

LOCALIZACION . DE
EVENTOS SISMICOS

LIBRO DE ACTAS

del Consejo de Estado

del Poder Judicial de la Federación

SECRETARÍA

BIBLIOTECA

del Poder Judicial de la Federación

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

LOCALIZACION DE
EVENTOS SISMICOS

José Enrique Molina Cruz

A mis padres,
y la universidad.

Trabajo de investigación presentado para optar
al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala

1986


BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

No. No. 1

(1) 
Dr. Jorge A. ...

Tribuna:

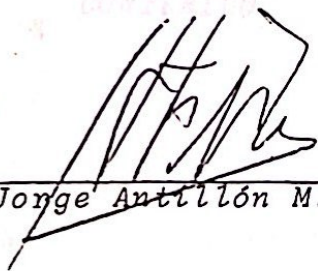
(1) 
Dr. Jorge A. ...

(1) 
A mis padres,
a la universidad.
Dr. ...


(1) 
Dr. ...

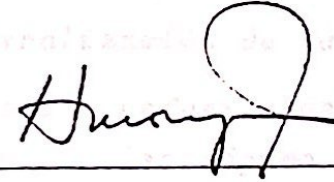
Fecha de aprobación: 17 de agosto de 1959

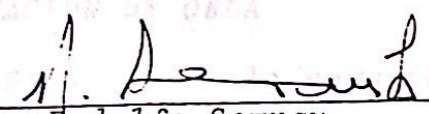
Vo. Bo. :

(f) 
Dr. Jorge Antillón M.

Tribunal:

(f) 
Dr. Jorge Antillón M.

(f) 
Dr. Héctor Monzón

(f) 
Dr. Rodolfo Semrau

Fecha de aprobación: 17 de Agosto de 1987

CONTENIDO

	Páginas
B. RESUMEN	viii
I. INTRODUCCION	1
II. NOTACION	3
III. TEORIA DE ELASTICIDAD	4
A. Definiciones y conceptos fundamentales	4
1. Vector desplazamiento	4
2. Vector de deformación	5
3. Tensor de deformación	6
4. Vector de esfuerzo	7
5. Tensor de esfuerzo	8
B. RELACION ESFUERZO-DEFORMACION	14
1. Generalización de la ley de Hooke	14
2. Relación esfuerzo-deformación para un medio isotrópico	16
3. Ecuación del movimiento en función del vector de desplazamiento	23
C. ECUACION DE ONDA	24
1. Solución de la ecuación del movimiento	24
2. Propagación de ondas planas	25
D. ECUACION DEL RAYO	29
IV. MODELOS DE CORTEZA	33
A. Ecuaciones generales	33
1. Tiempo de recorrido	33

2. Derivadas parciales del tiempo de recorrido	34
B. Modelos de corteza	36
1. Modelo de velocidad constante	36
2. Modelo de estratos paralelos	37
a. Tiempo de recorrido y distancia crítica para el rayo refractado	38
b. Tiempo de recorrido para el rayo directo	41
V. PROBLEMA DE LA LOCALIZACION	43
1. Método de Geiger	43
2. Método de la velocidad equivalente (EVM)	47
3. Modelo a velocidad constante	48
VI. CALCULO DE HIPOCENTROS	49
1. Datos iniciales	49
2. Procesamiento de datos	56
3. Resultados	59
4. Comentarios finales	69
VII. BIBLIOGRAFIA	70

I. INTRODUCCION

La localización de eventos sísmicos es uno de los problemas básicos de la sismología, el cual consiste en calcular los parámetros que identifican al evento como son: sus coordenadas geográficas, la profundidad y el tiempo origen.

El problema tiene importancia tanto desde el punto de vista científico como práctico puesto que con el estudio de la propagación de las ondas sísmicas se puede conocer más de las propiedades físicas de la tierra en particular de su corteza. Por otro lado es importante para prevenir o disminuir los daños causados por este tipo de fenómenos naturales.

No fue hasta que la sismología pasó a ser una ciencia puramente cuantitativa, con la creación del sismómetro y la instalación de las primeras redes sísmicas, que se le dio una solución aceptable al problema. Se atribuye a Geiger (1912) el haber aplicado por primera vez el método de Gauss-Newton para resolverlo; aun así hubo que esperar la creación de la computadora para poder realizar los cálculos que este implica.

El problema ha sido dividido en: localización de eventos lejanos y localización de eventos locales. El primero se considera bien conocido no así el segundo que debido a las nuevas restricciones, como el espacio limitado y la distribución o geometría de la red, presenta nuevas características.

El objetivo de este trabajo es presentar un programa que permite calcular las coordenadas espaciales y tiempo origen de eventos sísmicos locales utilizando dos métodos; el método de Geiger y el método de la velocidad equivalente EVM. Para esto se da primero la teoría necesaria que explica la propagación de ondas sísmicas en un medio homogéneo e isotrópico, considerando en particular el caso de ondas planas. Seguido se analiza la propagación de las ondas en dos modelos de corteza que comunmente se utilizan. Después se plantea el problema de la localización de hipocentros al presentar las ecuaciones generales para cada uno de los métodos. Por último se calculan los hipocentros para algunos eventos registrados por la red sísmica nacional.

El programa, hecho por Caccamo y Neri, fue utilizado por los autores para hacer una comparación estadística entre los dos algoritmos arriba mencionados utilizando eventos simulados. Las ventajas mostradas por el nuevo algoritmo son: mejora la convergencia y precisión del cálculo especialmente con pocas estaciones y una mala geometría de la red.

El método de Geiger es el más utilizado en los programas para el cálculo de las coordenadas del hipocentro. El procedimiento del cálculo es básicamente igual al que se presenta en este trabajo; pero cada programa tiene sus propias características dependiendo de las necesidades.

En general cada programa es eficiente bajo ciertas condiciones y los resultados dependen en cualquier caso de la calidad de los datos iniciales. Bajos valores en los residuales y

y errores estandar no son condición suficiente para garantizar una buena localización.

Por último en nuestro país el INSIVUMEH ha utilizado el programa HYP071, hecho por W. H. Lee y T. C. Lahr (1971), para la localización. Este programa calcula también la magnitud del evento y el mecanismo de foco; utiliza el algoritmo de Geiger y es usado en muchos centros sismológicos.

Deseo agradecer al personal del INSIVUMEH y en especial de la sección de sismología por haberme proporcionado información y sugerencias para para la realización de este trabajo.

Definición:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Operación:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Propiedad de un determinante:

$$|A^T| = |A|$$

II. NOTACION

Vector unitario:

$$\hat{a}_i$$

Vectores:

$$\underline{u} = \hat{a}_i u_i$$

Vector de posición:

$$\underline{x} (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Operador nabla:

$$\nabla \equiv \hat{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Derivadas:

$$u_{,ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Tensores:

$$\mathbb{A} = \hat{a}_i A_{ij} \hat{a}_j$$

Matriz transpuesta:

$$\tilde{\mathbb{A}} = \hat{a}_j A_{ij} \hat{a}_i = \hat{a}_i A_{ji} \hat{a}_j$$

Tensor identidad:

$$\mathbb{I} = \hat{a}_j \hat{a}_j$$

Traza de un tensor:

$$|\mathbb{A}| = A_{kk}$$

III: TEORIA DE ELASTICIDAD

En el presente capítulo se desarrolla la teoría necesaria para estudiar la propagación de ondas en medios elásticos.

El objetivo principal es establecer las ecuaciones que describen la trayectoria seguida por el vector de propagación (\hat{p}). En otras palabras establecer las ecuaciones del rayo sísmico.

A. Definiciones y conceptos fundamentales.

La teoría de elasticidad estudia el comportamiento de medios continuos sometidos a fuerzas que producen deformaciones. A continuación se definen los principales elementos de la teoría de elasticidad.

1. Vector de desplazamiento (\underline{u}).

Definimos el vector de desplazamiento, $\underline{u}(\underline{x}, t)$, como una función de la posición \underline{x} y del tiempo t , la cual indica el cambio de posición de un punto cualquiera dentro del medio producido por la deformación, como se muestra en la figura 1.

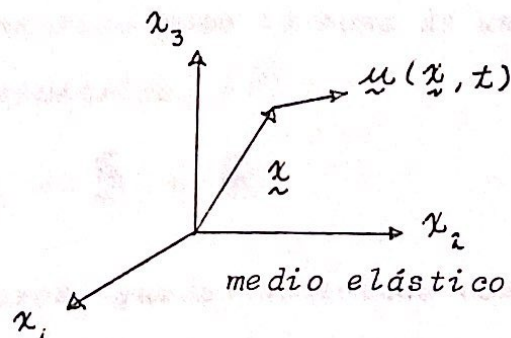


Figura 1.

Definimos la velocidad para un punto como $\frac{\partial \underline{\mu}}{\partial t}$; y su aceleración $\frac{\partial^2 \underline{\mu}}{\partial t^2}$.

2. Vector de deformación ($\delta \underline{\mu}$).

Definimos el vector de deformación $\delta \underline{\mu}$ como la función que determina el cambio de posición entre dos puntos vecinos producida por la deformación del medio. Si consideramos dos \times puntos, \underline{x} y $\underline{x} + \delta \underline{x}$ tenemos que

$$\delta \underline{\mu} = \underline{\mu}(\underline{x} + \delta \underline{x}) - \underline{\mu}(\underline{x}) \quad (1)$$

La función $\underline{\mu}(\underline{x} + \delta \underline{x})$ puede ser expandida en serie de Taylor alrededor del punto \underline{x} ;

$$\underline{\mu}(\underline{x} + \delta \underline{x}) \simeq \underline{\mu}(\underline{x}) + (\delta \underline{x} \cdot \nabla) \underline{\mu}(\underline{x})$$

Los demás términos de la serie pueden ser despreciados si consideramos puntos muy vecinos, e.d. $\delta \underline{x} \ll 1$. Al sustituir esta expresión en la ecuación (1) obtenemos

$$\delta \underline{\mu} \simeq (\delta \underline{x} \cdot \nabla) \underline{\mu} \quad (2)$$

Donde la cantidad $\nabla \underline{\mu}$ representa un tensor de segundo rango el cual puede ser escrito como la suma de un tensor simétrico, (\mathbb{S}), y otro antisimétrico, (\mathbb{R}),

$$\nabla \underline{\mu} = \mathbb{S} + \mathbb{R}$$

donde los dos tensores quedan definidos como:

$$\mathbb{S} = \frac{\nabla \underline{\mu} + \underline{\mu} \nabla}{2} \quad \text{y} \quad \mathbb{R} = \frac{\nabla \underline{\mu} - \underline{\mu} \nabla}{2}$$

3. Tensor de deformación (\mathbb{S}).

Por lo anterior la ecuación (2) puede ser escrita como

$$\delta \underline{\underline{u}} = \delta \underline{\underline{x}} \cdot (\mathbb{S} + \mathbb{R})$$

que en componentes es

$$\delta u_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j$$

Si aplicamos la identidad

$$(u_{i,j} - u_{j,i}) \delta x_j = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k$$

en la ecuación anterior obtenemos

$$\delta u_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} u_{m,l} \delta x_k$$

o

$$\delta u_i = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} ((\nabla \times \underline{\underline{u}}) \times \delta \underline{\underline{x}})_i \quad (3)$$

El segundo término del lado derecho de la ecuación (3) representa una rotación rígida infinitesimal. Por lo que dicho término no contribuye en la deformación.

Definimos el tensor de deformación \mathbb{S} como la parte simétrica del tensor $\nabla \underline{\underline{u}}$, e.d.

$$\mathbb{S} = \hat{a}_i S_{ij} \hat{a}_j \quad (\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{S}})$$

donde

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Con esta expresión podemos escribir el vector de deformación

$\delta \underline{u}$ como: $\delta \underline{u} = \delta \underline{x} \cdot \underline{S}$

por componentes

$$\delta u_i = S_{ij} \delta x_j$$

El tensor de deformación \underline{S} posee toda la información sobre las deformaciones infinitesimales en la vecindad de un punto dentro del medio. Los elementos de la diagonal representan cambios de longitud en las direcciones de los ejes (e.d. dilataciones o compresiones puras). Los demás elementos S_{ij} ($i \neq j$) representan esfuerzos de corte, que producen cambios en la forma pero no en el volumen.

El estado de deformación de un medio continuo queda completamente descrito por los elementos de la diagonal de \underline{S} , ya que cualquier tensor puede ser diagonalizado escogiendo el sistema de coordenadas apropiado.

4. Vector de esfuerzo (\underline{T}).

Definimos el vector de esfuerzo \underline{T} como la cantidad que representa la fuerza por unidad de área dentro del medio elástico, la cual se debe a las fuerzas de contacto entre las partículas a ambos lados de la superficie, así:

$$\underline{T}(\hat{n}) = \frac{\delta \underline{F}}{\delta s}$$

donde \hat{n} es el vector unitario perpendicular al elemento de superficie, $\oint_{\sim} \mathbf{f}$ es la fuerza producida por las partículas que están del lado positivo del elemento de superficie y dS es el elemento de superficie.

5. Tensor de esfuerzo (\mathbb{T}).

Para definir el tensor de esfuerzo partimos de las ecuaciones del movimiento de la mecánica clásica (formulación de Lagrange) para un medio continuo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\sim} \rho \ddot{u} dv = \int_{\sim} \mathbf{f} dv + \int_{\sim} \mathbb{T} ds \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\sim} \chi \times \rho \ddot{u} dv = \int_{\sim} \chi \times \mathbf{f} dv + \int_{\sim} \chi \times \mathbb{T} ds \quad (5)$$

donde ρ es la densidad del medio (que suponemos constante), \mathbf{f} es la fuerza por unidad de volumen, \mathbb{T} el vector de esfuerzo y χ es la posición del elemento de volumen dv respecto a un sistema fijo.

Ahora evaluamos la ecuación (4) para un punto dentro del medio en el cual \mathbf{f} y \mathbb{T} son distintos de cero. Para ello consideramos un elemento de volumen ΔV , que rodea al punto y después se le hace tender a cero.

Al analizar el orden de magnitud de las integrales que forman la ecuación (4) se ve que

$$\int_{\sim} \rho \ddot{u} dv \sim \Delta V \quad \text{y} \quad \int_{\sim} \mathbf{f} dv \sim \Delta V$$

mientras que

$$\int_s \vec{T} ds \sim (\Delta V)^{2/3}$$

Por lo que esta última integral se acerca a cero más lentamente que las otras dos conforme $\Delta V \rightarrow 0$. Al dividir la ecuación (4) por $\int_s ds$ se obtiene

$$\frac{\left| \int_s \vec{T} ds \right|}{\int_s ds} = 0, (\Delta V)^{1/3} \rightarrow 0; \text{ mientras } \Delta V \rightarrow 0 \quad (6)$$

Apliquemos este resultado a un elemento de volumen ΔV con forma de disco como el de la figura 2 y supongamos que el área de la cara lateral es despreciable en comparación con las áreas de las dos tapas.

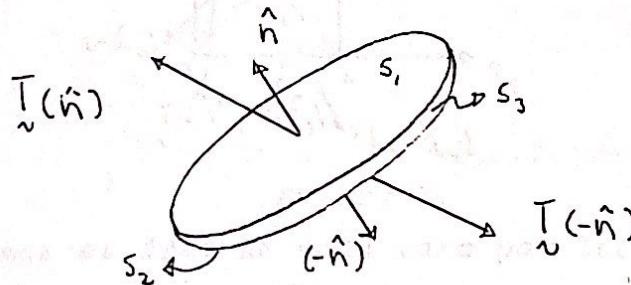


Figura 8.

La ecuación (6) puede ser escrita como:

$$\left| \int_{S_1} \vec{T} ds \right| + \left| \int_{S_2} \vec{T} ds \right| = 0$$

entonces

$$\left| \int_{S_1} \vec{T} ds \right| = - \left| \int_{S_2} \vec{T} ds \right|$$

$$\underline{\underline{T}}(\hat{n}) S_1 = -\underline{\underline{T}}(-\hat{n}) S_2 \quad \text{pero } S_1 = S_2$$

$$\therefore -\underline{\underline{T}}(\hat{n}) = \underline{\underline{T}}(-\hat{n}) \quad (7)$$

Este resultado es una consecuencia de la definición del vector de esfuerzo $\underline{\underline{T}}$.

Aplicaremos ahora la ecuación (6) a un elemento de volumen con forma de tetraedro con tres de sus caras paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas como se muestra en la figura 3.

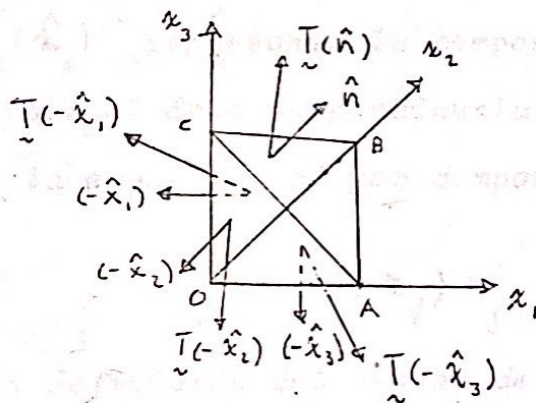


Figura 3.

Nombraremos el área de cada cara por las letras de los vértices que la forman (e.d. $ABC = \text{área perpendicular a } \hat{n}$). Entonces de la ecuación (6) tenemos

$$\underline{\underline{T}}(\hat{n}) ABC + \underline{\underline{T}}(-\hat{x}_1) OBC + \underline{\underline{T}}(-\hat{x}_2) OAC + \underline{\underline{T}}(-\hat{x}_3) OAB = 0$$

Geométricamente se puede demostrar que

$$\hat{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{(OBC, OAC, OAB)}{ABC}$$

con este resultado y el de la ecuación (7) encontramos la siguiente relación entre los esfuerzos que actúan sobre el elemento de volumen;

$$\vec{T}(\hat{n}) = \vec{T}(\hat{x}_1) n_1 + \vec{T}(\hat{x}_2) n_2 + \vec{T}(\hat{x}_3) n_3$$

en forma compacta

$$\vec{T}(\hat{n}) = \vec{T}(\hat{x}_j) n_j \quad (8)$$

Definimos el tensor de esfuerzo \mathbb{T} como

$$\mathbb{T} = \hat{a}_k \tau_{kl} \hat{a}_l$$

donde $\tau_{kl} = T_l(\hat{x}_k)$ representa la componente l del vector de esfuerzo \vec{T} sobre el área perpendicular al vector unitario \hat{x}_k .

Si escribimos la ecuación (8) por componentes

$$T_i = T_i(\hat{x}_j) n_j$$

y aplicamos la definición del tensor de esfuerzo se obtiene

$$T_i = \tau_{ji} n_j$$

ó

$$\vec{T}(\hat{n}) = \mathbb{T} \cdot \hat{n}$$

A continuación demostraremos que el tensor de esfuerzo \mathbb{T} es simétrica.
Partimos nuevamente de las ecuaciones del movimiento (4) y (5). Debemos recordar que estas ecuaciones están escritas para la posición instantánea del elemento de volumen considerado. Por

lo que la posición de un elemento cualquiera después que se deforma el medio se puede escribir como:

$$\underline{\tilde{\chi}} = \underline{\tilde{\chi}} + \underline{\tilde{u}}$$

Si sustituimos esta expresión en el término del lado izquierdo de la ecuación (5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\underline{\tilde{\chi}} + \underline{\tilde{u}}) \times \rho \underline{\tilde{u}} \, dv &= \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\tilde{\chi}} + \underline{\tilde{u}}) \times \rho \underline{\tilde{u}} + \underline{\tilde{\chi}} \times \rho \underline{\tilde{u}} \right) dv \\ &= \int_V \underline{\tilde{\chi}} \times \rho \underline{\tilde{u}} \, dv \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (5) puede ser escrita como

$$\int_S \underline{\tilde{\chi}} \times \underline{\tilde{T}} \, ds = \int_V \underline{\tilde{\chi}} \times (\rho \underline{\tilde{u}} - \underline{\tilde{f}}) \, dv$$

que en componentes es

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \chi_j T_k \, ds = \int_V \varepsilon_{ijk} \chi_j (\rho \dot{u}_k - f_k) \, dv \quad (9)$$

La ecuación (4) escrita en componentes es:

$$\int_S T_i \, ds = \int_V (\rho \dot{u}_i - f_i) \, dv$$

Sustituyendo $T_i = t_{ji} n_j$ y aplicando el teorema de la divergencia al término de la izquierda se tiene

$$\int_S T_i \, ds = \int_S t_{ji} n_j \, ds = \int_V t_{j^i, j} \, dv$$

entonces

$$t_{j,i,j} = \rho i_i - f_i \quad (10)$$

Al multiplicar vectorialmente toda la ecuación anterior por χ e integrando respecto al volumen se obtiene

$$\int_V \epsilon_{ijk} \chi_j t_{lk,l} dv = \int_V \epsilon_{ijk} (\rho i_k - f_k) dv$$

Vemos que el término del lado derecho es igual al término de la derecha en la ecuación (9); igualando los otros dos tenemos

$$\int_S \epsilon_{ijk} \chi_j T_k ds = \int_V \epsilon_{ijk} \chi_j t_{lk,l} dv \quad (11)$$

Sustituyendo $T_k = t_{lk} n_l$ y aplicando el teorema de la divergencia al término de la izquierda obtenemos:

$$\int_S \epsilon_{ijk} \chi_j T_k ds = \int_S \epsilon_{ijk} \chi_j t_{lk} n_l ds = \int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \chi_l} (\chi_j t_{lk}) dv$$

operando la derivada

$$\begin{aligned} \int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \chi_l} (\chi_j t_{lk}) dv &= \int_V \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \chi_j}{\partial \chi_l} t_{lk} + \chi_j t_{lk,l} \right) dv \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} t_{lk} + \chi_j t_{lk,l}) dv \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (11)

$$\int_V \epsilon_{ijk} t_{jk} dv + \int_V \epsilon_{ijk} \chi_j t_{lk,l} dv = \int_V \epsilon_{ijk} \chi_j t_{lk,l} dv$$

de donde

$$\int_V \epsilon_{ijk} t_{jk} dv = 0$$

entonces

$$\epsilon_{ijk} t_{jk} = 0$$

implica que

$$t_{jk} = t_{kj} \quad (\Pi = \tilde{\Pi})$$

por lo tanto el tensor de esfuerzo es simétrico.

B. Relación esfuerzo-deformación.

1. Generalización de la ley de Hooke.

La ley de Hooke en su forma más simple puede ser enunciada así:

$$T = E \epsilon$$

donde T es el esfuerzo, E el módulo de Young y ϵ la deformación unitaria.

Esta puede ser generalizada directamente como

$$t_{ij} = F_{ij} (S_{11}, S_{22}, S_{33}, \dots, S_{12})$$

con la condición que el proceso sea isotérmico. En caso contra-

rio debemos considerar un término adicional que tome en cuenta la deformación producida por el cambio de temperatura.

La función F_{ij} puede ser expandida en series de potencias ; y si consideramos únicamente términos lineales (al suponer pequeñas deformaciones) tenemos:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}$$

La cual relaciona a los tensores de esfuerzo y de deformación en cada punto del medio. Entonces cada componente del tensor de esfuerzo puede ser escrita como una combinación lineal de todas las componentes del tensor de deformación.

Para el caso más general las componentes del tensor de 4-rango C_{ijkl} , denominado el tensor de Hooke, pueden variar de un punto a otro dentro del medio. Pero si éste permanece constante ante traslaciones se dice que el medio es elásticamente homogéneo.

Propiedades del tensor de Hooke. Este tensor posee varias simetrías lo que hace que el número de componentes independientes se reduzca considerablemente.

Debido a la simetría del tensor de esfuerzo ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) el tensor de Hooke es simétrico respecto a los primeros dos subíndices, e.d.

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

Todo tensor lo podemos escribir como la suma de una parte simétrica y otra antisimétrica. Al analizar la simetría respecto a los dos últimos subíndices, el tensor de Hooke se puede

escribir

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) + \frac{1}{2} (C_{ijkl} - C_{ijlk})$$

si llamamos C'_{ijkl} a la parte simétrica y C''_{ijkl} a la parte antisimétrica entonces la relación esfuerzo-deformación puede ser escrita como:

$$\tau_{ij} = C'_{ijkl} \epsilon_{kl} + C''_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

El segundo término de la derecha se hace cero debido a la simetría del tensor de deformación y a la antisimetría (por definición) de C''_{ijkl} . Por lo tanto

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

Estas dos simetrías reducen el número de componentes independientes a 36 que pueden ser reducidas a dos (constantes de Lamé) si consideramos un medio isotrópico. Es decir si imponemos la condición que el tensor de Hooke sea invariante ante rotaciones.

2. Relación esfuerzo deformación para un medio isotrópico.

Con las dos simetrías mostradas anteriormente para el tensor de Hooke podemos escribir la relación esfuerzo-deformación

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{2123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

El factor dos en las componentes del tensor de deformación viene de la definición del tensor ($\epsilon_{ij} = \mu_{i,j} + \mu_{j,i}$).

Al estudiar la invariancia de la matriz de coeficientes ante rotaciones encontramos simetrías respecto a las parejas de subíndices (ij) & (kl). Para facilitar el cálculo haremos el siguiente cambio de notación.

$$\begin{array}{ll} \tau_{11} = \tau_1 & S_{11} = S_1 \\ \tau_{22} = \tau_2 & S_{22} = S_2 \\ \tau_{33} = \tau_3 & S_{33} = S_3 \\ \tau_{23} = \tau_4 & 2S_{23} = S_4 \\ \tau_{31} = \tau_5 & 2S_{31} = S_5 \\ \tau_{12} = \tau_6 & 2S_{12} = S_6 \end{array}$$

Entonces el sistema de ecuaciones puede ser escrito

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Si realizamos tres rotaciones consecutivas; la primera de 90° respecto al eje- x_1 , la segunda de 90° respecto al eje- x_2 , y la última de 45° respecto al eje- x_3 , podemos determinar las relaciones entre los coeficientes C_{ij} que hacen que el número de elementos independientes se reduzca a dos

La matriz general para rotaciones respecto al eje- x_3 es:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \text{Sen } \theta & 0 \\ -\text{Sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de transformación para las componentes de un tensor de segundo rango A es

$$A'_{ij} = M_{ik} M_{jl} A_{kl} \quad (13)$$

donde M_{ij} son las componentes de la matriz de transformación,

Para la primera rotación la matriz de transformación es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando la ecuación (13) encontramos las ecuaciones de transformación para las componentes de los tensores de esfuerzo y deformación.

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 & x'_4 &= -x_4 & S'_1 &= S_1 & S'_4 &= -S_4 \\ x'_2 &= x_3 & x'_5 &= x_6 & S'_2 &= S_3 & S'_5 &= S_6 \\ x'_3 &= x_2 & x'_6 &= -x_5 & S'_3 &= S_2 & S'_6 &= -S_5 \end{aligned} \quad (14)$$

Las ecuaciones para la relación esfuerzo-deformación en el sistema primado son:

$$\begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \\ t'_4 \\ t'_5 \\ t'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \\ S'_4 \\ S'_5 \\ S'_6 \end{pmatrix}$$

que podemos escribir en función de las cantidades no primadas utilizando la ecuación (14). Después de sustituir y ordenar tenemos:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{13} & C_{12} & -C_{14} & -C_{16} & C_{15} \\ C_{31} & C_{33} & C_{32} & -C_{34} & -C_{36} & C_{35} \\ C_{21} & C_{23} & C_{22} & -C_{24} & -C_{26} & C_{25} \\ -C_{41} & -C_{43} & -C_{42} & C_{44} & C_{46} & -C_{45} \\ -C_{51} & -C_{53} & -C_{52} & C_{54} & C_{56} & -C_{55} \\ C_{51} & C_{53} & C_{52} & -C_{54} & -C_{56} & C_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix}$$

Al comparar esta matriz de coeficientes con la de la ecuación (12) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} \quad (15)$$

donde $C_{12} = C_{13}$ $C_{22} = C_{33}$ $C_{55} = C_{66}$
 $C_{21} = C_{31}$ $C_{32} = C_{23}$

Aplicando la segunda transformación

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

al sistema de ecuaciones (15) y haciendo lo mismo que en la primera transformación obtenemos las siguientes condiciones.

(El número de componentes permanece constante)

$$C_{12} = C_{21} \quad C_{23} = C_{13} \quad C_{55} = C_{66}$$

$$C_{22} = C_{11} \quad C_{13} = C_{32}$$

Resumiendo tenemos las siguientes igualdades

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32}$$

con lo que el número de componentes independientes se ha reducido a tres.

Al operar la tercera rotación obtenemos la relación entre los tres últimos elementos. Esta es

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando la ecuación (13) tenemos

$$x'_1 = \frac{1}{2} x_1 + x_6 + \frac{1}{2} x_2$$

$$x'_2 = \frac{1}{2} x_1 - x_6 + \frac{1}{2} x_2$$

$$x'_3 = x_3$$

$$x'_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_4 - x_5)$$

$$x'_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_5 + x_4)$$

$$x'_6 = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)$$

$$S'_1 = \frac{1}{2} (S_1 + S_2 + S_6)$$

$$S'_2 = \frac{1}{2} (S_1 - S_6 + S_2)$$

$$S'_3 = S_3$$

$$S'_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_4 - S_5)$$

$$S'_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_5 - S_4)$$

$$S'_6 = (S_2 - S_1)$$

De la ecuación (15) vemos que

$$x'_6 = C_{66} S'_6 = C_{44} S'_6$$

en función de las coordenadas no primadas

$$x_2 - x_1 = 2 C_{44} (S_2 - S_1)$$

Utilizando nuevamente la ecuación (15) tenemos

$$x_2 = C_{21} S_1 + C_{22} S_2 + C_{23} S_3$$

$$x_1 = C_{11} S_1 + C_{12} S_2 + C_{13} S_3$$

Restándolas y considerando las simetrías entre los C_{ij} obtenemos

$$x_2 - x_1 = (C_{11} - C_{12})(S_2 - S_1)$$

Comparando las dos ecuaciones para la diferencia $x_2 - x_1$ vemos que

$$2 C_{44} = C_{11} - C_{12}$$

Definimos $C_{11} = \mu$ y $C_{12} = \lambda$ que son las constantes elásticas, constantes de Lamé, para un medio isotrópico y homogéneo.

Si escribimos las ecuaciones que relacionan los τ_{ij} con los S_{ij} en términos de las constantes elásticas tenemos de la ecuación (15)

$$\tau_{11} = C_{11} S_{11} + C_{12} S_{22} + C_{13} S_{33}$$

y si sumamos y restamos $C_{12} S_{11}$ al lado derecho obtenemos:

$$\tau_{11} = (C_{11} - C_{12}) S_{11} + C_{12} (S_{11} + S_{22} + S_{33})$$

Cambiando de notación y sustituyendo por las constantes μ y λ

$$\tau_{11} = 2\mu S_{11} + \lambda S_{kk}$$

De igual forma para las otras componentes

$$\tau_{22} = 2\mu S_{22} + \lambda S_{kk}$$

$$\tau_{33} = 2\mu S_{33} + \lambda S_{kk}$$

$$\tau_{23} = 2\mu S_{23}$$

$$\tau_{31} = 2\mu S_{31}$$

$$\tau_{12} = 2\mu S_{12}$$

en forma compacta

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \delta_{ij} S_{kk}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{S} + \lambda |\boldsymbol{S}| \mathbf{1}.$$

Que es la relación esfuerzo-deformación para un medio homogéneo e isotrópico.

3. Ecuación del movimiento en función del vector de desplazamiento.

Como vimos anteriormente la ecuación del movimiento (4) puede ser escrita como:

$$x_{j,i,j} = \rho \ddot{u}_i - f_i$$

$$\nabla \cdot \Pi = \rho \ddot{u} - \underline{f}$$

Al sustituir la ecuación (16) tenemos

$$2\mu \nabla \cdot \mathbb{S} + \lambda \nabla \cdot |\mathbb{S}| \mathbb{1} + \underline{f} = \rho \ddot{u}$$

El término $\nabla \cdot |\mathbb{S}| \mathbb{1}$ puede ser escrito como

$$\nabla \cdot |\mathbb{S}| \mathbb{1} = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{a}_i \cdot \hat{a}_j s_{kk} \hat{a}_j = \frac{\partial}{\partial x_i} s_{kk} \hat{a}_j = \nabla |\mathbb{S}|$$

entonces

$$2\mu \nabla \cdot \mathbb{S} + \lambda \nabla |\mathbb{S}| + \underline{f} = \rho \ddot{u}$$

Sustituyendo

$$\mathbb{S} = \frac{\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla}{2} \quad \& \quad |\mathbb{S}| = \nabla \cdot \underline{u}$$

obtenemos

$$\mu \nabla \cdot \nabla \underline{u} + \mu \underline{u} \nabla \nabla + \lambda \nabla \nabla \cdot \underline{u} + \underline{f} = \rho \ddot{u}$$

Si $\underline{\underline{u}} \cdot \nabla \nabla = \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{u}}$ e.d. las derivadas conmutan; entonces:

$$\mu \nabla \cdot \nabla \underline{\underline{u}} + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{f}} = \rho \underline{\underline{u}} \ddot{\quad} \quad (17)$$

es la ecuación del movimiento para un punto dentro de un medio homogéneo e isotrópico.

C. Ecuación de onda.

1. Solución de la ecuación del movimiento.

Si consideramos un medio inicialmente libre de fuerzas e.

d. $\underline{\underline{f}} = 0$ la ecuación del movimiento (17) es

$$\mu \nabla^2 \underline{\underline{u}} + (\mu + \lambda) \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{u}} = \rho \underline{\underline{u}} \ddot{\quad}$$

que puede ser transformada utilizando la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{u}}) = \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{u}} - \nabla \cdot \nabla \underline{\underline{u}}$$

con la que obtenemos

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{u}} - \mu \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{u}}) = \rho \underline{\underline{u}} \ddot{\quad} \quad (18)$$

Esta ecuación sugiere una solución del tipo

$$\underline{\underline{u}} = \nabla \psi + \nabla \times \underline{\underline{A}}$$

donde ψ es una función escalar de la posición y $\underline{\underline{A}}$ es una función vectorial de la posición.

Sustituyendo la expresión anterior en la ecuación (18) obtenemos:

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \psi - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi \right] - \nabla \times \left[\mu \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{A}}) + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{\underline{A}} \right] = 0$$

El segundo término puede ser transformado utilizando nuevamente la identidad

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{A}}) = \nabla \nabla \cdot \underline{\underline{A}} - \nabla \cdot \nabla \underline{\underline{A}}$$

Al sustituirla en la expresión de arriba el término $\nabla \times \nabla (\nabla \cdot \underline{\underline{A}})$ es cero. Por conveniencia hacemos $\nabla \cdot \underline{\underline{A}} = 0$

La ecuación del movimiento queda

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \psi - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}] - \nabla \times [\mu \nabla \cdot \nabla \underline{\underline{A}} - \rho \frac{\partial^2 \underline{\underline{A}}}{\partial t^2}] = 0$$

de donde obtenemos las condiciones siguientes

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \psi - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

$$\mu \nabla^2 \underline{\underline{A}} - \rho \frac{\partial^2 \underline{\underline{A}}}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

Estas dos ecuaciones tienen la forma general de la ecuación de onda, lo que indica que para un medio homogéneo e isotrópico inicialmente libre de fuerzas existen dos tipos de ondas. La primera representada por la función ψ que se propaga con una velocidad $v_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$; y la segunda representada por la función $\underline{\underline{A}}$ con una velocidad de propagación $v_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$

2. Propagación de ondas planas.

Analizaremos algunas de las propiedades de estos dos tipos de ondas para el caso de ondas planas.

Las ondas planas se caracterizan porque la función que las representa depende de una coordenada espacial y el tiempo. Por simplicidad consideraremos una onda plana que viaja en la dirección x_3 .

Las funciones de onda son:

$$\psi \equiv \psi(x_3 - v_1 t)$$

$$A \equiv A(x_3 - v_2 t)$$

la ecuación (19) a resolver es

$$v_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (21)$$

Para ello hacemos el cambio de variables

$$\xi = x_3 - v_1 t \quad \eta = x_3 + v_1 t$$

entonces

$$\psi \equiv \psi(\xi, \eta)$$

con lo que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}$$

Sustituyendo en la ecuación (21)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

que tiene la solución general

$$\psi(\xi, \eta) = f(\xi) - g(\eta)$$

Cambiando nuevamente de variables obtenemos

$$\psi(x_3, t) = f(x_3 - c, t) + g(x_3 + c, t)$$

Esta expresión la podemos generalizar para una onda que viaja en cualquier dirección en función del vector de propagación \hat{p} .

Esta es:

$$\psi(\underline{x}, t) = f(\hat{p} \cdot \underline{x} - \omega t) + g(\hat{p} \cdot \underline{x} + \omega t)$$

Podemos ver cómo se relaciona el desplazamiento \underline{u} respecto al vector de propagación \hat{p} por la ecuación

$$\underline{u} = \nabla \psi$$

Haciendo $\nabla \psi$ obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \psi = p_{x_1} (f' + g')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \psi = p_{x_2} (f' + g')$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \psi = p_{x_3} (f' + g')$$

donde p_{x_i} son las componentes de \hat{p} y f' & g' las derivadas respecto al argumento $(\hat{p} \cdot \underline{x} - \omega t)$ y $(\hat{p} \cdot \underline{x} + \omega t)$ respectivamente.

Entonces

$$\nabla \psi = \underline{u} = \hat{p} (f' + g')$$

lo que indica que el desplazamiento \underline{u} es en la dirección del vector de propagación \hat{p} . Por lo que ψ representa una onda longitudinal.

Ahora resolveremos la ecuación de onda para la función vectorial \hat{A} , esta es

$$v_2^2 \nabla^2 \underline{A} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A}$$

Al escribirla por componentes y recordando que $\underline{A} \equiv \underline{A}(\underline{x}_3, t)$ tenemos

$$v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_1$$

$$v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_2$$

$$v_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} A_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3$$

Por la condición $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ vemos que la última de estas ecuaciones es

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_3 = 0$$

con solución de la forma

$$A_3 = at + b$$

Las soluciones para las otras dos ecuaciones son iguales a la obtenida para la función escalar ψ y las podemos escribir como

$$\hat{x}_1 A_1 = \left\{ f_1(x_3 - v_2 t) + g_1(x_3 + v_2 t) \right\} \hat{x}_1$$

$$\hat{x}_2 A_2 = \left\{ f_2(x_3 - v_2 t) + g_2(x_3 + v_2 t) \right\} \hat{x}_2$$

generalizando

$$A_1 \hat{a}_1 = \left\{ f_1(\hat{p} \cdot \underline{x} - v_2 t) + g_1(\hat{p} \cdot \underline{x} + v_2 t) \right\} \hat{a}_1$$

$$A_2 \hat{a}_2 = \left\{ f_2(\hat{p} \cdot \underline{x} - v_2 t) + g_2(\hat{p} \cdot \underline{x} + v_2 t) \right\} \hat{a}_2$$

donde $\hat{a}_1 \times \hat{a}_2 = \hat{\rho}$

Si hacemos

$$\nabla \times \underline{\hat{A}} = \underline{\mu} = \hat{a}_2 (f'_1 + g'_1) - \hat{a}_1 (f'_2 + g'_2)$$

vemos que el vector de desplazamiento tiene dos componentes perpendiculares respecto al vector de propagación $\hat{\rho}$. Por lo que $\underline{\hat{A}}$ representa una onda transversal con dos polarizaciones.

Resumiendo, para un medio homogéneo e isotrópico considerando ondas planas, existen dos tipos de ondas: longitudinales y transversales. Este resultado sigue siendo válido para el caso de ondas con geometría esférica.

D. Ecuación del rayo.

La ecuación que describe la trayectoria del vector de propagación $\hat{\rho}$, ecuación del rayo, puede ser deducida directamente de la ecuación de onda. Por razones de simplicidad la deduciremos del principio de Fermat.

Consideremos la trayectoria de un rayo sísmico entre dos puntos A y B. Como lo muestra la figura 4.

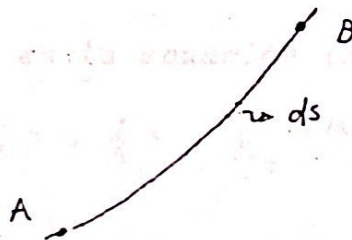


Figura 4.

El tiempo de recorrido lo podemos escribir como

$$T = \int_A^B \frac{ds}{N(x)} \quad (22)$$

donde $N(\underline{x})$ es la velocidad que es función únicamente de la posición, es continua y con derivadas continuas.

Podemos enunciar el principio de Fermat como: Para una trayectoria de tiempo mínimo el valor de la integral (22) tiene un valor estacionario. Es decir que la variación entre dos trayectorias de tiempo mínimo es cero.

Las ecuaciones paramétricas para la trayectoria son:

$$x_1 = x_1(q)$$

$$x_2 = x_2(q)$$

$$x_3 = x_3(q)$$

donde q es un parámetro arbitrario.

Un elemento de trayectoria ds puede ser escrito como

$$ds = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)^{1/2} \quad (23)$$

los diferenciales de las coordenadas son

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dq} dq = \dot{x}_1 dq$$

$$dx_2 = \dot{x}_2 dq$$

$$dx_3 = \dot{x}_3 dq$$

que al sustituirlos en la ecuación (23) obtenemos

$$ds = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^{1/2} dq \quad (24)$$

Sustituyendo ahora este diferencial en la integral (23)

$$T = \int_{q_1}^{q_2} \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^{1/2}}{N(\underline{x})} dq = \int_{q_1}^{q_2} W dq$$

donde definimos

$$W = \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^{1/2}}{v(x)}$$

Consideremos ahora una familia de curvas que unan los puntos A y B. Escribimos la variación entre dos de estas curvas como

$$\delta T = \int_{q_1}^{q_2} \delta W dq$$

donde

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \quad (i=1, 2, 3)$$

Sustituyendo en la integral anterior

$$\delta T = \int_{q_1}^{q_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) dq + \int_{q_1}^{q_2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \delta x_i \right) dq$$

(i=1, 2, 3)

Integrando por partes la primera integral

$$\delta T = \left. \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \right|_{q_1}^{q_2} - \int_{q_1}^{q_2} \left(\frac{d}{dq} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) \delta x_i dq$$

(i=1, 2, 3)

Como las curvas consideradas pasan por los puntos A y B entonces al evaluar tenemos que $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = 0$.

Si las trayectorias anteriores son de tiempo mínimo se cumple que

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial W}{\partial x_2} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial W}{\partial x_3} = 0$$

que son conocidas como las ecuaciones de Euler para los extremos.

Sustituyendo la función

$$W = \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^{1/2}}{2}$$

en la ecuación (25) y haciendo $q = S$ e.d. escogiendo la longitud de la trayectoria como el parámetro q , de la ecuación (24) obtenemos

$$(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)^{1/2} = 1.$$

Entonces las ecuaciones que definen la trayectoria del rayo son:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial W}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{N} \right) = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial W}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{N} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial W}{\partial s} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{1}{N} \right) = 0$$

Geoméricamente vemos que las cantidades $\frac{\partial x_1}{\partial s}$, $\frac{\partial x_2}{\partial s}$ y $\frac{\partial x_3}{\partial s}$ son los cosenos directores de un elemento de trayectoria ds .

IV. MODELOS DE CORTEZA

Ya conocidas las ecuaciones generales que definen la trayectoria de un rayo sísmico el siguiente paso es resolverlas para un modelo de corteza en particular. Entre los modelos más utilizados, ya sea por que hacen simple la solución de las ecuaciones/como por su aproximación con la realidad física, están: el modelo de velocidad constante y el modelo de estratos paralelos.

Primero se presenta la ecuación general para el tiempo de recorrido T entre dos puntos y luego serán deducidas las expresiones para las derivadas parciales de T respecto a las coordenadas espaciales $(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$. Estas cantidades, como se verá más adelante, son necesarias para el cálculo de la localización de hipocentros.

Seguido se obtendrán las ecuaciones particulares de T para los dos modelos de corteza mencionados.

A. Ecuaciones generales.

1. Tiempo de recorrido.

El tiempo de recorrido entre dos puntos dentro del medio, como se definió en el capítulo III, es

$$T = \int_A^B \frac{ds}{V(\underline{x})} = \int_{q_1}^{q_2} W dq$$

2. Derivadas parciales del tiempo de recorrido.

A continuación se deducirán las expresiones generales para las cantidades $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ y $\frac{\partial T}{\partial z}$, utilizando cálculo variacional.

Consideremos dos trayectorias de tiempo mínimo Γ_1 y Γ_2 como las que se muestran en la figura 5.

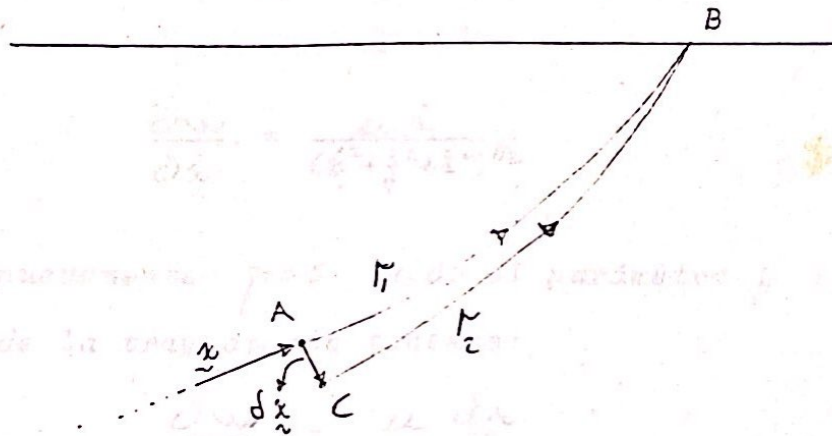


Figura 5.

Γ_1 parte del punto A, localizado por el vector \tilde{x} , hacia el punto B; Γ_2 del punto C, localizado a $d\tilde{x}$ de A, hacia el mismo punto B.

La variación en el tiempo de recorrido entre estas dos trayectorias es

$$\delta T = \left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}} \delta x + \frac{\partial w}{\partial \dot{y}} \delta y + \frac{\partial w}{\partial \dot{z}} \delta z \right) \Big|_{q_1}^{q_2} - \text{ec. de Euler} \quad (27)$$

Como las dos trayectorias son de tiempo mínimo, por de finición, las ecuaciones de Euler son igual a cero.

Al valuar la ecuación (27) en los puntos extremos vemos que la variación en el punto q_2 debe ser cero, ya que las dos trayectorias pasan por el mismo punto B. Entonces

$$\delta T = - \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \Big|_A \delta x, - \frac{\partial W}{\partial \dot{y}} \Big|_A \delta y, - \frac{\partial W}{\partial \dot{z}} \Big|_A \delta z, \quad (28)$$

Si definimos

$$\mu = \frac{1}{v} \Rightarrow W = \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}$$

entonces

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = \frac{\mu \dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}}$$

haciendo nuevamente $p=s$ e.d. el parámetro p igual a la longitud de la trayectoria tenemos:

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = \mu \frac{dx}{ds}$$

recordando que

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}$$

en forma análoga

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{y}} = \mu \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{z}} = \mu \frac{dz}{ds}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (28)

$$\delta T = - \mu \frac{dx}{ds} \Big|_A \delta x, - \mu \frac{dy}{ds} \Big|_A \delta y, - \mu \frac{dz}{ds} \Big|_A \delta z, \quad (29)$$

Por otro lado sabemos que T es una función que depende únicamente de las coordenadas de los puntos extremos, e.d.

$T(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, entonces:

$$\delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_A dx_1 + \left. \frac{\partial T}{\partial y_1} \right|_A dy_1 + \left. \frac{\partial T}{\partial z_1} \right|_A dz_1 + \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_B dx_2 + \left. \frac{\partial T}{\partial y_2} \right|_B dy_2 + \left. \frac{\partial T}{\partial z_2} \right|_B dz_2$$

Como el punto B es común para las dos trayectorias $dx_2 = dy_2 = dz_2 = 0$
Igualando términos entre las ecuaciones (29) y (30) obtenemos

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x_1} \right|_A = -\mu \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_A$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y_1} \right|_A = -\mu \left. \frac{\partial y}{\partial s} \right|_A$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z_1} \right|_A = -\mu \left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_A$$

que son las ecuaciones para las parciales del tiempo de recorrido valuadas en la fuente o hipocentro.

B. Modelos de corteza.

1. Modelo de velocidad constante.

El modelo de corteza de velocidad constante se define como un medio semi-infinito en el cual la función velocidad tiene el mismo valor para todos los puntos dentro del medio.

Para este modelo las ecuaciones del rayo sísmico tienen una solución sencilla y dan como resultado las ecuaciones paramétricas para una línea recta. Por lo tanto la trayectoria de tiempo mínimo entre el hipocentro y la estación será igual a la distancia geométrica entre dichos puntos y el tiempo de recorrido para la i -ésima estación se calcula simplemente

como

$$T_i = \frac{\text{distancia geométrica}}{v}$$

Las derivadas parciales valuadas en el hipocentro son

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial x} \right|_A = -\frac{1}{v} \left. \frac{\partial x}{\partial S} \right|_A = -\frac{(X - x_i)}{vS}$$

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial y} \right|_A = -\frac{(Y - y_i)}{vS}$$

$$\left. \frac{\partial T_i}{\partial z} \right|_A = -\frac{(Z - z_i)}{vS}$$

donde X, Y, Z son las coordenadas del hipocentro y coordenadas de la i -ésima estación.

2. Modelo de estratos paralelos.

Se define como un modelo semi-infinito formado por un cierto número de estratos o capas de distintos espesores. La función velocidad se considera constante dentro de cada una de estas capas y su magnitud aumenta con la profundidad. Ver figura 6.

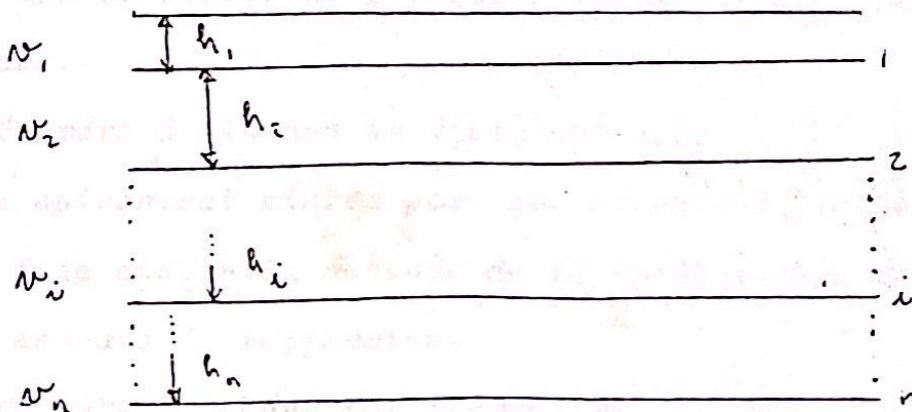


Figura 6.

donde h_i es el espesor del estrato i , v_i es la velocidad de propagación en el i -ésimo estrato y se cumple que $v_i > v_j$; $\forall i > j$.

Como se hizo en el modelo anterior el primer paso consiste en resolver las ecuaciones que definen la trayectoria del rayo sísmico. Por analogía vemos que dentro de cada estrato ésta es una línea recta y como consecuencia del principio de Fermat el comportamiento del rayo en las superficies de separación queda descrito por la ley de Snell.

A diferencia del modelo de velocidad constante los tipos de rayos que pueden alcanzar la estación son el "directo" y el refractado por capas por debajo del hipocentro.

Como nos interesa determinar el recorrido de tiempo mínimo debemos calcular los tiempos de las trayectorias posibles del rayo que alcanzan la estación y escoger el menor de ellos.

Deduciremos a continuación las ecuaciones para calcular el tiempo de recorrido para un rayo en un medio formado por n -estratos. Consideraremos el rayo refractado y el "directo" por separado.

a. Tiempo de recorrido y distancia crítica para rayos refractados.

Primero definimos la distancia crítica D como la distancia epicentral mínima para que pueda arribar un rayo refractado. Esta distancia depende de la localización del hipocentro y del estrato de refracción.

Calculemos ahora los tiempos de recorrido para todos los posibles rayos refractados con distancia crítica suponiendo

que se originan en la superficie como se muestra en la figura 7.

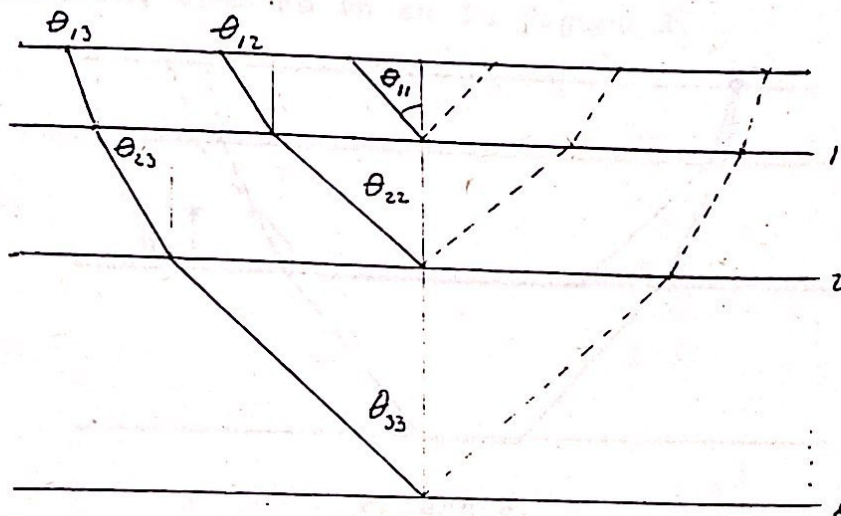


Figura 7.

donde θ_{ik} es el ángulo de refracción para el rayo en el estrato- i que se refracta $\pi/2$ en el estrato k , $\text{Sen } \theta_{kk} =$ y

$$\frac{\text{Sen } \theta_{ik}}{N_i} = \frac{\text{Sen } \theta_{(i+1)k}}{N_{i+1}} \Rightarrow \text{Sen } \theta_{ik} = \frac{N_i}{N_{k+1}}$$

El tiempo de recorrido para el rayo que se refracta en el k -ésimo estrato es

$$T_k = 2 \sum_{i=1}^k \frac{h_i (1 + \tan^2 \theta_{ik})^{1/2}}{N_i}$$

donde

$$\tan \theta_{ik} = \frac{N_i}{(N_{k+1}^2 - N_i^2)^{1/2}}$$

y la distancia crítica

$$D_k = 2 \sum_{i=1}^k h_i \tan \theta_{ik}$$

Conociendo la localización del hipocentro consideramos únicamente aquellos rayos que pueden pasar por dicho punto,

e.d. rayos que se refractan en las capas por debajo del punto en cuenstión. Como se ve en la figura 8.

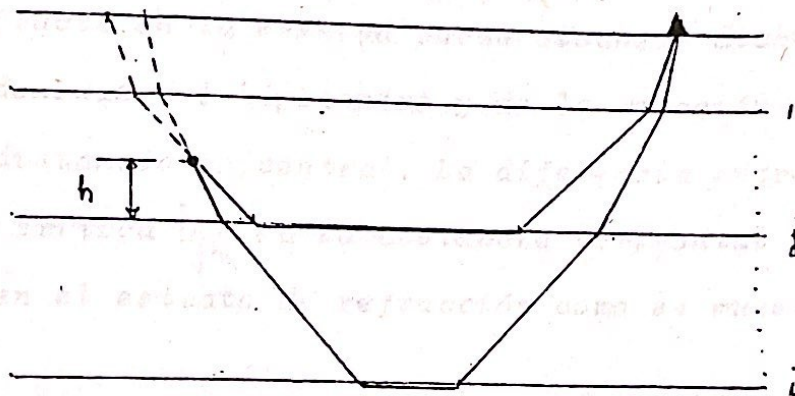


Figura 8.

El tiempo de recorrido para estos rayos puede ser calculado utilizando los T_k . Entonces los T_{jk} , tiempos de recorrido para un rayo que parte del j -ésimo estrato y que se refracta en el k -ésimo estrato, es igual a T_k menos los tiempos correspondientes a la trayectoria punteada que se muestra en la figura 8, más el tiempo de recorrido en el estrato de refracción.

El tiempo correspondiente a la trayectoria punteada puede ser escrito como

$$\sum_{i=1}^k \frac{h_i (1 + \tan^2 \theta_{ik})^{1/2}}{v_i} - h \frac{(1 + \tan^2 \theta_{jk})^{1/2}}{v_j}$$

donde h es la distancia vertical del hipocentro al estrato inmediato inferior, como se ve en la figura 8.

De igual forma la distancia crítica D_{jk} es D_k menos los tramos horizontales correspondientes a la trayectoria punteada; entonces

$$D_{jk} = 2 \sum_{i=1}^k h_i \tan \theta_{ik} - \sum_{i=1}^k h_i \tan \theta_{ik} + h \tan \theta_{jk}$$

Esta distancia es la mínima a la que debe estar una estación del epicentro para que un rayo que parta de la j -ésima capa y se refracta en la k -ésima pueda alcanzar dicha estación. Con las coordenadas del hipocentro y de la estación se puede calcular la distancia epicentral. La diferencia entre ésta y la distancia crítica D_{jk} da la distancia horizontal recorrida por el rayo en el estrato de refracción como se muestra en la figura 9.

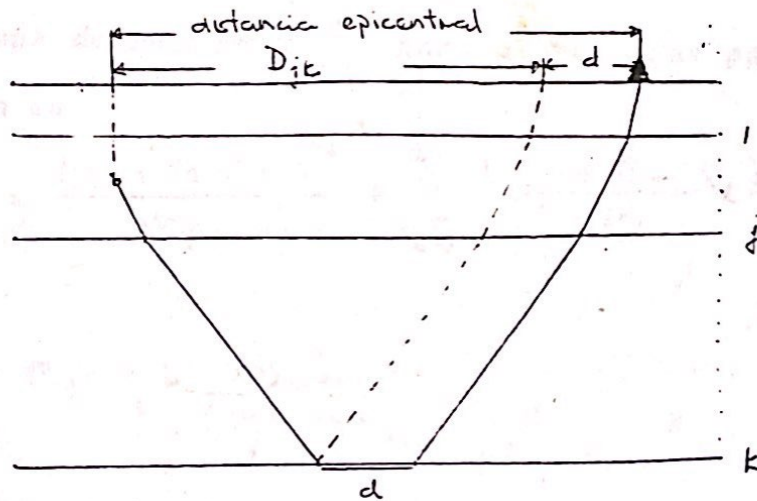


Figura 9.

El tiempo de recorrido para este tramo de trayectoria es $\frac{d}{N_{k+1}}$.
Con lo que el tiempo de recorrido es

$$\bar{T}_{jk} = 2 \sum_{i=1}^k \frac{h_i (1 + \tan^2 \theta_{ik})^{1/2}}{N_i} - \sum_{i=1}^j \frac{h_i (1 + \tan^2 \theta_{ik})^{1/2}}{N_i} + \frac{h (1 + \tan^2 \theta_{jk})^{1/2}}{N_j} + \frac{d}{N_{k+1}}$$

b. Tiempo de recorrido para el rayo "directo".

Se denomina "directo" al rayo que es refractado únicamente por los estratos que están por encima del hipocentro como se muestra en la figura 10.

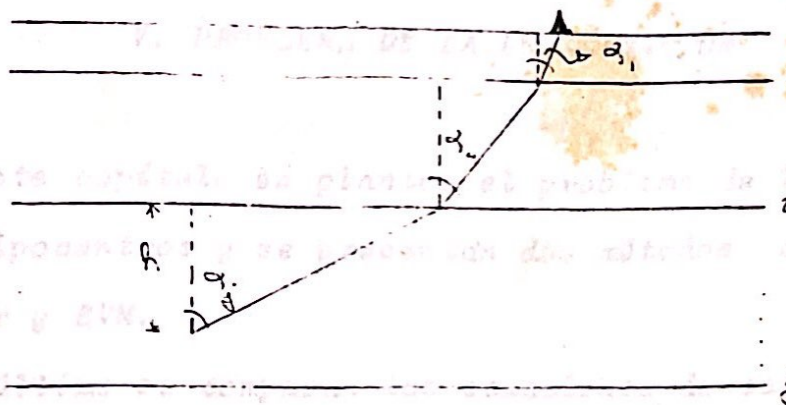


figura 10

donde

$$\text{Sen } \alpha_i = \frac{N_i}{N_j} \text{Sen } \alpha_j \quad \text{con } i=1, 2, \dots, j-1$$

El tiempo de recorrido T_j para un rayo que parte de la j-ésima capa es

$$T_j = \frac{h_j (1 + \tan^2 \alpha_j)^{1/2}}{N_j} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h_i (1 + \tan^2 \alpha_i)^{1/2}}{N_i}$$

donde

$$\tan \alpha_i = \frac{N_i \text{Sen } \alpha_j}{(N_j^2 - N_i^2 \text{Sen}^2 \alpha_j)^{1/2}}$$

La distancia horizontal recorrida por el rayo D_j es

$$D_j = h_j \tan \alpha_j + \sum_{i=1}^{j-1} h_i \tan \alpha_i$$

Como no existe una forma analítica para calcular α_j se propone un ángulo inicial α_0 el cual se varía en forma sistemática hasta encontrar el rayo que alcanza a la estación dentro de un error estimado. Es decir cuando D_j se aproxima a la distancia epicentral.

V. PROBLEMA DE LA LOCALIZACION

En este capítulo se plantea el problema de la localización de hipocentros y se presentan dos métodos para resolverlo: Geiger y EVM.

Por último se comparan las ecuaciones de cada método utilizando el modelo de corteza de velocidad constante.

1. Método de Geiger.

Si consideramos un modelo de velocidad, la localización de las estaciones y las coordenadas espaciales del hipocentro, podemos calcular el tiempo de recorrido para el rayo sísmico que alcanza una determinada estación. Este tiempo debe ser igual al tiempo de arribo medido en la estación menos el tiempo origen del evento. En forma algebraica

$$T_i = t_i - t$$

donde $T_i \equiv T_i(\Delta, z)$ es el tiempo de recorrido entre el hipocentro y la i -ésima estación, t_i es el tiempo de arribo medido en la i -ésima estación y t es el tiempo origen. (Δ es la distancia epicentral)

Por cada estación que registre el evento tenemos una ecuación como la anterior; por lo tanto construimos un sistema de n -ecuaciones ($n =$ número de estaciones) no-lineales con 4 incógnitas, el cual puede ser resuelto como un problema de opti-

mización no-lineal. Para ello definimos la función residuo r_i como podemos aproximar a dicho valor incrementándole la cantidad Δx que cumple con la condición $i=1, \dots, n$

$$r_i = x_i - T_i - x$$

Construimos la función $F(x)$ como

Es decir que hace la iteración $F(x_0) = F(x_1) - F(x_0)$ porque y por lo tanto el nuevo punto x_0, x_1 se encuentra más

$$F(x) = \sum_{i=1}^n |r_i|^2$$

donde $x = (x, y, z, t)$ y buscamos un punto extremo que haga el valor de $F(x)$ un mínimo.

El primer paso para optimizar consiste en expandir la función $F(x)$ en una serie de Taylor al rededor de un punto x_0 .

Entonces:

$$F(x_0 + \Delta x) \approx F(x_0) + g^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H \Delta x$$

donde

$$g^T = \nabla F(x)$$

Al derivar toda la ecuación respecto a x_0 se obtiene

y H es la matriz

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial z} & \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

donde $x^T = (x, y, z, t)$

Partiendo de un punto \underline{x}_0 que suponemos cercano al mínimo nos podemos aproximar a dicho valor incrementándole la cantidad $\delta \underline{x}$ que cumple con la condición

$$\underline{g}^T \delta \underline{x} + \frac{1}{2} \delta \underline{x}^T H \delta \underline{x} \equiv \text{mínimo} \quad (31)$$

Es decir que hace la diferencia $F(\underline{x}_0 + \delta \underline{x}) - F(\underline{x}_0)$ pequeña y por lo tanto el nuevo punto $\underline{x}_0 + \delta \underline{x}$ se encuentra más próximo al punto extremo.

Este proceso se realiza en forma iterativa hasta alcanzar un valor estable para dicho punto.

Para calcular $\delta \underline{x}$ escribimos la ecuación (31) en forma explícita

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \delta x_i \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \delta x_j \equiv \text{mínimo}$$

Al derivar toda la ecuación respecto a x_k se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i} \delta x_i = 0$$

si consideramos ∇F y H constantes. En forma compacta es

$$\underline{g} + H \delta \underline{x} = 0 \quad (32)$$

Si escribimos

$$F(\underline{x}) = \underline{r}^T \underline{r}$$

donde $\underline{r}^T \equiv (r_1, r_2, \dots, r_n)$

y definimos la matriz A como

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial f_n}{\partial z} & \frac{\partial f_n}{\partial t} \end{pmatrix}$$

podemos escribir

$$\tilde{g} = \lambda A^T \tilde{r}$$

$$H = \lambda A^T A$$

Sustituyendo en la ecuación (32) obtenemos

$$A^T \tilde{r} = -A^T A \tilde{x}$$

conocido como el sistema de ecuaciones normales, que es un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas. Las incógnitas son los incrementos Δx , Δy , Δz y Δt que hacen que el punto \tilde{x}_0 se aproxime al mínimo.

Si escribimos el sistema de ecuaciones

$$A \tilde{\Delta x} = -\tilde{r}$$

en forma explícita para la función residuo definida anteriormente tenemos

$$\frac{(x-x_i)}{\Delta} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \Delta} \right)_0 \Delta x + \frac{(y-y_i)}{\Delta} \left(\frac{\partial T_i}{\partial \Delta} \right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial T_i}{\partial z} \right)_0 \Delta z + \Delta t = t_i - T_i - t \quad (33)$$

(con $i = 1, \dots$, número de estaciones)

donde $\left(\frac{\partial T_i}{\partial \Delta}\right)_0$ y $\left(\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)_0$ son las derivadas valuadas en el hipocentro. Este sistema constituye las ecuaciones generales del método de Geiger.

2. Método de la velocidad equivalente (EVM).

Este método propone un nuevo algoritmo para relacionar a las incógnitas que busca mejorar la estabilidad del cálculo (convergencia y precisión). El nuevo algoritmo es:

$$\sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} = f(\Delta, z) (t_i - t)$$

donde $\sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2}$ es la distancia geométrica hipocentro estación, $f(\Delta, z)$ es la función velocidad-equivalente y $(t_i - t)$ es el tiempo de recorrido.

Definimos la función residuo como:

$$r_i = \sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} - f(\Delta, z) (t_i - t)$$

Si escribimos el sistema de ecuaciones normales para la nueva función residuo tenemos:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2}}{\Delta} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta} \right)_0 (t_i - t) \right] (x_i - x) \Delta x + \\ & \left[1 - \frac{\sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2}}{\Delta} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta} \right)_0 (t_i - t) \right] (y_i - y) \Delta y + \\ & \left[(z_i - z) + \sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 (t_i - t) \right] \Delta z - \\ & \sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} f_0 \Delta t = \\ & \Delta^2 + (z_i - z)^2 - \sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} f_0 (t_i - t) \end{aligned} \quad (34)$$

($i = 1, \dots, \text{número de estaciones}$)

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0$ y f_0 son las derivadas y la función velocidad valuadas en el hipocentro.

3. Modelo de velocidad constante.

Para el caso particular de este modelo de corteza los sistemas de ecuaciones (33) y (34) toman una forma simple, de la cual se puede apreciar la equivalencia entre ambos procedimientos.

Para el método de Geiger las derivadas parciales del tiempo de recorrido valuadas en el hipocentro son :

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial x}\right|_0 = -\frac{1}{v} \left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_0 = -\frac{(x - x_i)}{v s}$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial y}\right|_0 = -\frac{(y - y_i)}{v s}$$

$$\left.\frac{\partial T_i}{\partial z}\right|_0 = -\frac{(z - z_i)}{v s}$$

con las cuales la ecuación (33) se reduce a

$$(x_i - x) \Delta x + (y_i - y) \Delta y + (z_i - z) \Delta z - \sqrt{\Delta^2 + (z_i - z)^2} v \Delta t = \Delta^2 + z^2 - \sqrt{\Delta^2 + z^2} v (t_i - t) \quad (35)$$

($i = 1, \dots, \text{número de estaciones}$)

De igual forma para el método EVM tenemos que:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 0 \quad \& \quad f_0 = v$$

por lo cual el sistema de ecuaciones (34) se reduce al sistema (35)

VI. CALCULO DE HIPOCENTROS

Para calcular el hipocentro de un evento debemos construir y resolver los sistemas de ecuaciones (33) y (34), presentados en el capítulo anterior, que corresponden a cada uno de los métodos.

Los pasos a seguir son: obtener los datos iniciales, procesar los datos y analizar los resultados.

1. Datos iniciales.

Los datos iniciales necesarios para construir los sistemas de ecuaciones son: localización de las estaciones (coordenadas geográficas y altura respecto al nivel del mar), los tiempos de arribo de las fases "p" o "s" (que son los dos tipos de ondas de volumen cuya existencia demostramos en el capítulo III), el hipocentro inicial y el modelo de velocidad.

La distribución y número de estaciones de la red sísmica nacional puede verse en la figura 11.

La red sísmica, que comenzó a funcionar en 1975, está diseñada para registrar la actividad microsísmica en gran parte del territorio nacional. Cada estación consta de un sismómetro electromagnético de período corto y componente vertical. Todas las estaciones están conectadas vía radio con la estación central en la ciudad de Guatemala en donde las señales son sincronizadas y registradas (en forma continua 24 hrs/ 24 hrs) en

en papel (cartas sísmicas) o microfilm. La velocidad de registro en papel es de 1mm/s.:

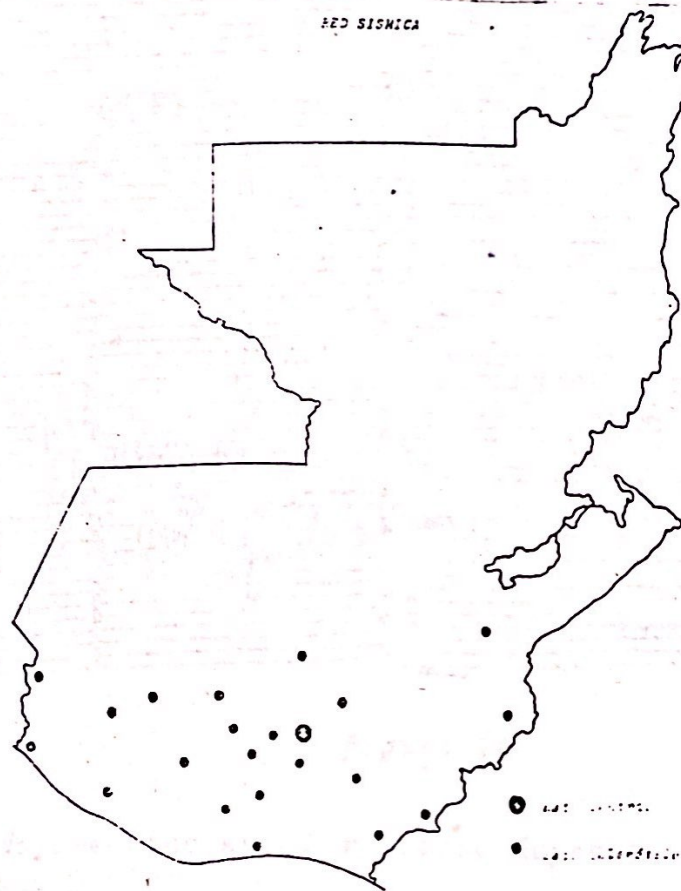


Figura 11.

Para determinar la localización de las estaciones se utilizan los mapas escala 1:50000 hechos por el Instituto Geográfico Nacional.

Los tiempos de arribo de las fases "p" y "s" se obtienen del análisis de los simogramas. El primer paso consiste en identificar los registros que corresponden a procesos de origen tectónico o volcánico. A continuación se analizan los eventos que tengan 4 o más tiempos de arribo. En la figura 12 se muestran los simogramas correspondientes a distintas estaciones para un evento.

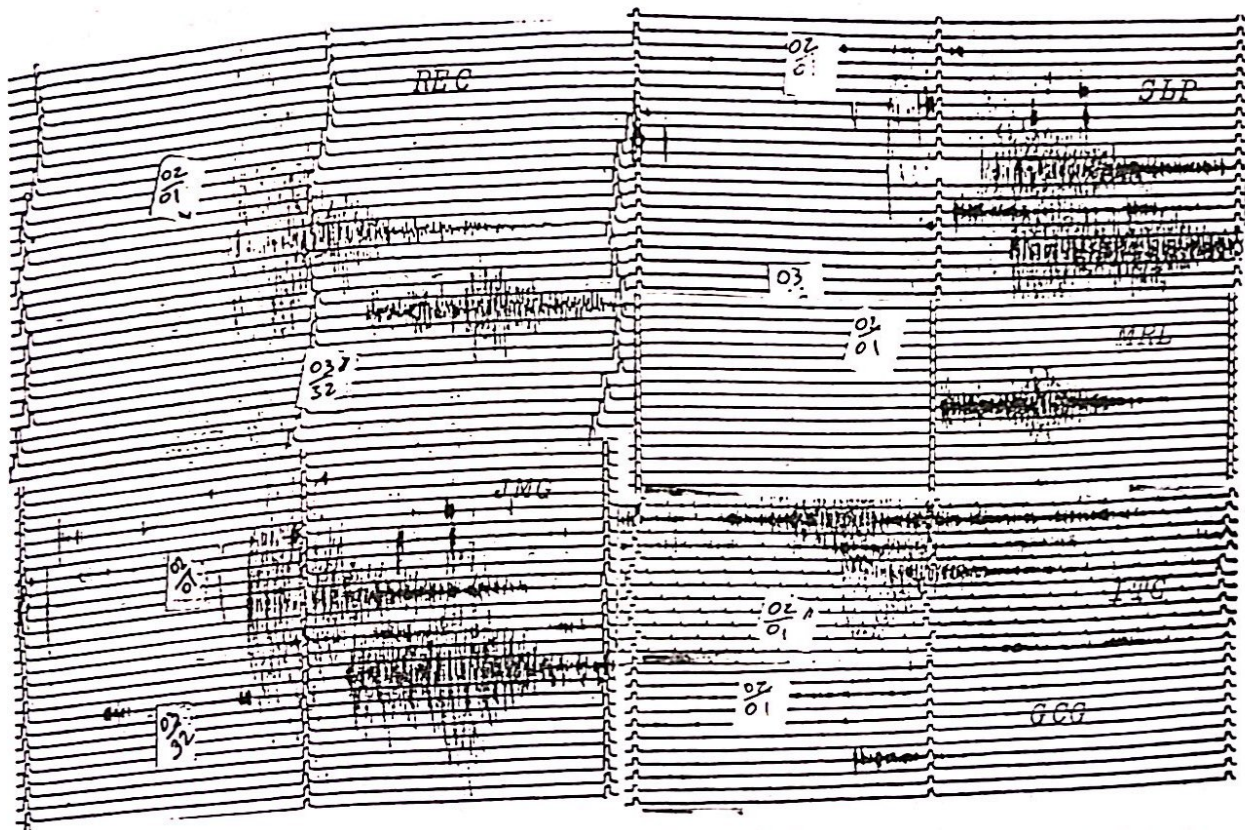


figura 12

Las diferencias en el registro dependen principalmente de: la localización de la estación respecto al hipocentro (trayectoria del rayo sísmico), de las características del terreno sobre el cual está la estación y de las propiedades (y calibración) de los instrumentos.

Los tiempos de arribo son medidos manualmente con una precisión de 0.25 de segundo. Los tiempos de arribo para el evento de la figura 12 se muestran en la siguiente tabla:

año mes día hora minuto
85 05 15 02 01

estación	fase-p	fase-s
FGO	41.4	-
REC	44.0	48.1
MMG	42.2	-
ITG	43.35	45.7

(continuación)

estación	fase-p	fase-s
TER	42.4	-
BVA	44.5	-
LHG	47.4	53.0
VLG	46.2	51.7
SLP	50.0	57.8
MRL	62.0	-
JMG	49.5	57.6
IXG	47.5	53.1
ZIS	49.8	-
QZG	64.8	-
MOY	54.6	66.0
TP2	48.1	53.8
JAT	57.0	-
KUK	64.0	-
GCG	44.8	49.3

Con los datos anteriores y suponiendo un medio de velocidad constante se puede hacer una localización aproximada del epicentro y tiempo origen. La profundidad puede ser estimada conociendo las características sísmicas de la región.

Si conocemos los tiempos de arribo para las fases "p" y "s" en una misma estación podemos escribir:

$$T_p = t + \frac{D}{N_p} \quad (36)$$

$$T_s = t + \frac{D}{N_s} \quad (37)$$

Donde T_p y T_s son los tiempos de arribo para dichas fases, t es el tiempo origen, D es la distancia epicentral (en km), N_p y N_s las velocidades de propagación (en km/s) respectivamente.

Restando (37) y (36) obtenemos

$$T_s - T_p = \frac{D(N_p - N_s)}{N_p N_s} \quad (38)$$

Del capítulo III sabemos que

$$V_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$V_s = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}$$

Por otro lado la relación entre las constantes de Lamé (λ, μ) y la razón de Poisson (σ) es:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Experimentalmente sabemos que

$$\sigma \cong \frac{1}{4}$$

lo que implica que $\mu \cong \lambda$, con lo cual obtenemos la siguiente relación entre las velocidades.

$$V_p = \sqrt{3} V_s$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (38) y despejando D , obtenemos:

$$D = \frac{(T_s - T_p)}{0.78} V_p$$

Al suponer una velocidad de propagación $V_p = 6 \text{ km/s}$

$$D = 8.0 (T_s - T_p) \quad (39)$$

Es decir que conociendo la diferencia entre los tiempos de arribo de las fases "s" y "p" para una determinada estación se puede calcular la distancia epicentral respecto a esa estación. Si se hace lo mismo con tres o más estaciones es po-

sible estimar la localización del epicentro, el cual quedará determinado por la intersección de los círculos trazados desde cada estación con un radio igual a su correspondiente distancia epicentral. La figura (13) muestra dicha localización para el evento de la tabla anterior

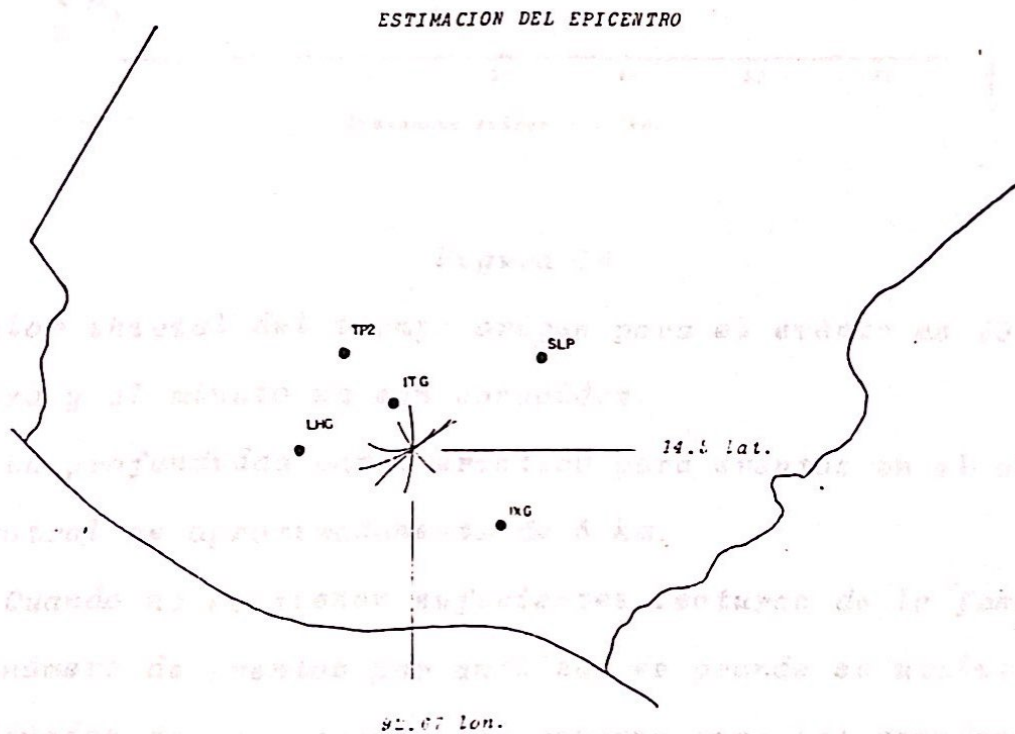


Figura 13.

Las coordenadas iniciales estimadas para este evento son: latitud norte 14.5° y longitud oeste 90.67° .

El tiempo origen es calculado al sustituir la ecuación (39) en

$$T_P = \frac{D}{V_p} + \tau$$

Al graficar T_P vs. D y obtener la recta que mejor se ajuste a todos los puntos podemos calcular un valor inicial para τ como se muestra en la figura 14.

ESTIMACION DEL TIEMPO ORIGEN

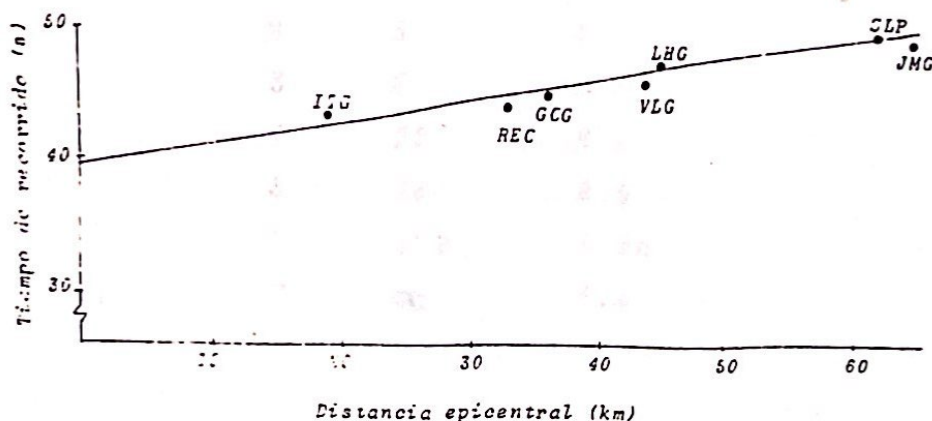


Figura 14.

El valor inicial del tiempo origen para el evento es 39.6 s. La hora y el minuto ya son conocidos.

La profundidad característica para eventos en el altiplano central es aproximadamente de 5 km.

Cuando no se tienen suficientes lecturas de la fase "s" o el número de eventos por analizar es grande se utilizan las coordenadas de la estación más cercana como las coordenadas del epicentro inicial. La profundidad y tiempo origen deben ser estimados.

El modelo de velocidad que actualmente se utiliza consta de seis estratos paralelos sobre un medio homogéneo semi-infinito. El grosor y velocidad de cada estrato se muestran en la tabla 2.

Este modelo fue propuesto en base a estudios regionales sobre la propagación de ondas sísmicas y tiempos de recorrido. Además se escogió por dar residuales pequeños.

No.	espesor (km)	velocidad fase-p (km/s)
1	1	3.5
2	5	5.0
3	7	6.0
4	22	6.8
5	165	8.0
6	100	8.25
7	∞	8.5

2. Procesamiento de datos.

En esta parte se construyen y resuelven los sistemas de ecuaciones para cualquiera de los dos métodos presentados. Para esto se utiliza un programa de computadora hecho por Caccamo y Neri, el cual fue adaptado a la computadora HP-3000 de la Universidad del Valle de Guatemala. A continuación se da una descripción del mismo.

El programa consta: programa principal (MGN6) y cuatro subprogramas (MULT, SLE, MINV y VQUIV).

En el programa principal se realizan los siguientes procesos: declaración de variables entre las que se encuentran las coordenadas geográficas y altura de cada estación; y la información sobre el modelo de corteza (espesor y velocidad de cada estrato).

Entrada de datos. Los datos que son necesarios para la ejecución del programa son: el método que se desea utilizar (Geiger o EVM), las coordenadas del hipocentro inicial, el número de estaciones y el listado de estaciones con sus tiempos de arribo respectivos.

Transformación de coordenadas. Todas las coordenadas geográficas son transformadas a cartesianas utilizando los siguientes factores de conversión: 110.63 km/grado lat. y 107.78 km/grado lon.

Correcciones por la altura a los tiempos de arribo. Los tiempos de arribo son corregidos según las siguientes ecuaciones:

$$T_p = T_p - \frac{h}{N}$$

$$T_s = T_s - \frac{(1.78) h}{N}$$

donde h es la altura de la estación y N la velocidad de propagación de las ondas-p para esa parte del terreno. En el programa se utiliza $N = 5$ km/s. El efecto final de esta corrección es reducir todas las estaciones a nivel del mar.

Construcción del sistema de ecuaciones generales para cada método (A) los cuales corresponden a las ecuaciones (33) y (34) respectivamente. El cálculo de la función velocidad $f(\Delta, z)$ y la función tiempo de recorrido $T(\Delta, z)$ se realizan en el subprograma VQUIV. Las derivadas parciales son calculadas de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_0 \cong \frac{f(\Delta+1, z_0) - f(\Delta-1, z_0)}{2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \cong \frac{f(\Delta, z_0+1) - f(\Delta, z_0-1)}{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \Delta}\right)_0 \cong \frac{T(\Delta+1, z_0) - T(\Delta-1, z_0)}{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_0 \cong \frac{T(\Delta, z+1) - T(\Delta, z-1)}{2}$$

Construcción del sistema de ecuaciones normales ($C \Delta = d$) y su solución. Para ello utiliza los subprogramas MULT y SLE. Cálculo de errores estándar para los $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y Δt . Estos son calculados de la siguiente manera

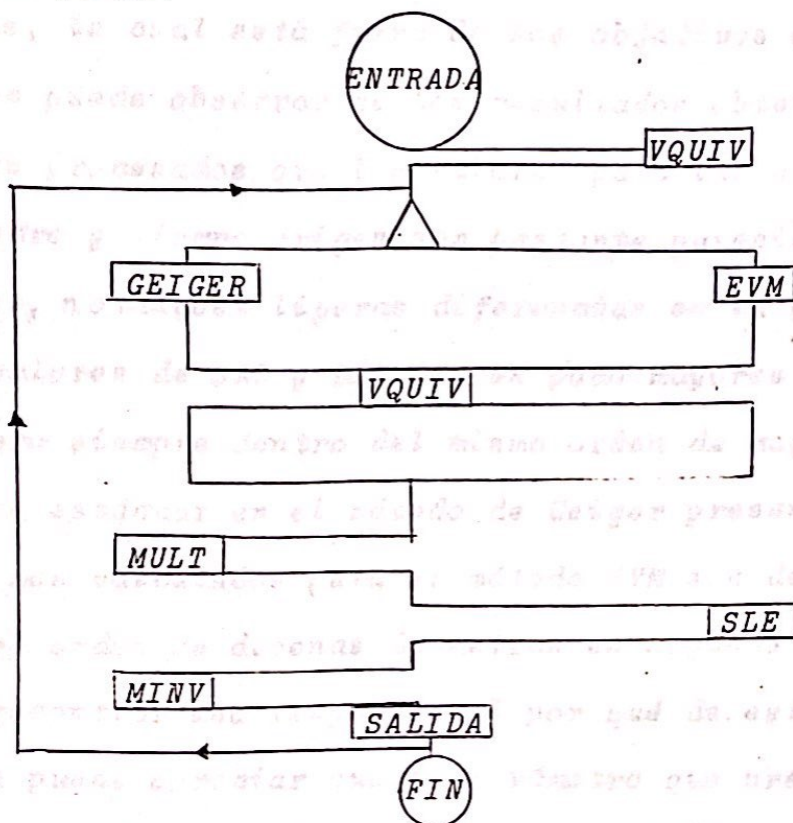
$$E_{r-x_i} = \sigma (C_{ii}^{-1})$$

donde E_{r-x_i} representa el error estándar para la coordenada x_i ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$), σ es la desviación estándar de los residuales calculados al sustituir los $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y Δt en las ecuaciones (33) o (34) y C_{ii}^{-1} es el elemento $-ii$ de la diagonal de la matriz inversa de C . Esta última se calcula en el subprograma MINV.

Salida de datos. Estos son: el método que se utilizó, el modelo de corteza, las coordenadas del hipocentro inicial, el número de estaciones utilizadas, las siglas de cada estación y sus tiempos de arribo y los resultados en cada iteración. Estos últimos son: las coordenadas del hipocentro, tiempo origen, la sumatoria de los cuadrados de los residuos, desviación estándar para los residuos y los errores estándar.

Subprogramas. MULT: calcula el producto de dos matrices o de una matriz y un vector. SLE: resuelve un sistema de ecuaciones lineales. MINV: calcula la inversa de una matriz. VQUIV: Calcula la velocidad equivalente y los tiempos de recorrido (para el rayo directo y refractado) para un modelo de estratos paralelos, como se desarrolló en el capítulo IV parte B.

Diagrama de flujo:



3. Resultados

Los resultados obtenidos son analizados en base a: la precisión aritmética del cálculo y las características sísmicas de la región.

A continuación se presentan los hipocentros calculados para cuatro eventos registrados con la red sísmica nacional. Cada evento, comenzando por el que sirvió de ejemplo, fue procesado en el programa MGN6 utilizando los dos métodos. Estos eventos fueron escogidos por dar una buena localización. Los valores que se consideran aceptables, en base a la experiencia, para las cantidades SR2, DES y los errores estándar son:

$$\sqrt{\frac{SR2}{G_r}} \leq 0.5 \text{ (} N_0 = \text{número de estaciones)} ; \text{ DES} \leq 0.5 ;$$

$$ER-X \text{ y } ER-Y \text{ de } 1 \text{ a } 2 \text{ km} ; ER-Z \text{ de } 2 \text{ a } 5 \text{ km. } \gamma$$

$$ER-T < 1.0 \text{ Sec.}$$

Sin pretender hacer una comparación estadística entre ambos métodos, lo cual está fuera de los objetivos del presente trabajo, se puede observar de los resultados obtenidos para los eventos procesados que los valores para las coordenadas del epicentro y tiempo origen son bastante parecidas en los dos métodos, notándose ligeras diferencias en la profundidad.

Los valores de SR2 y DES son un poco mayores en el método EVM, pero siempre dentro del mismo orden de magnitud. Los errores estándar en el método de Geiger presentan valores normales. Los calculados para el método EVM son demasiado pequeños (del orden de decenas de metros en algunos casos). No se logró encontrar una respuesta al por qué de estos valores. También se puede apreciar que el parámetro que presenta mayor incerteza, en ambos métodos, es la profundidad.

En cuanto al número de iteraciones necesarias para alcanzar el resultado final, éste es menor en el método EVM en la mayoría de los casos.

Por último los datos que aparecen debajo del resultado final son los residuales (en segundos) de los arribos en cada estación.

No	V-P	ESPESOR
1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.50 LON = 90.70 PROF = 15.00 TO = 39.00

NUMERO DE ESTACIONES 9

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
FGQ	41.40	.00
REC	44.00	48.10
MHG	42.20	.00
ITG	43.35	45.70
TER	42.40	.00
BVA	44.50	.00
LHG	47.40	53.00
VLG	46.20	51.70
GCC	44.80	49.30

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LON	PROF	TO		ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T	
1	14.500	90.700	15.00	39.00	24.020	1.63	1.9340	5.1051	42.6007	.2065
2	14.457	90.768	6.13	39.20	5.389	.77	1.2067	2.5192	20.2024	.0791
3	14.466	90.762	8.01	38.90	2.769	.55	1.2429	2.9626	88.3586	.1174
4	14.466	90.762	5.76	38.85	2.643	.54	1.1892	2.5933	12.6795	.0904
6	14.466	90.762	6.13	38.86	2.572	.53	1.1918	2.5407	20.5393	.0775
8	14.466	90.762	6.53	38.87	2.570	.53	1.1924	2.5541	46.7590	.0518
13	14.466	90.762	6.53	38.87	2.567	.53	1.1948	2.5330	46.9227	.0532
	-.01	-.29	.14	.39	-.70	.07	.07	.44	.16	-.42
	-.44	-.94	.57	.17						

END OF PROGRAM
 RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 5:51 PM

MODELO DE CORTEZA

No	V-P	ESPESOR
1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.01
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.50 LON = 90.70 PROF = 15.00 TD = 39.00

NUMERO DE ESTACIONES 9

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
FGO	41.10	.00
REC	44.00	48.10
MHG	42.20	.00
ITC	43.35	45.70
TER	42.40	.00
BVA	44.50	.00
LHG	47.40	53.00
VLC	46.20	51.70
GCC	44.80	49.30

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LOX	PROF	TD			ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T
1	14.500	90.700	15.00	39.00	25.239	1.67	.0099	.0251	.1278	.0005
2	14.470	90.756	6.65	39.30	6.493	.85	.0110	.0296	.9940	.0004
5	14.470	90.757	6.29	39.28	6.130	.83	.0119	.0312	.6463	.0009
6	14.470	90.765	2.19	38.78	5.012	.75	.0313	.0418	.2997	.0014
7	14.468	90.760	4.80	38.69	2.912	.57	.0124	.0358	.1113	.0018
8	14.471	90.764	5.96	38.91	2.815	.56	.0118	.0332	.4289	.0017
	-.32	-.38	.13	.44	-.84	.08	.05	.36	.13	-.55
	-.32	-.93	.46	.14						

END OF PROGRAM

RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 5:46 PM

METODO DE GEIGER

MODELO DE CORTEZA

No V-P ESPESOR

1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.00 LON = 90.00 PROF = 40.00 TO = 49.80

NUMERO DE ESTACIONES 4

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
MOY	55.00	57.00
YUP	58.90	63.80
JMC	61.90	.00
ZIS	61.85	.00

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LOX	PROF	TO		ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T	
1	14.000	90.000	40.00	49.80	35.356	5.95	61.3159	#####	56.7870	2.1598
3	13.980	90.003	31.78	50.55	22.204	4.71	45.1058	#####	42.3638	2.1772
5	13.966	90.001	25.85	51.15	14.673	3.83	32.3294	#####	30.5766	1.5641
7	13.960	89.999	21.07	51.59	9.728	3.12	21.9200	99.6399	27.8917	1.0581
9	13.959	89.997	17.11	51.90	6.416	2.53	12.8698	55.2661	20.6394	.6281
11	13.961	89.994	13.97	52.10	4.351	2.09	6.8421	25.3000	16.2477	.3221
12	13.978	89.977	1.00	52.70	3.656	1.91	1.0678	5.0907	21.2488	.5004
13	13.976	89.979	5.23	52.55	1.501	1.23	1.4232	2.7749	3.8427	.1501
14	13.997	89.993	4.13	52.53	.010	.10	1.3011	3.1722	2.5310	.1346
15	13.997	89.992	4.35	52.53	.002	.05	1.3164	3.2496	2.4097	.1333
-.03	.03	-.00	.00	.01	-.02					

END OF PROGRAM

RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 5:54 PM

1858.9063.8
1461.90
1261.85

METODO EVM

MODELO DE CORTEZA

No	V-P	ESPESOR
1	3.50	1.00
2	5.00	5.10
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.00 LON = 90.00 PROF = 40.00 TO = 49.80

NUMERO DE ESTACIONES 4

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
MOY	55.00	57.00
YLP	58.90	63.80
JMG	61.90	.00
ZIS	61.85	.00

H I P O C E N T R O				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LOH	PROF	TO			ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T
1	14.000	90.000	40.00	49.80	35.356	5.95	.0893	.2733	.0597	.0015
2	13.979	89.994	18.69	52.08	7.486	2.74	.0354	.1180	.0925	.0013
3	13.993	89.989	8.54	52.99	2.376	1.54	.0053	.0198	.0742	.0003
4	13.995	89.996	4.97	52.72	.199	.45	.0037	.0100	.0238	.0006
5	13.998	89.993	4.46	52.56	.003	.06	.0039	.0101	.0250	.0006
	-.05	.01	.00	-.00	.02	-.03				

END OF PROGRAM
RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 5:56 PM

1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.00 LON = 90.00 PROF = 15.00 TO = 26.00

NUMERO DE ESTACIONES 11

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
BVA	30.00	.00
MHG	30.70	33.50
GCC	31.48	34.10
REC	33.30	.00
FGO	33.15	37.30
TER	34.46	39.10
TEP	34.76	41.00
SLP	35.65	42.00
RDC	35.70	42.40
JMC	37.98	.00
LTC	39.00	47.10

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LON	PROF	TO		ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T	
1	14.000	90.000	15.00	26.00	3194.773	15.11	50.0709	76.1674	#####	2.3438
2	14.783	90.759	70.00	29.16	1675.200	10.94	26.5627	28.7589	42.5492	.9775
3	14.453	90.636	21.37	28.69	205.477	3.83	2.7906	3.3725	11.1313	.1742
4	14.646	90.668	21.52	27.77	32.215	1.52	1.7762	1.9790	10.0106	.1049
5	14.632	90.659	9.44	27.88	9.207	.81	1.2813	1.4464	6.1390	.0326
6	14.636	90.663	11.64	27.27	3.120	.47	1.4606	2.0232	3.4159	.0298
7	14.632	90.664	12.00	27.30	3.062	.47	1.4610	1.9533	2.9750	.0307
	-.21	-.06	.27	.37	-.03	.13	.09	.21	-.37	.91
	.27	.05	-.16	-.47	-.71	.58	.21	-.50	-.55	

END OF PROGRAM

RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 6:09 PM

4 6.80 22.00
 5 8.00 165.00
 6 8.25 100.00
 7 8.50 999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.00 LON = 90.00 PROF = 15.00 TD = 26.00

NUMERO DE ESTACIONES 11

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
BVA	30.00	.00
MMG	30.70	33.50
GCG	31.48	34.10
REC	33.30	.00
FGD	33.15	37.30
TER	34.46	39.10
TEP	34.76	41.00
SLP	35.65	42.00
RDC	35.70	42.40
JMG	37.98	.00
LTG	39.00	47.10

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LON	PROF	TD			ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T
1	14.000	90.000	15.00	26.00	3194.773	15.11	.1080	.1359	6.0158	.0047
3	14.104	90.095	36.06	27.56	2555.058	13.51	.0731	.0532	.5997	.0014
5	14.219	90.221	54.75	28.48	2139.030	12.36	.0162	.0132	.0392	.0006
6	14.634	90.672	68.34	29.27	1400.229	10.00	.0117	.0099	.0047	.0005
7	14.641	90.670	34.23	28.96	288.814	4.54	.0148	.0123	.0205	.0007
8	14.653	90.655	19.15	27.78	23.970	1.31	.0098	.0084	.0667	.0004
9	14.649	90.664	8.94	27.91	11.641	.91	.0131	.0090	.0547	.0002
10	14.650	90.659	7.54	27.36	4.743	.58	.0126	.0097	.0862	.0002
11	14.648	90.664	10.11	27.39	4.300	.55	.0156	.0105	.0646	.0002
13	14.649	90.663	9.59	27.38	4.298	.55	.0134	.0093	.0501	.0002
17	14.649	90.663	9.58	27.38	4.294	.55	.0136	.0094	.0496	.0002
.17	-.16	.28	.13	-.28	-.26	.12	.13	-.33	.48	
.17	-.07	-.08	-.84	-1.34	.70	.13	-.37	-.66		

END OF PROGRAM
 RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 6:13 PM

No	V-P	ESPESOR
1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.50 LON = 90.50 PROF = 20.00 TO = 48.00

NUMERO DE ESTACIONES 12

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
GCG	50.10	52.00
IXG	56.80	62.75
LHG	60.10	.00
SLP	54.60	.00
MOY	62.30	.00
MRL	66.20	.00
BVA	51.20	53.50
YLP	64.00	.00
VLG	59.50	.00
TER	55.25	58.80
REC	51.90	54.20
FGD	54.70	59.60

HIPOCENTRO					SR2	DES	ERRORES ESTANDAR			
#	LAT	LON	PROF	TO			ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T
1	14.500	90.500	20.00	48.00	67.697	2.28	2.7464	2.4236	7.1887	.0815
2	14.605	90.567	8.42	48.58	20.058	1.24	1.8368	1.8031	3.7514	.0460
3	14.572	90.567	7.04	48.09	3.380	.51	1.7576	1.4349	5.2008	.0360
4	14.573	90.567	6.96	48.03	3.327	.51	1.7494	1.4458	5.2116	.0356
7	14.573	90.567	6.97	48.03	3.314	.50	1.7506	1.4384	5.2186	.0355
	.11	.08	.02	-.49	.37	-.10	-.23	.19	.64	.91
	.16	.15	.48	-.75	-.58	-.46	-.43	-.04		

END OF PROGRAM
 RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 6:18 PM

MODELO DE CORTEZA

No V-P ESPESOR

1	3.50	1.00
2	5.00	5.00
3	6.00	7.00
4	6.80	22.00
5	8.00	165.00
6	8.25	100.00
7	8.50	999.99

HIPOCENTRO INICIAL

LAT = 14.50 LON = 90.50 PROF = 20.00 TO = 48.00

NUMERO DE ESTACIONES 12

ESTACIONES Y TIEMPOS DE ARRIBO

ESTACION	T-P	T-S
GCG	50.10	52.00
IXG	56.80	62.75
LHG	60.10	.00
SLP	54.60	.00
MOY	62.30	.00
MRL	66.20	.00
BVA	51.20	53.50
YUP	64.00	.00
VLC	59.50	.00
TER	55.25	58.80
REC	51.90	54.20
FGO	54.70	59.60

HIPOCENTRO				SR2	DES	ERRORES ESTANDAR				
#	LAT	LON	PROF	TO			ER-X	ER-Y	ER-Z	ER-T
1	14.500	90.500	20.00	48.00	67.697	2.28	.0047	.0081	.0443	.0001
2	14.586	90.559	10.62	48.79	22.437	1.31	.0059	.0090	.0430	.0003
3	14.583	90.561	6.29	48.11	4.490	.59	.0055	.0082	.1115	.0009
	.21	-.16	-.24	-.37	.18	-.06	-.22	.06	.34	.61
	-.07	-.11	.73	-1.11	-.49	-.92	-.78	-.43		

END OF PROGRAM
 RUN PSCREEN.PUB.SYS

new pscreenTHU, AUG 21, 1986, 6:22 PM

4. Comentarios Finales

El trabajo antes presentado se concretó al desarrollo teórico del problema. No es una revisión bibliográfica completa del tema.

El nuevo método, EVM, puede ser que aumente el número de eventos bien localizados (como lo han demostrado en base a análisis estadísticos Caccamo y Neri) pero aun así sus propiedades deben ser analizadas con más detalle.

Por último cualquier intento que se haga para mejorar la localización y el número de eventos bien localizados debe contemplar los siguientes aspectos: el modelo de corteza, la lectura de los tiempos de arribo, las características y geometría de la red sísmica, y las propiedades intrínsecas del método. Todos estos aspectos pueden constituir temas de estudio para futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFIA

Libros:

- Aki K.; Richards P. G. Quantitative Seismology. Theory and Methods. Volume 1. W.H. Freeman and Co.
1980
- Bradbury T.C. Theoretical Mechanics. Robert E. Krieger publishing Co.
1981
- Cabrera M. E. Introducción al estudio de las ecuaciones de movimiento de las ondas sísmicas. Investigación monográfica.
1978
- Landau L.D. & Lifshitz E. M. Teoría de la Elasticidad. Editorial Reverté, S.A.
1969
- Lee W.H.; Stewart S.W. Principles and Applications of micro-earthquake networks. Advances in Geophysics supplement 2. Academic Press.
1981
- Nadeau Gérard. Introduction to Elasticity. Holt, Rinehart and Winston, Inc.
1964
- Richter C.F. Elementary Seismology. W.H. Freeman and Co.
1958
- Sokolnikoff I.S. Mathematical theory of elasticity. MacGraw-Hill Co, Inc.
1956
- Stacey Frank D. Physics of the earth. John Wiley & Sons, Inc.
1969

Revistas:

- Buland R. "The mechanics of locations earthquake". Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 66, NO. 1, pp. 173-187.
1976
- Caccamo D. and Neri G. "A new analytic procedure to determine hypocentral parameters of local seismic events".
1984 (en proceso de publicación).
- Flinn E.A. "Local earthquake location with an electronic computer". Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 50, No 3 pp. 467-470.
1960
- James D.E.; Sachs I.S.; et. al. "On location earthquake using small networks". Bulletin of the Seismological Society of America. Vol. 59, No. 3. pp. 1201-1212.
- 1982 Boletín Sismológico. INSIVUMEH.