de figuras	VI
Lista de tablas	VIII
Resumen	IX
Abstract	X
1 Introducción	1
2 Objetivos	2
2.1 Objetivos generales	2
2.2 Objetivos específicos	2
3 Justificación	3
4 Marco teórico	4
4.1 Introducción a las lámparas de lava	4
4.1.1 Partes de una lámpara de lava	4
4.1.2 Funcionamiento de una lámpara de lava	5
4.1.3 Términos relevantes	5
4.2 Simulación de fluidos	6
4.2.1 Aprendizaje automático	7
4.3 Modelo de temperatura contra tiempo	7
5 Antecedentes	8
6 Metodología	9
6.1 Diseño experimental	9
6.1.1 Material y equipo	9
6.2 Procedimiento experimental	10
6.2.1 Entrenamiento de modelos de aprendizaje automático	10
6.2.2 Modelo de temperatura contra tiempo	16
6.2.3 Simulación de fluidos	21
7 Resultados	22

7.1	Análisis de la lámpara de lava	22
7.1.1	Propiedades del sistema	22
7.1.2	Caracterización de las esferas	22
7.1.3	Ajuste teórico	29
7.2	Resultados de redes neuronales	32
7.2.1	Métricas	32
7.2.2	Gráficos de entrenamiento	33
7.2.3	Residuales	36
7.2.4	Comparación predicción contra datos reales	39
7.3	Resultados de árboles de decisión aleatorios	43
7.3.1	Métricas	43
7.3.2	Residuales	43
7.3.3	Comparación contra datos reales	46
7.4	Resumen de resultados de los modelos de aprendizaje automático	50
7.5	Modelo de temperatura contra tiempo	53
7.5.1	Simulación computacional	55
8	Discusión y análisis de resultados	59
8.1	Ajuste teórico de los blobs	59
8.2	Rendimiento de modelos de aprendizaje automático	61
8.3	Modelo de temperatura contra tiempo	61
8.4	Simulación por computadora	62
9	Conclusiones	63
10	Recomendaciones	64
11	Referencias	65
12	Anexos	67
12.1	Gráficas auxiliares	68
12.2	Archivos utilizados	71
12.3	Arquitecturas de los modelos de redes neuronales	72
12.4	Tablas de datos y resultados	75

Lista de figuras

Figura 1. Medidor de nivel de la cámara inclinado	11
Figura 2. Medidor de nivel de la cámara correcto	12
Figura 3. Montaje experimental (toma de datos)	13
Figura 4. Captura de pantalla de Tracker	15
Figura 5. Montaje experimental del modelo de temperatura contra tiempo	17
Figura 6. Medicion del contorno de contenedor	19
Figura 7. Foto del contenedor	20
Figura 8. Blob achatado	23
Figura 9. Secuencia de generación de blobs	25
Figura 10. Secuencia de generación de blobs secundarios	26
Figura 11. Velocidad contra radio de los blobs	27
Figura 12. Radio contra temperatura de los blobs	28
Figura 13. Velocidad contra temperatura de los blobs	29
Figura 14. Velocidad contra radio y ley de Stokes	30
Figura 15. Velocidad contra radio y modelo de arrastre cuadrático	31
Figura 16. Entrenamiento de red neuronal de 7 capas	33
Figura 17. Entrenamiento de red neuronal de 6 capas	34
Figura 18. Entrenamiento de red neuronal de 5 capas	35
Figura 19. Residuales de red neuronal de 7 capas	36
Figura 20. Residuales de red neuronal de 6 capas	37
Figura 21. Residuales de red neuronal de 5 capas	38
Figura 22. Velocidad contra radio de blobs de red neuronal	39
Figura 23. Velocidad contra radio de blobs de red neuronal y comparación	40
Figura 24. Radio contra temperatura de blobs de red neuronal	41
Figura 25. Radio contra temperatura de blobs de red neuronal y comparación	42
Figura 26. Residuales de bosque aleatorio de 100 árboles	44
Figura 27. Residuales de bosque aleatorio de 200 árboles	45
Figura 28. Residuales de bosque aleatorio de 300 árboles	46
Figura 29. Velocidad contra radio de blobs de bosques aleatorios	47
Figura 30. Velocidad contra radio de blobs de bosques aleatorios y comparación	48
Figura 31. Radio contra temperatura de blobs de bosques aleatorios	49
Figura 32. Radio contra temperatura de blobs de bosques aleatorios y comparación	50
Figura 33. Velocidad contra radio de red neuronal, bosque aleatorio y datos reales	51
Figura 34. Radio contra temperatura de red neuronal, bosque aleatorio y datos reales	52
Figura 35. Modelo de temperatura contra tiempo	54

Figura 36. Residuales del modelo de temperatura contra tiempo	55
Figura 37. Blob simulado 1	56
Figura 38. Blob simulado 2	57
Figura 39. Blob simulado 3	58
Figura 40. Velocidad contra radio, coloreado por temperatura	68
Figura 41. Velocidad contra radio, coloreado por aceleración	69
Figura 42. Velocidad contra radio, coloreado por número de Reynolds	70
Figura 43. Velocidad contra radio, coloreado por número de Weber	71
Figura 44. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 5 capas	72
Figura 45. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 6 capas	73
Figura 46. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 7 capas	74

Lista de tablas

Tabla 1.	Densidad del agua	22
Tabla 2.	Densidad de la cera	23
Tabla 3.	Número de Reynolds	23
Tabla 4.	Número de Weber	24
Tabla 5.	Modelos teóricos	30
Tabla 6.	Redes neuronales	32
Tabla 7.	Bosques aleatorios	43
Tabla 8.	Resumen de los modelos de aprendizaje automático	51
Tabla 9.	Valores de las constantes de la ecuación 7.1	53
Tabla 10.	Métricas del modelo de temperatura contra tiempo	53
Tabla 11.	Cuadro métricas de bosques aleatorios extendido	75
Tabla 12.	Muestra de los datos analizados	76

Esta investigación se centra en las mecánicas de las lámparas de lava y su análisis con modelos de aprendizaje automático y simulación computarizada. Se tomaron datos a partir de videos de la lámpara de lava en funcionamiento, con mediciones de temperatura. Estos fueron obtenidos por medio del software Tracker. Con estos datos, se realizaron estadísticas para obtener propiedades del sistema como las densidades, el número de Reynolds y el de Weber. Se analizaron diagramas de velocidad contra el radio de los blobs y se compararon con modelos de fluidos, pero se encontró que las distribuciones de estos diagramas no seguían las tendencias esperadas según los modelos debido a que su número de Reynolds era demasiado alto y que el de Weber muy bajo. Los modelos de aprendizaje automático, las redes neuronales y los bosques aleatorios lograron crear estimaciones de las velocidades con mejor exactitud y precisión que los modelos teóricos. El modelo de aprendizaje automático con el mayor error obtuvo un promedio de error absoluto de 0.001858, lo que representa un error de 1.8 mm/s en las estimaciones de velocidad. Los bosques aleatorios tuvieron mejores resultados que los de redes neuronales. La simulación por computadora no tuvo resultados consistentes. Se encontró que los blobs que generó se quedaban flotando en medio del líquido por mucho más tiempo que en la lámpara real y no seguían patrones periódicos de ascenso y descenso. La simulación logró recrear las formas de los blobs observados y crear blobs secundarios, consecuencia del número de Weber. Se recomienda utilizar una lámpara de lava con líquido menos opaco para facilitar las mediciones, así como utilizar una función para las pruebas de arquitectura de las redes neuronales.

Palabras clave: simulación de fluidos, dinámica de fluidos, lámpara de lava, número de Reynolds, número de Weber, densidad, temperatura, aprendizaje automático, redes neuronales, bosques aleatorios.

Esta investigación se centra en el análisis de las dinámicas presentes en lámparas de lava como sistema de estudio para fenómenos de fluidos inmiscibles en condiciones observables y controlables. Estos dispositivos presentan un comportamiento complejo asociado a la interacción entre dos fluidos de distinta densidad, sometidos a variaciones térmicas que inducen patrones de ascenso, descenso, deformación e interacción entre estructuras. Como antecedente relevante, el proyecto *Lavarand* (Liebow-Feeser, 2017a), utilizado por *Cloudflare* para la encriptación de servidores mediante una pared de lámparas de lava, muestra el interés práctico de estos sistemas debido a su naturaleza caótica. A partir de ello, en este trabajo se emplean herramientas de análisis de datos para estudiar con mayor profundidad los mecanismos que gobiernan su comportamiento y explorar la existencia de patrones medibles. Las lámparas de lava constituyen un entorno adecuado para este tipo de análisis, ya que permiten observar la dinámica de dos fluidos inmiscibles en una configuración relativamente accesible desde el punto de vista experimental. En este contexto, la investigación integra trabajo experimental, métodos numéricos, técnicas de optimización y modelos de aprendizaje automático para caracterizar el sistema y evaluar distintas aproximaciones de análisis.

CAPÍTULO 1

Introducción

El estudio de sistemas físicos mediante simulación computacional es una herramienta clave en la investigación científica. Los fenómenos de dinámica de fluidos multifásicos, como los observados en las lámparas de lava, permiten explorar principios como la convección térmica, el empuje, la tensión superficial y la deformación de interfaces.

Este trabajo combina observaciones experimentales con modelos teóricos y simulaciones computacionales, utilizando marcos como *smooth particle hydrodynamics* (SPH). También, se incorporan algoritmos de aprendizaje automático, incluyendo *random forest* y redes neuronales, para analizar y predecir las velocidades de ascenso de los blobs. Estos son las burbujas de cera ascendentes que se forman dentro del contenedor.

La investigación busca validar los modelos con datos reales y presentar los resultados de forma clara y útil. Esta integración de física, simulación y aprendizaje automático contribuye a mejorar la comprensión de sistemas térmicos no lineales y a desarrollar metodologías accesibles para el análisis de fenómenos de dinámica de fluidos.

2.1. Objetivos generales

- Desarrollar modelos de aprendizaje automático así como una simulación computacional para predecir las velocidades ascendentes de las esferas de cera en una lámpara de lava.
- Entrenar un modelo de aprendizaje automático.
- Comparar los resultados obtenidos mediante ecuaciones que describen el funcionamiento y comportamiento de una lámpara de lava con los modelos de aprendizaje automático.

2.2. Objetivos específicos

- Recopilar datos para entrenar los modelos de aprendizaje automático.
- Caracterizar las velocidades de las esferas de cera en base a la temperatura y los radios.
- Crear los modelos de aprendizaje automático.
- Programar una simulación de fluidos, de dos fases inmiscibles.

El estudio del comportamiento térmico y dinámico de las lámparas de lava permite explorar fenómenos físicos complejos como la convección, el empuje, la deformación de fluidos y la transferencia de calor. Estos sistemas, aunque decorativos en apariencia, ofrecen un entorno controlado para analizar interacciones entre fluidos con diferentes propiedades, lo que los convierte en modelos accesibles para validar teorías de dinámica de fluidos.

Además, la integración de técnicas de simulación como *Smooth Particle Hydrodynamics*, junto con modelos de aprendizaje automático como *Random Forest* y redes neuronales, permite construir representaciones predictivas del sistema. Esto permitirá un análisis a profundidad de sistemas de fluidos inmiscibles a temperaturas entre 50° y 70° Celsius.

La presente investigación busca vincular observaciones experimentales con modelos teóricos y computacionales, para validar los modelos mediante datos reales y presentar los resultados de forma clara y útil para estudiantes e investigadores interesados en mecánicas de fluidos.

4.1. Introducción a las lámparas de lava

Las lámparas de lava son artículos decorativos que se popularizaron por su estética psicodélica y su movimiento hipnótico. Fueron inventadas en 1963 por Edward Craven Walker, fundador de la compañía Mathmos. Su funcionamiento se basa en la interacción térmica entre una mezcla de cera y un líquido transparente dentro de un envase de vidrio. Al calentarse, la cera se vuelve menos densa que el líquido y asciende en forma de burbujas. Al ascender, su temperatura va decreciendo, hasta que se vuelve más densa que el agua y desciende. Esto se repite constantemente, generando un ciclo que recuerda al flujo de lava.

4.1.1. Partes de una lámpara de lava

- **Bombillo:** fuente de calor ubicada en la base, de tipo incandescente, que calienta la cera para iniciar el ciclo de movimiento.
- **Envase:** recipiente de vidrio que contiene la cera y el líquido. Su forma suele ser cilíndrica o cónica.
- **Base:** estructura que sostiene el envase y el bombillo.
- **Cera parafina:** sustancia con propiedades térmicas específicas que permiten tener una densidad variable, de tal manera que al calentarse sea menos densa que el agua y, al enfriarse, sea más densa. Se le denominará a esta sustancia cera parafina, parafina o cera, a lo largo de este estudio. En el pasado se solía utilizar cera parafina mezclada con tetracloruro de carbono para que la cera sea más densa que el agua pero debido al daño al medio ambiente que este compuesto causa, se utiliza otra sustancia para obtener ese efecto, la cual es secreto de la industria actualmente.
- **Agua (o líquido transparente):** medio en el que se desplaza la cera. Usualmente se utiliza agua. Puede contener colorantes o aditivos para ajustar la densidad y mejorar el contraste visual. Se referirá a esto cuando se mencione agua o líquido.

4.1.2. Funcionamiento de una lámpara de lava

Las lámparas de lava funcionan calentando el envase que contiene agua y parafina, por medio de un bombillo incandescente. Se calientan ambos medios, la viscosidad de la cera se reduce por la temperatura y pasa a ser líquida. Además, la densidad de la cera se reduce, siendo menor que el fluido que la rodea, por lo que la cera más caliente comienza a ascender, formando una esfera de cera que sube a través del otro fluido inmiscible.

La lámpara pasa por 2 fases principales: comienza con la cera sólida hasta abajo, luego esta cera se va calentando hasta que se vuelve líquida. Es ahí donde la segunda fase comienza, la cual es el objetivo de esta investigación.

4.1.3. Términos relevantes

- **Blob**: esferoide de cera parafina líquida que se forma dentro de la lámpara y asciende o desciende. Son las esferas de cera cuyo movimiento se analiza en esta investigación. En este estudio también se referirá a este objeto como esferas o esferoides de cera.
- **Velocidad de ascenso vy** : velocidad con la que el blob asciende a través del líquido. Se le va a denotar como la variable vy a lo largo de la investigación y en los gráficos de los resultados.
- **Densidad ρ** : propiedad que determina la masa por unidad de volumen de un fluido. La densidad del agua es de $0.997Kg/m^3$ aunque varía con la temperatura.
- **Viscosidad μ** : mide la resistencia interna al flujo; influye en la disipación de energía.
- **Tensión superficial o interfacial T** : fuerza que actúa en la interfaz entre dos fluidos, relevante en la formación de burbujas.
- **Esferoide**: elipsoide de revolución. Es una esfera achatada. Se pueden dar con forma oblata o prolata, dependiendo de cual sea el semieje mayor.
- **Achatamiento f** : propiedad de un esferoide, indica la compresión de una esfera a lo largo de su diámetro. Está definido por la siguiente fórmula:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (4.1)$$

- a : largo del semieje mayor
- b : largo del semieje menor
- f : achatamiento.
- **Deformaciones**: cambios en la forma de un volumen fluido o sólido bajo la acción de fuerzas internas o externas. En simulaciones, se modelan mediante tensores de deformación y permiten estudiar comportamientos como estiramiento, compresión o cizalladura.
- **Calor específico**: cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa.
- **Convección**: mecanismo de transferencia de calor mediante el movimiento del fluido.
- **Número de Reynolds Re** : relación entre las fuerzas inerciales y viscosas en un fluido. Permite distinguir entre flujo laminar y turbulento, y es clave para caracterizar la dinámica de las burbujas en movimiento.

- **Número de Weber We :** relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas de tensión superficial. Permite analizar la deformación y ruptura de gotas o burbujas en flujos multifásicos.
- **Fuerza de arrastre F_d :** fuerza resistiva que actúa sobre un objeto en movimiento relativo al fluido circundante. Depende de la velocidad, la viscosidad del fluido y la geometría del objeto. Este es el que se le llamará modelo de arrastre cuadrático, ya que depende del cuadrado de la velocidad. Está definido por la siguiente fórmula:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho v^2 C_d A \quad (4.2)$$

- F_d : fuerza de arrastre (N)
 - ρ : densidad del fluido (kg/m^3)
 - v : velocidad (m/s)
 - C_d : coeficiente de arrastre (adimensional)
 - A : área de referencia perpendicular al flujo (m^2)
- **Ley de Stokes:** aproximación válida para objetos esféricos moviéndose lentamente en un fluido viscoso. Establece que el arrastre es proporcional a la velocidad y al radio de la esfera:

$$F_d = 6\pi\mu Rv \quad (4.3)$$

- μ : viscosidad
- R : radio
- v : velocidad

Esta trabaja bajo el supuesto de un número de Reynolds muy bajo ($Re \ll 1$), flujo laminar, objetos esféricos no deformables, superficies lisas, materiales uniformes y que las partículas no interfieran unas con otras.

- **Ecuaciones de Navier–Stokes:** conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de fluidos viscosos. Incorporan conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, y son fundamentales para modelar fenómenos como la convección en lámparas de lava.

4.2. Simulación de fluidos

Para realizar una simulación de fluidos se pueden implementar diferentes técnicas, ya sea implementaciones de *smooth particle hydrodynamics* (SPH) o *position based dynamics* (PBD). Ambas son metodologías lagrangianas, mientras que existen otras de estilo Euleriana. Se utilizan estas ya que simplifica el proceso para crear una simulación de fluidos de dos fases. Para la simulación de esta investigación se utilizará la primera opción (SPH).

- ***Smooth particle hydrodynamics* (SPH):** método numérico basado en partículas para simular fluidos y sólidos deformables. Utiliza funciones de interpolación (kernels) para calcular propiedades físicas a partir de vecinos cercanos.
- **Modelo lagrangiano:** representación del fluido mediante partículas que se mueven con el flujo. Permite seguir trayectorias individuales y es útil en SPH y simulaciones de mezcla.
- **Modelo euleriano:** representación del fluido en una malla fija donde se calcula el cambio de propiedades en cada celda. Es común en simulaciones de flujo continuo y turbulencia.
- **Kernel:** función de suavizado utilizada en SPH para distribuir propiedades físicas entre partículas vecinas. Su forma y radio de influencia afectan la precisión y estabilidad de la simulación.

4.2.1. Aprendizaje automático

Existen varios modelos de aprendizaje automático, en esta investigación se utilizarán específicamente los modelos de *random forest* y redes neuronales.

- **Random forest:** algoritmo de conjunto basado en múltiples árboles de decisión. Realiza predicciones agregando los resultados de cada árbol, lo que mejora la precisión y reduce el sobreajuste.
- **Red neuronal:** modelo compuesto por capas de neuronas artificiales que transforman entradas mediante funciones de activación. Es capaz de aprender patrones complejos en datos no lineales.
- **Frontfeed (feedforward):** arquitectura de red neuronal donde la información fluye en una sola dirección, desde la entrada hasta la salida, sin ciclos ni retroalimentación.
- **Neurona:** unidad básica de una red neuronal. Recibe entradas, las pondera, aplica una función de activación y transmite la salida a la siguiente capa.
- **Sobreajuste:** problemas comunes donde el modelo se ajusta demasiado o muy poco a los datos de entrenamiento, llevando a estimaciones erróneas.
- **Métricas:** criterios utilizados para evaluar el rendimiento de los modelos. Incluyen medidas de error y precisión.
- **MAPE, MAE, MSE:**
 - **MAPE** (*Mean absolute percentage error*): error porcentual medio absoluto, útil para interpretar errores en unidades relativas.
 - **MAE** (*Mean absolute error*): promedio del valor absoluto de los errores; mide la desviación media sin penalizar grandes errores.
 - **MSE** (*Mean squared error*): promedio de los errores al cuadrado; penaliza más los errores grandes y es sensible a datos atípicos.

4.3. Modelo de temperatura contra tiempo

- **Ley de enfriamiento de Newton:** establece que la tasa de cambio de temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del entorno.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{amb}}) \quad (4.4)$$

- $T(t)$: temperatura del cuerpo en función del tiempo.
- T_{amb} : temperatura del ambiente.
- k : constante de enfriamiento (positiva).
- **Método del factor integrante:** técnica analítica para resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, útil para obtener soluciones explícitas del modelo de enfriamiento.
- **Condiciones iniciales:** valores de temperatura al tiempo $t = 0$ que permiten definir completamente la solución del modelo.
- **Constante de enfriamiento (k):** parámetro que depende de las propiedades térmicas del cuerpo y del medio; determina la rapidez del enfriamiento.
- **Modelo exponencial:** comportamiento típico de enfriamiento donde la temperatura decae de forma no lineal hacia el equilibrio térmico.

Las mecánicas de la lámpara de lava han sido objeto de estudio en varias investigaciones. La integración con inteligencia artificial no ha sido estudiado al mismo nivel. Mientras tanto, se han realizado múltiples estudios sobre simulaciones de fluidos.

- Gyüre y János desarrollaron un estudio acerca de la convección que ocurre en las lámparas de lava. En esta investigación crearon un modelo de una lámpara de lava utilizando un recipiente con agua y aceite de silicon. Encontraron diferentes condiciones para la convección de los blobs, así como patrones de movimiento de las esferas. En base a esto, compararon este comportamiento al de la convección bajo el manto de la tierra y concluyeron que, aunque es una interesante analogía, el comportamiento de las lámparas de lava es diferente al de la magma subterránea. Esto es porque las condiciones bajo el manto contienen rangos de temperatura mucho más amplios ($r_T \approx 0.8 - 0.9$), y los líquidos no son completamente inmiscibles, a diferencia del entorno dentro de la lámpara (Gyüre y János, 2009).
- En Reino Unido, Koschier exploró técnicas de modelado para simulaciones de fluidos, utilizando *smoothed particle hydrodynamics* (SPH). Esta investigación detalla los componentes de una simulación eficiente, mencionando aspectos como los algoritmos de búsqueda de vecinos, metodología para cálculo de propiedades de fluidos y técnicas para el manejo de fronteras (Koschier et al., 2019).
- El investigador Youvan plantea la idea de analizar el comportamiento de una lámpara de lava con modelos de aprendizaje automático. Específicamente, sugiere la idea de comparar el rendimiento de una simulación de fluidos compleja, contra el de una red neuronal, para explorar la idea de agilizar procesos con mecánicas complicadas con ayuda de modelos de aprendizaje automático (Youvan, 2024).

6.1. Diseño experimental

6.1.1. Material y equipo

Se utilizó una lámpara de lava marca Motion Lamp con las siguientes especificaciones:

- Dimensiones (lámpara completa): $40.5\text{ cm} \times 10.5\text{cm} \times 10.5\text{cm}$
- Dimensiones (contenedor): $25.0\text{cm} \times 7.5\text{cm} \times 7.5\text{cm}$
- Bombillo incandescente de 25 Watts
- Color: naranja
- Peso: 0.945 Kg

Para toda la programación de la simulación y de las redes neuronales se utilizó una laptop Lenovo Legion 5 con las especificaciones:

- Procesador: AMD Ryzen 7 4800H
- Núcleos: 8
- Memoria RAM: 16.0 GB
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GTX 1660 Ti

Para las mediciones se utilizó:

- Termómetro infrarrojo marca Steren HER-424

- Regla metálica de 30cm
- Celular Pixel 8
- Hules
- Lata de gaseosa
- Soporte para celular
- Software Tracker

6.2. Procedimiento experimental

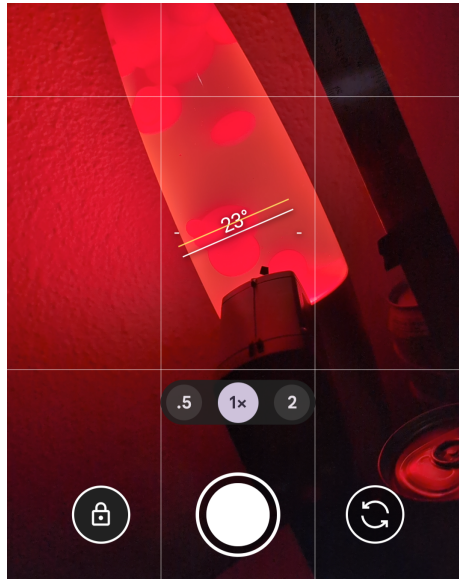
El procedimiento se divide en tres partes: el entrenamiento de los modelos de aprendizaje automático, el modelo de temperatura contra tiempo y la programación de la simulación de fluidos.

6.2.1. Entrenamiento de modelos de aprendizaje automático

Toma de datos

Para estas mediciones, primero, se debía fijar el celular con el que se iban a grabar los videos. Por ello se colocó en un soporte de celular, sujeto con tres hules para asegurarse de que no se moviera. Este celular tiene un medidor de ángulo visible en la cámara, lo que permitió ajustar el ángulo de grabación y asegurar mediciones alineadas entre sí, con una resolución de 1 grado.

Figura 1. Medidor de nivel de la cámara inclinado

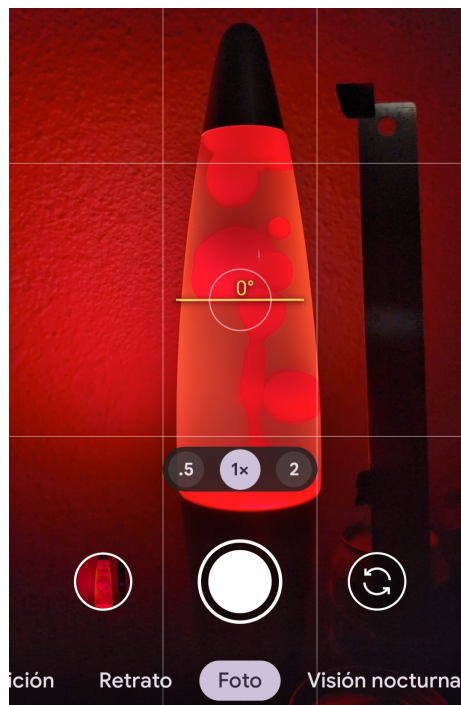


Nota. En la imagen se muestra la medición del nivel de la cámara, el ángulo del eje longitudinal se muestra con número de grados, y se muestra un indicador del eje lateral para saber si se encuentra inclinado hacia adelante, hacia atrás o completamente vertical.

Fuente: elaboración propia

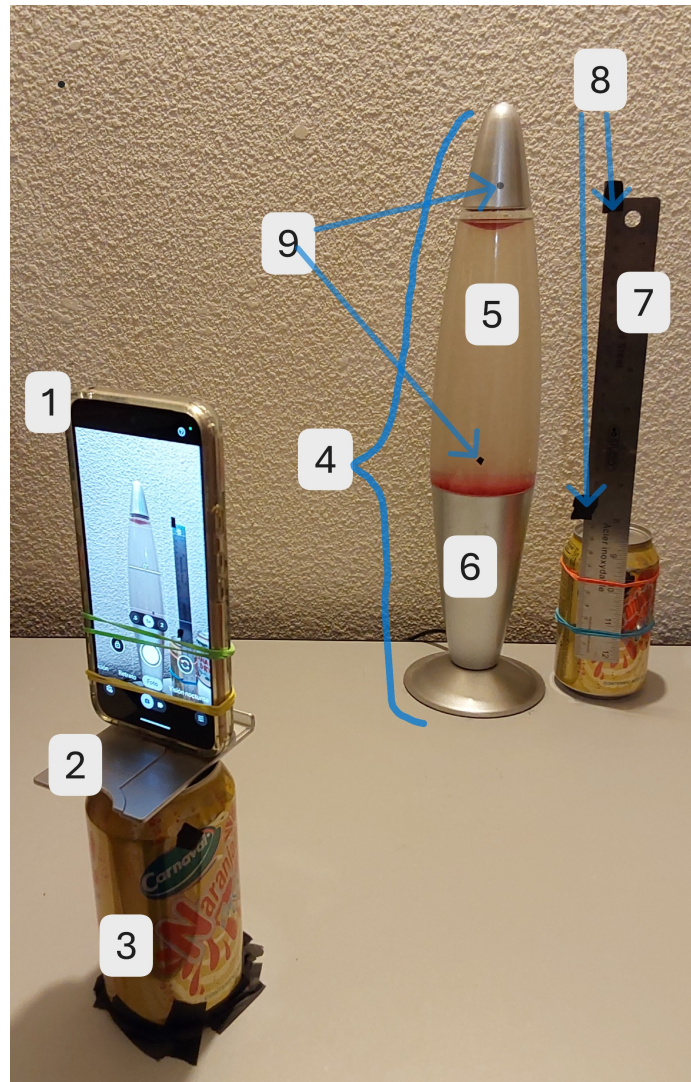
El celular y el soporte se colocan sobre una lata de gaseosa para que la cámara esté a la altura del contenedor de la lámpara. Al lado de la lámpara se coloca una regla de 30 centímetros de largo, fijada con hules a una lata. Esta regla tiene dos marcas separadas por 18 centímetros para poderse utilizar como vara de calibración en el software Tracker. El montaje experimental se muestra en la siguiente imagen:

Figura 2. Medidor de nivel de la cámara correcto



Nota. Medición de nivel correcta, donde el sensor de nivel muestra 0 y las líneas de inclinación frontal se alinean y cambian de color a amarillo. Esta es la línea amarilla que se encuentra debajo del 0 en el centro de la imagen.
Fuente: elaboración propia

Figura 3. Montaje experimental (toma de datos)



Nota. El montaje experimental para la toma de videos de la lámpara de lava
Fuente: elaboración propia

Este montaje consta de las siguientes partes:

1. El teléfono celular con el que se graban los videos.
2. El soporte al cuál se le fija el celular con hules.
3. Lata de gaseosa para que la cámara esté al nivel del contenedor de la lámpara de lava.
4. Lámpara de lava
5. Contenedor de los fluidos de la lámpara de lava
6. Base de la lámpara de lava
7. Regla metálica de 30cm fijada con hules a una lata
8. Marcas para la calibración en el software Tracker
9. Marcas para la medición de temperatura con el termómetro infrarrojo

El procedimiento para la grabación de videos fue el siguiente:

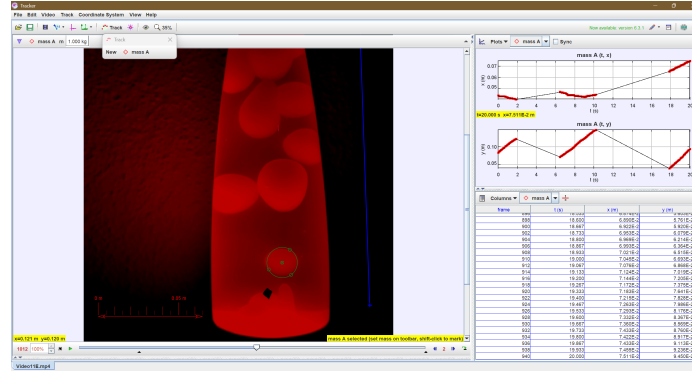
- Se comienza a grabar un video en el celular cuando inicia el movimiento cíclico de la cera.
- Se mide la temperatura en la orilla inferior y superior del contenedor utilizando un termómetro infrarrojo.
- El puntero láser del termómetro se apunta a las marcas negras (objeto 9 en la figura 3) para asegurar mediciones consistentes en el mismo lugar.
- Se graban los videos con una duración aproximada de 1 minuto. Si son más largos, se cortan en trozos de 1 minuto.

Se graban videos tratando de tener muestras de todo el rango de temperatura que el ciclo de la lámpara atraviesa, específicamente, desde 52° celsius hasta 68°. Con los videos grabados en este rango, se pasan a procesar con Tracker :

- En el software se observan las esferas ascendentes y se marca su posición en cada fotograma.
- Se mide el radio aproximado de cada esfera utilizando el ajustador de círculos del software.
- Esta medición se basa en la longitud de calibración establecida por las marcas de la regla metálica.
- Para registrar la temperatura:
 - Se coloca una regla de Tracker en una esquina del video.
 - Se ajusta el largo de la regla según la medición del instrumento.
 - Se establece una equivalencia de 1 mm por cada grado Celsius.
 - Por ejemplo, una medición de 58.7°C equivale a una longitud de 58.7×10^{-3} .

Estos datos se exportaron en formato *comma separated value*. Luego, en el software Microsoft Excel se juntaron las columnas de tiempo t , posición horizontal x , posición vertical y , velocidad vertical vy , temperatura inferior $tempD$, temperatura superior $tempU$ y radio de la esfera R . Los datos de todos los videos se agruparon en un archivo único.

Figura 4. Captura de pantalla de Tracker



Nota. Captura de pantalla del proceso de medición en el software Tracker.
Fuente: elaboración propia

Se analizaron 17 videos en total, a 30 fotogramas por segundo y resolución de 2160×3840 píxeles, recolectando 2613 datos entre 88 diferentes esferas de cera, luego de filtrar datos inválidos, como datos en los que no se obtuvo un valor de velocidad, al ser el primero o último de la muestra, o datos donde la velocidad se grabó como 0 cm/s, lo que representa que se grabó la misma posición dos veces seguidas, siendo una medición repetida. Estos datos se quitaron del conjunto final ya que llevaría a que el modelo aprenda con mediciones erróneas. Esto ocurría con archivos grandes (≈ 500 MB o mayor), donde el software Tracker puede tener fallas breves, repitiendo 2 fotogramas.

Con estos datos, se creó un set de datos adicional, donde se agruparon en base a las esferas. Esto se hizo con el fin de analizar los radios y velocidades con respecto a la temperatura del contenedor. Se utilizó el lenguaje de programación SQL para realizar las agrupaciones de manera más conveniente. Luego, se grafican los radios de las esferas como variable dependiente contra la temperatura, al igual que las velocidades. Por último, se graficaron las velocidades contra los radios de las esferas. Posteriormente se compararán estas gráficas con las obtenidas con las predicciones de las redes neuronales, para analizar si las predicciones de las redes neuronales preservan estas características.

Los modelos teóricos con los que se compararán los resultados serán:

- **Ley de Stokes:** la velocidad predicha por la ley de Stokes (Ecuación 4.3).
- **Arrastre cuadrático:** la velocidad predicha por el modelo de arrastre cuadrático (Ecuación 4.2).

Programación de modelos de aprendizaje automático

Los modelos de aprendizaje automático utilizados fueron *random forest* y redes neuronales. Estos se escogieron debido a que el primero de estos es uno de los modelos más comunes de aprendizaje automático, y las redes neuronales son un modelo más moderno que funciona fundamentalmente diferente. Se programaron en el compilador Spyder para el lenguaje python. Se probaron diferentes arquitecturas para cada modelo, tratando de optimizar los resultados, particularmente con las redes neuronales, debido a la amplia gama de arquitecturas y parámetros posibles.

La ejecución de estos modelos consta de los siguientes pasos:

- El código utiliza la librería Pandas y Numpy para cargar el archivo csv con todos los datos y armar una base de datos.
- Se filtran los datos, se quitan valores no numéricos y valores donde la velocidad es igual a 0.
- Para las redes neuronales únicamente, se normalizan todas las variables para que se encuentren en el rango entre 0 y 1.
- Se separan las variables predictoras de la variable dependiente y se arman los sets de datos.
- Se utiliza el 75 % de los datos para entrenar los modelos y se comprueba su eficacia con el 25 % restante.
- Se calculan las métricas de error de los modelos al realizar predicciones.

Para las redes neuronales, este proceso se repitió múltiples veces para comparar diferentes arquitecturas y encontrar la más adecuada para estos datos. Ya que estos modelos permiten definir la cantidad de capas de neuronas, la cantidad de neuronas por cada capa, las funciones de activación de cada neurona individual, entre otros, la complejidad del modelo es mucho mayor que la de los modelos de árboles de decisión. Las arquitecturas de las 3 redes neuronales principales se escogieron todas con funciones de activación gelu, 3 capas de normalización y 2 capas de dropout, variando la cantidad de capas por modelo, desde 5 hasta 7. Diagramas de las arquitecturas pueden encontrarse en anexos.

En el caso de los bosques aleatorios, se compararon múltiples arquitecturas pero variando únicamente 2 parámetros, árboles y capas. Esto se automatizó con la función GridSearchCV de la librería scikit-learn. Esta función agilizó el proceso ya que crea todos los modelos y calcula sus métricas para luego poder seleccionar el mejor.

Se compararon las siguientes variables:

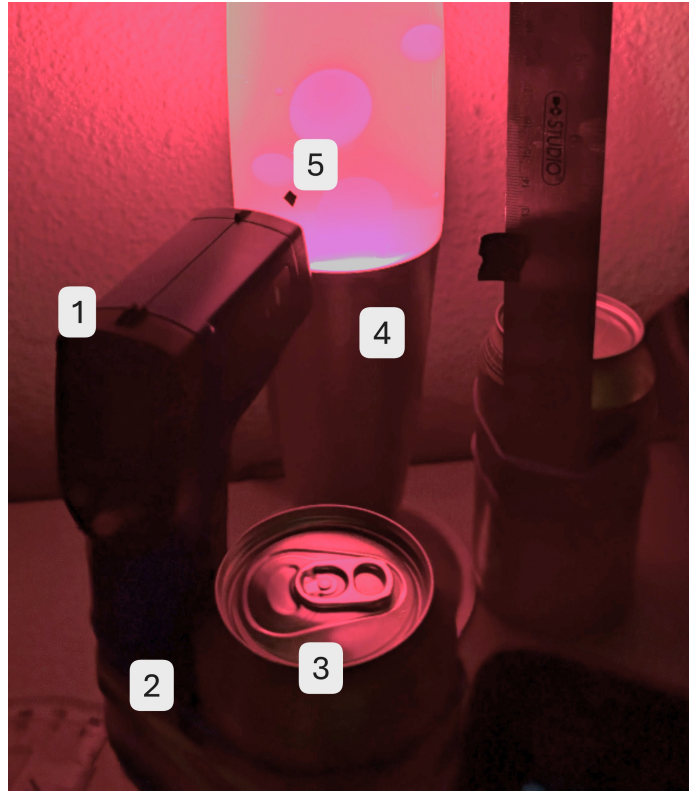
- Estimadores [100, 200, 300]
- Capa Máxima: [10, 15, 20, 25, 30]

6.2.2. Modelo de temperatura contra tiempo

Mediciones

Para realizar el modelo de la temperatura de la lámpara contra el tiempo primero se realizaron mediciones de la temperatura real. Como el objetivo es modelar la temperatura del ciclo de la lámpara, se debían grabar los datos del ciclo entero, el cual dura aproximadamente 4 horas. Para esto se realizó el siguiente montaje experimental:

Figura 5. Montaje experimental del modelo de temperatura contra tiempo



Nota. Montaje experimental para las mediciones de temperatura a largo plazo de la lámpara de lava.

Fuente: elaboración propia

El montaje se compone de las siguientes partes:

1. Termómetro infrarrojo marca Steren.
2. Hules.
3. Lata.
4. Lámpara.
5. Marca de medición.

Se fija el termómetro con hules a una lata, ajustándolo tal que el indicador láser del termómetro coincida con la marca de medición (objeto 5 en la imagen 5). El termómetro se fija a 2 centímetros de distancia del contenedor de la lámpara.

Para grabar las mediciones se utiliza una hoja de cálculo electrónica de Microsoft Excel. Esta hoja se programó con una automatización para agilizar la toma de datos. En la hoja se anota la temperatura medida, se presiona un botón en la misma hoja y esta copia el valor de la temperatura y copia la hora local, creando una serie de datos con una columna de tiempo y otra de temperatura.

Una vez el montaje se encuentra armado y la hoja inicializada, se enciende la lámpara. Cuando la lámpara llega a los 50° celsius, se inician las mediciones de temperatura, en intervalos de 5 minutos. Para facilitar el proceso se inicia un temporizador que cada 5 minutos suena una alarma. Este proceso se repite hasta que la temperatura llega a un equilibrio, lo cual ocurre aproximadamente 4 horas luego de que alcanza los 50° celsius. Al llegar al equilibrio, se mide la temperatura a los alrededores de la lámpara para tener una idea de la temperatura ambiente.

Creación del modelo

Para el modelo, se deduce la forma general de la ecuación en base a la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) + Z \quad (6.1)$$

donde la ecuación tiene una estructura similar a la ley de enfriamiento de Newton (4.4) pero tiene un término adicional Z . Ya que esta ley indica el cambio de temperatura de un objeto caliente en un ambiente más frío, donde este objeto se va acercando a la temperatura ambiente a velocidad decreciente, el término Z representa la energía que el bombillo incandescente le aporta al contenedor.

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no homogénea. Utilizando el método del factor integrante se llega a la solución :

$$T(t) = T_a + \frac{Z}{k} + De^{-kt} \quad (6.2)$$

Cálculo de las constantes

Para encontrar las diferentes constantes de la ecuación se seguirá este procedimiento:

- Z
 - Esta constante equivale a la energía que recibe el contenedor, en unidades de temperatura por segundo. Se obtiene despejando ΔT de la ecuación $Q = mC_{agua}\Delta T$.
 - Para obtener la masa m del agua se integrará numéricamente el volumen del contenedor, considerándolo un sólido de revolución.
- D y k
 - k es el coeficiente de transferencia de calor, el cual esta relacionado con el flujo de calor, el área por la cual se irradia el calor, la temperatura del ambiente, la temperatura de la superficie, entre otros.
 - D es una constante de integración arbitraria.
 - Por estas razones, ambas constantes serán encontradas utilizando métodos numéricos para encontrar valores apropiados para las constantes, al encontrar el mínimo de la suma de los errores cuadrados. Específicamente, el algoritmo *generalized reduced gradient* implementado en Microsoft Excel.

Según la estructura de la ecuación 6.1, la constante Z debe estar en unidades de temperatura. Para obtener este valor se utilizó el consumo eléctrico del bombillo de la lámpara, ya que es la fuente de calor que tiene el sistema. Para convertir el valor de energía a temperatura, se utiliza un estimado de la masa del agua del contenedor, la capacidad calorífica del agua y se convierte la unidad de

Watts a Joules por segundo con la conversión $1W = 1J/s$.

Utilizando la ecuación de cambio de temperatura y capacidad calorífica y despejando para ΔT

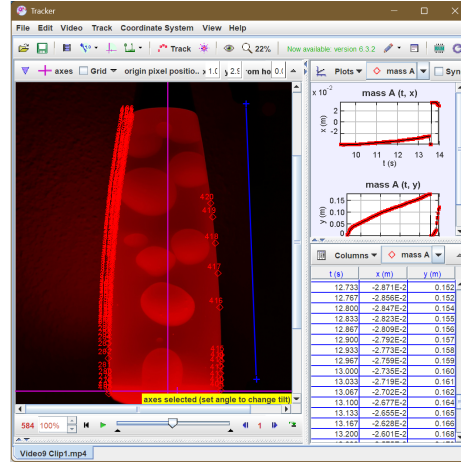
$$Q = mC_{agua}\Delta T \quad (6.3)$$

$$\Delta T = \frac{Q}{mC_{agua}} \quad (6.4)$$

- ΔT es el cambio de temperatura, en Kelvins
- Q es la energía que aporta el bombillo, en Joules
- m es la masa del agua, en gramos

Para obtener un estimado de la masa del agua, se toma una captura de los videos de la sección de la toma de datos, del entrenamiento de modelos de redes neuronales.

Figura 6. Medicion del contorno de contenedor



Nota. Medición del contorno de la botella en el software Tracker.

Fuente: elaboración propia

En el software Tracker se marca el contorno utilizando la funcionalidad de Autotracker aunque seleccionando manualmente los datos. Una vez se tienen suficientes datos para modelar la superficie (128 datos, ≈ 1 dato por milímetro) se toman un par de datos del lado opuesto del contenedor, para obtener un máximo y un mínimo en el eje horizontal y así encontrar el punto medio. En base al centro de la lámpara, y asumiendo que es simétrica radialmente, se puede integrar el volumen numéricamente, en base a sólidos de revolución e integración con discos.

La fórmula general para este cálculo está dada por la siguiente función:

$$V = \pi \int_a^b f(y)^2 dy \quad (6.5)$$

Figura 7. Foto del contenedor



Foto del contenedor, puede observarse que el agua comienza a partir de la primera indentación del contenedor hasta la indentación superior.

Fuente: elaboración propia

Para realizar la integración numéricamente se simplifica a una sumatoria de Riemann:

$$V = \pi \sum_{i=1}^n f(y_i)^2 * \Delta y \quad (6.6)$$

- $f(y_i)$ son los valores de x de las mediciones
- Δy es la diferencia de y entre datos adyacentes

Se debe ajustar el valor de la coordenada x para tomar en cuenta el grosor del vidrio, estimado a ser de 2 milímetros de grosor (Martins, 2017). Con los datos ajustados, se crea una sumatoria en el software Microsoft Excel y se estima la masa del agua en el contenedor a aproximadamente 0.527 Kg.

Los límites de la sumatoria se toman en esos puntos ya que esos son los límites del volumen del agua, como puede observarse en la siguiente imagen:

Con el valor de la masa de agua, la energía del bombillo en Joules por segundo y la capacidad calorífica del agua, se encuentra el valor de ΔT por segundo, para la constante Z

Constantes k y D . Utilizando valores de las mediciones de temperatura previamente realizadas, se despeja el valor de estas constantes, para obtener una estimación inicial. Con este valor inicial, se modela en Microsoft Excel, creando una columna de t , una de $f(t)$ y una de $T(t)$, donde

- t es el tiempo, en segundos.
- $f(t)$ es la predicción de la temperatura en base al modelo preliminar y los valores iniciales de las constantes, en grados Celsius.
- $T(t)$ es el valor de la medición de la temperatura en ese tiempo, en grados Celsius.

Con estas columnas, se toma la diferencia de $f(t)$ y $T(t)$, se eleva al cuadrado, se suman todas las diferencias y se promedia. El módulo Solver para análisis de datos en Microsoft Excel, se configura para minimizar esta última celda, modificando las celdas con las constantes k y D , obteniendo los valores de las constantes.

Una vez se tiene la ecuación que gobierna el comportamiento, se estima el tiempo total transcurrido desde que la lámpara llegó a los 50° Celsius hasta su punto actual, según la temperatura de la base. Por ello, se despeja la ecuación para obtener su inverso y se utiliza la temperatura para calcular un tiempo. Para mediciones consecutivas con la misma temperatura, se suma la diferencia de tiempo desde el punto anterior. En mediciones con nuevas temperaturas, se vuelve a estimar el tiempo con la ecuación. Esto resulta en una estimación temporal que permite tener datos unificados de la lámpara y una variable más para el entrenamiento de las redes de la primera sección, así como desarrollar las funciones de diferentes variables dependientes del tiempo, como los radios de las esferas o sus velocidades.

6.2.3. Simulación de fluidos

La simulación de fluidos se creó con base en la programación de Sebastián Lague (SebLague, 2023). Utilizar esta simulación como base agilizó el proceso ya que se encuentran implementadas las mecánicas fundamentales de los fluidos, como la incompresibilidad. La simulación fue desarrollada en el entorno de Unity utilizando *scripts* en lenguaje C#. Esto permite que la simulación opere en tiempo real gracias a que este lenguaje de programación es más rápido, en comparación con el lenguaje Python. Aún así se realizaron modificaciones. Específicamente, se necesitaba que la simulación pudiera manejar dos fluidos diferentes, inmiscibles entre sí, y controlar el cambio de densidad de uno de los fluidos para crear la convección observada en la lámpara de lava.

Para que la simulación cumpliera con estos requisitos, primero, se agregó el fluido como un objeto, para así crear una segunda instancia del fluido. Aparte, se agregó un atributo a estos objetos para indicar el tipo de fluido. Con estos cambios, se implementó lógica en los métodos de repulsión, tal que exista una nueva repulsión que aplique entre dos fluidos distintos. Por último, para generar la convección, se crearon zonas con modificadores de densidad, creando áreas donde se reduce la densidad (región inferior) y otras donde aumenta (región superior). Se aseguró que estas regiones solo afectaran a uno de los fluidos, el que sería la parafina, ya que el cambio de densidad del agua es despreciable en el intervalo térmico en el que la lámpara opera, en comparación de la cera.

7.1. Análisis de la lámpara de lava

7.1.1. Propiedades del sistema

Tabla 1. Densidad del agua

Densidad del agua	
Promedio	982.85
Mediana	982.43
Moda	980.97
Desviación estándar	2.77
Rango	9.12
Mínimo	978.63
Máximo	987.75

Nota. Estadísticas descriptivas de la densidad del agua calculada.
Fuente: elaboración propia

7.1.2. Caracterización de las esferas

Forma

Se encontró que los *blobs* tenían formas de tipo esferoide achatado, como en la investigación de Ellingsen y Risso, 2001 y deformaciones mayores.

Tabla 2. Densidad de la cera

Densidad de la cera	
Promedio	981.53
Mediana	981.61
Moda	N/A
Desviación estándar	3.73
Rango	16.96
Mínimo	970.69
Máximo	987.65

Nota. Estadísticas descriptivas de la densidad de la cera calculada.
Fuente: elaboración propia

Tabla 3. Número de Reynolds

Número de Reynolds	
Promedio	955.86
Mediana	1021.33
Moda	N/A
Desviación estándar	291.63
Rango	1195.10
Mínimo	253.75
Máximo	1448.86

Nota. Estadísticas descriptivas del número de Reynolds calculado.
Fuente: elaboración propia

Figura 8. Blob achatado



Nota. Imagen de uno de los blobs con forma de esferoide achatado, con un factor de achatamiento de $f = 0.2267$.

Fuente: elaboración propia

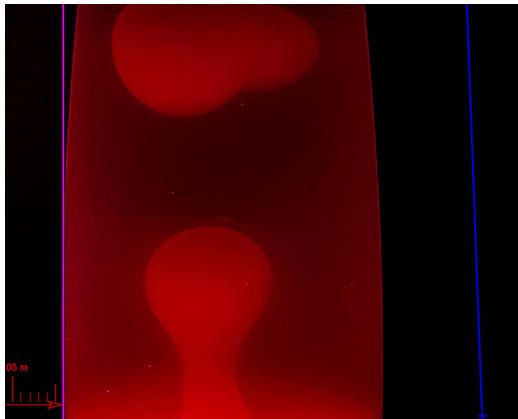
Tabla 4. Número de Weber

Número de Weber	
Promedio	0.1614
Mediana	0.1500
Moda	N/A
Desviación estándar	0.0714
Rango	0.3005
Mínimo	0.0215
Máximo	0.3220

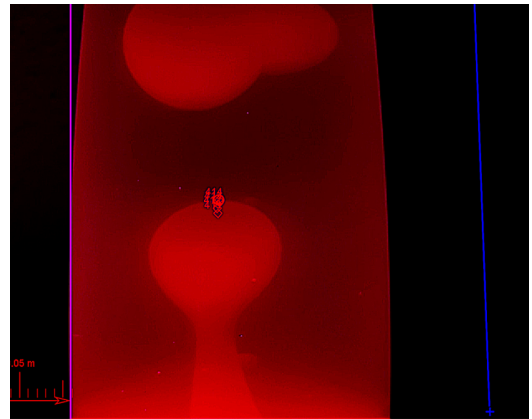
Nota. Estadísticas descriptivas del número de Weber calculado.
Fuente: elaboración propia

Proceso de creación de blobs A continuación se muestran secuencias del proceso de creación de *blobs*. Se observa cómo surgen desde abajo, creando una columna de cera a medida que ascienden hasta que se separan y se libera la burbuja. En las siguientes secuencias también se puede observar la deformación que experimentan a medida que avanzan y la creación de blobs secundarios. Esto se discutirá más adelante.

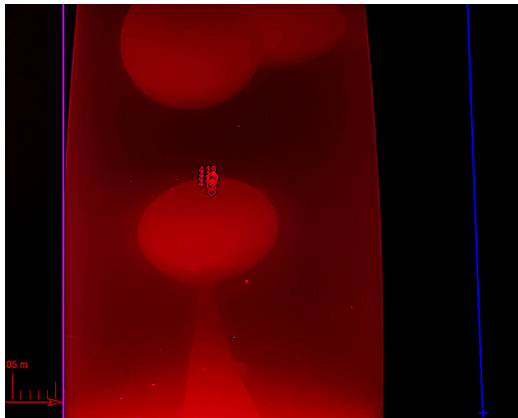
Figura 9. Secuencia de generación de blobs



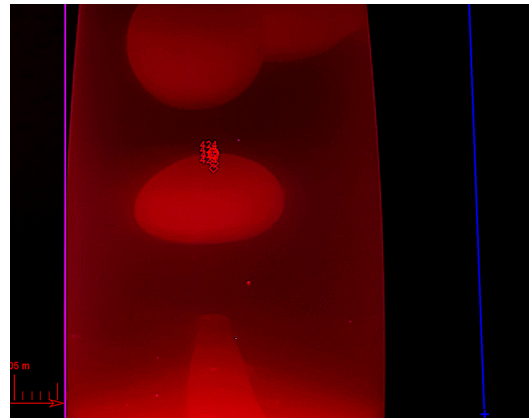
(a)



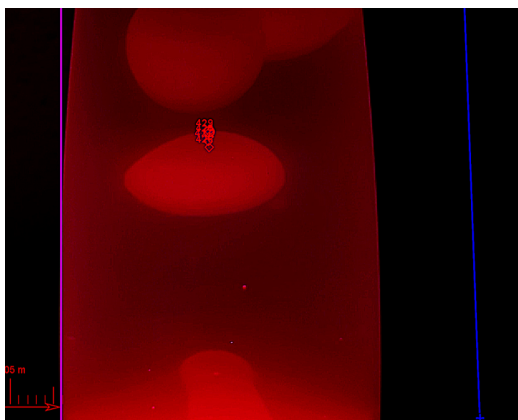
(b)



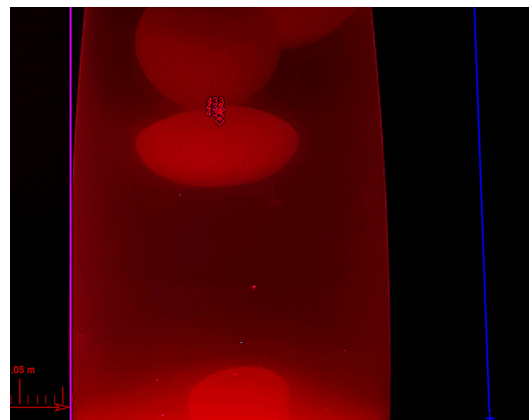
(c)



(d)



(e)

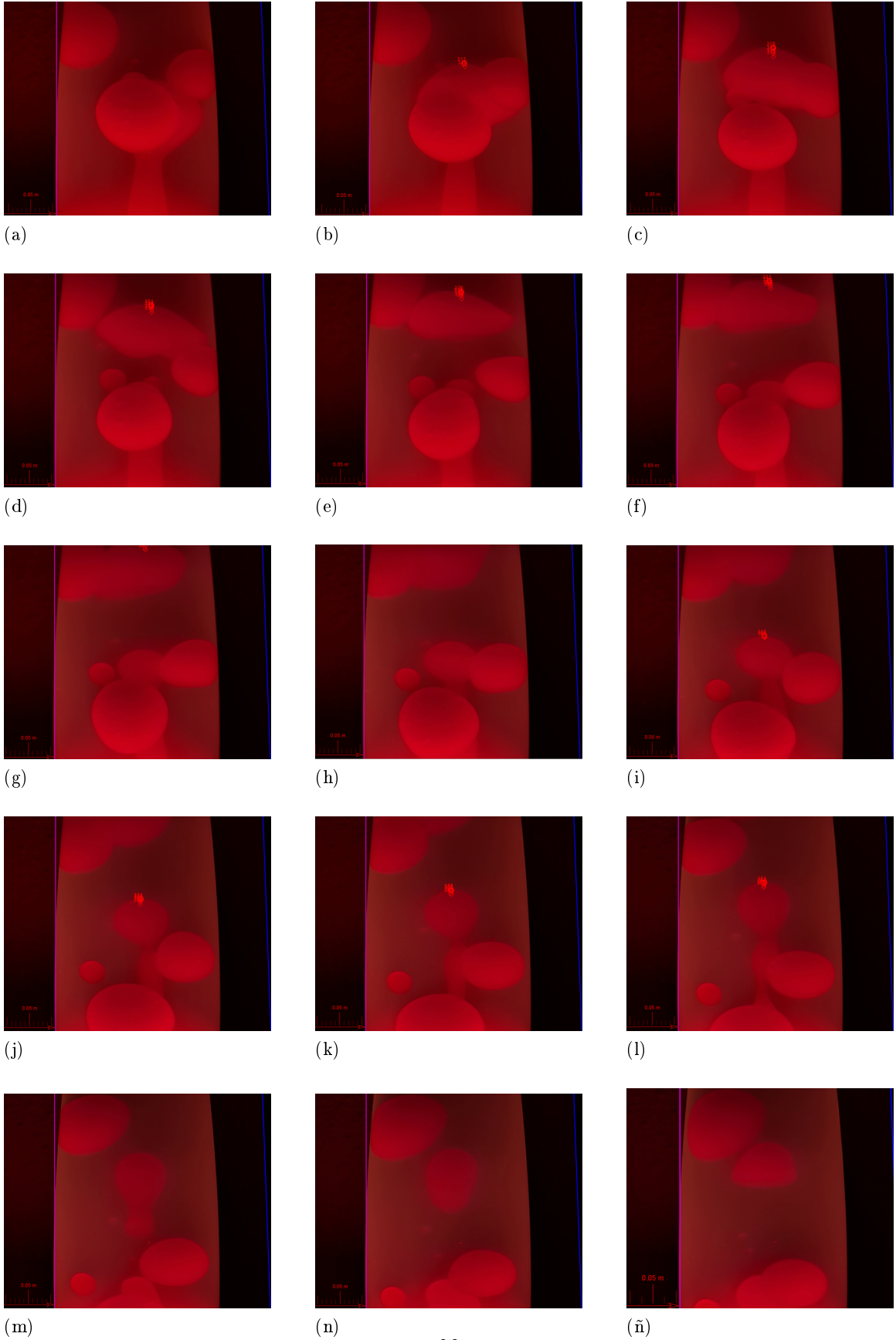


(f)

Nota. Imágenes del proceso de creación de blobs, tomadas en secuencia cada 10 fotogramas (66.7ms).

Fuente: elaboración propia

Figura 10. Secuencia de generación de blobs secundarios

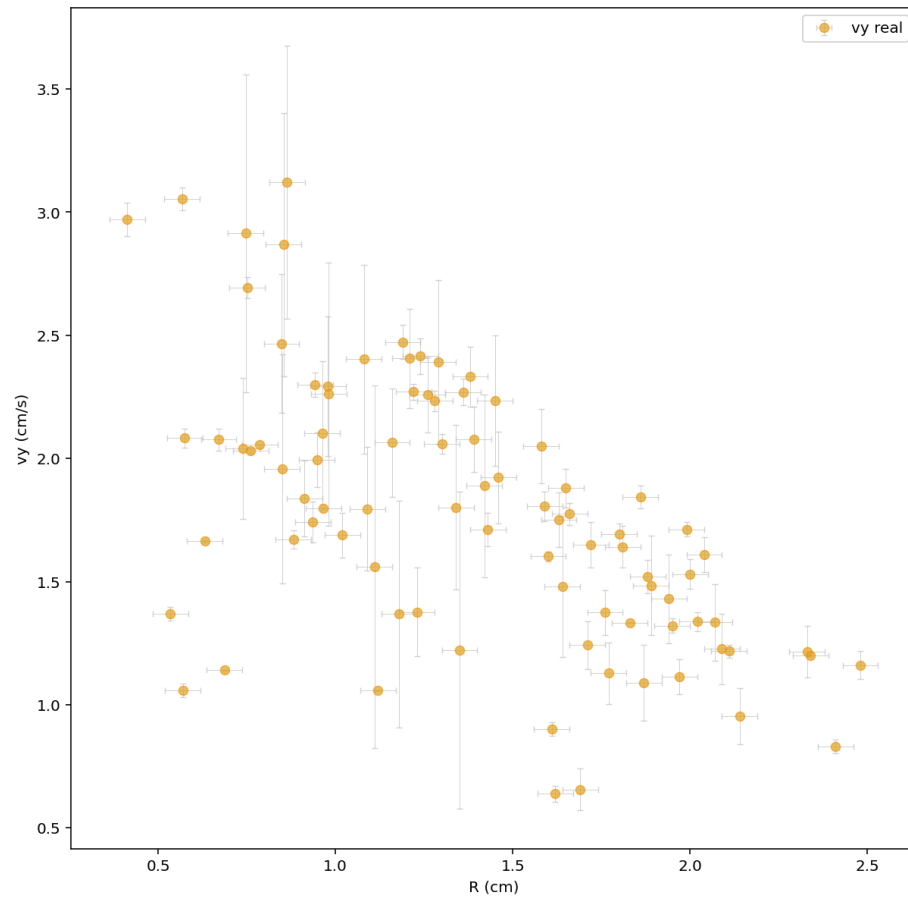


Nota. Imágenes del proceso de creación de blobs secundarios, tomadas en secuencia por cada 10 fotogramas (66.7ms).
Fuente: elaboración propia

Diagramas de dispersión de los blobs

En esta sección se muestran los diagramas de dispersión de los blobs. Para este set de datos y los obtenidos de los modelos de aprendizaje automático se mostrarán los diagramas de velocidad de ascenso contra el radio de los blobs así como su velocidad de ascenso en comparación con la temperatura del envase. Adicional se muestra un gráfico del radio contra la temperatura.

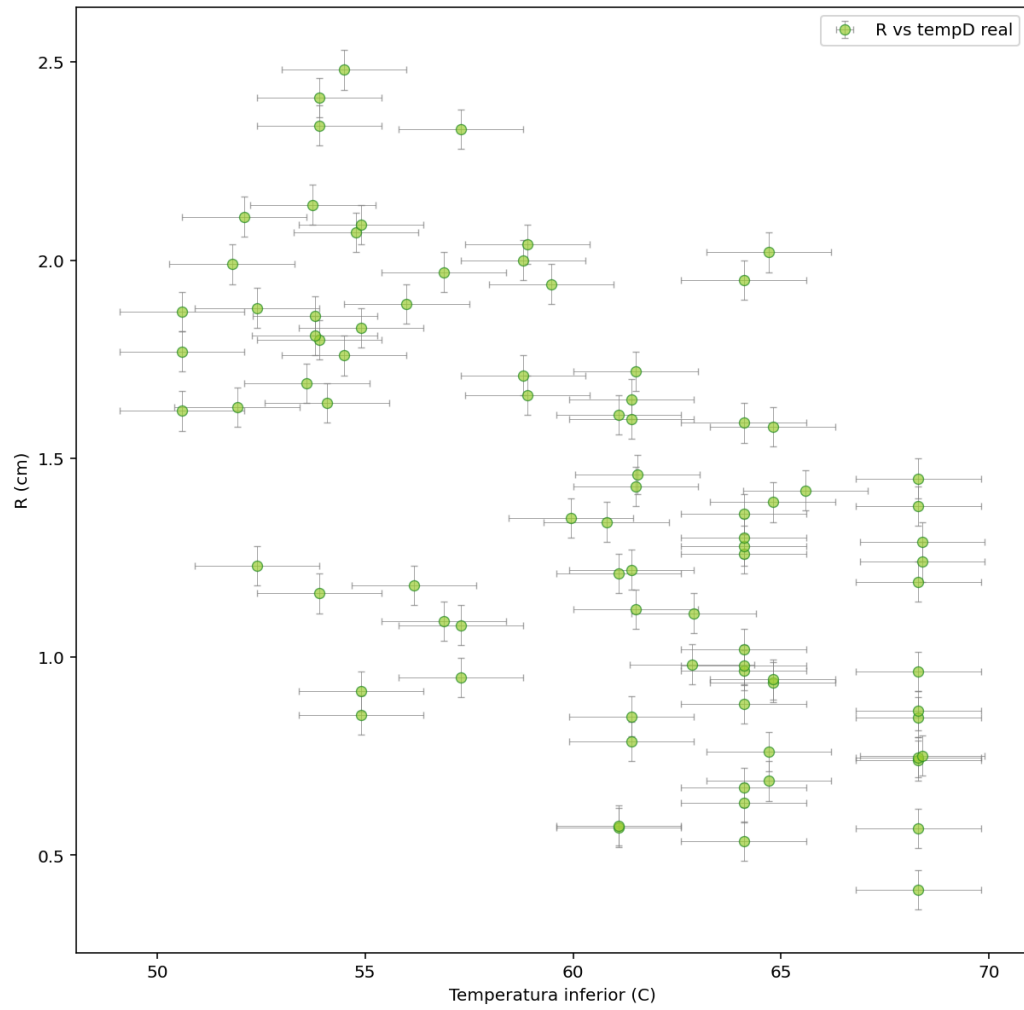
Figura 11. Velocidad contra radio de los blobs



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso contra radio, con barras de error de ± 0.05 cm en el radio y la desviación estándar para la velocidad.

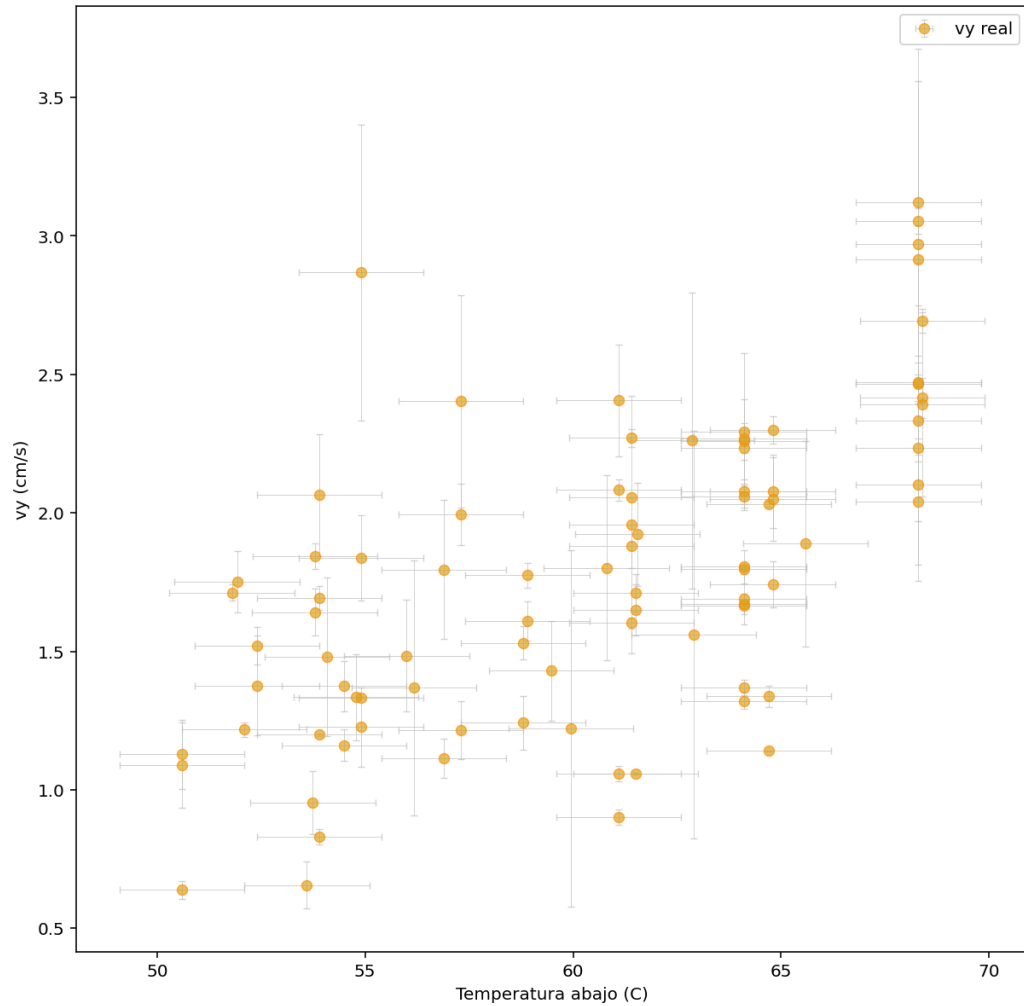
Fuente: elaboración propia

Figura 12. Radio contra temperatura de los blobs



Nota. Gráfico de dispersión de radio contra temperatura inferior, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

Figura 13. Velocidad contra temperatura de los blobs



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso contra temperatura inferior, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

7.1.3. Ajuste teórico

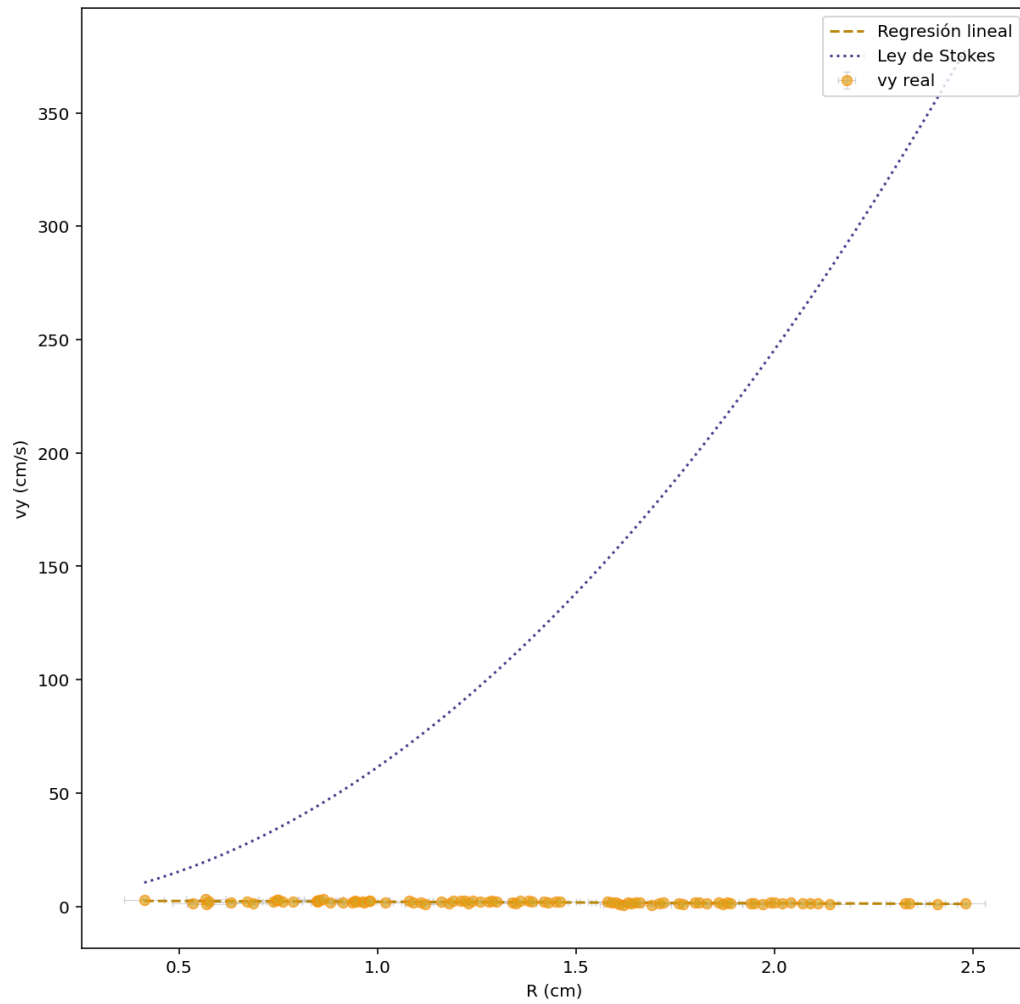
Aquí se muestra cómo se ajustan los datos en base a los modelos teóricos definidos en el marco teórico (4.2, 4.3).

Tabla 5. Modelos teóricos

Modelo	Ecuación (R en cm)	R^2
Regresión lineal	$-0.641R + 2.661$	0.351
Ley de Stokes	$61.3714R^2$	-112.3E+3
Arrastre cuadrático	$0.185731\sqrt{R}$	-6.925

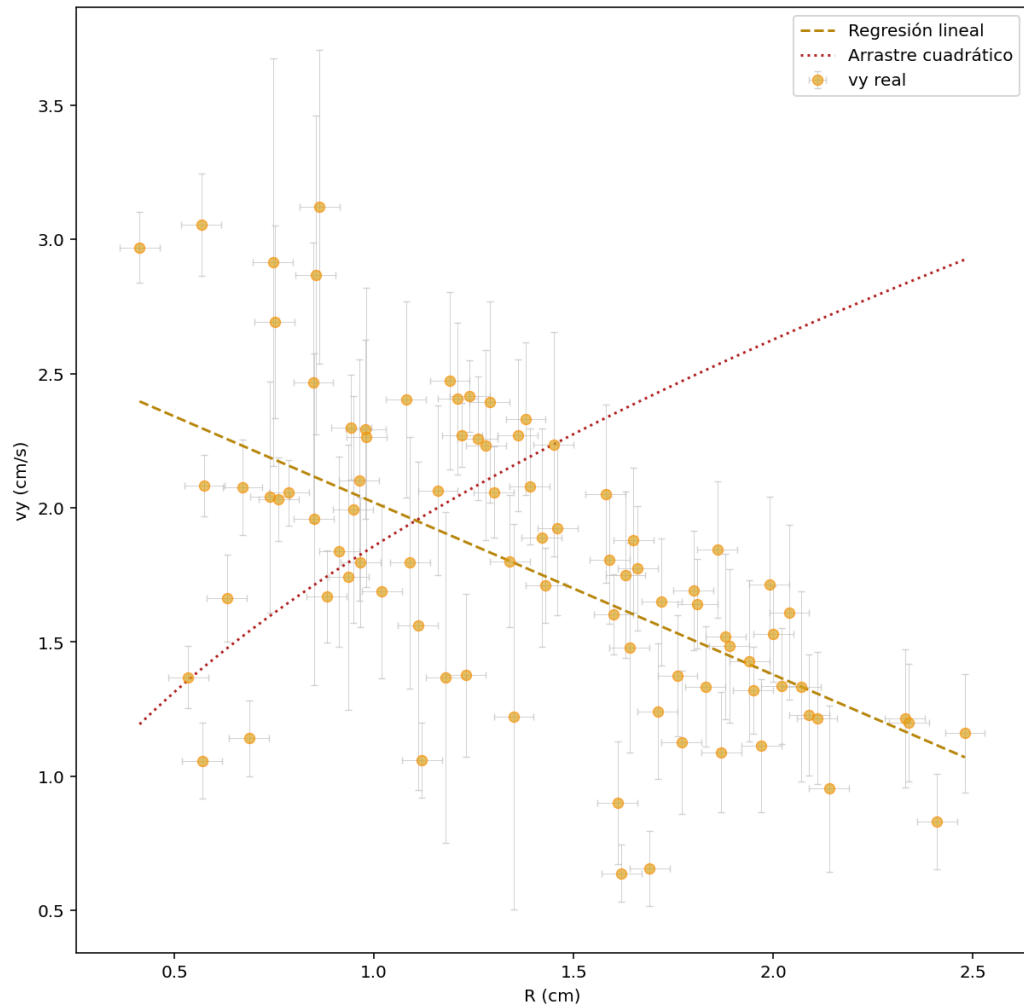
Nota. Ecuaciones y valor de R^2 de los modelos teóricos.
Fuente: elaboración propia

Figura 14. Velocidad contra radio y ley de Stokes



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso vs radio, con el modelo de ley de Stokes de la tabla 5 trazado sobre los datos.
Fuente: elaboración propia

Figura 15. Velocidad contra radio y modelo de arrastre cuadrático



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso vs radio, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y la desviación estándar para la velocidad, con una regresión lineal ajustada a los datos y una regresión en base a la ecuación de arrastre cuadrático.

Fuente: elaboración propia

7.2. Resultados de redes neuronales

Una vez entrenadas las redes neuronales se calcularon sus métricas y se obtuvieron los siguientes resultados:

7.2.1. Métricas

Tabla 6. Redes neuronales

Capas	MAE	MSE	RMSE	R ²	STD
7	0.001858	0.000006	0.002486	0.861977	0.002485
6	0.001809	0.000006	0.002437	0.867357	0.002437
5	0.001840	0.000006	0.002448	0.866123	0.002448

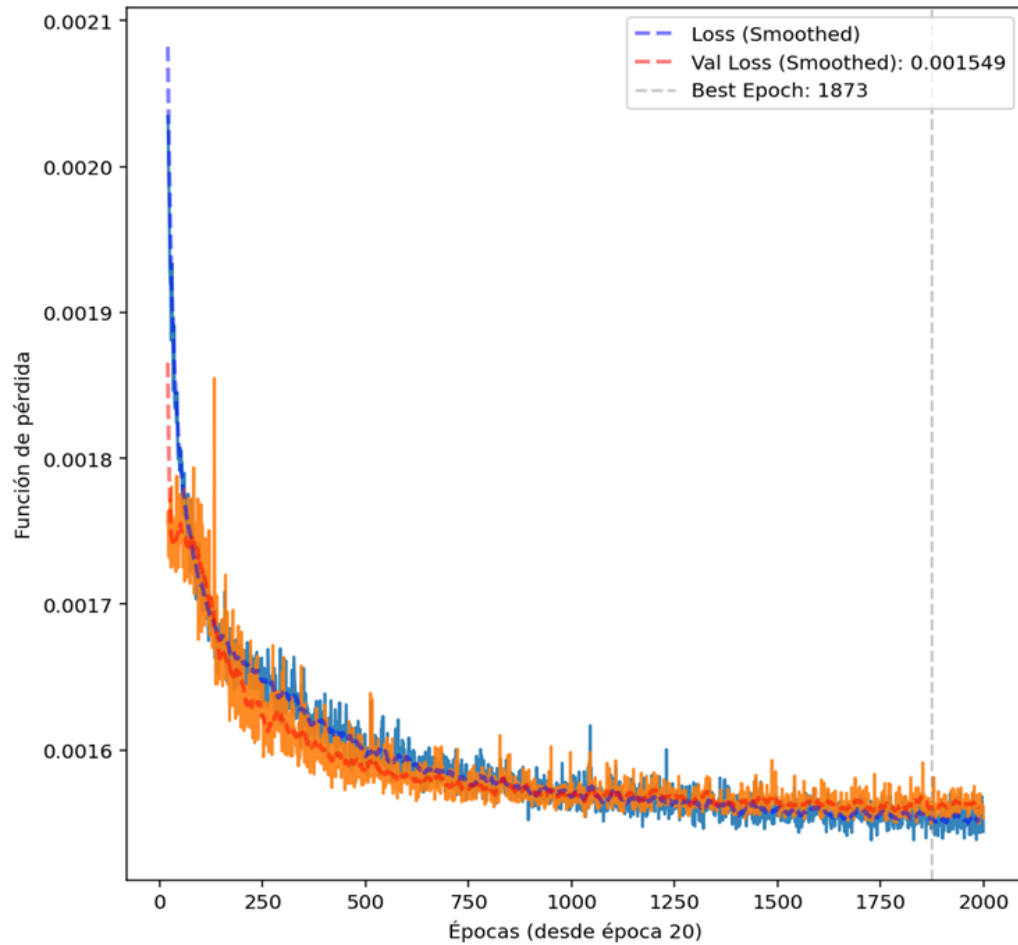
Notas. Cuadro comparativo de error de las predicciones, comparando redes neuronales de 256 neuronas con diferente cantidad de capas de activación con función gelu.

Fuente: elaboración propia

7.2.2. Gráficos de entrenamiento

Al entrenar estas redes neuronales, se obtuvieron los siguientes gráficos de entrenamiento.

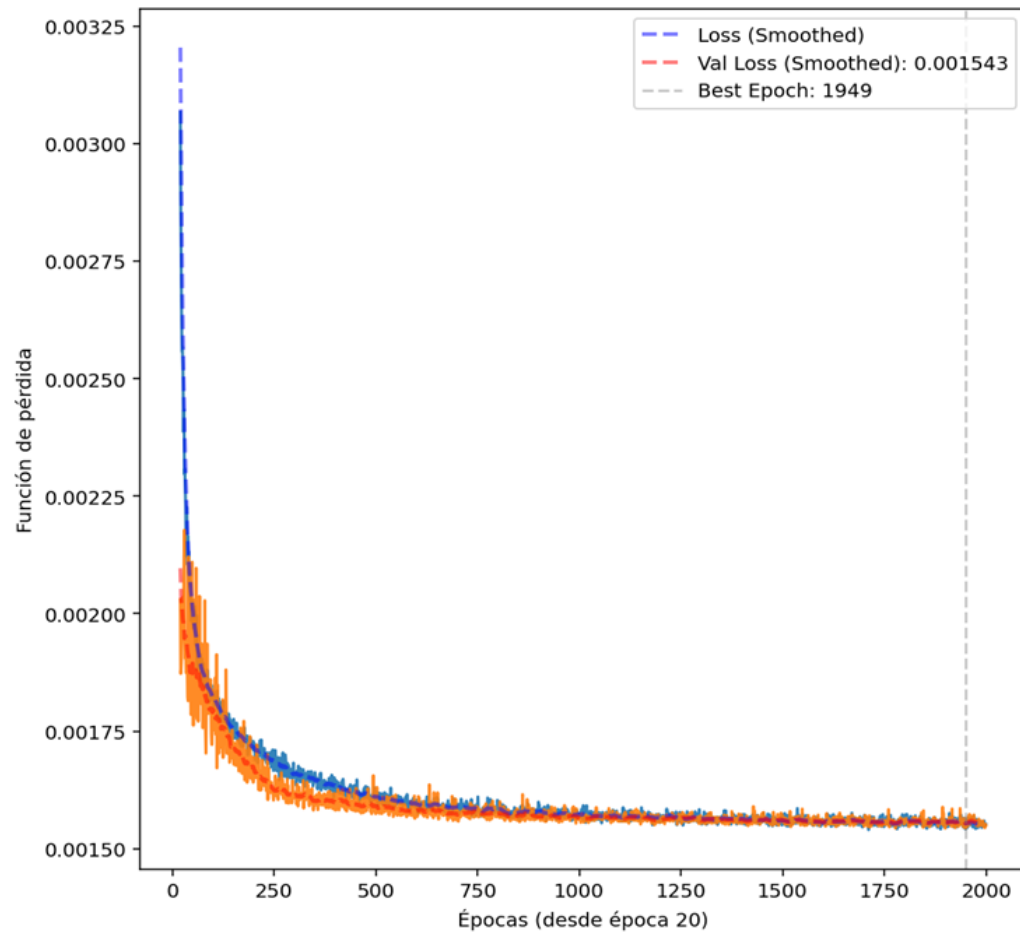
Figura 16. Entrenamiento de red neuronal de 7 capas



Nota. Entrenamiento de red neuronal de 7 capas de 256 neuronas con función de activación gelu y función de pérdida MSE, gráfico de error contra época.

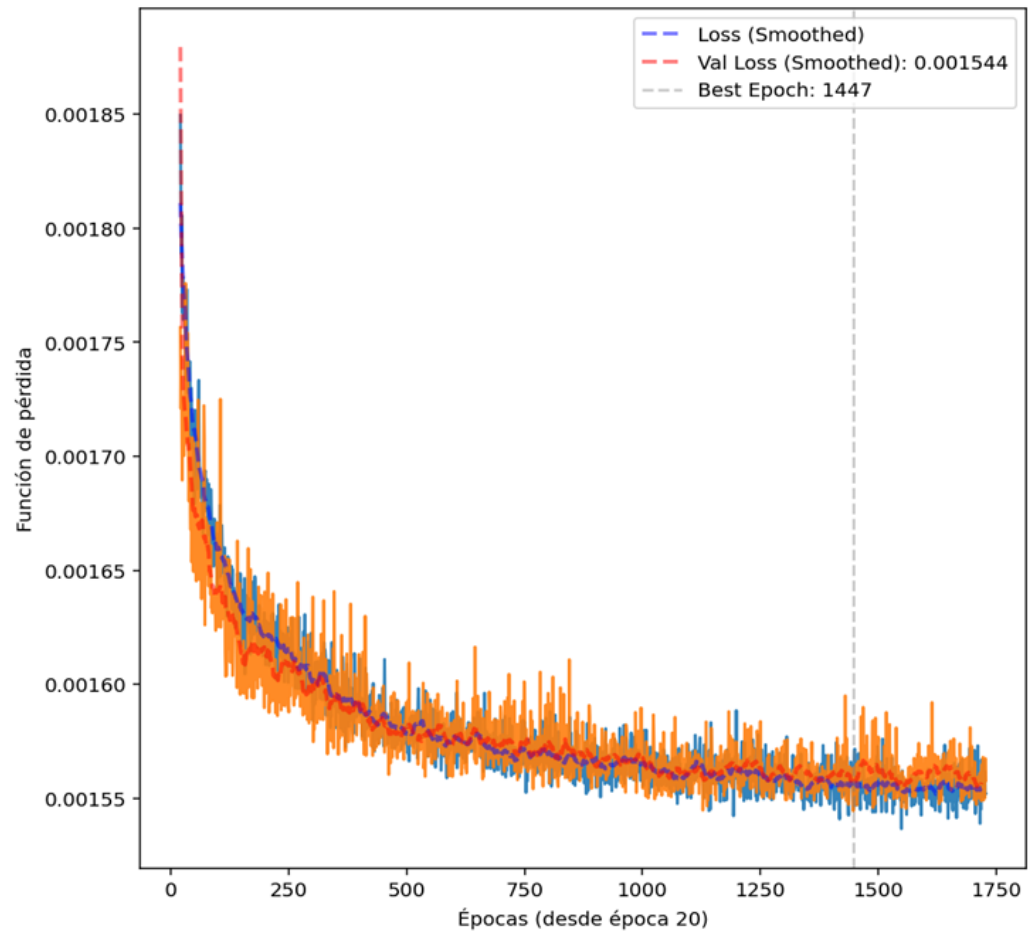
Fuente: elaboración propia

Figura 17. Entrenamiento de red neuronal de 6 capas



Nota. Entrenamiento de red neuronal de 6 capas de 256 neuronas con función de activación gelu y función de pérdida MSE, gráfico de error contra época.
Fuente: elaboración propia

Figura 18. Entrenamiento de red neuronal de 5 capas

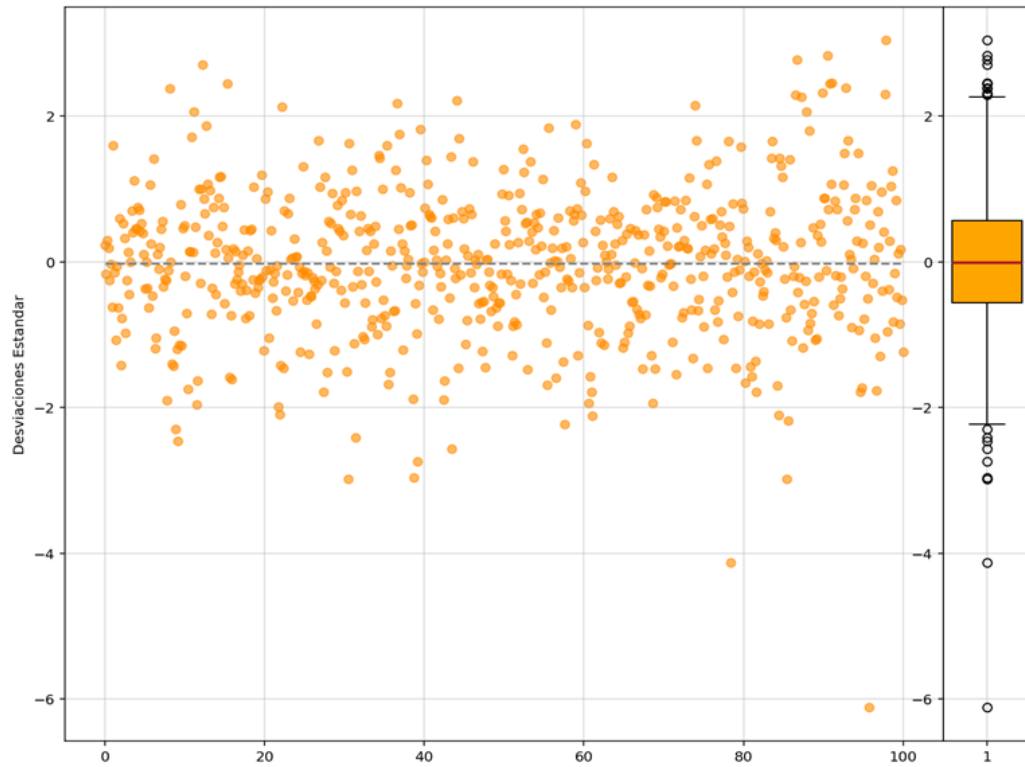


Nota. Entrenamiento de red neuronal de 5 capas de 256 neuronas con función de activación gelu y función de pérdida MSE, gráfico de error contra época.
Fuente: elaboración propia

7.2.3. Residuales

En esta sección se muestran gráficos de residuales del error de las redes neuronales.

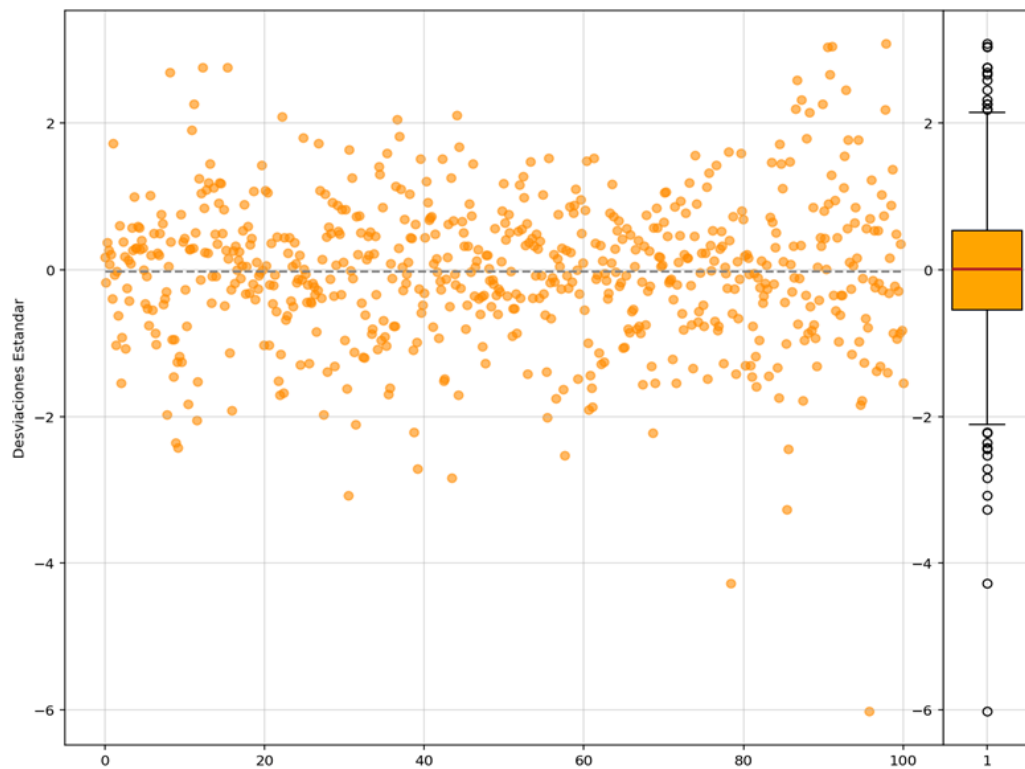
Figura 19. Residuales de red neuronal de 7 capas



Nota. Residuales de los errores en las predicciones de la red neuronal de 7 capas de 256 neuronas con función de activación gelu, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional

Fuente: elaboración propia

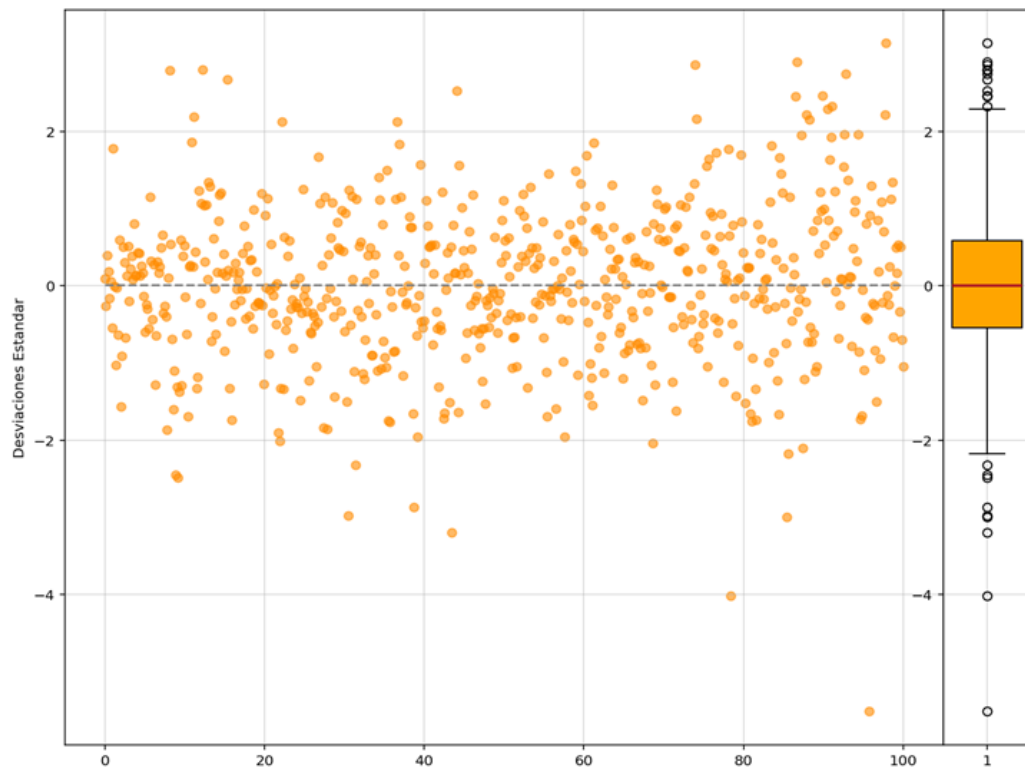
Figura 20. Residuales de red neuronal de 6 capas



Nota. Residuales de los errores en las predicciones de la red neuronal de 6 capas de 256 neuronas con función de activación gelu, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional.

Fuente: elaboración propia

Figura 21. Residuales de red neuronal de 5 capas



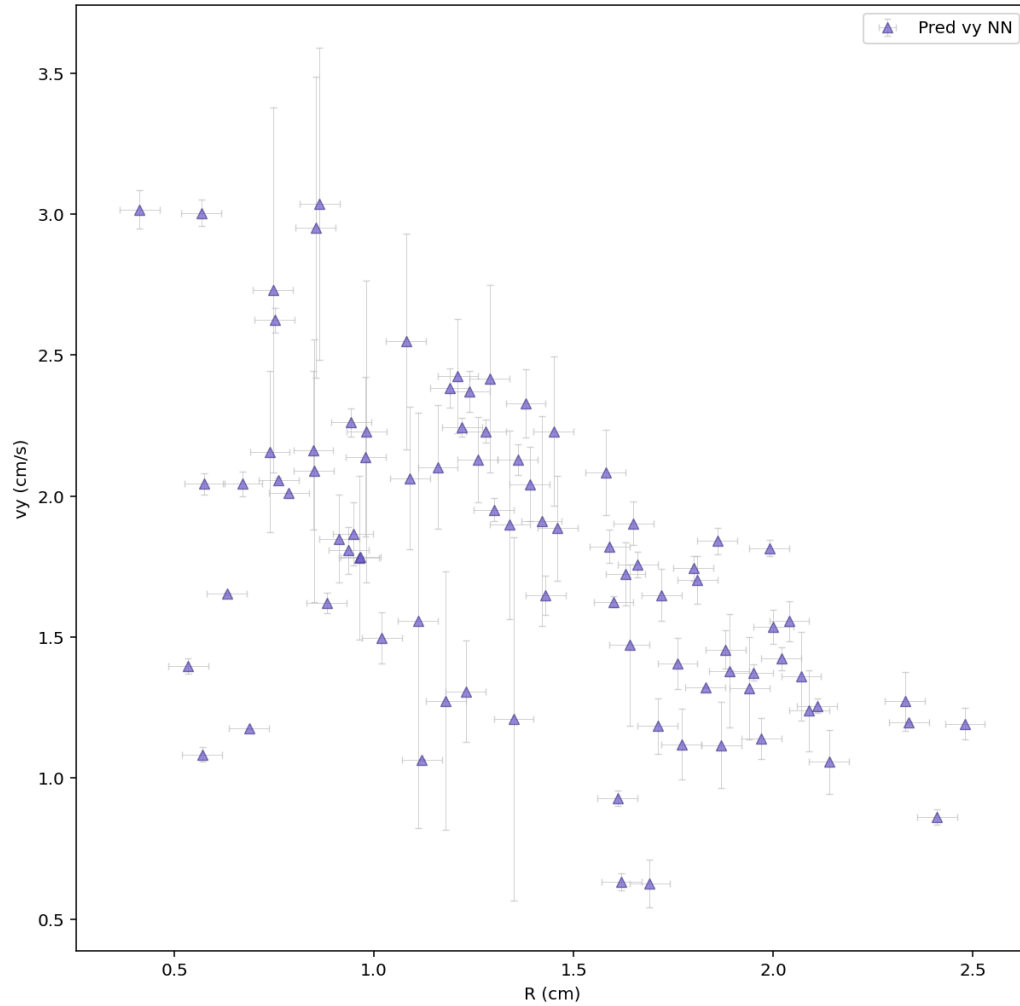
Nota. Residuales de los errores en las predicciones de la red neuronal de 5 capas de 256 neuronas con función de activación gelu, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional.

Fuente: elaboración propia

7.2.4. Comparación predicción contra datos reales

Para la comparación se utilizó el modelo de 6 capas ya que tuvo el mejor rendimiento en las métricas de MAE, R^2 y desviación estándar.

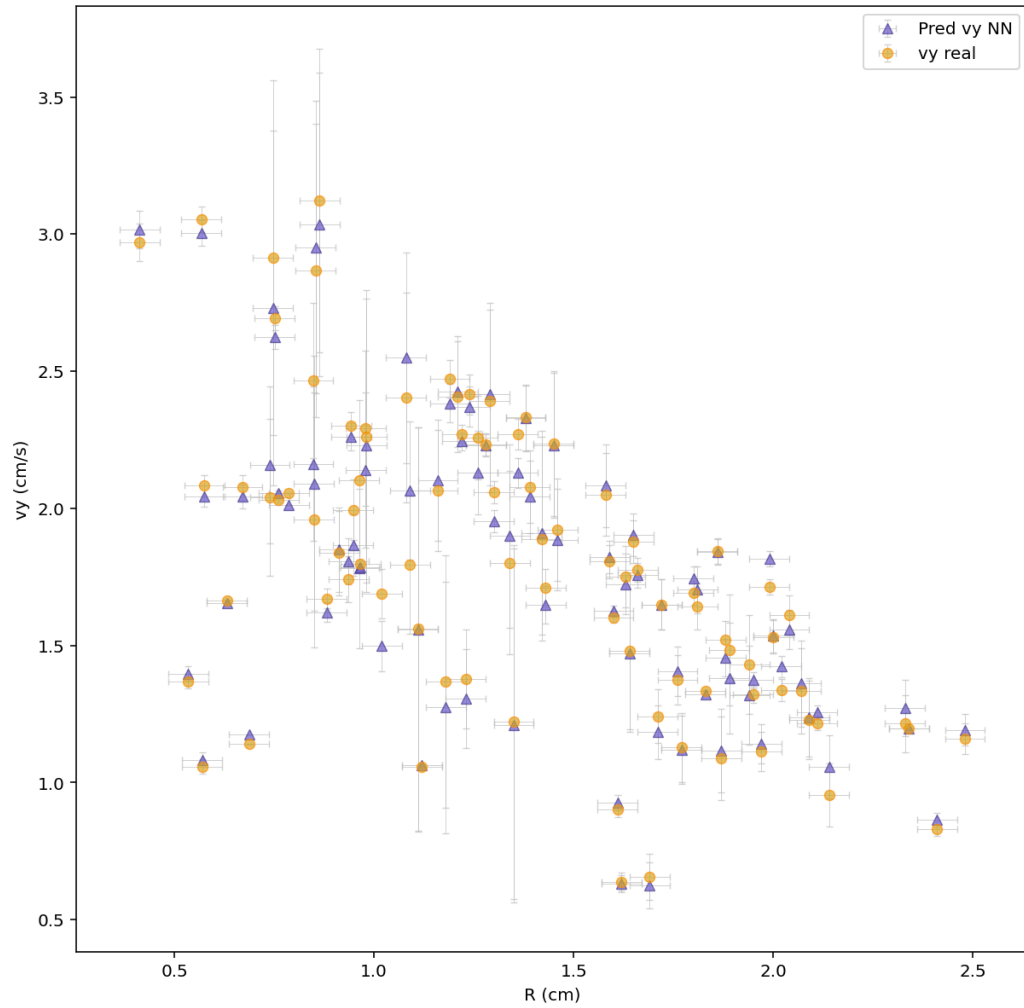
Figura 22. Velocidad contra radio de blobs de red neuronal



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso vs radio de las predicciones de la red neuronal, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ en el radio y la desviación estándar para la velocidad.

Fuente: elaboración propia

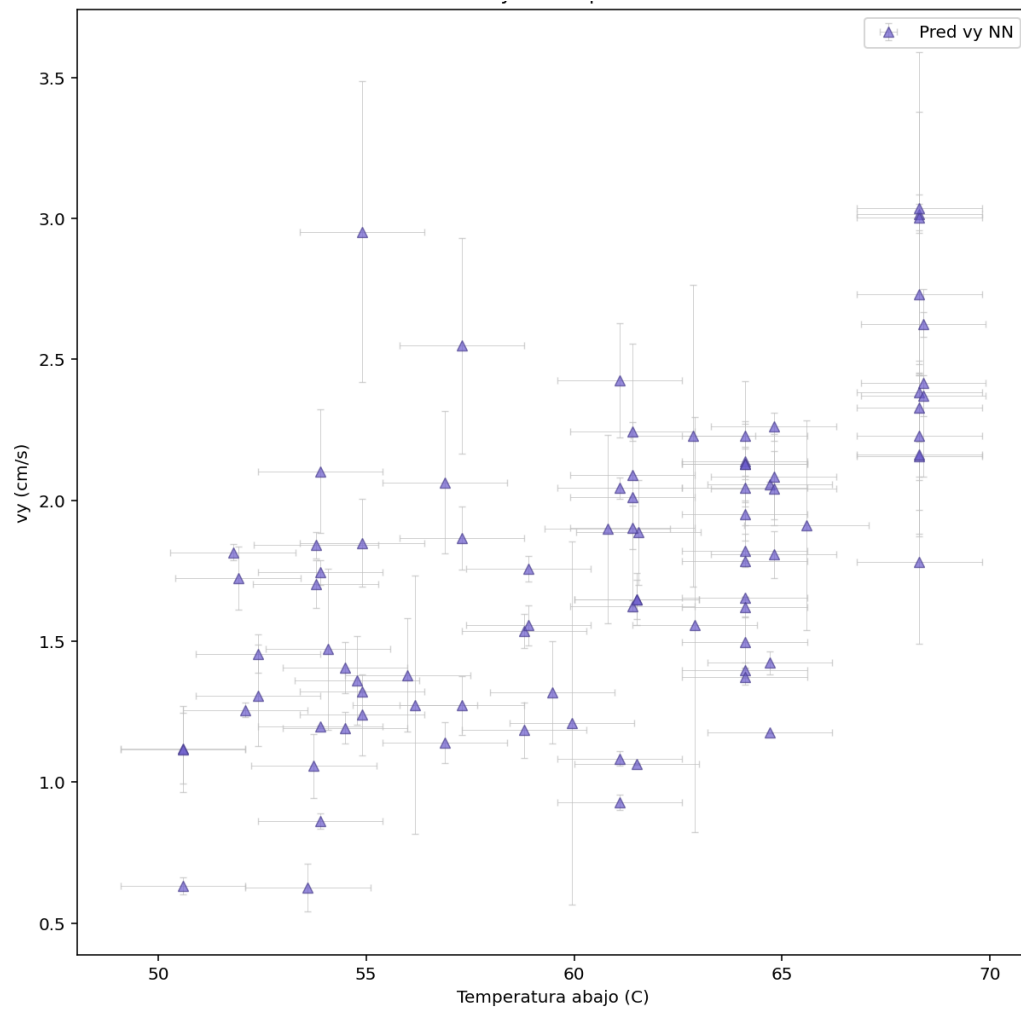
Figura 23. Velocidad contra radio de blobs de red neuronal y comparación



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso contra radio de las predicciones de la red neuronal y los datos reales, con barras de error de ± 0.05 cm en el radio y la desviación estándar para la velocidad.

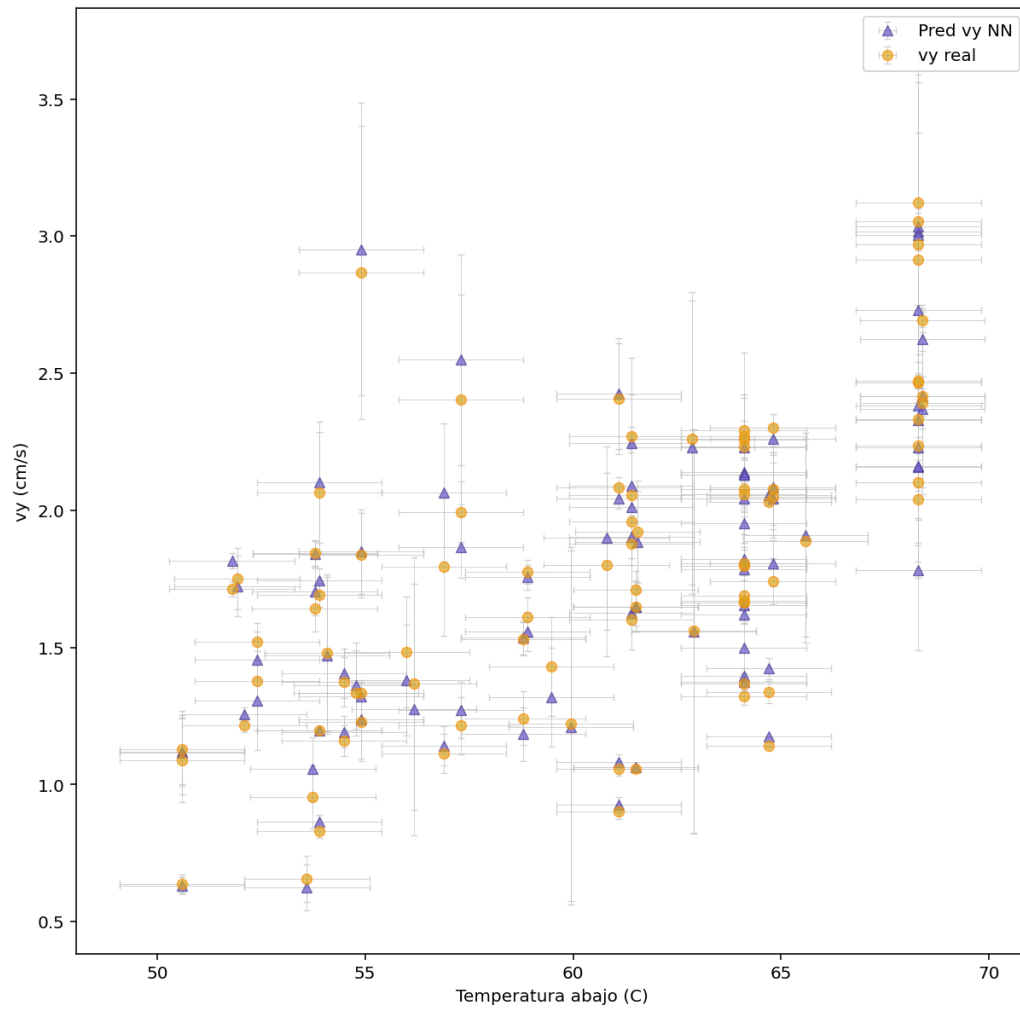
Fuente: elaboración propia

Figura 24. Radio contra temperatura de blobs de red neuronal



Nota. Gráfico de dispersión de radio vs temperatura inferior de las predicciones de la red neuronal, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

Figura 25. Radio contra temperatura de blobs de red neuronal y comparación



Nota. Gráfico de dispersión de radio vs temperatura inferior de las predicciones de la red neuronal y los datos reales, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

7.3. Resultados de árboles de decisión aleatorios

7.3.1. Métricas

En esta sección se muestran las métricas de los modelos de árboles de decisión.

Tabla 7. Bosques aleatorios

Árboles	Capas	MAE	MSE	RMSE	R2	STD
100	25	0.001702	0.000005	0.002336	0.86834	0.002334
200	10	0.001753	0.000006	0.002401	0.86089	0.0024
300	15	0.001701	0.000005	0.002322	0.869919	0.002321

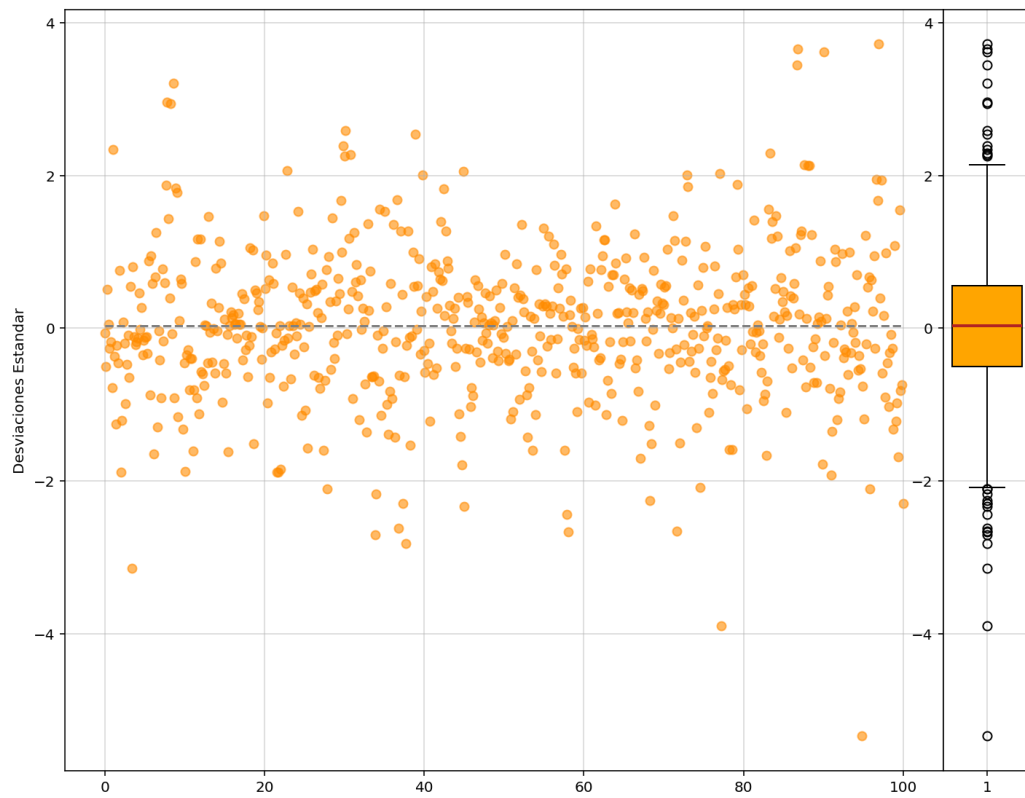
Nota. Cuadro comparativo de error de las predicciones, comparando bosques aleatorios con diferente número de capas y de árboles.

Fuente: elaboración propia

7.3.2. Residuales

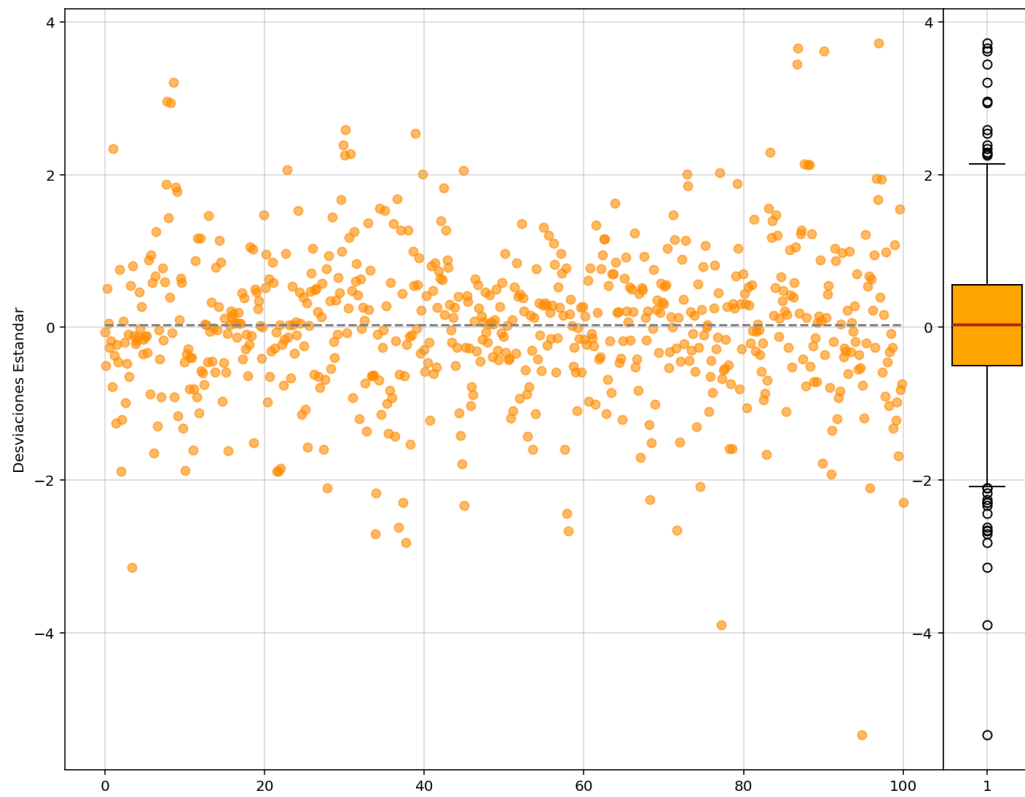
En esta sección se muestran gráficos de residuales del error del modelo de bosque aleatorio.

Figura 26. Residuales de bosque aleatorio de 100 árboles



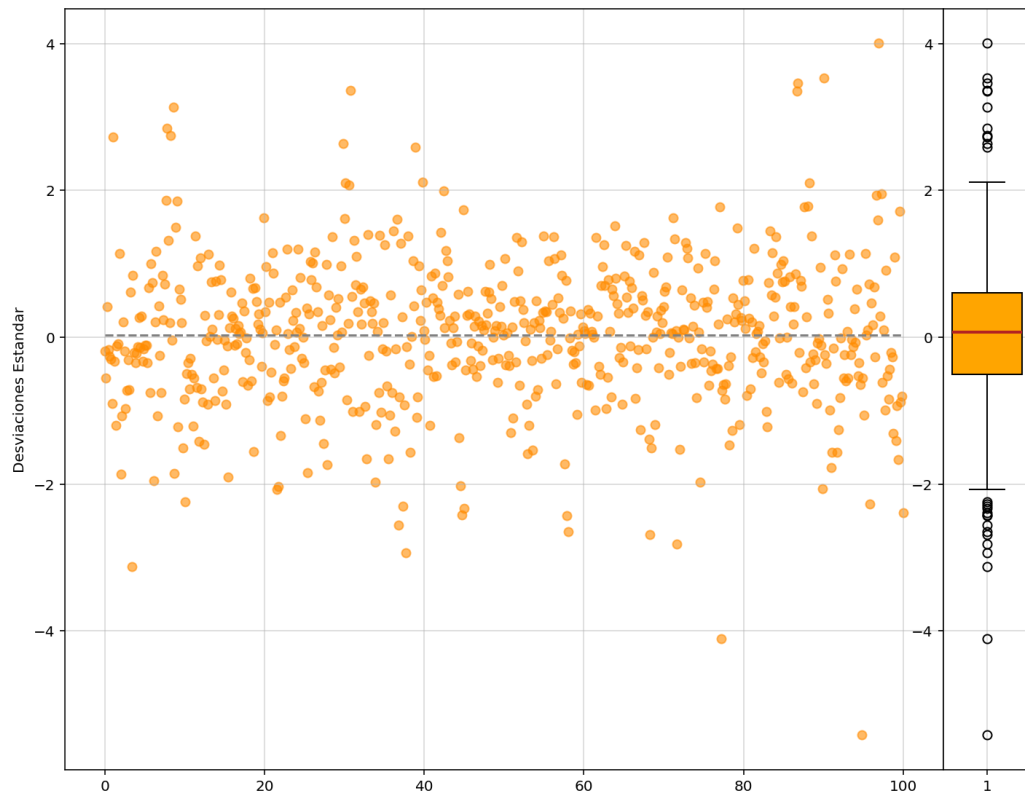
Nota. Residuales de los errores en las predicciones del modelo de 100 árboles de bosque aleatorio, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional.
Fuente: elaboración propia

Figura 27. Residuales de bosque aleatorio de 200 árboles



Nota. Residuales de los errores en las predicciones del modelo de 200 árboles de bosque aleatorio, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional.
Fuente: elaboración propia

Figura 28. Residuales de bosque aleatorio de 300 árboles



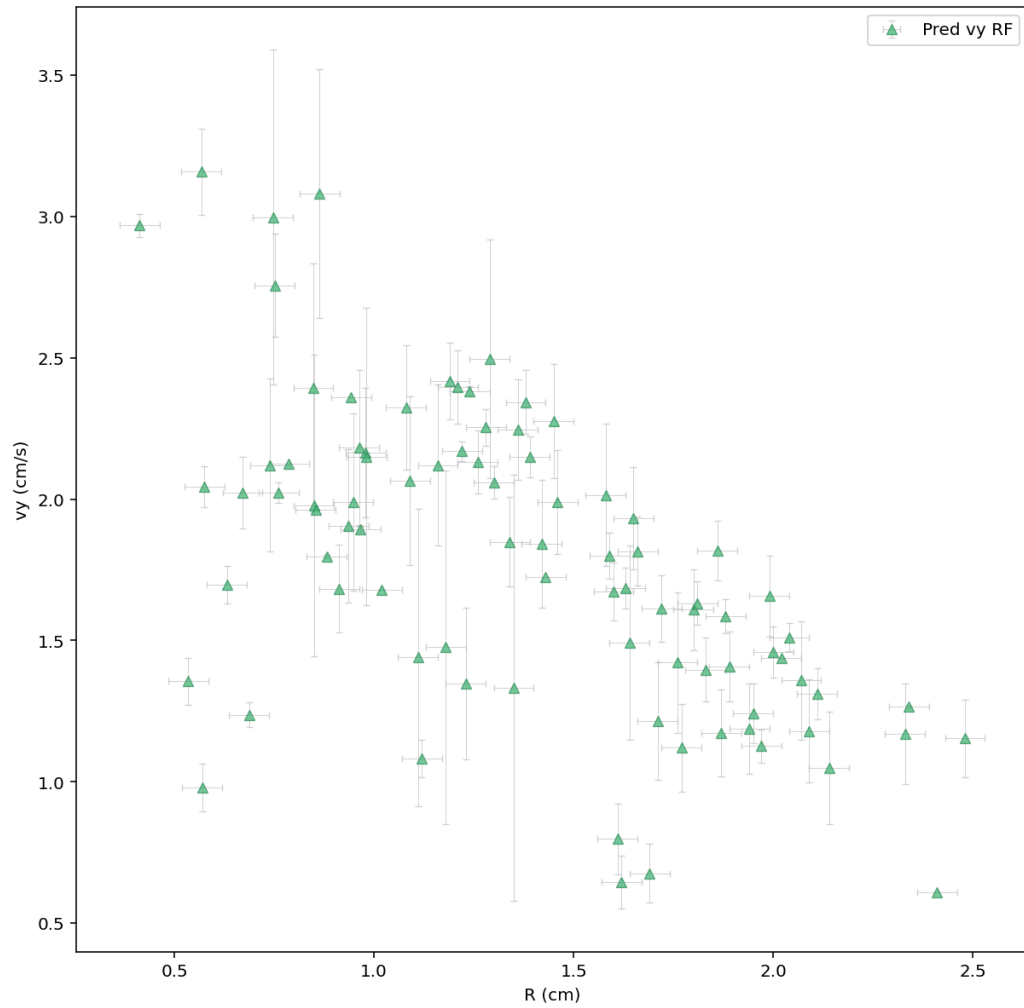
Nota. Residuales de los errores en las predicciones del modelo de 300 árboles de bosque aleatorio, en términos de desviaciones estándar, con gráfico de caja y bigote adicional.

Fuente: elaboración propia

7.3.3. Comparación contra datos reales

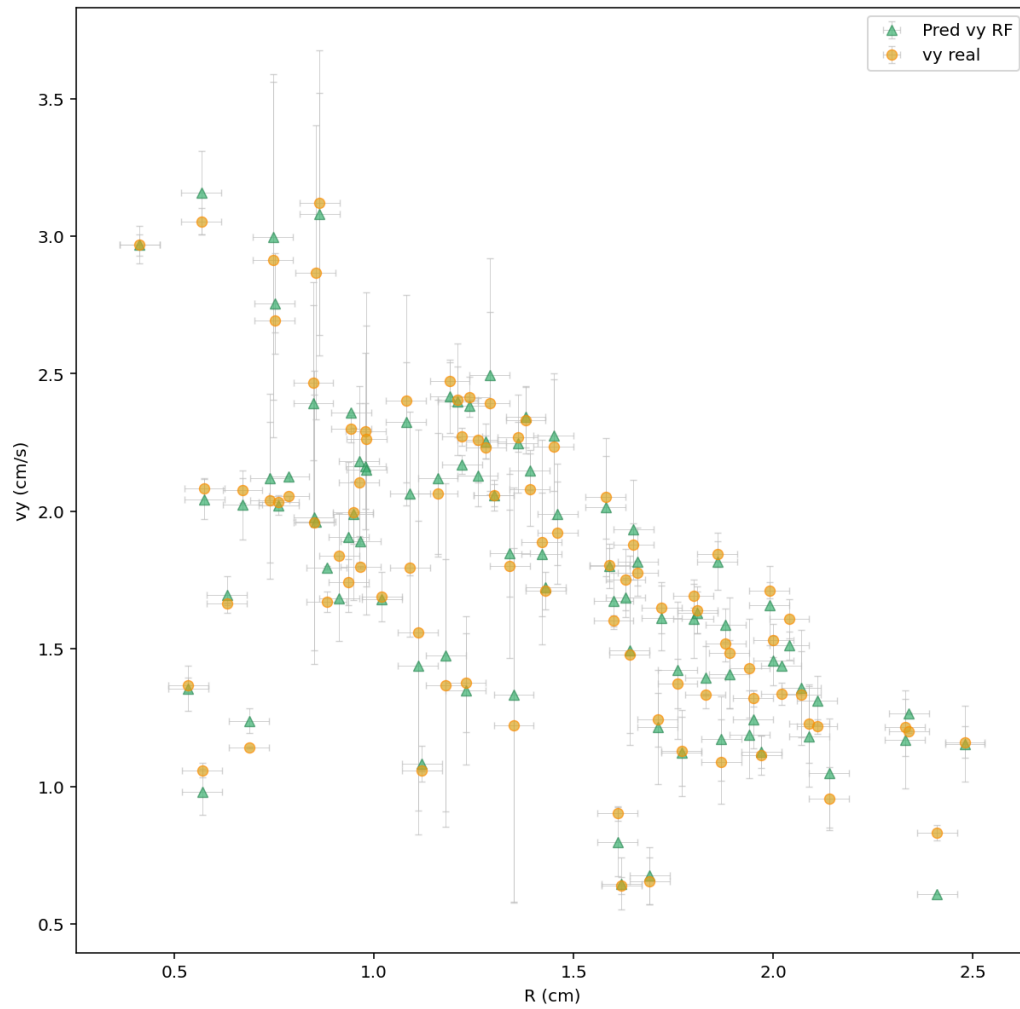
Para la comparación se utilizó el modelo de 300 árboles ya que tuvo mejor rendimiento en todas las métricas de evaluación.

Figura 29. Velocidad contra radio de blobs de bosques aleatorios



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso vs radio de las predicciones del modelo de bosque aleatorio, con barras de error de ± 0.05 cm en el radio y la desviación estándar para la velocidad.
Fuente: elaboración propia

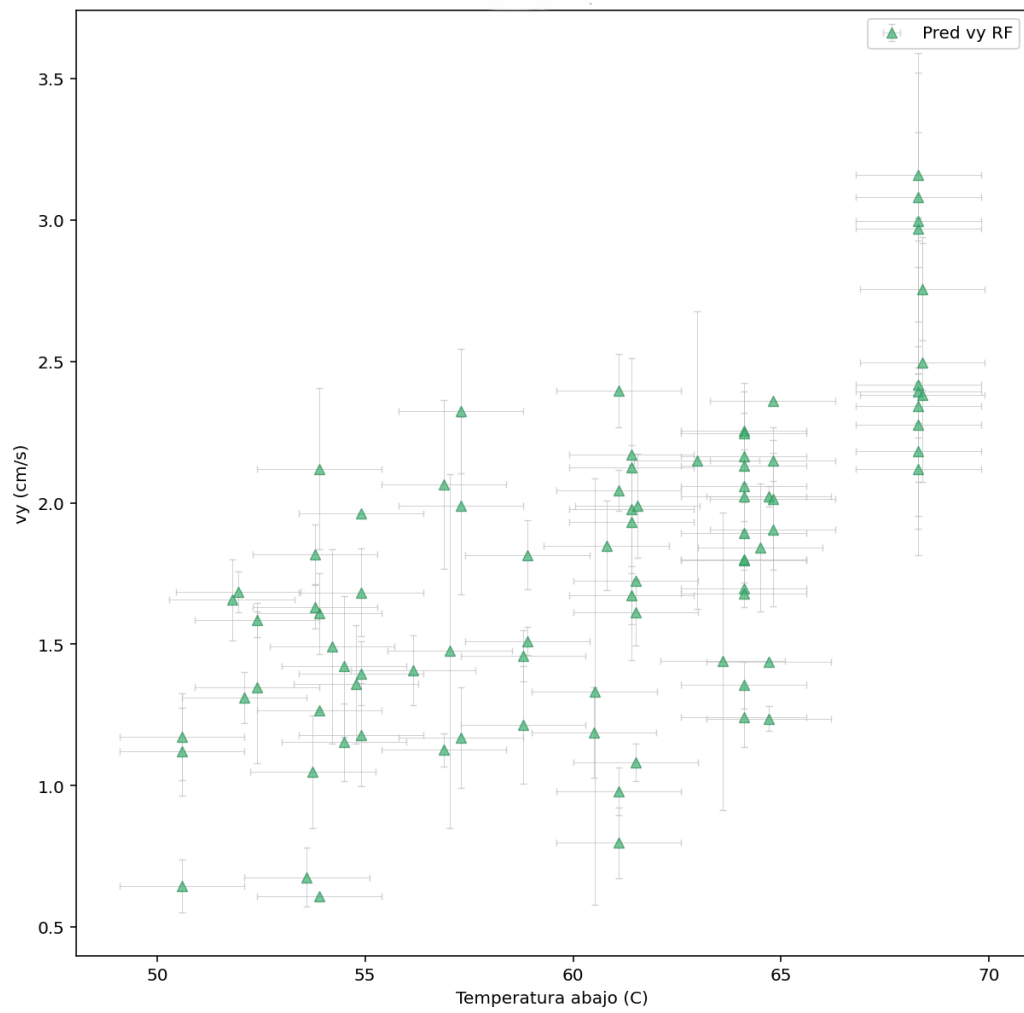
Figura 30. Velocidad contra radio de blobs de bosques aleatorios y comparación



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso vs radio de las predicciones del modelo de bosque aleatorio y los datos reales, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ en el radio y la desviación estándar para la velocidad.

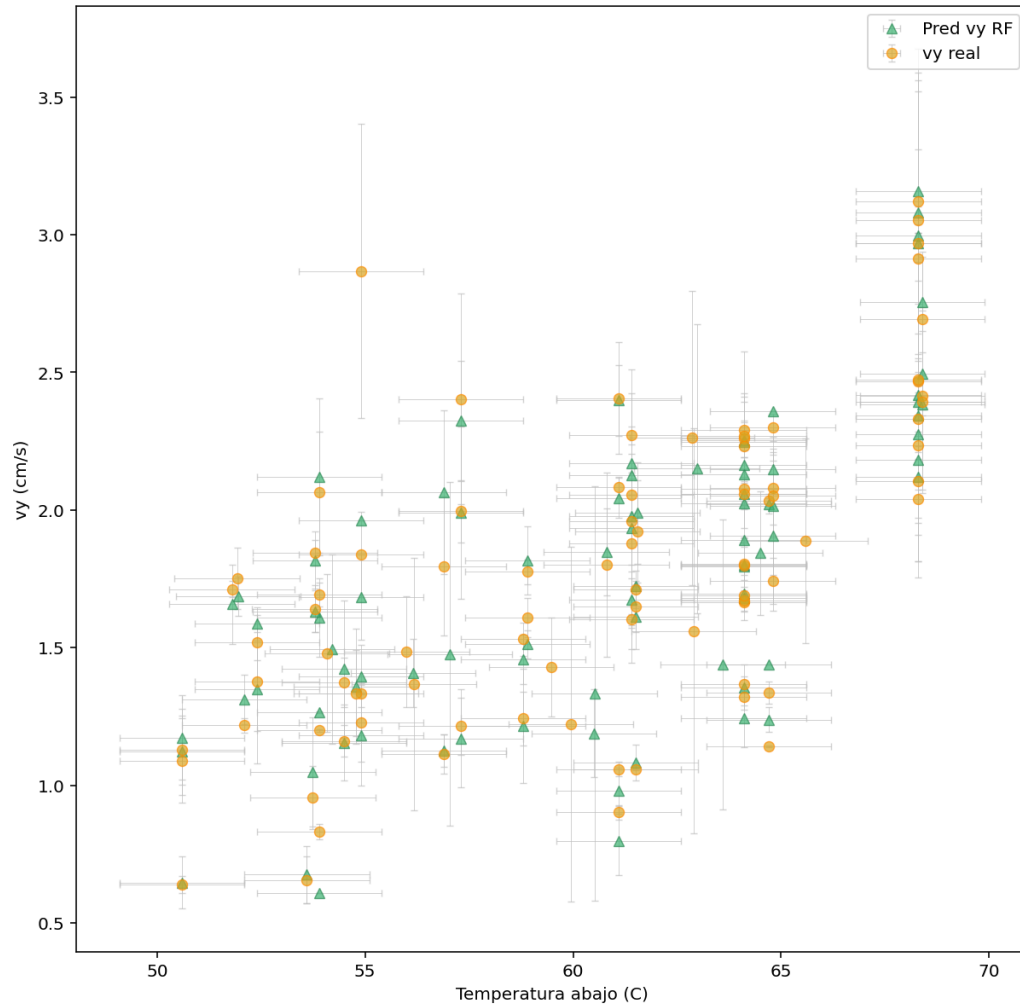
Fuente: elaboración propia

Figura 31. Radio contra temperatura de blobs de bosques aleatorios



Nota. Gráfico de dispersión de radio vs temperatura de las predicciones del modelo de bosque aleatorio, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

Figura 32. Radio contra temperatura de blobs de bosques aleatorios y comparación



Nota. Gráfico de dispersión de radio vs temperatura de las predicciones del modelo de bosque aleatorio y los datos reales, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.
Fuente: elaboración propia

7.4. Resumen de resultados de los modelos de aprendizaje automático

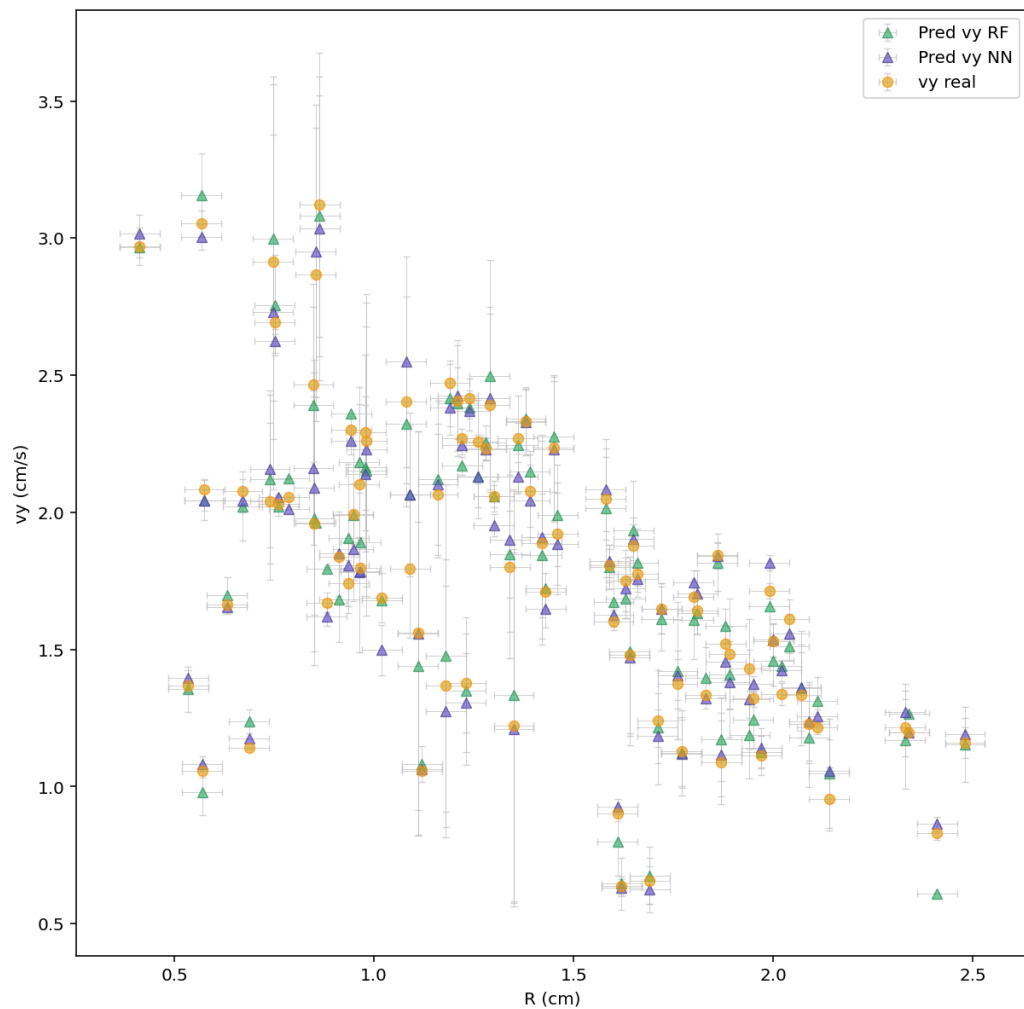
En esta sección se resumen las métricas de todos los modelos y se comparan las distribuciones de los datos reales, las redes neuronales y los bosques aleatorios.

Tabla 8. Resumen de los modelos de aprendizaje automático

Modelo	MAE	MSE	RMSE	R ²	STD
1	0.001858	0.000006	0.002486	0.861977	0.002485
2	0.001809	0.000006	0.002437	0.867357	0.002437
3	0.001840	0.000006	0.002448	0.866123	0.002448
4	0.001702	0.000005	0.002336	0.86834	0.002334
5	0.001753	0.000006	0.002401	0.86089	0.0024
6	0.001701	0.000005	0.002322	0.869919	0.002321

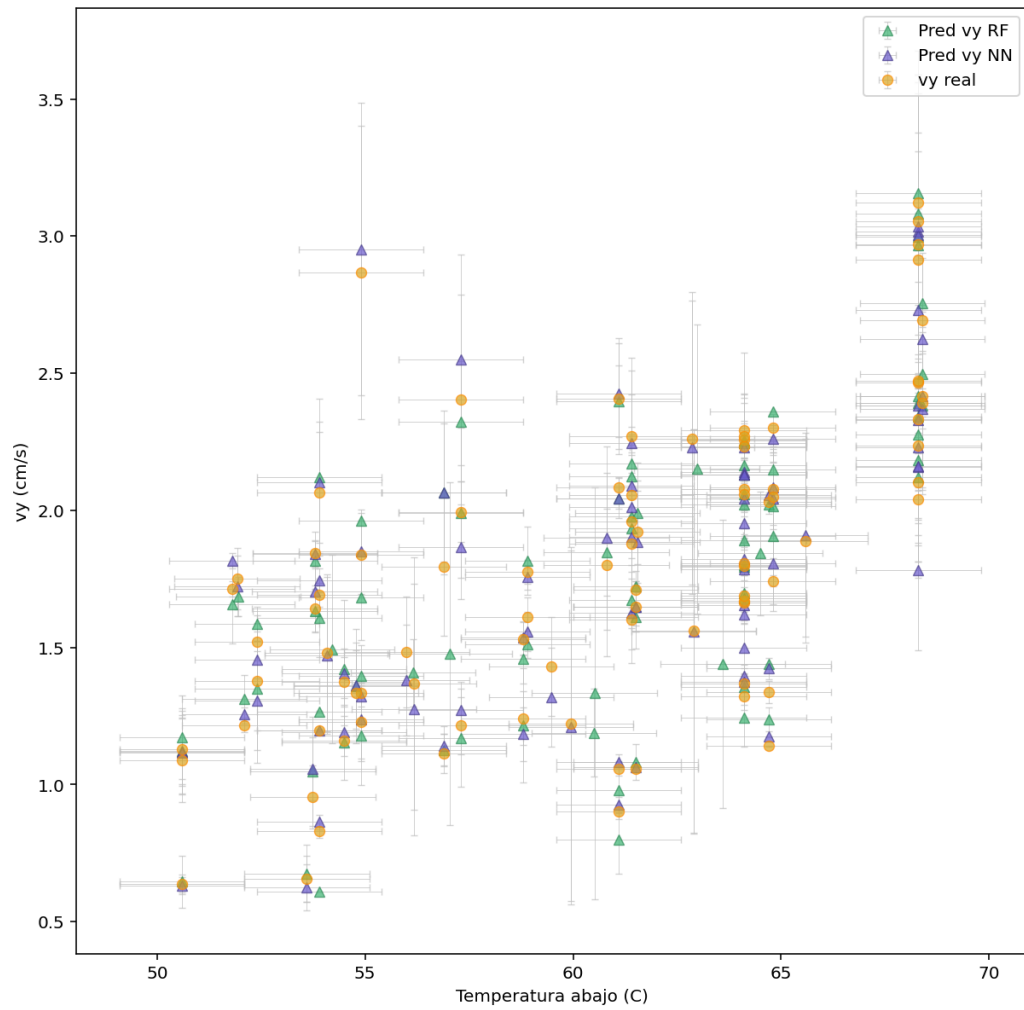
Nota. Cuadro comparativo de las métricas de los modelos de aprendizaje automático. 1: Red neuronal de 7 capas. 2: Red neuronal de 6 capas. 3: Red neuronal de 5 capas. 4: Bosque aleatorio de 100 árboles. 5: Bosque aleatorio de 200 árboles. 6: Bosque aleatorio de 300 árboles.
Fuente: elaboración propia

Figura 33. Velocidad contra radio de red neuronal, bosque aleatorio y datos reales



Nota. Gráfico de dispersión de velocidad de ascenso contra radio de las predicciones del modelo de bosque aleatorio, las predicciones de la red neuronal y los datos reales, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ en el radio y la desviación estándar para la velocidad.
Fuente: elaboración propia

Figura 34. Radio contra temperatura de red neuronal, bosque aleatorio y datos reales



Nota. Gráfico de dispersión de radio vs temperatura de las predicciones del modelo de bosque aleatorio, las predicciones de la red neuronal y los datos reales, con barras de error de $\pm 0.05\text{cm}$ y $\pm 1.5^\circ$ Celsius respectivamente.

Fuente: elaboración propia

7.5. Modelo de temperatura contra tiempo

El modelo de temperatura contra tiempo se ajustó con base en la siguiente ecuación:

$$T(t) = T_a + \frac{Z}{k} + De^{-kt} \quad (7.1)$$

Los valores de las constantes fueron calculados como se detalló en la sección 6.2.2 y se obtuvo:

Tabla 9. Valores de las constantes de la ecuación 7.1

Constante	Valor
Ta	27.4
Z	1.361E-2
k	3.240E-4
D	-18.48

Fuente: elaboración propia

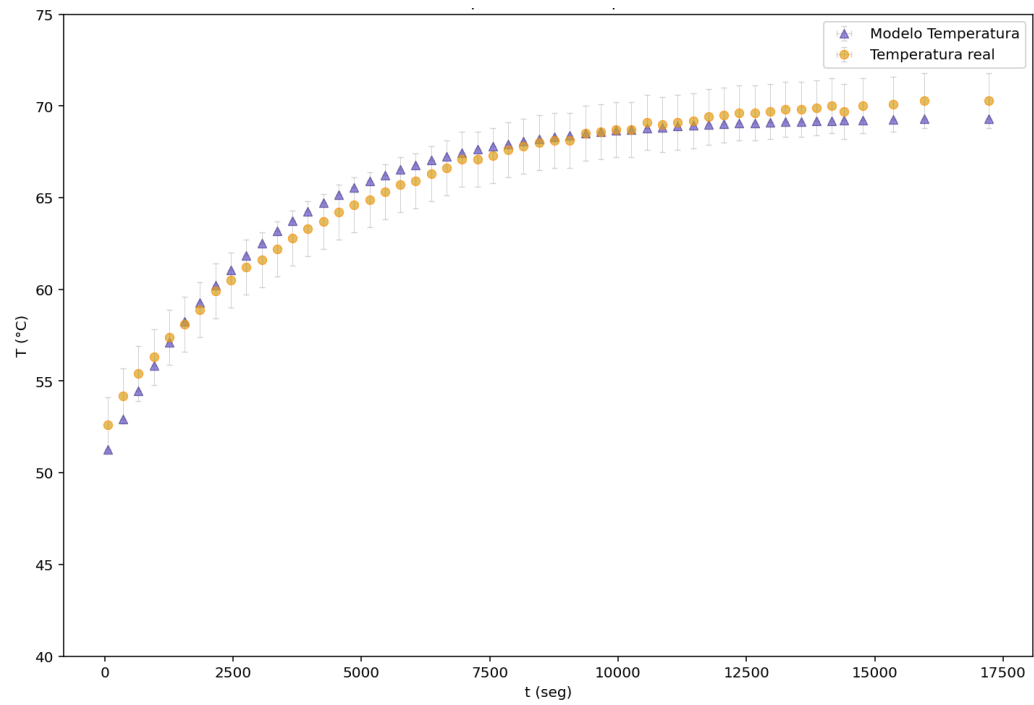
Las métricas del modelo de temperatura son las siguientes:

Tabla 10. Métricas del modelo de temperatura contra tiempo

MAE	MSE	RMSE	MAPE (%)	R ²	STD
0.591559	0.463371	0.680714	0.919102	0.978776	0.679902

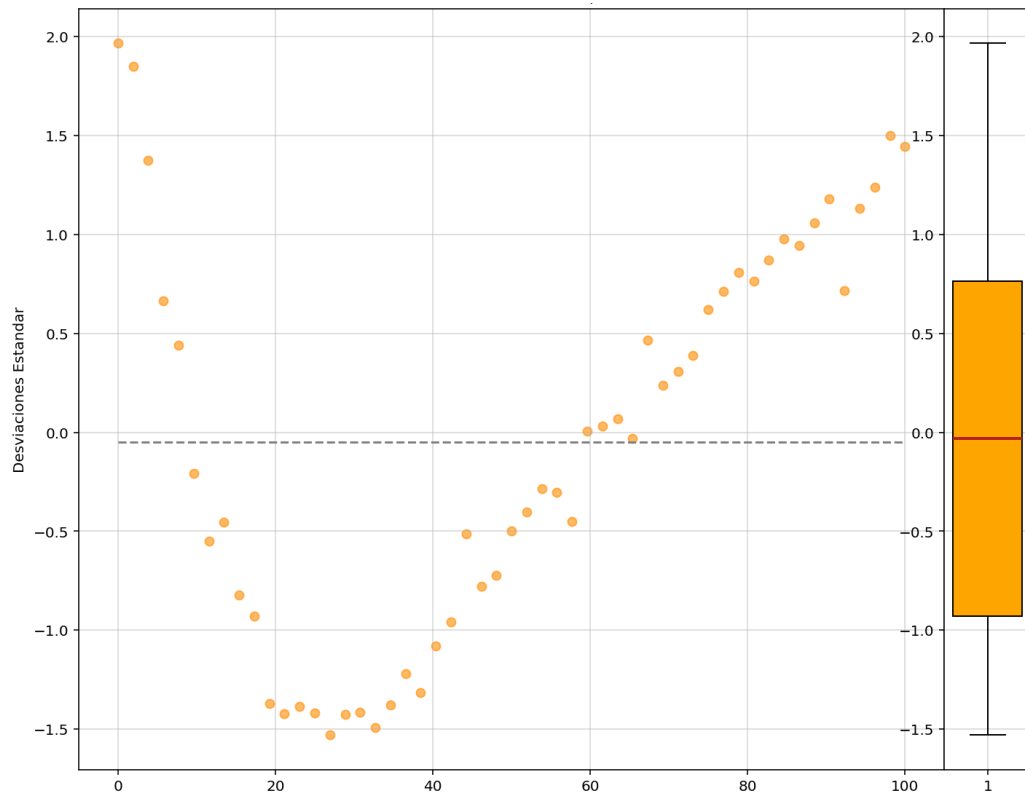
Fuente: elaboración propia

Figura 35. Modelo de temperatura contra tiempo



Nota. El modelo son los triángulos azules y las mediciones, los círculos anaranjados, con barras de error de 1.5° Celsius.
Fuente: elaboración propia

Figura 36. Residuales del modelo de temperatura contra tiempo

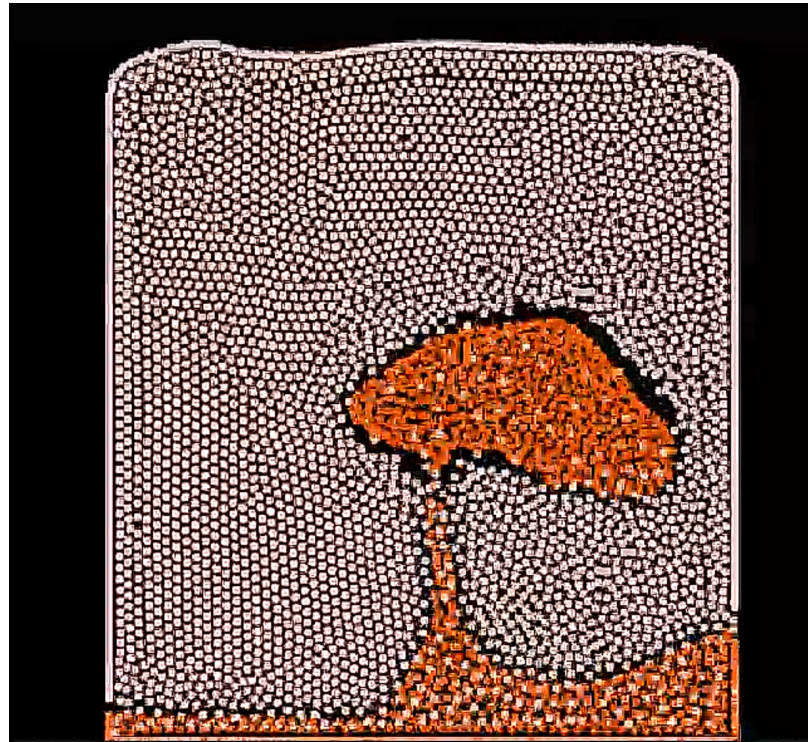


Fuente: elaboración propia

7.5.1. Simulación computacional

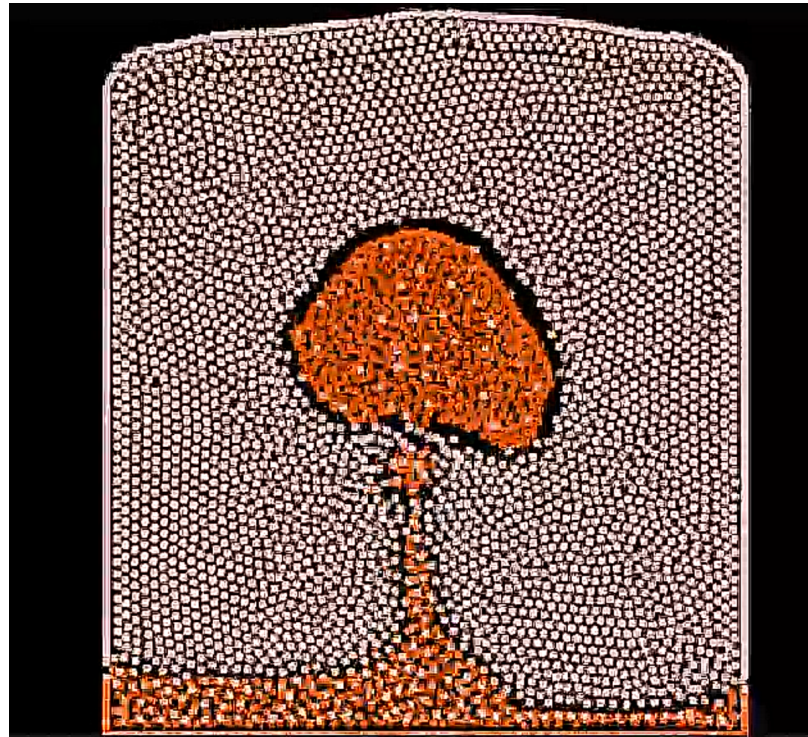
Con la simulación se generaron las siguientes capturas, mostrando el proceso de generación de los blobs.

Figura 37. Blob simulado 1



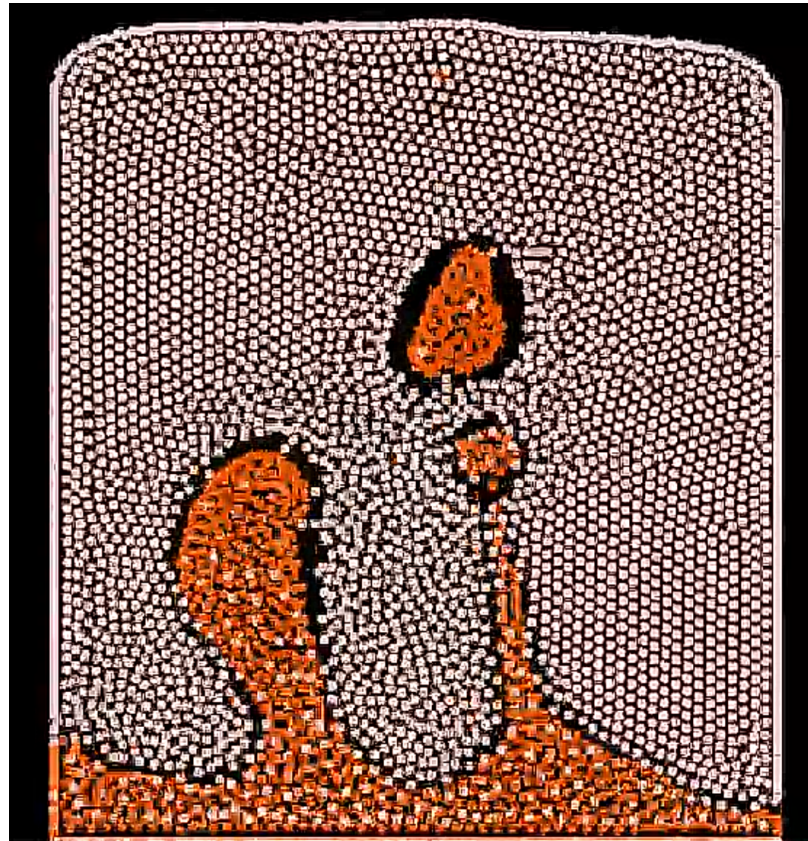
Fuente: elaboración propia

Figura 38. Blob simulado 2



Fuente: elaboración propia

Figura 39. Blob simulado 3



Fuente: elaboración propia

8.1. Ajuste teórico de los blobs

Analizando las velocidades de las esferas se encontró que no siguen la ecuación de la aproximación de Navier-Stokes para números de Reynold muy pequeños (< 1), la Ley de Stokes, donde la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad. Los resultados de esta ecuación son demasiado altos comparados a los experimentales (14). La ecuación de arrastre dependiente de la velocidad al cuadrado, como puede verse en la gráfica 15, aunque sí está dentro del orden de magnitud, a diferencia de Stokes, no sigue la forma de la mayoría de los datos, aunque existe un grupo de esferas entre 0.8 y 1.4 centímetros de radio que están más cerca de la regresión. En general, el comportamiento de las esferas tiene una tendencia opuesta a la esperada, ya que ambos modelos indican que la velocidad aumenta, a medida que el radio aumenta. Además, ninguna de las dos ecuaciones tienen un intercepto, a diferencia de la regresión lineal de mejor ajuste.

Observando el proceso de generación de los blobs en la figura 10 se encuentra que primero comienza a ascender un blob. Este no se desprende del resto de la cera de inmediato, sino que se observa que se forma una columna de cera por el camino que atravesó el blob. Una vez se separan, la cera caliente sigue fluyendo por dentro de la columna, por lo que se sigue acumulando cera en el extremo superior, hasta que se acumula suficiente y se crea un segundo blob a partir de la columna del blob original. Este proceso puede repetirse, creando otra esfera, o separando la columna en un punto donde se contrae hacia el blob creado, agregándole la masa del segmento de columna. Ya que esta tiene cierto momento, al fusionarse con el resto de la cera de la esfera, se achata y oscila verticalmente a medida que asciende. Esto ocasiona que alterne de forma entre la observada en el paso (n) y ($\tilde{n}$). Esto también ocurre aún en la ausencia de blobs secundarios, como se observa en la figura 9. Esta oscila entre las formas del paso (e) y (f), eventualmente llegando a un equilibrio entre las dos. Este comportamiento se discute más adelante para tratar de explicar sus causas y efectos sobre las velocidades calculadas.

La tendencia sigue un patrón lineal con intercepto diferente de 0, por lo que no encaja con ninguno de los modelos teóricos planteados. Este patrón también se observó en el estudio de Leonard y Houghton, 1961. En este caso, explican que ocurre posiblemente por factores de intercambio de masa con el líquido adyacente y la presencia de electrolitos en la solución, creando una acumulación de cargas en la superficie de las esferas, conduciendo a un aumento de la fricción con el líquido. Pero, a diferencia de este trabajo, en ese estudio se analizaron burbujas rellenas de gas, mientras que en

este caso son esferas llenas de cera parafina. Además, en ese caso se demostró que esta tendencia negativa solamente ocurre con las burbujas con radio menor a 5 milímetros. En el presente estudio, este patrón persiste con esferas desde 4 milímetros hasta 2.5 centímetros de radio.

Se observó que las desviaciones estándar eran mayores a lo esperado. Algunos blobs, a pesar de tener mayor número de mediciones, tenían desviaciones estándar mayores. Esto puede ocurrir si la aceleración que experimentan los blobs no es igual a 0, lo que causaría que la velocidad varíe y no se tengan resultados de velocidad constante. Considerando que algunas desviaciones estándar alcanzan valores mayores al 50 % del valor de la velocidad, se analizó la aceleración de estas esferas, para poder comparar con la desviación presentada.

Uno de los supuestos de esta investigación era que estos blobs tenían velocidad terminal, por lo que no deberían tener aceleración. Al observar la gráfica 41 se puede notar que existen varios puntos con aceleraciones altas, cerca del 20 % del valor de su velocidad. Los puntos con aceleraciones más cercanas a 0 (los puntos más blancos) se localizan principalmente entre los radios 1.2cm - 2.3cm. Al comparar con la regresión teórica, se observa que los puntos con mayor magnitud de aceleración son los que mejor se ajustan al modelo, lo cual es contraintuitivo por los supuestos establecidos. Pero una posible explicación es que estos puntos tienen radios menores, lo que podría ayudar a los blobs a conservar su forma. Esto concuerda con otro de los supuestos, que es que las esferas no se deforman, y, aunque se encontró que todas se deformaban, las más grandes eran las más afectadas. Para comprobar esto, se calculó el número de Weber así como el de Reynolds.

El número de Weber permite comparar la inercia del fluido con su tensión superficial (o interfacial como en este caso). Según Duineveld, 1995, aunque igualmente utilizó burbujas de gas, sugiere este cálculo para conocer la posible deformación de las burbujas y su investigación se concentra en valores del número de Weber alrededor de 3.2. Duineveld sugiere que, a mayor radio, mayor será el número de Weber. También encontró que las velocidades eran menores cuando este valor incrementaba. Al calcular este valor se obtuvo un promedio de 0.161 ± 0.072 (tabla 4), lo cual explica las deformaciones de las esferas y la alta tensión superficial observada en las columnas de cera. Cambiando el color de los blobs en base a este parámetro, en la gráfica 43, se puede notar una clara tendencia, donde los blobs con mayor número de Weber presentan las mayores velocidades. Este resultado es respaldado por la teoría. La deformación puede observarse en la figura (9). Este factor además fue mencionado en el estudio de Ellingsen y Risso, 2001, aunque a menor escala, ya que los radios reportados en ese estudio se encuentran alrededor de 2.5mm. En el estudio de Grace, 1967, se sugiere otra ecuación para el coeficiente de arrastre para esferas grandes ($R < 1.35\text{cm}$). Aunque este sistema tampoco es compatible con el caso explorado aquí ya que sus mediciones de velocidades se encuentran en el rango de $46.7 \text{ cm/s} < vy < 57.8 \text{ cm/s}$, alrededor de 20 veces más grandes que las velocidades de los blobs de la lámpara de lava.

Este número explica las deformaciones tan grandes que experimentan las esferas al ascender, ya que un valor tan pequeño indica que la tensión interfacial domina en comparación a las fuerzas de arrastre que experimenta la gota, por lo que no se separa en gotas más pequeñas. Esto además explica la generación de los blobs secundarios, lo que ocurre debido a que la tensión interfacial es muy grande, por lo que la gota no se separa tan fácilmente del resto del líquido, ocasionando la creación de las columnas. Aparte de esto, un número bajo de Weber indica que estas esferas no se separan con tanta facilidad, por lo que sus radios tienden a ser mayores a comparación de un número mayor de Weber.

Al calcular el número de Reynolds promedio (tabla 3) se obtuvieron valores demasiado altos para el propósito de la ley de Stokes, pues esta aplica para valores menores a 1 y en flujo laminar. En este caso, se encontró un promedio del número de Reynolds de 955.87 ± 291.636 por lo que no se encuentra en el rango. Se graficaron los blobs por colores según esta variable de igual manera que los gráficos de aceleración y de Weber, figura 42. En esta se observa una tendencia similar a la del número de Weber, pero en lugar de que los valores crezcan a medida que aumenta la velocidad, estos valores aumentan con la velocidad y con el radio, donde se muestran aumentando por capas tangentes al

origen. Esta tendencia parece paralela a la regresión lineal. En el gráfico de dispersión original pueden observarse puntos que parecen seguir tendencias lineales, pero no todos siguen la tendencia de la misma recta. Observando la distribución con el número de Reynolds se logra identificar que estas diferentes rectas posibles coinciden con blobs con números de Reynolds cercanos. Esto hace sentido con la teoría ya que esta métrica indica el tipo de flujo que experimenta el líquido. Agrupar las esferas por su número de Reynolds permite comparar las esferas en flujos similares, lo que forma tendencias más consistentes y comparables.

8.2. Rendimiento de modelos de aprendizaje automático

Aunque el comportamiento de estos blobs no fue el esperado en base a las ecuaciones de fluidos, los modelos de aprendizaje automático sí encontraron una tendencia en los datos, como puede observarse en la sección de comparación de datos 7.2.4. Existen algunas agrupaciones de blobs en el diagrama de las velocidades de ascenso contra los radios 11. Estas agrupaciones también pueden observarse en los diagramas 22 y 29, donde se muestran las predicciones de velocidad según el modelo de redes neuronales y de bosques aleatorios, respectivamente, contra los radios. En base a las variables que se le dieron a los modelos para entrenarlos, el modelo pudo seguir las tendencias generales del modelo, por lo que los resultados replicaron todas las agrupaciones observadas.

Analizando los residuales de cada modelo se encuentra que todos generan resultados con variaciones aleatorias, con los extremos de los cuartiles la distribución del diagrama de caja y bigote, en todos los casos, menores a 2.5 desviaciones estándar, aunque los modelos de bosque aleatorio tuvieron extremos más cercanos a 2 en comparación a las redes neuronales. Esto muestra que las predicciones de los modelos son aleatorias y generan una distribución parecida a una normal.

Todos los modelos de aprendizaje automático tuvieron mejor rendimiento que las ecuaciones teóricas utilizadas y mejor también que la regresión lineal de 15. El resultado de R^2 en todos los casos fue mayor a 0.86, donde el mejor modelo alcanzó 0.8699. Este modelo fue el de bosques aleatorios de 300 árboles en la tabla 7. Este resultado no fue esperado porque los bosques aleatorios clasifican los datos en cubetas, agrupando según rangos de las variables. Las redes neuronales en cambio, buscan los ajustes de menor error al aplicar funciones de activación no-lineares a los datos, siendo mejores en tareas de reconocimiento de patrones.

Pero en este caso, por la manera en que los datos de entrenamiento son proporcionados al modelo, estos valores pueden ser predichos eficientemente por clasificación de los datos, una fortaleza de los bosques aleatorios. Esto ocurre debido a que el modelo entrena con una base de datos con la estructura que puede verse en la muestra de los datos en anexos (tabla 12) . Y de la manera en que los datos de validación y de entrenamiento son seleccionados (aleatoriamente), el modelo puede recibir las filas 1, 2, 5, 7 de la tabla 12 en su entrenamiento y luego recibir las filas 3, 4, 6 para la validación de datos. Por lo que el modelo aprende con datos casi idénticos, con la única variación siendo la velocidad, ya que es la velocidad instantánea entre cada medición de posición.

Una ventaja de realizar el entrenamiento con repeticiones de los datos es que permite comparar las desviaciones estándar por cada esfera individual y obtener promedios de las velocidades calculadas por los modelos, permitiendo minimizar el error aleatorio.

8.3. Modelo de temperatura contra tiempo

El modelo de temperatura tuvo muy buen rendimiento estimando las temperaturas, lo cual se comprueba por sus métricas, con un resultado de R^2 de 0.978776 y error porcentual de 0.9191%, lo que significa un error menor al 1% en sus predicciones de temperatura, en promedio. Además

de esto, todas las estimaciones de temperatura se encuentran dentro del rango de incertidumbre instrumental del termómetro infrarrojo, de 1.5° .

Revisando la gráfica de residuos 36 se encuentra un patrón muy claro, donde dentro del primer $\approx 30\%$, el modelo crece más rápido que los datos reales, mientras que el siguiente $\approx 70\%$ crece más lento. Este cambio ocurre cuando la lámpara alcanza los 64° celsius. El modelo comienza desde que la convección ocurre, que es aproximadamente a partir de los 50° celsius, por lo que el inicio de la convección no es una posible causa de este comportamiento. Analizando las gráficas 11, 13 no se ve ninguna inflexión en los datos o algún comportamiento particular en esa región.

Otra posibilidad es que el modelo no siga el comportamiento modelado por el enfriamiento de Newton y la fuente de energía adicional, según la ecuación 7.1. Este puede ser el caso ya que se asumió que toda la energía del foco se concentraba en el agua, ignorando materiales como el vidrio, la cera dentro del contenedor y las paredes de la base de la lámpara. Además, no se tomó en cuenta el calor que escapa por las paredes metálicas, de la base y de el cono de la tapa. Estos, al ser de metal, posiblemente aluminio, tienen mayor conductividad térmica. El agua tiene un valor de 0.6089 mientras que el aluminio tiene de 237 ($\frac{W}{mK}$). Esto ocasionaría que el agua se caliente más lento que lo asumido, lo cual explica la primera sección de los residuales. Esto podría también explicar la segunda parte, ya que el sistema se calienta más lento de lo esperado. Esto causaría que la temperatura estimada sea mayor a la real, por lo que, ya que se calcularon las constantes minimizando el error, el modelo podría sobre-compensar los cálculos, resultando en temperaturas mas bajas que las reales, para minimizar el error total. Se sugiere tomar en cuenta estas fuentes de error y probar con un modelo más complejo de temperatura, utilizando el número de Biot y la conductividad térmica del vidrio.

8.4. Simulación por computadora

La simulación no genera resultados directamente comparables con los de la lámpara de lava. Se encontró que sí recrean las mecánicas de creación de blobs pero no el patrón periódico de ascenso y descenso. Los blobs observados en la simulación repetidamente se quedaban mucho más tiempo de lo esperado flotando en medio del líquido, por lo que no se pudieron obtener estadísticas comparables a las de la lámpara. Aún así, aspectos como la formación de estos blobs sí eran comparables. Como se puede observar en la figura 37 y 38, el proceso de generación de blobs era consistente con la lámpara real. Se puede notar que detrás de los blobs se crean las mismas columnas de cera, gracias a su tensión interfacial. Posterior a esto, se creaban blobs secundarios, con las mismas mecánicas observadas en 9. La simulación logró recrear estas mecánicas del sistema pero no logró estimar velocidades en base a los radios de los blobs.

- Este estudio demuestra la capacidad de modelos de aprendizaje automático para adaptarse a sistemas físicos complejos. El comportamiento de los blobs no estuvo en congruencia con los modelos de fluidos principales ya que incluía variables fuera de los rangos válidos para la aplicación de los modelos: requirió el cálculo de múltiples variables y las relaciones entre ellas para describir el comportamiento. En cambio, los modelos de aprendizaje automático tuvieron un error MAE de 0.001858 o menor, lo que representa estimaciones de velocidad con un error de 1.9 milímetros por segundo. Se encontró un coeficiente de determinación R^2 de 0.861 en el peor de los casos.
- Se encontró que, en fluidos inmiscibles con diferencias de densidad menores al 0.2 %, números de Reynolds entre 250 y 1400 y números de Weber entre 0.02 y 0.32, las velocidades ascendentes de los blobs no siguen los modelos teóricos de fluidos. Estos experimentan una fuerza de arrastre mucho mayor a la esperada debido a su forma inconsistente, propensidad a deformaciones y diámetro.
- Los modelos de bosques aleatorios tuvieron mejores resultados y métricas por lo que se concluye que son mejores para estimar las velocidades de ascenso de los blobs que las redes neuronales.
- La simulación computacional pudo recrear las formas de los blobs y su proceso de generación, pero no fue efectiva para recrear el comportamiento cíclico de la lámpara de lava.

CAPÍTULO 10

Recomendaciones

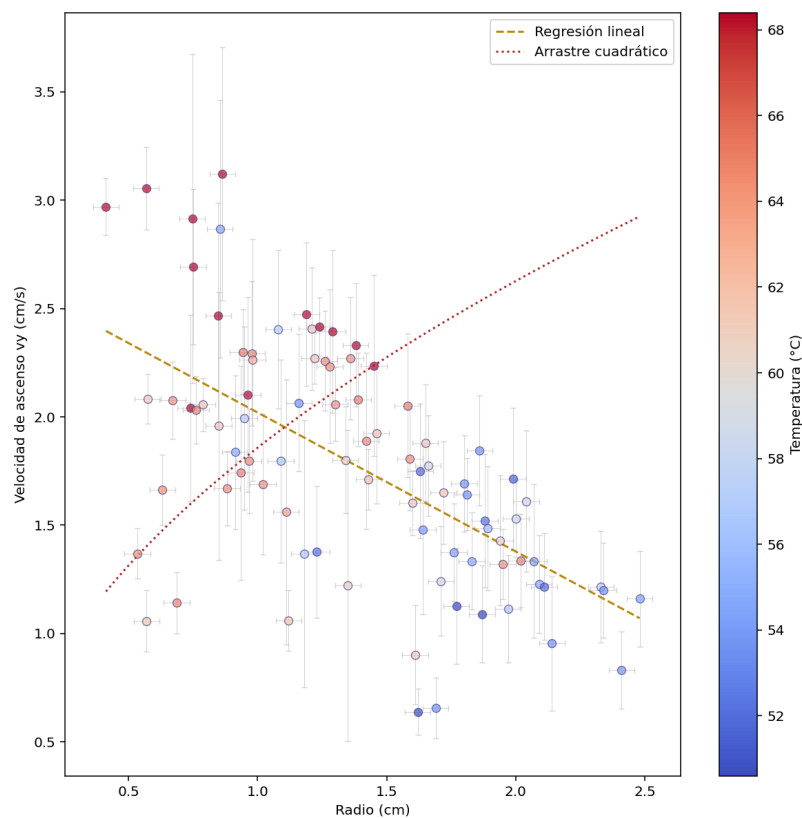
- Para el modelo de temperatura contra tiempo, se sugiere utilizar un modelo más específico que el de la ley de enfriamiento de Newton para resultados más exactos. Se sugiere considerar el efecto del vidrio y su grosor sobre el calor que el agua recibe.
- Se sugiere obtener datos para la validación extra que no haya aparecido en el modelo, así se obtienen valores de radios y temperaturas que los modelos no hayan visto antes y así determinar si afecta su rendimiento.
- Se recomienda utilizar la función *GridSearch* para los modelos de redes neuronales y así realizar las pruebas de arquitecturas de manera automática.
- Se sugiere utilizar una lámpara de lava con fluido menos opaco ya que dificultó la toma de datos en algunos de los videos.
- Para la toma de datos, también se recomienda tener un segundo termómetro para fijarlo en posición para tomas de temperatura en la parte superior del contenedor.

- Deck, C., Dryak, M., y Feng, H. (14 de marzo de 2019) *Heat transfer - UMaine SECS Numerical Modeling Laboratory*. UMaine Geodynamics. http://wiki.geodynamics.umaine.edu/index.php/Heat_transfer
- Dourmashkin, P. (27 de abril de 2020) *Drag Forces in Fluids*. Physics LibreTexts. [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_\(Dourmashkin\)/08%3A_Applications_of_Newtons_Second_Law/8.06%3A_Drag_Forces_in_Fluids](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Classical_Mechanics_(Dourmashkin)/08%3A_Applications_of_Newtons_Second_Law/8.06%3A_Drag_Forces_in_Fluids)
- Duineveld, P. C. (1995) Bouncing and coalescence of two bubbles in pure water. En *IUTAM Symposium on Waves in Liquid/Gas and Liquid/Vapour Two-Phase Systems* (pp. 151-160, Vol. 31). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0057-1_12
- Ellingsen, K., y Risso, F. (10 de agosto de 2001) On the rise of an ellipsoidal bubble in water: oscillatory paths and liquid-induced velocity. *Journal of Fluid Mechanics*, 440, 235-268. <https://doi.org/10.1017/S0022112001004761>
- Grace, J., y Harrison, D. (Octubre de 1967) The influence of bubble shape on the rising velocities of large bubbles. *Chemical Engineering Science*, 22(10), 1337-1347. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(67\)80024-1](https://doi.org/10.1016/0009-2509(67)80024-1)
- Gyüre, B., y János, I. M. (8 de octubre de 2009) Basics of lava-lamp convection. *Physical Review E*, 80(4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.80.046307>
- How do lava lamps help with Internet encryption?* (). Cloudflare. <https://www.cloudflare.com/learning/ssl/lava-lamp-encryption/>
- Huang, W. M., Zhao, Y., Wang, C. C., Ding, Z., Purnawali, H., Tang, C., y Zhang, J. L. (Septiembre de 2012) Thermo/chemo-responsive shape memory effect in polymers: a sketch of working mechanisms, fundamentals and optimization. *Journal of Polymer Research*, 19(9), 9952. <https://doi.org/10.1007/s10965-012-9952-z>
- Koschier, D., Bender, J., Solenthaler, B., y Teschner, M. (2019) *SPH Techniques for the Physics Based Simulation of Fluids and Solids*. <https://sph-tutorial.physics-simulation.org/>
- Leonard, J. H., y Houghton, G. (Mayo de 1961) Effect of Mass Transfer on the Velocity of Rise of Bubbles in Water. *Nature*, 190(4777), 687-688. <https://doi.org/10.1038/190687a0>
- Liebow-Feaser, J. (6 de noviembre de 2017) *LavaRand in Production: The Nitty-Gritty Technical Details*. The Cloudflare Blog. <https://blog.cloudflare.com/lavarand-in-production-the-nitty-gritty-technical-details/>
- Liebow-Feaser, J. (6 de noviembre de 2017) *Randomness 101: LavaRand in Production*. The Cloudflare Blog. <https://blog.cloudflare.com/randomness-101-lavarand-in-production/>
- Liu, M. B., y Liu, G. R. (Marzo de 2010) Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(1), 25-76. <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>

- Martins, B. (Julio de 2017) *Decision Support System in the Design, Production and Quality Control of Glass Containers* [ResearchGate]. https://www.researchgate.net/publication/323735882_Decision_Support_System_in_the_Design_Production_and_Quality_Control_of_Glass_Containers
- Saffman, P. G. (Septiembre de 1956) On the rise of small air bubbles in water. *Journal of Fluid Mechanics*, 1 (3), 249-275. <https://doi.org/10.1017/S0022112056000159>
- SebLague. (10 de agosto de 2023) *GitHub - SebLague/Fluid-Sim at Episode-01*. GitHub. <https://github.com/SebLague/Fluid-Sim>
- Youvan, D. C. (Junio de 2024) *Comparative Analysis of Phenomenological AI and Physics-Based Approaches in Emulating Lava Lamp Dynamics*. ResearchGate. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12852.05760>

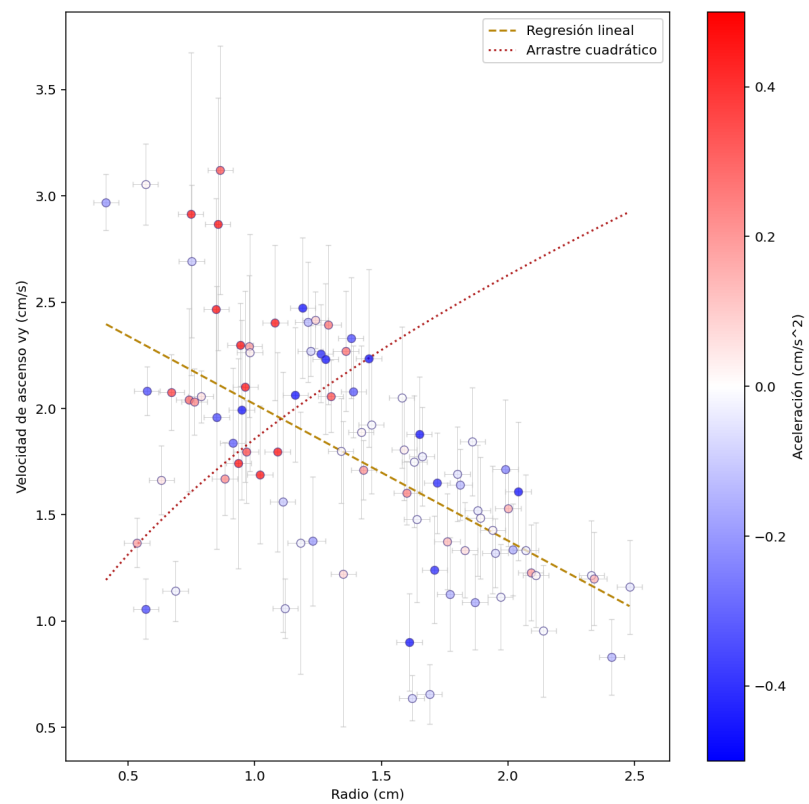
12.1. Gráficas auxiliares

Figura 40. Velocidad contra radio, coloreado por temperatura



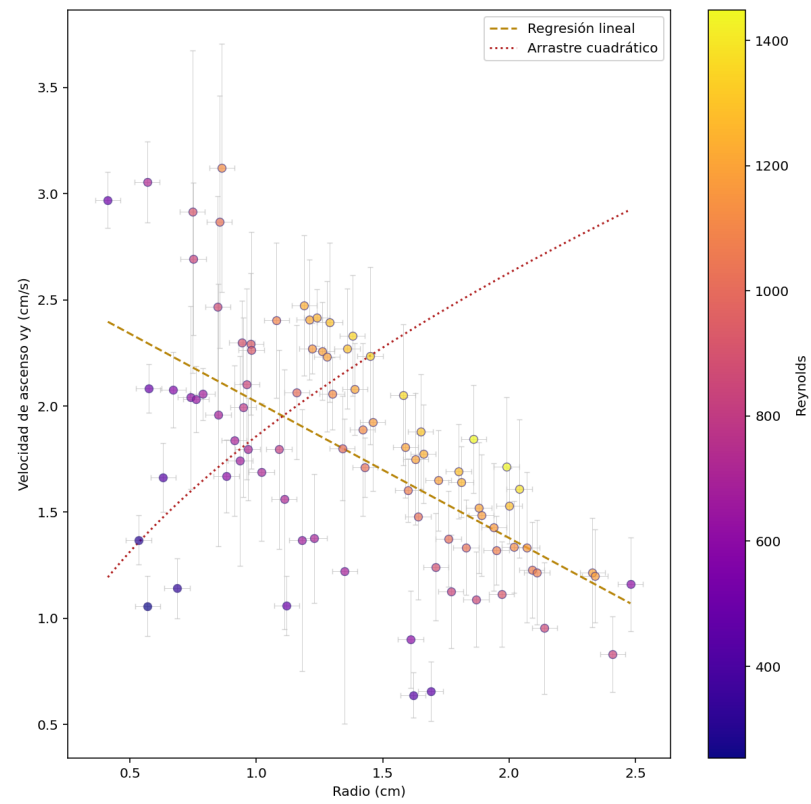
Fuente: elaboración propia

Figura 41. Velocidad contra radio, coloreado por aceleración



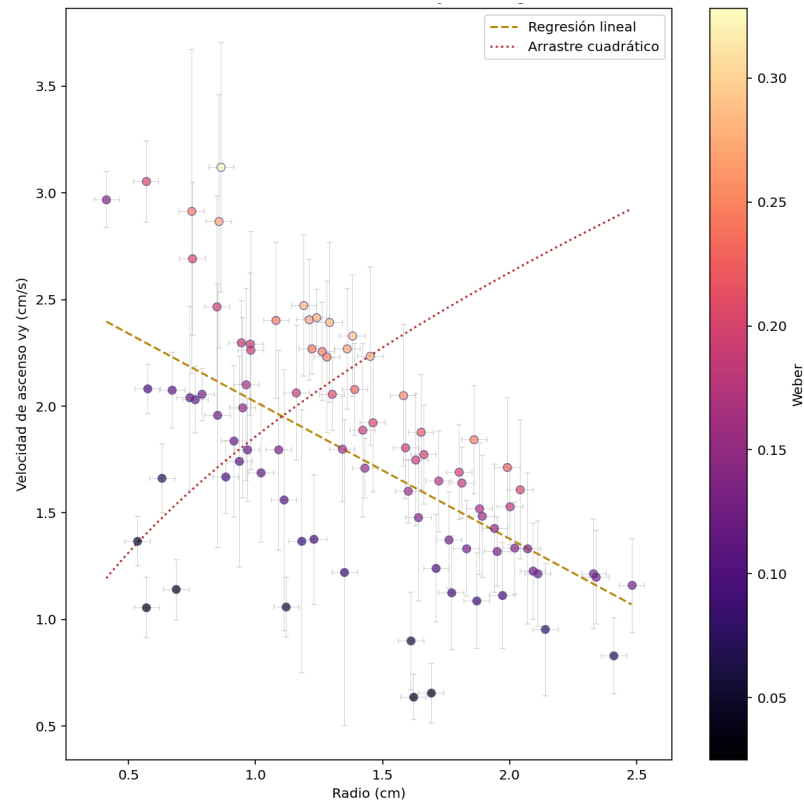
Fuente: elaboración propia

Figura 42. Velocidad contra radio, coloreado por número de Reynolds



Fuente: elaboración propia

Figura 43. Velocidad contra radio, coloreado por número de Weber



Fuente: elaboración propia

12.2. Archivos utilizados

Todos los archivos de la programación de los modelos de aprendizaje automático, el procesamiento de datos y la simulación se encuentran en el siguiente repositorio, así como un video de la lámpara de lava en funcionamiento y de la simulación.

https://github.com/jabi2/Archivos_Tesis_Lampara_Lava/tree/main

12.3. Arquitecturas de los modelos de redes neuronales

Figura 44. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 5 capas.

Batch Normalization
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Gelu, 256
Gelu, 256
Resultado, 1

Fuente: elaboración propia

Figura 45. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 6 capas

Batch Normalization
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Gelu, 256
Resultado, 1

Fuente: elaboración propia

Figura 46. Arquitectura del modelo de redes neuronales de 7 capas

Batch Normalization
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Gelu, 256
Batch Normalization
Dropout (0.3)
Gelu, 256
Gelu, 256
Gelu, 256
Resultado, 1

Fuente: elaboración propia

12.4. Tablas de datos y resultados

Tabla 11. Cuadro métricas de bosques aleatorios extendido

Árboles	Capas	R^2 entrenamiento	std R^2 entrenamiento	R^2 validación	std R^2 validación
300	15	0.975356	0.001030	0.865028	0.018598
200	15	0.975207	0.001088	0.864840	0.018312
200	10	0.941277	0.001780	0.864627	0.017877
300	10	0.941204	0.001845	0.864577	0.017695
100	15	0.974858	0.001253	0.864032	0.018914
100	10	0.941028	0.002130	0.863810	0.017584
300	20	0.980404	0.000750	0.862798	0.019556
300	25	0.980772	0.000744	0.862778	0.019746
300	30	0.980785	0.000752	0.862761	0.019743
200	30	0.980566	0.000783	0.862638	0.019469
200	25	0.980558	0.000774	0.862606	0.019465
200	20	0.980176	0.000791	0.862425	0.019487
100	30	0.980287	0.000844	0.861895	0.019947
100	25	0.980274	0.000852	0.861796	0.019884
100	20	0.979859	0.000856	0.861562	0.019893

Nota. Cuadro comparativo de error de las predicciones, comparando bosques aleatorios diferente número de capas y de árboles con la función *GridSearch*.

Fuente: elaboración propia

Tabla 12. Muestra de los datos analizados

N	t	x	y	vy	t	tempD	tempU	R	tiempo
1	89.608	5.17E-02	7.63E-02	1.89E-02	89.608	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.461
2	89.675	5.17E-02	7.78E-02	1.45E-02	89.675	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.528
3	89.742	5.17E-02	7.82E-02	1.02E-02	89.742	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.595
4	89.808	5.17E-02	7.92E-02	1.74E-02	89.808	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.661
5	89.875	5.17E-02	8.06E-02	1.89E-02	89.875	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.728
6	89.942	5.17E-02	8.17E-02	1.35E-02	89.942	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.795
7	90.008	5.22E-02	8.24E-02	1.30E-02	90.008	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.861
8	90.075	5.19E-02	8.35E-02	1.54E-02	90.075	5.89E-02	6.00E-02	2.04E-02	1799.928
9	93.409	5.29E-02	7.24E-02	1.56E-02	93.409	5.89E-02	6.00E-02	1.66E-02	1803.262
10	93.475	5.29E-02	7.36E-02	2.11E-02	93.475	5.89E-02	6.00E-02	1.66E-02	1803.328
11	93.542	5.29E-02	7.52E-02	1.83E-02	93.542	5.89E-02	6.00E-02	1.66E-02	1803.395
12	93.609	5.29E-02	7.60E-02	1.56E-02	93.609	5.89E-02	6.00E-02	1.66E-02	1803.462
...									

Nota. Cuadro de datos de ejemplo de la estructura de los datos analizados. La columna N indica el número del dato. Las columnas t son la variable tiempo **local**, el tiempo en cada video individual, en segundos. La columna x indica la posición horizontal de la esfera, en metros. La columna y indica la posición vertical de la esfera, en metros. La columna vy indica la velocidad vertical de la esfera, en m/s. La variable $tempD$ y $tempU$ indican las temperaturas inferiores y superiores dividido por mil, respectivamente. La variable R es el radio de la esfera, en metros. La columna de *tiempo* indica el tiempo total según la estimación de temperatura del modelo de temperatura contra tiempo, desde que el contenedor alcanzó los 50° Celsius.

Fuente: elaboración propia