
Propiedades y solución analítica del péndulo esférico: corrección de modelos con aprendizaje automático

Juan Carlos Marroquin Mazariegos



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



**Propiedades y solución analítica del péndulo esférico:
corrección de modelos con aprendizaje automático**

Trabajo de graduación presentado por
Juan Carlos Marroquin Mazariegos
para optar al grado académico de Licenciado en Física

Guatemala,

2025

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades




**Propiedades y solución analítica del péndulo esférico:
corrección de modelos con aprendizaje automático**

Trabajo de graduación presentado por
Juan Carlos Marroquin Mazariegos
para optar al grado académico de Licenciado en Física


Guatemala,

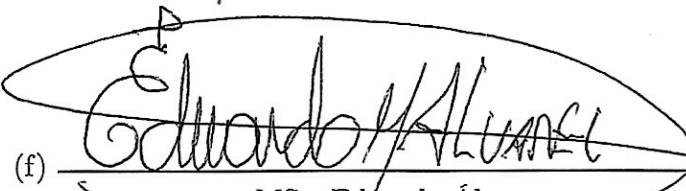
2025

Vo.Bo.:

(f) 
MSc. Pablo Marroquín

Tribunal Examinador:

(f) 
MSc. Pablo Marroquín

(f) 
MSc. Eduardo Álvarez

(f) 
MSc. Dorval Carías

Fecha de aprobación: Guatemala, 9 de mayo de 2025.

El presente trabajo de investigación nació de la curiosidad del autor acerca de sistemas físicos cuya dinámica puede a veces parecer sencilla, pero su descripción matemática no necesariamente lo es. Muchos fenómenos físicos se modelan con ecuaciones diferenciales, pero repetidamente estas son de carácter no lineal, y por lo tanto su resolución analítica se vuelve una tarea complicada, como es el caso del péndulo esférico, uno de los sistemas más sencillos de elaborar y que es la base para otros más. Este problema, que es la tenencia de las ecuaciones de movimiento sin abordarlas profundamente, llamó la atención del autor y estudió el sistema en toda su extensión, llegando a una propuesta de aporte teórico, de modo que en este trabajo se hizo uso de las herramientas matemáticas y físicas aprendidas durante la licenciatura, además de algoritmos de aprendizaje automático, que fueron utilizados durante la práctica profesional, para realizar correcciones a los modelos analíticos para la evolución temporal de las coordenadas. Este último recurso, también conocido como *machine learning*, se utiliza para predecir fenómenos naturales complejos, debido a la excesiva cantidad de factores e interacciones de los mismos, haciendo uso de datos históricos [1], lo cual motivó su uso para mejorar la descripción de los ángulos involucrados en la dinámica del péndulo esférico.

Tras la finalización del presente trabajo de investigación, se agradece a:

- MSc. Pablo Marroquín, por haber sido el asesor principal de este proyecto, especialmente en la implementación de modelos de aprendizaje automático, los cuales son una de sus especialidades.
- MSc. Eduardo Álvarez, por su apoyo en apreciar el valor científico de este trabajo y su retroalimentación durante la revisión del mismo.
- MSc. Dorval Carías y MSc. Irene Aguilar, por impartir su conocimiento en matemática y mecánica analítica, respectivamente, a través de la enseñanza a lo largo de los estudios de licenciatura, temas que fueron fundamentales en el desarrollo teórico de este trabajo.
- Los padres del autor: Ing. Juan Carlos Marroquin y Dra. Coralia Mazariegos, por su apoyo incondicional en la vida, durante la licenciatura y en la elaboración de este trabajo de investigación.

Prefacio	III
Lista de figuras	XI
Lista de cuadros	XV
Resumen	XVI
1. Introducción	1
2. Objetivos	2
2.1. Objetivo general	2
2.2. Objetivos específicos	2
3. Justificación	3
4. Marco teórico	4
4.1. Mecánica newtoniana	4
4.2. Mecánica lagrangiana	5
4.3. Mecánica hamiltoniana	6
4.4. Sistema mecánico del péndulo esférico	7
4.4.1. Ecuaciones de movimiento	8
4.4.2. Relaciones integrales	9
4.4.3. Resumen del saber teórico acerca del péndulo esférico	10
4.5. Modelos de aprendizaje automático	11
4.5.1. Modelo <i>Random Forest</i>	11
4.5.2. Modelo <i>XGBoost</i>	13
4.5.3. Redes neuronales <i>feedforward</i>	14
4.5.4. Métricas de evaluación de modelos	15
5. Antecedentes	17
6. Desarrollo teórico	18
6.1. Simplificación de las ecuaciones de movimiento	18
6.1.1. Solución de las ecuaciones de movimiento si la variación del ángulo zenital es pequeña	19
6.1.2. Análisis de la solución para la coordenada angular zenital considerando ángulos pequeños y baja variación	25

6.2. Método del ajuste: segundo modelo analítico	26
6.3. Combinación de las 2 soluciones: tercer modelo analítico	28
6.4. Transformación de las integrales de energía	34
6.4.1. Análisis del integrando	36
6.4.2. Límite del ángulo extremo diferente del inicial	37
6.4.3. Separación de casos en función de la rapidez angular azimutal inicial	38
6.5. Propuesta de aporte teórico para el péndulo esférico	42
7. Metodología	44
7.1. Diseño experimental	44
7.1.1. Material y equipo	44
7.1.2. Segmentación y delimitación de experimentos	47
7.2. Procedimiento experimental	47
8. Resultados	51
8.1. Incerteza en la medición del ángulo zenital	51
8.2. Aplicación de los modelos teóricos para descripción de las coordenadas, y cálculo de período de oscilación y ángulo zenital extremo	51
8.2.1. Error de las soluciones analíticas	59
8.2.2. Error en el cálculo del período de oscilación del ángulo zenital	78
8.2.3. Rapidez angular azimutal inicial y tipo de amplitud de oscilación	80
8.2.4. Error en el cálculo del ángulo extremo	81
8.3. Implementación de modelos de aprendizaje automático	84
8.3.1. Corrección de soluciones analíticas para el ángulo zenital	84
8.3.2. Utilización de las soluciones corregidas para predicción del ángulo azimutal	86
8.3.3. Error de los modelos híbridos para predicción del ángulo zenital	88
8.3.4. Error de los modelos híbridos para predicción del ángulo azimutal	105
8.3.5. Comparación de la capacidad predictiva entre soluciones analíticas y modelos híbridos	115
9. Discusión y análisis de resultados	117
9.1. Impacto del cumplimiento de supuestos en las predicciones teóricas	117
9.1.1. Condiciones iniciales	117
9.1.2. Ángulo zenital pequeño (radio inicial)	118
9.1.3. Variación angular zenital pequeña	119
9.1.4. Péndulo esférico como sistema conservativo	119
9.2. <i>Tracker</i> como instrumento principal de medición	121
9.3. Desempeño de la combinación de soluciones para descripción de las coordenadas	121
9.4. Implementación de modelos de aprendizaje automático como método de corrección	122
9.4.1. Corrección de soluciones para el ángulo zenital	122
9.4.2. Corrección de soluciones para el ángulo azimutal	123
9.5. Impacto de los valores de largo de la cuerda y la masa	123
10. Conclusiones	124
11. Recomendaciones	125
12. Referencias	126
12.1. Referencias bibliográficas	126
13. Anexo A	128
13.1. Plano de la base del sistema físico, bases de datos y archivos de simulación de ecuaciones, extracción, análisis y modelado	128

14. Anexo B	130
14.1. Fotografías del sistema experimental	130

Lista de figuras

4.1. Esquema del péndulo esférico con el eje de coordenadas y nivel de referencia en el punto fijo de la cuerda, el conjunto masa-cuerda y sus 2 coordenadas angulares θ y ϕ . Referencia en [5]	7
4.2. Diagrama de funcionamiento del modelo <i>Random Forest</i> . Referencia en [9]	13
4.3. Diagrama de funcionamiento del modelo <i>XGBoost</i> . Referencia en [11]	14
4.4. Diagrama de funcionamiento del modelo de red neuronal <i>feedforward</i> . Referencia en [13]	15
6.1. Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al primer conjunto de condiciones iniciales . .	22
6.2. Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al segundo conjunto de condiciones iniciales .	22
6.3. Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al tercer conjunto de condiciones iniciales . .	23
6.4. Solución de $\theta(t)$ para 2 sistemas de ángulo y variación grande (θ_1 y θ_2) y un sistema con ángulo y variación pequeña (θ_3)	27
6.5. Función genérica que combina expresiones de la forma $\alpha \cos \omega t + \beta$ y $\gamma \cos \omega t + \sigma$ en un dominio temporal $[0, 3\tau]$	28
6.6. Ejemplo de la forma de la función por partes descrita en la Ecuación (6.41)	29
7.1. Multiherramienta rotativa (dremel) utilizada para hacer el corte en el brazo vertical y así colocar el horizontal	45
7.2. Plano polar impreso con 5 radios de referencia	46
7.3. Diagrama a escala que muestra la forma en la que se ensamblaron las piezas para armar el sistema del péndulo esférico; el rectángulo más pequeño representa el garfio tipo S	46
8.1. Evolución de la coordenada $\theta(t)$ para el sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2 .	52
8.2. Evolución de la coordenada $\phi(t)$ para el sistema 2 con el radio inicial R_1 , repetición 2	52
8.3. Evolución de la coordenada $\theta(t)$ para el sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3 .	53
8.4. Evolución de la coordenada $\phi(t)$ para el sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3 .	53
8.5. Evolución de la coordenada $\theta(t)$ con aplicación de la tercera solución analítica para el sistema 3 con radio inicial R_1 , repetición 2	54
8.6. Evolución de la coordenada $\phi(t)$ con aplicación de la tercera solución analítica para el sistema 3 con radio inicial R_1 , repetición 2	54

8.7. Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2. Asíntotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período	56
8.8. Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3. Asíntotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período	56
8.9. Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2. Asíntotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período	57
8.10. Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\theta(t)$ correspondientes al sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2	59
8.11. Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\phi(t)$ correspondientes al sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2	60
8.12. Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\theta(t)$ correspondientes al sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3	60
8.13. Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\phi(t)$ correspondientes al sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3	61
8.14. Residuos estándar de la solución analítica 3 para $\theta(t)$ correspondiente al sistema 3 con su radio inicial R_1 , repetición 2	61
8.15. Residuos estándar de la solución analítica 3 para $\phi(t)$ correspondiente al sistema 3 con su radio inicial R_1 , repetición 2	62
8.16. Resultados de las métricas de error porcentual <i>MAPE</i> y <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\theta(t)$. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central	71
8.17. Resultados de las métricas de error porcentual <i>MAPE</i> y <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\phi(t)$. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central	72
8.18. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MAPE</i> para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central	72
8.19. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MAPE</i> para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	73
8.20. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central	73
8.21. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central	74
8.22. Resultado de la métrica <i>MAPE</i> para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media como medida de tendencia central	74
8.23. Resultado de la métrica <i>MAPE</i> para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media como medida de tendencia central	75
8.24. Resultado de la métrica <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central	75
8.25. Resultado de la métrica <i>MdAPE</i> para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central	76
8.26. Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos	76
8.27. Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos	77
8.28. Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos ordenado por radio inicial. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos	77
8.29. Media del porcentaje de error en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87)	79

8.30. Porcentaje de error presentado por sistema en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87). Se utilizó la media para los sistemas 1 y 2, y la mediana para el sistema 3 por datos atípicos	79
8.31. Porcentaje de error presentado por radio en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87). Se utilizó la mediana para el radio R_1 por datos atípicos y la media para el resto	80
8.32. Porcentaje de error general en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central	82
8.33. Porcentaje de error presentado por sistema en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central	83
8.34. Porcentaje de error presentado por radio en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central	83
8.35. Modelo híbrido entre la solución $\theta_1(t)$ y modelo <i>Random Forest</i> del sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2	84
8.36. Modelo híbrido entre la solución $\theta_1(t)$ y modelo <i>XGBoost</i> del sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3	85
8.37. Modelo híbrido entre la solución $\theta_3(t)$ y modelo <i>XGBoost</i> del sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2	85
8.38. Evolución de la coordenada $\phi_1(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_1(t)$ con el modelo <i>Random Forest</i> , para el sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2	86
8.39. Evolución de la coordenada $\phi_1(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_1(t)$ con el modelo <i>XGBoost</i> , para el sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3 .	87
8.40. Evolución de la coordenada $\phi_3(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_3(t)$ con el modelo <i>XGBoost</i> , para el sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2 .	87
8.41. Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_1(t)$ con correcciones realizadas por el modelo <i>Random Forest</i> , correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2 . . .	88
8.42. Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_1(t)$ con correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i> , correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3	89
8.43. Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_3(t)$ con correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i> , correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2	89
8.44. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	96
8.45. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	96
8.46. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_3(t)$. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	97
8.47. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	97
8.48. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	98
8.49. Resultado de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_3(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	98

8.50. Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	99
8.51. Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	99
8.52. Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de <i>Random Forest</i> y <i>XGBoost</i> , y la mediana para las redes neuronales <i>feedforward</i>	100
8.53. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	100
8.54. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	101
8.55. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	101
8.56. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central . . .	102
8.57. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central . . .	102
8.58. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central . . .	103
8.59. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	103
8.60. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central	104
8.61. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central; la media fue usada en el radio 4 para el modelo híbrido con redes neuronales <i>feedforward</i> por 2 valores R^2 negativos de 3 que eran	105
8.62. Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_1(t)$ con $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>Random Forest</i> , correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2	106
8.63. Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_1(t)$ con $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i> , correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3 .	106
8.64. Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_3(t)$ con $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i> , correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2 .	107
8.65. Métrica $MdAPE$ de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$	110
8.66. Métrica $MdAPE$ de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$	111

8.67. Métrica <i>MdAPE</i> de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$	111
8.68. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$	112
8.69. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$	112
8.70. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$	113
8.71. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$	113
8.72. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$	114
8.73. Resultados de la métrica <i>MdAPE</i> , ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$	114
8.74. Gráfico de barras con la mediana de los coeficientes de determinación R^2 de cada solución (analítica e híbrida) correspondiente a la coordenada θ	115
8.75. Gráfico de barras con la mediana de la métrica de error porcentual <i>MdAPE</i> de cada solución (analítica e híbrida) correspondiente a la coordenada ϕ ; se utilizó el resultado medio para las soluciones analíticas y la mediana para los modelos híbridos	116
14.1. Vista frontal del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera	130
14.2. Vista lateral del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera	131
14.3. Vista superior del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera	131
14.4. Esferas utilizadas como masas m_1 , m_2 y m_3 (en orden de izquierda a derecha) en los experimentos realizados con el péndulo esférico construido, con las especificaciones descritas en la Sección 7.1.2	132
14.5. Regla de 30 cm y marcador utilizados como mecanismo de lanzamiento en los experimentos para generar las condiciones iniciales establecidas para este estudio	132

Lista de cuadros

6.1. Condiciones iniciales con las que se simularon las ecuaciones de movimiento, ángulo θ_f asociado, ángulo zenital promedio y la solución de la Ecuación (6.19) con el método gráfico	22
6.2. Resultados obtenidos para la solución de la Ecuación (6.19) con el método Newton-Raphson, con el valor del ángulo zenital medio y la evaluación de la solución en la derivada	23
6.3. Criterios para determinar signo de la amplitud de oscilación de θ	43
7.1. Longitudes de cuerda y masas que conforman cada sistema	47
7.2. Distribución de experimentos por cada sistema cuerda-masa. El número de videos indicados en este cuadro es 18, pero este valor corresponde a un sistema, y al ser 3, da un total de 54	47
8.1. Incertidumbres de θ calculadas para cada experimento	51
8.2. Período teórico asociado a la frecuencia angular de las soluciones teóricas	55
8.3. Resultado de la evaluación de la integral en la Ecuación (6.87) para todos los experimentos realizados	55
8.4. Ángulo extremo teórico obtenido como la asíntota vertical diferente de $\theta = \theta_0$ de la función $f(\theta)$ en la Ecuación (6.88) (véase Ecuación (6.92))	57
8.5. Clasificación de experimentos en función del valor máximo del ángulo θ . Si el ángulo mayor en la oscilación fue menor o igual a $\pi/12$, entonces le correspondió un \leq , de lo contrario, $>$	58
8.6. Variación del ángulo zenital θ respecto del ángulo inicial θ_0	58
8.7. Clasificación de experimentos en función de la variación del ángulo θ . Si la variación fue menor al 40%, entonces le correspondió un \leq , de lo contrario, $>$	58
8.8. Número de experimentos que pertenecen a las categorías en función del valor del ángulo máximo de la oscilación en θ y su variación	58
8.9. Métrica <i>MAE</i> correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos	62
8.10. Métrica <i>MAE</i> correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos	62
8.11. Métrica <i>MAE</i> correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos	63
8.12. Métrica <i>MAE</i> correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos	63
8.13. Métrica <i>MAE</i> correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable	63

8.14. Métrica MAE correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable	64
8.15. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos	64
8.16. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos	64
8.17. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos	65
8.18. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos	65
8.19. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable	65
8.20. Métrica $MdAE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable	66
8.21. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos	66
8.22. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos	66
8.23. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos	67
8.24. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos	67
8.25. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable	67
8.26. Métrica $MAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable	68
8.27. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos	68
8.28. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos	68
8.29. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos	69
8.30. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos	69
8.31. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable	69
8.32. Métrica $MdAPE$ correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable	70
8.33. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_1(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento	70
8.34. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_2(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento	70
8.35. Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_3(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento	71
8.36. Porcentaje de experimentos de cada categoría (véase Cuadro 8.8) en los que el coeficiente de determinación R^2 de la solución analítica $\theta_1(t)$ fue superior a 65 %	71
8.37. Período experimental obtenido con una transformada rápida de Fourier para todos los experimentos realizados	78
8.38. Porcentaje de error del período asociado a la frecuencia angular de las soluciones analíticas, respecto al obtenido experimentalmente	78
8.39. Porcentaje de error del período obtenido con la evaluación de la integral en la Ecuación (6.87), respecto al experimental	78
8.40. Rapidez angular azimutal que se requiere para que cada péndulo esférico, caracterizado por sus condiciones iniciales, presente el caso especial de péndulo cónico	80

8.41. Rapidez angular azimutal inicial medida en cada experimento	81
8.42. Relación de desigualdad entre la rapidez angular azimutal inicial medida y la ideal para generar el caso especial de péndulo cónico	81
8.43. Tipo de oscilación en $\theta(t)$ determinada con base en la forma de gráfica θ vs t . Si empieza con un máximo, la amplitud es positiva, y si lo hace con un mínimo, es negativa	81
8.44. Ángulo extremo experimental medido en los experimentos como el primer máximo o mínimo después de θ_0	82
8.45. Porcentaje de error en el ángulo extremo respecto al experimental	82
8.46. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>Random Forest</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$	90
8.47. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>Random Forest</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$	90
8.48. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>Random Forest</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$	90
8.49. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>XGBoost</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$	91
8.50. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>XGBoost</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$	91
8.51. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo <i>XGBoost</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$	91
8.52. Métrica <i>MdAPE</i> de redes neuronales <i>feedforward</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$	92
8.53. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo de redes neuronales <i>feedforward</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$	92
8.54. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo de redes neuronales <i>feedforward</i> para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$	92
8.55. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>Random Forest</i>	93
8.56. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>Random Forest</i>	93
8.57. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>Random Forest</i>	93
8.58. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i>	94
8.59. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i>	94
8.60. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo <i>XGBoost</i>	94
8.61. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales <i>feedforward</i>	95
8.62. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales <i>feedforward</i>	95
8.63. Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales <i>feedforward</i>	95
8.64. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>Random Forest</i>	107
8.65. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>Random Forest</i>	107
8.66. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>Random Forest</i>	108
8.67. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>XGBoost</i>	108

8.68. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>XGBoost</i>	108
8.69. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo <i>XGBoost</i>	109
8.70. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales <i>feedforward</i>	109
8.71. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales <i>feedforward</i>	109
8.72. Métrica <i>MdAPE</i> del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales <i>feedforward</i>	110

En este estudio se hicieron propuestas de aporte a la teoría del péndulo esférico: 3 conjuntos de modelos analíticos (θ , ϕ), una aproximación para la frecuencia angular de θ , una integral explícita para su período, una expresión para el ángulo extremo θ_f con su valor límite y caracterización del signo de la amplitud de oscilación. Se experimentó con un péndulo esférico con una base de *MDF* para evaluar modelos y propiedades. Debido al error sistemático de las soluciones analíticas, se entrenaron algoritmos de aprendizaje automático (*Random Forest*, *XGBoost* y Redes Neuronales *feedforward*) para corregirlas y crear modelos híbridos. El período obtenido evaluando la integral fue más exacto que la aproximación, pero ambos métodos presentaron errores colectivos menores al 4%; el error para el cálculo de θ_f fue menor al 10% y se predijo correctamente el tipo de oscilación en todos los experimentos. Las soluciones analíticas con menor error fueron las del conjunto 2, con un *MdAPE* medio de ($\theta_2(t)$: 18%, $\phi_2(t)$: 11.7%); $\theta_3(t)$ presentó el mayor R^2 por considerar amplitudes intercalantes. Se obtuvieron, en general, menores valores de *MdAPE* y R^2 mayores para θ con los modelos híbridos, siendo el algoritmo *XGBoost* el que presentó mayor desempeño; mejoró significativamente la descripción de θ , pero no la de ϕ , principalmente por la no conservación del momento angular. Se recomienda idear un método de lanzamiento que garantice la condición $\dot{\theta}(0) = 0$ y diseñar experimentos explorando otras bases para el péndulo con el objetivo de comprobar propiedades pendientes, como el límite del ángulo extremo.

Palabras clave: péndulo esférico, solución analítica, no linealidad, aprendizaje automático, error sistemático.

La mecánica clásica busca describir con exactitud y precisión el movimiento de las partículas macroscópicas, o conjuntos de ellas, en términos de su medio, fuerzas, entre otros parámetros. Se usa el lenguaje matemático para formular expresiones o marcos de trabajo que deben comprobarse experimentalmente. Una parte de este campo es la mecánica lagrangiana y la hamiltoniana, la cual se utiliza para estudiar, generalmente, sistemas conservativos mediante su energía, en los cuales no son claras las interacciones como para usar el enfoque vectorial newtoniano. Un sistema que cumple con esta característica es el péndulo esférico, que se describe con 2 ángulos: zenital (θ) y azimutal (ϕ). El conocimiento teórico de este sistema es corto en comparación con sus 2 casos especiales (péndulo plano y el cónico), reduciéndose únicamente a sus ecuaciones de movimiento, conservación del momento angular de ϕ , relaciones integrales [2] y precesión [3]. El péndulo esférico es sencillo de construir, pues basta con tener una cuerda con un punto fijo que en el otro extremo tenga una masa y darle un impulso que tenga un componente tangencial. Sin embargo, representa un reto conocer más teóricamente, pues su dinámica es no lineal, lo cual dificulta la resolución analítica de sus ecuaciones de movimiento y la expresión matemática de más propiedades. Por otro lado, desde el surgimiento del aprendizaje automático, rama de la inteligencia artificial que dota a las computadoras con la capacidad de aprender de volúmenes extensos de datos [4], se han encontrado diversas aplicaciones para la física, como en la tesis de Marroquín [1] sobre el análisis de trayectorias en el sistema dinámico caótico del péndulo magnético.

Por lo tanto, en esta tesis se pretende proponer aportes para ampliar el abanico de conocimiento teórico del péndulo esférico, principalmente con las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = u_0$, abordando sus ecuaciones de movimiento y su hamiltoniano, realizando experimentos para comprobar y evaluar resultados teóricos; del mismo modo, a manera de proponer una aplicación adicional de los modelos de aprendizaje automático, realizar correcciones a los modelos analíticos de evolución de coordenadas. Es importante mencionar que el desarrollo teórico fue hecho para una masa puntual, y por la forma en que se grabaron los videos de los experimentos, estos se limitaron a ángulos zenitales menores a $\pi/2$ rad (90°).

2.1. Objetivo general

Hacer una propuesta de aporte a la teoría físico-matemática del péndulo esférico, validando propiedades y las soluciones deducidas mediante experimentos de predicción de la evolución de las coordenadas, y compararlas con el desempeño de los modelos elaborados con correcciones realizadas por algoritmos de aprendizaje automático.

2.2. Objetivos específicos

- Obtener soluciones analíticas para las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico bajo condiciones específicas y deducir nuevas expresiones matemáticas para describir propiedades que caracterizan el sistema.
- Combinar los modelos analíticos y los de aprendizaje automático para predecir la evolución temporal de las coordenadas del sistema.
- Validar las expresiones deducidas y modelos propuestos con datos experimentales, y establecer límites para su aplicabilidad.
- Evaluar y comparar la capacidad predictiva de evolución de coordenadas presentada por ambos tipos de modelo: analítico e híbrido.

Los sistemas mecánicos han sido de interés para la física desde su inicio clásico, y el intento de conocer su evolución temporal a partir de condiciones iniciales ha conducido a ecuaciones diferenciales que crearon la necesidad de la ampliación de ese campo; también condujeron al surgimiento de herramientas matemáticas para solucionar el problema, por lo que estos sistemas han impulsado la creación de teoría tanto por parte de físicos como de matemáticos.

Actualmente, se tiene la matemática necesaria para deducir las ecuaciones de movimiento de sistemas mecánicos clásicos; sin embargo, su resolución y la obtención de propiedades e información a partir de las mismas varía dependiendo del sistema que se esté estudiando. La complicación en la resolución principalmente se debe a si las ecuaciones son no lineales; de ser este el caso, se tiene que recurrir a métodos variados en un intento de resolver el problema.

La no linealidad puede presentarse incluso en los sistemas más simples, como es el caso del péndulo esférico, una generalización del péndulo plano en cuanto a que su masa puede oscilar en más de un plano vertical. Sus ecuaciones de movimiento y algunas pocas propiedades se conocen. Por consiguiente, el presente trabajo pretende hacer una aproximación formal y detallada a las ecuaciones, y realizar correcciones a modelos analíticos propuestos con algoritmos de aprendizaje automático; del mismo modo, deducir propiedades en forma de expresiones analíticas y verificarlas experimentalmente. Esto con la finalidad de ampliar la teoría y proponer métodos de solución que podrían ser aplicables para el estudio de otros sistemas no lineales.

4.1. Mecánica newtoniana

El objetivo de la mecánica es describir de manera consistente y precisa la forma en cómo se mueven las partículas, o un conjunto de ellas, en función del medio en el que se encuentren, las fuerzas involucradas y otras restricciones. Esto se logra a través de leyes físicas expresadas matemáticamente tales que representen el movimiento de los cuerpos. La formulación de estas expresiones matemáticas se basa en observaciones empíricas, y si estas describen el fenómeno en cuestión, son tomadas como generalmente verdaderas y se vuelven leyes físicas.

En 1687, Sir Isaac Newton publicó los pilares de la mecánica clásica, un conjunto de enunciados conocidos como las leyes de Newton, las cuales son:

- Un cuerpo permanece en reposo o en movimiento a rapidez constante a menos que una fuerza actúe sobre él.
- Un cuerpo sobre el cual actúa una fuerza, se mueve de tal manera que la razón de cambio en su momento iguala a la fuerza.
- Si dos cuerpos ejercen fuerzas uno sobre el otro, tales fuerzas serán iguales en magnitud y en dirección opuesta.

La que más se utiliza en la práctica para analizar sistemas mecánicos es la segunda de estas leyes, cuya expresión matemática es:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\dot{\vec{r}}) \quad (4.1)$$

donde, \vec{F} es la fuerza, \vec{p} el momento lineal, t el tiempo, m la masa y \vec{r} la posición; el punto indica primera derivada temporal. Regularmente se trabaja con sistemas con masa constante, por lo que esta ley comúnmente se suele escribir así:

$$\vec{F} = m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}) = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a} \quad (4.2)$$

donde \vec{a} es la aceleración. Sin embargo, una limitación existente en el ámbito clásico de la física es que para obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema con el enfoque vectorial de la mecánica newtoniana es necesario conocer explícitamente todas las fuerzas involucradas, incluidas las

de restricción si un cuerpo se mueve sobre una superficie. Por otro lado, si las coordenadas en las que se trabaja no son necesariamente rectangulares, las expresiones se pueden volver significativamente complicadas y difíciles de manipular. Por lo tanto, para ciertos sistemas puede resultar muy complicado formular sus ecuaciones de movimiento [2].

4.2. Mecánica lagrangiana

En respuesta a la situación expuesta anteriormente, se tuvo que formular un método alternativo para resolver problemas que con la mecánica de Newton son complicados. El enfoque newtoniano es correcto, por lo que no se debía encontrar una teoría nueva. Históricamente, académicos se dieron cuenta de que en un sistema físico, ciertas cantidades se minimizaban, como el tiempo (por ejemplo, el que le toma a un rayo de luz pasar de un medio óptico a otro, la trayectoria de mínimo tiempo del problema de la braquistocrona, entre otros). El enunciado general del cual se derivaron los principios de mínima acción, mínima restricción y mínima curvatura fue el principio de Hamilton:

De todas las posibles trayectorias en el que un sistema dinámico se puede mover de un punto a otro en un intervalo de tiempo determinado (consistente con cualquier restricción), la trayectoria que sigue es la que minimiza la integral de tiempo de la diferencia entre las energías cinética y potencial [2, p. 230].

En notación de cálculo de variaciones, esto es:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (4.3)$$

donde T es la energía cinética y V la potencial. Se define el lagrangiano L del sistema como:

$$L = T - V \quad (4.4)$$

siendo este el funcional que se extremiza. La ecuación de Euler aplicada al funcional L con variable independiente t y variables dependientes generalizadas q_i y \dot{q}_i da como resultado la ecuación de movimiento de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad (4.5)$$

donde s representa los grados de libertad del sistema de interés, el número mínimo de coordenadas que se necesitan para describir la posición del sistema clásico. Esta es una de las formulaciones más útiles y generales de la mecánica porque utiliza esencialmente la energía, una propiedad fundamental de un sistema y por lo general sencilla de obtener, para la descripción y análisis del mismo. Los términos de la ecuación de movimiento de Lagrange representan fuerza y momento generalizado, respectivamente; de esta forma:

$$\text{Fuerza generalizada: } \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (4.6)$$

$$\text{Momento generalizado: } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.7)$$

Recordando que en mecánica newtoniana la sumatoria de fuerzas es igual a la derivada temporal del momento, es evidente que la ecuación de movimiento de Lagrange es coherente con esta teoría [2].

4.3. Mecánica hamiltoniana

Se define el moméntum generalizado como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.8)$$

Entonces las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir como:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (4.9)$$

El lagrangiano que corresponde a un sistema cerrado, esto quiere decir que no interactúa con elementos externos, no depende explícitamente del tiempo, por lo que:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.10)$$

Y por lo tanto su derivada total respecto del tiempo, recordando que $L = L\{q_i, \dot{q}_i\}$, se puede escribir como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (4.11)$$

Escribiéndolo en términos del moméntum generalizado:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) \quad (4.12)$$

Restando $\frac{dL}{dt}$ de ambos lados:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = 0 \quad (4.13)$$

La cantidad entre paréntesis es una constante respecto del tiempo, sea esta H , el hamiltoniano del sistema. Por lo tanto:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (4.14)$$

En un caso general, tanto el lagrangiano como el hamiltoniano son funcionales que dependen de q_i , p_i y del tiempo, por lo que $H = H\{q_i, p_i, t\}$, y su diferencial total es:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (4.15)$$

Por la ecuación $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, también se puede escribir el diferencial como:

$$dH = \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.16)$$

Sustituyendo $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ por \dot{p}_i y p_i , respectivamente, se tiene:

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.17)$$

Igualando los términos con la anterior expresión para dH , se obtienen las ecuaciones de movimiento de Hamilton, también conocidas como ecuaciones canónicas de movimiento:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.18)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.19)$$

La descripción del movimiento bajo la utilización de estas ecuaciones se conoce como dinámica hamiltoniana. Si se tienen n ecuaciones de Lagrange, se obtienen $2n$ ecuaciones de Hamilton, pero las del primer conjunto (Lagrange) son ecuaciones diferenciales de segundo orden, mientras que las del otro (Hamilton) son de primer orden [2].

4.4. Sistema mecánico del péndulo esférico

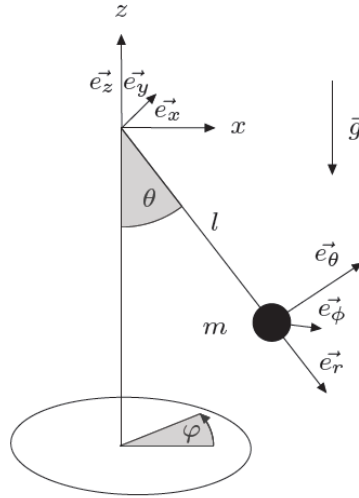


Figura 4.1: Esquema del péndulo esférico con el eje de coordenadas y nivel de referencia en el punto fijo de la cuerda, el conjunto masa-cuerda y sus 2 coordenadas angulares θ y ϕ . Referencia en [5]

El péndulo esférico es una generalización del péndulo simple/péndulo plano, ya que este, como su nombre lo indica, oscila únicamente en un plano, mientras que el que se trata en este trabajo no está sujeto a esta restricción y, por lo tanto, su trayectoria ocurre sobre la superficie de una esfera con radio igual a la cuerda que lo forma, l [6]; también es una generalización del péndulo cónico, en el que el ángulo azimutal es constante. Tomando como referencia la Figura 4.1, además del ángulo zenital θ (el formado por la vertical y la cuerda), el grado de libertad adicional está representado por un ángulo azimutal, sea este ϕ , el cual es el que corresponde al ángulo ecuatorial (plano xy en coordenadas cartesianas) / $\rho\phi$ (en coordenadas cilíndricas); de esta forma, el péndulo esférico es un sistema de 2 grados de libertad, ambos angulares [2]. El caso más sencillo es el que involucra una masa puntual, sea esta m , mientras que otros constan de un objeto extenso con momento de inercia definido I ; la descripción matemática a continuación corresponde al péndulo esférico conformado por una masa puntual.

4.4.1. Ecuaciones de movimiento

Con mecánica lagrangiana

El análisis matemático del péndulo esférico con herramientas de mecánica newtoniana resulta complicado al no ser claras realmente todas las fuerzas y torques involucrados en el movimiento del sistema. Por otro lado, sí se conocen de forma exacta las expresiones para su energía, cinética y potencial en este caso. La energía cinética T , en las coordenadas más convenientes (esféricas), está dada por:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad (4.20)$$

De acuerdo con la Figura 4.1, por la posición del eje de coordenadas y su nivel de referencia, la energía potencial V se puede escribir como:

$$V = -mgl \cos \theta \quad (4.21)$$

Con las Ecuaciones (4.20) y (4.21), se puede escribir el lagrangiano L del sistema:

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta \quad (4.22)$$

Nótese que no depende explícitamente de ϕ , por lo que se dice que es una coordenada cíclica. Con el funcional definido, se puede aplicar la ecuación de Euler-Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento, recordando que debe ser hecho 2 veces, una por cada coordenada, porque el sistema tiene 2 grados de libertad con θ y ϕ . Realizar esto conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \dot{\phi}^2 \cos \theta\right) \sin \theta = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = ml^2(\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta) = 0 \implies \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4.24)$$

La segunda de estas expresa la conservación del momento angular de ϕ , respecto al eje z , por lo que en muchas ocasiones se le denota como L_z a esta cantidad conservada. Ambas expresiones son coherentes con el caso especial del péndulo plano porque si $\dot{\phi} = 0$, una ecuación se anula y la otra se transforma en la reconocida ecuación:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4.25)$$

Con mecánica hamiltoniana

Si el lagrangiano se definió como la Ecuación (4.22), entonces el hamiltoniano H es:

$$H = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \quad (4.26)$$

Para utilizar las ecuaciones canónicas de movimiento de Hamilton, este funcional debe estar en términos de su *momenta*, en este caso, p_θ y p_ϕ . Recordando que $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, se puede escribir como:

$$H = \frac{1}{2ml^2}(p_\theta^2 + p_\phi^2 \csc^2 \theta) - mgl \cos \theta \quad (4.27)$$

Aplicando las ecuaciones canónicas de Hamilton, se obtienen $2s = 2(2) = 4$ ecuaciones de movimiento de primer orden:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad (4.28)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2} \csc^2 \theta \quad (4.29)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2}{ml^2} \csc^2 \theta \cot \theta - mgl \sin \theta \quad (4.30)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (4.31)$$

Con este método es más evidente la conservación del momento angular asociado a ϕ en la Ecuación (4.31), por lo que esta magnitud física es constante, y combinado con el enfoque lagrangiano se sabe que su valor es $L_z = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$ [2]. Aunque se hayan obtenido ecuaciones de primer orden, estas siguen siendo de carácter no lineal y carecen de soluciones analíticas como las obtenidas anteriormente.

4.4.2. Relaciones integrales

Dado que el hamiltoniano del sistema no depende explícitamente del tiempo y que el potencial no depende de alguna rapidez, el hamiltoniano es igual a la energía total del sistema, E , la cual se conserva. Por lo tanto, se puede escribir:

$$E = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \quad (4.32)$$

Despejando para $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta) - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta} \quad (4.33)$$

De la misma manera, para dt :

$$dt = \left(\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta) - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.33a)$$

Integrando:

$$t = \int \left(\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta) - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.34)$$

Para dejar el integrando dependiente únicamente de θ , recordando que $L_z = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$, se sustituye $\dot{\phi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta}$:

$$t(\theta) = \int \left(\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta) - \frac{L_z^2}{(ml^2)^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.34a)$$

$$t(\theta) = l \sqrt{\frac{m}{2}} \int \left(E + mgl \cos \theta - \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.35)$$

Si se evalúa esta integral desde un ángulo extremo mínimo a uno máximo se puede calcular la mitad del período de oscilación de θ , sea este τ , resultando en una expresión relevante por describir una propiedad del sistema. Por lo tanto:

$$\tau = l \sqrt{2m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(E + mgl \cos \theta - \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.36)$$

Sin embargo, nótese que se necesitan estos ángulos extremos, la energía E y el valor de L_z para realizar este cálculo.

Similarmente, a partir de L_z se puede derivar:

$$d\phi = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta} dt \quad (4.37)$$

Sustituyendo (4.33a) en (4.37), se obtiene:

$$d\phi = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{2}{ml^2} (E + mgl \cos \theta) - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.37a)$$

$$d\phi = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta} l \sqrt{\frac{m}{2}} \left(E + mgl \cos \theta - \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} d\theta \quad (4.38)$$

Integrando:

$$\phi(\theta) = \frac{L_z}{l\sqrt{2m}} \int \left(E + mgl \cos \theta - \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \quad (4.39)$$

Todas estas integrales tienen la forma de integrales elípticas [2].

4.4.3. Resumen del saber teórico acerca del péndulo esférico

Con base en lo anterior, se puede elaborar una lista con lo que se sabe, según la literatura estudiada y revisada para la realización de este trabajo, del péndulo esférico como sistema mecánico en cuanto a su descripción y propiedades de carácter matemático, en forma de expresiones analíticas.

- Su hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta = \frac{1}{2ml^2} (p_\theta^2 + p_\phi^2 \csc^2 \theta) - mgl \cos \theta$$

- Sus ecuaciones de movimiento de Lagrange son:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = 0$$

- Sus ecuaciones de movimiento de Hamilton son:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2} \csc^2 \theta$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2}{ml^2} \csc^2 \theta \cot \theta - mgl \sin \theta$$

$$\dot{p}_\phi = 0$$

- Se conserva el moméntum angular de ϕ , a favor del eje z : $L_z = ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$
- Se puede calcular el período de oscilación del ángulo zenital, τ , con una integral:

$$\tau = l\sqrt{2m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(E + mgl \cos \theta - \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} \right)^{-1/2} d\theta$$

Esta lista elaborada con base en la investigación realizada¹ acerca de la teoría péndulo esférico no es muy extensa, pues es el hamiltoniano, ecuaciones de movimiento, conservación de momento angular L_z y una expresión para el período de oscilación de θ ; dada la extensión de esta lista, se puede identificar una oportunidad para profundizar en las ecuaciones para buscar soluciones y más propiedades. Este sistema es regularmente trabajado numéricamente mediante simulaciones. Nótese que el péndulo esférico es uno de los sistemas más sencillos de elaborar [6] y su dinámica no aparenta ser complicada; aun así, no se conoce mucho de él en términos matemáticos, pues sus ecuaciones suponen una dificultad para avanzar y conocer más.

4.5. Modelos de aprendizaje automático

Con los avances en la tecnología y potencia computacional, aumentaron también los volúmenes de datos generados por distintos dominios como el clima, finanzas, medicina, entre otros. Esto representó una oportunidad única para los científicos de obtener información importante a partir de los datos, y esta tarea usualmente se logró con el aprendizaje automático (también conocido como *machine learning*), una rama de la inteligencia artificial. El *machine learning* se puede definir de distintas maneras, como por ejemplo que es el campo de estudio que permite a las computadoras aprender sin una programación explícita para ello, o como estudio de algoritmos computacionales que mejoran automáticamente mediante la experiencia. Los modelos de *machine learning* se clasifican por el tipo de aprendizaje: supervisado (como un problema de regresión o clasificación) y no supervisado (como un problema de *clustering*, en el que se forman grupos en los datos de acuerdo a características comunes) [4].

El aprendizaje automático se utiliza para resolver varios problemas, desde el reconocimiento de patrones, identificación de relaciones entre variables, predicciones en series de tiempo, entre otros. Los algoritmos de *machine learning* construyen modelos matemáticos que se basan en un conjunto de datos de entrenamiento [4]. Estos datos de entrenamiento tienen como finalidad afinar los parámetros de un modelo adaptativo [7].

En el aprendizaje supervisado, se tienen variables de entrada y de salida, y se utiliza un algoritmo para aprender sobre la relación de mapeo entre estas variables. Se pretende que se aprenda de manera eficaz y con el menor error posible para que se puedan hacer predicciones con nuevos datos de entrada. Se le llama aprendizaje supervisado porque se asemeja a un profesor monitoreando el proceso de aprendizaje: la respuesta correcta es conocida. Los modelos iterativamente hacen predicciones sobre los datos de entrenamiento y se corrigen actualizándose; el proceso se detiene hasta que se alcanza un error arbitrario. Los problemas de aprendizaje supervisado pueden dividirse en clasificación y regresión:

- **Clasificación:** la variable de salida es una categoría, como tipo de cliente o género musical.
- **Regresión:** la variable de salida es un valor real, como dinero o una coordenada específica en el tiempo [8].

4.5.1. Modelo *Random Forest*

Random Forest es un algoritmo de aprendizaje automático supervisado utilizado tanto para problemas de clasificación como de regresión, y está constituido por lo que se conocen como *árboles de decisión*. Los árboles de decisión están formados por nodos y están basados en una secuencia de selecciones binarias, donde la muestra de entradas se divide en 2 o más conjuntos similares basados

¹Se consultaron principalmente fuentes digitalizadas.

en las características principales de las variables de entrada. Cada árbol de decisión está compuesto por:

- Nodo raíz, que contiene a toda la muestra de variables de entrada.
- Nodo de partición.
- Nodo de decisión, en el que un subnodo se divide en otros subsecuentes.
- Nodo terminal u hoja, que es un nodo que no se divide más.
- Rama: árbol hijo del original.
- Nodos padres e hijos

Los criterios de partición de los nodos varían en una amplia gama dependiendo de la complejidad del problema, que en este caso puede ser de clasificación o regresión. Como se mencionó anteriormente, *Random Forest* es un algoritmo que se construye con un ensemble de árboles de decisión, un gran número de ellos con el objetivo de desarrollar una mejor capacidad de predicción. La parte aleatoria del modelo es consecuencia de un muestreo *bootstrap*, que se basa en 2 reglas clave:

1. Cada árbol se construye de submuestras aleatorias del conjunto de datos de entrenamiento.
2. Los nodos de partición se basan en subconjuntos aleatorios de las variables.

Nótese que no se eliminan (podan) los árboles en *Random Forest*; el resultado final es obtenido con un promedio de las predicciones de los árboles individuales para los de respuesta continua (los que usan en problemas de regresión), o por votación combinada para los de respuesta categórica (para clasificación). El algoritmo es el siguiente:

1. Empezar con los datos de entrenamiento de la forma $(\vec{x}_1, y_1), \dots, (\vec{x}_n, y_n)$ (donde cada $\vec{x}_j = (x_{1j}, \dots, x_{dj})^T$), y decidir un número I para las muestras *bootstrap* y un número N de variables predictoras de las d originales.
2. Se inicializa $i = 1$. Elegir una submuestra *bootstrap* B_i en un nodo raíz.
 - Seleccionar aleatoriamente N predictores.
 - Identificar la mejor partición binaria y dividir el nodo padre acorde a este.
 - Repetir hasta que el i -ésimo árbol de decisión se forme.
3. Para nuevos datos \vec{x} , la predicción para regresión estará dada por $\hat{y}_{\vec{x}} = I^{-1} \sum_{i=1}^I y_{\vec{x},i}$, y para clasificación $\hat{y}_{\vec{x}} = \operatorname{argmax}_y \sum_{i=1}^I 1_{\{y_{\vec{x},i}=y\}}$, donde $y_{\vec{x},i}$ es la respuesta predicha en \vec{x} desde el i -ésimo árbol [4].

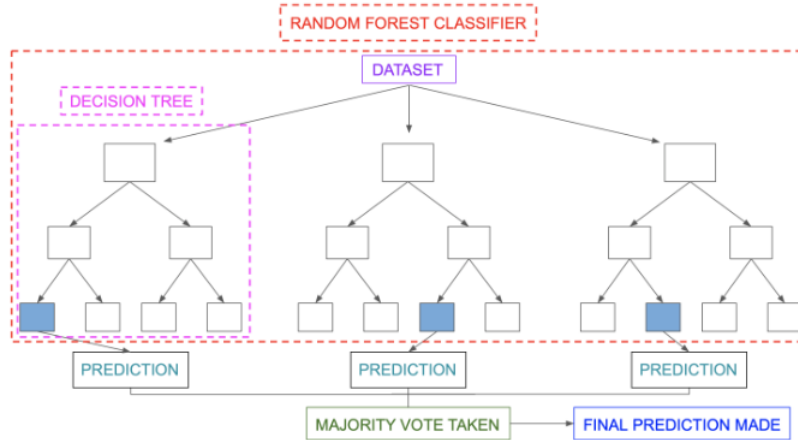


Figura 4.2: Diagrama de funcionamiento del modelo *Random Forest*. Referencia en [9]

4.5.2. Modelo *XGBoost*

La abreviatura de este modelo de aprendizaje automático significa *Extreme Gradient Boosting*, el cual se obtiene al optimizar el algoritmo *Gradient Boosting*. Como primer punto, con el método de *Boosting* se busca reducir los errores de una predicción construyendo un clasificador fuerte haciendo uso de clasificadores débiles, de manera que con los datos de entrenamiento se forma un primer modelo cuyos errores son corregidos con un proceso iterativo. *Gradient Boosting* mejora el proceso anteriormente descrito al incorporar más clasificadores débiles junto con un algoritmo de optimización de descenso de gradiente; este modelo es capaz de abordar problemas de regresión y clasificación [1]. *XGBoost* es un sistema escalable de *machine learning* para hacer *tree boosting*. El éxito detrás de *XGBoost* es su escalabilidad, porque su ejecución es 10 veces más rápida que la de cualquier otra solución conocida hasta la formulación de este algoritmo en 2016, en una misma máquina. Este factor diferenciador se debe a varios sistemas importantes y optimizaciones algorítmicas: un algoritmo de aprendizaje de árboles para manejar datos dispersos (como datos faltantes), un procedimiento de bosquejo de cuantiles ponderados justificado teóricamente que permite el manejo de instancias de pesos en el aprendizaje aproximado de árboles. Del mismo modo, la computación paralela y distribuida hace que el proceso de aprendizaje sea más rápido, lo cual permite el procesamiento de billones de ejemplos en una máquina [10].

La función objetivo de *XGBoost* incluye términos de regularización para evitar el *overfitting*: que el modelo aprenda perfectamente los datos y no sea capaz de generalizar para hacer predicciones y hacer hallazgos. Estos términos modifican el impacto de parámetros como el número de hojas de un árbol y el peso de las mismas. Como fue mencionado anteriormente, *XGBoost* utiliza algoritmos aproximados para encontrar la mejor distribución:

1. Algoritmo basado en histogramas: es más eficiente que algoritmos exactos, siendo esto más evidente en conjuntos de datos grandes.
2. Estructura de bloques: se utiliza para almacenar datos, lo cual ayuda tanto en el acceso a de patrones de caché como en paralelización [10].

Es ampliamente conocida la efectividad de *XGBoost* porque incluso en el trabajo fundacional de este algoritmo Chen y Guestrin [10] indican que este se ejecutó 10 veces más rápido (en términos de uso de recursos estimado con tiempo por iteración) que el modelo *Spark MLlib* y 2.2 veces más que *H2O*, aunque este último es más lento en cargar los datos.

Con *XGBoost*, los árboles de decisión se crean secuencialmente con Gradient Boosting, asignándole un peso ponderado a las variables independientes. De forma superficial, el funcionamiento de *XGBoost* es el siguiente:

1. Se asigna un peso ponderado a cada muestra para que sean introducidas a un primer modelo, que hará predicciones de estas muestras.
2. Se evalúan las predicciones y se modifican los pesos inicialmente asignados en función del error que presentaron, en forma de una relación directa, es decir, a mayor error, mayor la corrección.
3. Con los cambios hechos, se pasan los datos al siguiente árbol de decisión.
4. Se repiten los pasos 2 y 3 hasta haber alcanzado la tolerancia de error especificada [1].

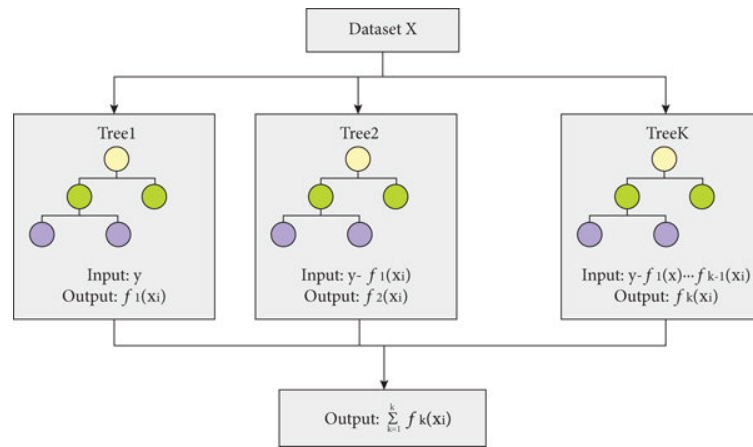


Figura 4.3: Diagrama de funcionamiento del modelo *XGBoost*. Referencia en [11]

4.5.3. Redes neuronales *feedforward*

También conocidas como perceptrones multicapa, son los modelos de *deep learning* por excelencia. Su meta es aproximar una función f^* , define un mapeo $\vec{y} = f^*(\vec{x}; \theta)$ y aprende los valores de los parámetros θ que generan la mejor aproximación a tal función. Se les llama *feedforward* porque la información fluye a través de la función evaluada en \vec{x} para obtener su imagen correspondiente, es decir, no hay conexiones de retroalimentación en las que las salidas del modelo se vuelvan a introducir en el algoritmo. Son modelos de alta importancia en la práctica, pues son piedra angular para las redes neuronales recurrentes, que alimentan muchas aplicaciones de lenguaje natural.

Se dice que son redes porque son típicamente representadas por la composición de muchas funciones. Por ejemplo, si se tienen 3 funciones, f_1 , f_2 y f_3 , se conectarían de la forma: $f(\vec{x}) = (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(\vec{x}) = f_3(f_2(f_1(\vec{x})))$; en este caso, f_1 es la primera capa de la red, f_2 la segunda, y de esta forma sucesivamente. El largo de esta cadena define la profundidad del modelo; de este concepto nace el término *deep learning*. La última capa recibe el nombre de capa de salida. Durante el entrenamiento de una red neuronal, se desea que $f(\vec{x})$ (la función generada por el modelo) sea igual a $f^*(\vec{x})$, de modo que cada \vec{x} de entrenamiento es acompañado por una etiqueta $y \approx f^*(\vec{x})$. Estos ejemplos de entrenamiento especifican qué debe hacer la capa de salida, y esto es generar un resultado cercano a y ; por otro lado, el comportamiento de las demás capas no es dictado por los datos de entrenamiento, por lo que el algoritmo de aprendizaje debe decidir cómo usar estas capas para producir el resultado deseado. Dado que los datos de entrenamiento no muestran el resultado final a las demás capas, se les llama capas ocultas.

A estas redes se les llama neuronales porque están inspiradas en la neurociencia. Cada capa oculta es evaluada en un vector y la dimensionalidad de las mismas define el ancho del modelo. Cada elemento del vector puede ser interpretado como que tiene un rol similar al de una neurona. En vez de pensar cada capa como una función que mapea vectores a vectores, se puede ver como una capa con muchas unidades que actúan en paralelo, cada una representando una función que mapea vectores a un escalar. Cada unidad se asemeja a una neurona en el sentido de que recibe datos de entrada provenientes de muchas otras unidades y genera su propio valor de activación. La idea de usar muchas capas de representaciones con valores vectoriales es derivada de la neurociencia. Sin embargo, la meta de las redes neuronales no es modelar perfectamente el funcionamiento del cerebro; es mejor verlas como una máquina que aproxima funciones cuyo objetivo es alcanzar la generalización estadística, que en algunas ocasiones provee hallazgos de lo que se sabe del cerebro [12].

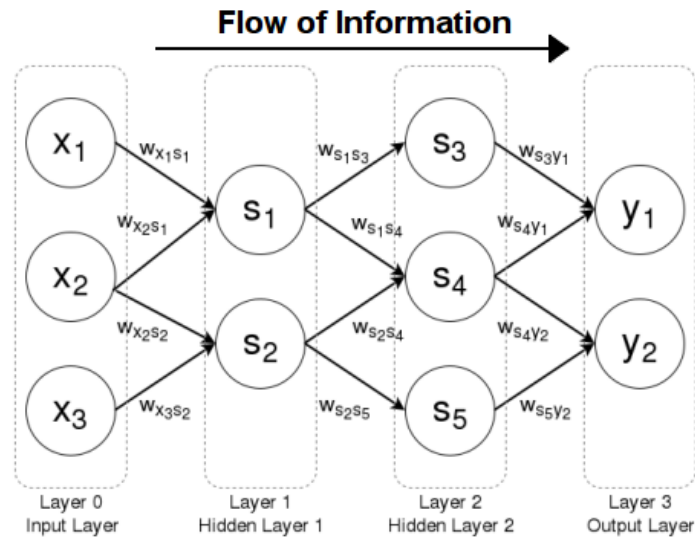


Figura 4.4: Diagrama de funcionamiento del modelo de red neuronal *feedforward*. Referencia en [13]

4.5.4. Métricas de evaluación de modelos

Existen varias métricas para evaluar el desempeño de modelos en términos de su error residual, precisamente en problemas de regresión. Algunas de estas ignoran la dirección del error, en otras palabras, si fue sub o sobrestimado, ya que al hacer esto se pueden anular algunos valores entre sí y no contribuyen al valor de la métrica; algunas que evitan este problema al utilizar valores absolutos son *MAE*, *MdAE*, *MAPE* y *MdAPE*.

- *MAE*: *mean absolute error* (media del error absoluto)
- *MdAE*: *median absolute error* (mediana del error absoluto)
- *MAPE*: *mean absolute percentage error* (media del error absoluto porcentual)
- *MdAPE*: *median absolute percentage error* (mediana del error absoluto porcentual)

Las métricas enumeradas están definidas a partir de los residuos del modelo a evaluar (la diferencia entre la observación y el pronóstico: $y - \hat{y}$). Las primeras 2 se calculan con un error absoluto

y sus expresiones matemáticas son directas e intuitivas:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i| \quad (4.40)$$

$$MdAE = \text{Mediana} (|y_i - \hat{y}_i|) \quad (4.41)$$

Las otras 2 estiman errores porcentuales, por lo que sus expresiones presentan una división entre la correspondiente observación realizada y_i :

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (4.42)$$

$$MdAPE = \text{Mediana} \left(\left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \right) \quad (4.43)$$

Nótese que al utilizar las medidas de tendencia central de la media y la mediana, los resultados de las métricas pueden ser representativos para expresar el rendimiento de un modelo; sin embargo, si existen datos atípicos, la media no será representativa para el conjunto de residuos y la mediana, al ser determinada por la posición y no el valor en sí, no será significativamente afectada y representará de mejor manera el error [1].

Se puede considerar que es relativamente reciente la transición a la era de la inteligencia artificial; el aprendizaje automático se está utilizando en campos de estudio variados, desde las finanzas y los negocios, hasta la ciencia. Por otro lado, el péndulo esférico se considera como un caso cerrado, pues no hay una amplia lista de estudios dedicados a conocer más del mismo. A continuación, se describen trabajos relacionados a este proyecto de investigación:

1. Ahed Habib y Umut Yildirim, de la Universidad Mediterránea del Este, implementaron una red neuronal que consideró restricciones físicas para el diseño preliminar de cojinetes para un péndulo de fricción de múltiples etapas, que son componentes críticos en sistemas aislados sísmicamente. Con estas restricciones, mejoró la precisión y confiabilidad de las predicciones, facilitando la creación de procesos de diseño más eficientes. Referencia en [14].
2. Pablo Marroquín, en su tesis para optar al grado de licenciado en física por parte de la Universidad del Valle de Guatemala, presentó un trabajo en el que aplicó modelos de aprendizaje automático para hacer un análisis de predictibilidad de trayectorias de un péndulo magnético. En general, no se lograron modelar computacionalmente, pero los resultados más exactos fueron los que consistieron de montajes con 2 imanes, 1 intervalo de 1/30 segundos a predecir con el modelo *Random Forest*; fue un trabajo innovador en el que se utilizaron algoritmos de *machine learning* para estudiar un sistema dinámico caótico. Referencia en [1].
3. Científicos de la Universidad de Hamburg aplicaron *machine learning* para predecir y mitigar el movimiento de un péndulo *high-Q* (alto factor de calidad) considerando perturbaciones sísmicas, resultando en una reducción significativa en el desplazamiento de la densidad de potencia espectral en la frecuencia de resonancia, sugiriendo potenciales mejoras para la sensibilidad de detectores de ondas gravitacionales al contrarrestar ruido sísmico. Referencia en [15].
4. La investigación de Galal M. Moatimid y T. S. Amer, de la Universidad Ain Shams y de la Universidad de Tanta, respectivamente, aportó soluciones analíticas aproximadas para el movimiento de un péndulo esférico magnético, enfatizando sus características de estabilidad. Mediante métodos no perturbativos, los autores analizaron el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones, haciendo hallazgos sobre la estabilidad y dinámica de este tipo de péndulos, los cuales tienen varias aplicaciones, tanto teóricas como prácticas. Referencia en [16].

6.1. Simplificación de las ecuaciones de movimiento

Son ampliamente conocidas las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico deducidas con el enfoque escalar de la mecánica lagrangiana:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta) = 0 \quad (6.2)$$

La segunda de ellas denota la conservación del momento angular asociado a la coordenada del ángulo azimutal; nótese que si $\dot{\phi} = 0$, la primera ecuación se reduce a la del péndulo plano. La coordenada que oscila es la del ángulo zenital, θ , y para comenzar a abordar estas ecuaciones, se puede pensar en qué pasaría si el valor de los ángulos que puede tener son considerados como pequeños (por consenso, menores a 15° , $\pi/12$ en radianes). Si se cumple esta condición, se pueden aplicar las aproximaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$ a las ecuaciones de movimiento, resultando en:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \dot{\phi}^2 \right) \theta = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi} \theta^2) = 0 \quad (6.4)$$

En la Ecuación (6.4) se ha simplificado ml^2 por ser constante. Estas expresiones, aunque sean más simples, siguen siendo no triviales en cuanto a su resolución, pues mantienen su carácter no lineal.

La siguiente acción a realizar es desacoplar las ecuaciones, lo cual se puede lograr si se trabaja la Ecuación (6.4). Notando que esta hace referencia a una cantidad que se conserva:

$$\dot{\phi} \theta^2 = C_1 \Rightarrow \dot{\phi} = C_1 / \theta^2 \quad \therefore \phi = \int \frac{C_1}{\theta^2} dt \quad (6.5)$$

Donde C_1 es una constante. Para conocer el valor de la misma, se tienen que recordar las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\phi}(0) = u_0$. Estas condiciones se pueden unificar eliminando el parámetro

del tiempo, de esta manera: $\dot{\phi}(\theta = \theta_0) = u_0$; de esta manera $C_1 = u_0\theta_0^2$ y $\dot{\phi} = u_0\theta_0^2/\theta^2$. Sustituyendo esta equivalencia en la Ecuación (6.3):

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} - \left(\frac{u_0\theta_0^2}{\theta^2} \right)^2 \right) \theta = 0 \quad (6.6)$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{u_0^2\theta_0^4}{\theta^3} \quad (6.7)$$

Esta es la ecuación para θ del péndulo esférico con las condiciones iniciales establecidas para este trabajo de investigación. Solucionarla implica tener una expresión para $\dot{\phi}(t)$ y también de $\phi(t)$ al integrarla. Se puede ver que es una ecuación del péndulo simple no homogénea, que, en el contexto de un sistema mecánico, está sujeta a una fuerza que depende inversamente del cubo del ángulo; sería un sistema equivalente.

6.1.1. Solución de las ecuaciones de movimiento si la variación del ángulo zenital es pequeña

La Ecuación (6.7) es la llave para la resolución de las ecuaciones de movimiento del sistema, sin embargo, tampoco es manejable con métodos convencionales de ecuaciones diferenciales ordinarias, pero si se hace un supuesto más, esta tiene solución en forma de una expresión analítica; tal supuesto es que la variación de θ sea pequeña en comparación con el ángulo inicial θ_0 . Esto permite linealizar el término inhomogéneo de la ecuación.

Para realizar esto, se busca la recta tangente a la función, sea esta:

$$\alpha(\theta) = u_0^2\theta_0^4/\theta^3 \quad (6.8)$$

que pase por el punto:

$$\left(\theta_M, \alpha(\theta_M) = \frac{u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \right) \quad (6.9)$$

donde θ_M es un ángulo que se encuentra entre los valores máximo y mínimo de la oscilación de $\theta(t)$; no se asume que es el valor medio para no perder generalidad. La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (6.10)$$

Aplicada al caso particular, con θ como variable independiente y recordando que la pendiente es la derivada respecto a θ de la función evaluada en la abscisa del punto de interés:

$$y - \alpha(\theta_M) = \left. \frac{d\alpha}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_M} (\theta - \theta_M) \quad (6.10a)$$

$$y - \frac{u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} = \left. \frac{d\alpha}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_M} (\theta - \theta_M) \quad (6.10b)$$

La derivada evaluada es:

$$\left. \frac{d\alpha}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_M} = -\frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4} \quad (6.10c)$$

Entonces la recta tangente es:

$$y = -\frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}\theta + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}\theta_M + \frac{u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \quad (6.10d)$$

Simplificando:

$$y = -\frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}\theta + \frac{4u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \quad (6.10e)$$

Por lo que la aproximación lineal de $\alpha(\theta)$ centrada en $\theta = \theta_M$ en un intervalo de baja variación es:

$$\alpha(\theta) = \frac{u_0^2\theta_0^4}{\theta^3} \approx -\frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}\theta + \frac{4u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \quad (6.11)$$

θ_M es el valor en el que se centra la linealización, y es tal que $\theta_M \in (\min(\theta), \max(\theta))$. Para este punto de la resolución, se elegirá un valor tal que ayude a describir lo que se observa, y para ello se impondrá una condición adicional (de frontera) que considera el otro valor extremo de θ , sea este θ_f , es decir, el que es diferente a θ_0 , que puede ser el máximo o mínimo de θ ; asumiendo periodicidad, denotemos esta condición como $\theta(\nu) = \theta_f$, donde ν representa el primer valor temporal tal que maximiza (si θ_0 es un mínimo) o minimiza (si θ_0 es un máximo) la función $\theta(t)$.

Si se sustituye la linealización de la Ecuación (6.11) en la ecuación diferencial de θ :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4} \right) \theta = \frac{4u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \quad (6.12)$$

Esta ecuación ya es lineal y se puede resolver directamente. La solución homogénea, sea esta $\theta_h(t)$, se puede escribir como una combinación lineal de senos y cosenos:

$$\theta_h(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} t \right) \quad (6.12a)$$

Para la parte no homogénea, se propone $\theta_{nh} = C : \frac{d}{dt}(C) = 0$, en vista de que el término no homogéneo es constante. Sustituyendo θ_{nh} en la ecuación diferencial:

$$\ddot{C} + \left(\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4} \right) C = \frac{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4}{l\theta_M^4} C = \frac{4u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^3} \quad (6.12b)$$

Despejando para $\theta_{nh} = C$:

$$C = \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.13)$$

Por lo que se puede escribir la solución general de la ecuación, $\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_{nh}$:

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} t \right) + \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.14)$$

Para determinar el valor de las constantes A y B , se evalúan las condiciones iniciales. Con $\theta(0) = \theta_0$:

$$\theta(0) = A + \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} = \theta_0 \quad (6.14a)$$

Despejando para A :

$$A = \theta_0 - \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.15)$$

Con la condición $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\dot{\theta}(0) = B \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} = 0 \quad (6.15a)$$

El factor:

$$\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} \quad (6.16)$$

es mayor que 0 dado que representa la frecuencia angular de la oscilación que permite el movimiento característico del sistema, entonces $B = 0$, por lo que se puede escribir la solución particular de la ecuación:

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} t \right) + \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.17)$$

Como fue mencionado anteriormente, se necesita hacer uso de la condición adicional para encontrar el valor de la constante θ_M . Recordando que tal condición es $\theta(\nu) = \theta_f$ con ν siendo un valor temporal que extremiza la función $\theta(t)$. Notando que la parte de esta función que depende de t es un coseno, entonces ν tiene que cumplir con:

$$\cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_M^4}} \nu \right) = -1 \quad (6.18)$$

Por lo tanto:

$$\theta(\nu) = \left(\theta_0 - \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \right) (-1) + \frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} = \theta_f \quad (6.18a)$$

Simplificando la expresión:

$$\frac{4lu_0^2\theta_0^4\theta_M}{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} = \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \equiv \bar{\theta} \quad (6.19)$$

donde $\bar{\theta}$ es el ángulo zenital medio (el valor medio de los ángulos θ_0 y θ_f). θ_M es entonces la solución a esta ecuación, la cual se puede llevar a la forma de un polinomio de grado 4, pero se usaron métodos numéricos para resolverla debido a la complejidad de hacerlo analíticamente. El método consistió en graficar ambos lados de la ecuación como funciones individuales y evaluar en qué punto se intersecan; estos resultados se respaldaron con el método de Newton-Raphson. Por lo tanto, lo único que se necesita es el valor del nuevo parámetro $\bar{\theta}$.

- **Simulación de las ecuaciones de movimiento con *odeint* para calcular el ángulo zenital medio y utilización de método gráfico para resolver la Ecuación (6.19)**

Se asume que independientemente de los valores de l , u_0 y $\bar{\theta}$, θ_M tendrá una característica común en los sistemas que puedan ser considerados como casos de baja variación en θ , por lo que, utilizando la librería *odeint*¹ de *Python*, se simularon las ecuaciones de movimiento con 3 condiciones iniciales distintas² que generaron un caso de baja variación de θ , para obtener θ_f (y por consiguiente $\bar{\theta}$) y así evaluar la solución de la Ecuación (6.19). Se incluye el programa utilizado en el repositorio cuyo enlace se adjunta en *Anexo B*.

Los valores de los parámetros de la magnitud de la aceleración gravitacional y el largo de la cuerda fueron 9.8 m/s^2 y 0.270 m , respectivamente. La simulación proporcionó el dato de

¹*odeint* es una librería que utiliza *LSODA*, de la librería de *FORTTRAN odepack (SciPy community, 2025)*[17]. *LSODE* abrevia, en inglés, *Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*, y se utiliza para resolver sistemas rígidos (*stiff*) y no rígidos (*nonstiff*) (Hindmarsh, s.f.)[18], y *LSODA* sustituye la letra “A” por la “E” para hacer referencia a *Automatic Method Selection*, en el que el paquete decide automáticamente qué método utilizar dependiendo de si el problema es de tipo rígido (método *Backward Differentiation Formula (BDF)*) o no (método de Adams) (Hindmarsh, 1982)[19].

²Se mantuvieron las condiciones $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\phi(0) = 0$.

θ_f , con el cual se puede calcular $\bar{\theta}$ y resolver la ecuación.

$\theta(0) = \theta_0$ (rad)	$\dot{\phi}(0) = u_0$ (rad/s)	θ_f (rad)	$\bar{\theta}$ (rad)	θ_M (rad)
$\pi/12$	5.35	0.232	0.247	0.247
$\pi/15$	5.60	0.195	0.202	0.202
$\pi/17$	6.30	0.193	0.189	0.189

Cuadro 6.1: Condiciones iniciales con las que se simularon las ecuaciones de movimiento, ángulo θ_f asociado, ángulo zenital promedio y la solución de la Ecuación (6.19) con el método gráfico

A continuación, se muestran los resultados obtenidos con el método gráfico, en los que se puede observar una curva (lado izquierdo de la Ecuación (6.19)), una recta horizontal (la constante $\bar{\theta}$) y su intersección que representa la solución θ_M .

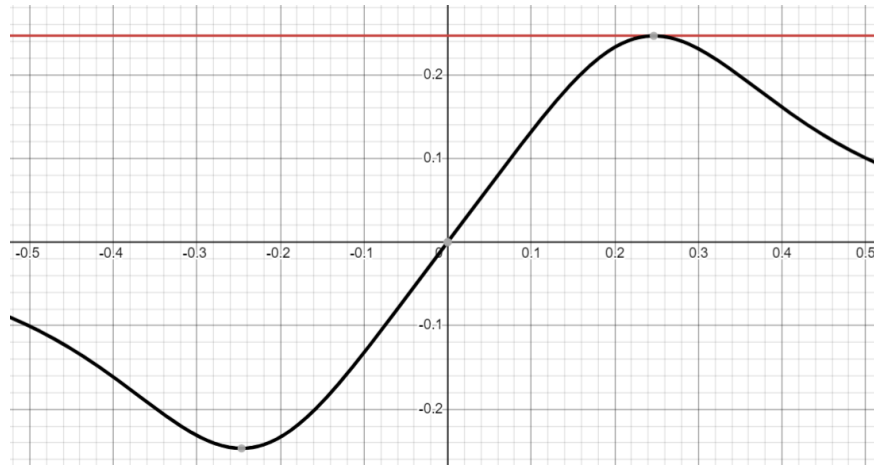


Figura 6.1: Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al primer conjunto de condiciones iniciales

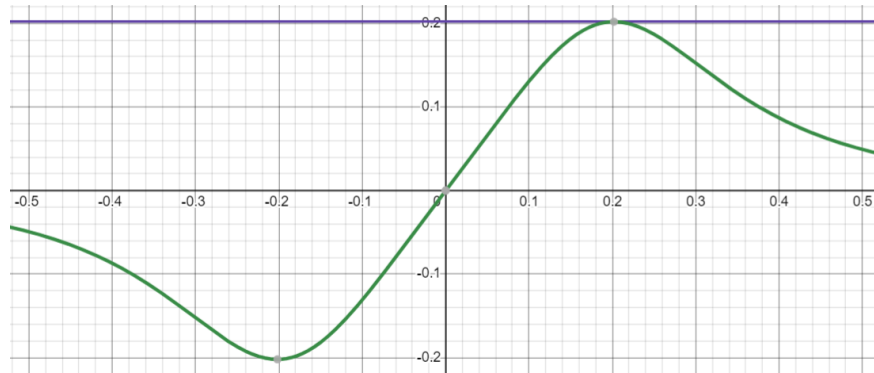


Figura 6.2: Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al segundo conjunto de condiciones iniciales

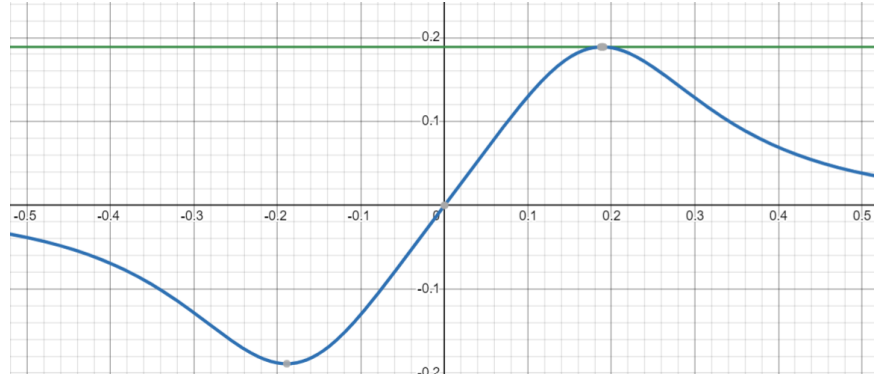


Figura 6.3: Gráfica de las 2 expresiones en la Ecuación (6.19) como funciones independientes; parámetros utilizados correspondientes al tercer conjunto de condiciones iniciales

Nota: en este caso, hubo 2 puntos de solución (0.187 y 0.191 rad), pero debido a su relativa cercanía se usó el valor promedio (0.189 rad).

■ **Respaldo de resultados con el método Newton-Raphson**

$\theta(0) = \theta_0$ (rad)	$\dot{\phi}(0) = u_0$ (rad/s)	θ_M (rad)	$\bar{\theta}$ (rad)	$\frac{df}{dx} _{\theta_M}$
$\pi/12$	5.35	0.247	0.247	-3.57×10^{-3}
$\pi/15$	5.60	0.202	0.202	-1.14×10^{-3}
$\pi/17$	6.30	0.186	0.189	4.76×10^{-2}

Cuadro 6.2: Resultados obtenidos para la solución de la Ecuación (6.19) con el método Newton-Raphson, con el valor del ángulo zenital medio y la evaluación de la solución en la derivada

Los resultados obtenidos para θ_M con Newton-Raphson son coherentes con el método gráfico, y en ambos nótese que en todos los diferentes conjuntos de condiciones iniciales la solución θ_M de la Ecuación (6.19) coincidió, en un redondeo a 2 cifras significativas, con el ángulo zenital promedio $\bar{\theta}$, pero concluir esto solo conllevaría a la sustitución $\theta_M \rightarrow \bar{\theta}$ en la función $\theta(t)$, el cual es un parámetro experimental más al depender de θ_f ; sin embargo, hay que notar que $\bar{\theta}$ es también la abscisa del máximo positivo de la función $f(x) = \frac{4lu_0^2\theta_0^4x}{gx^4+3lu_0^2\theta_0^4}$ (esto se aprecia de mejor manera en las Figuras del método gráfico, pero también se puede inferir con la última columna del cuadro 6.2, al notar que la evaluación de θ_M en la derivada es cercana a cero), la cual ya no es un parámetro que depende de mediciones adicionales a las condiciones iniciales. Esta es la característica común que se estaba buscando, por lo que se puede proceder a encontrar la expresión para θ_M en la formulación general.

Dado que θ_M es un valor que maximiza la función $f(x) = \frac{4lu_0^2\theta_0^4x}{gx^4+3lu_0^2\theta_0^4}$, entonces $\frac{df}{dx}|_{x=\theta_M} = 0$, por lo que:

$$4lu_0^2\theta_0^4 \frac{g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4 - 4g\theta_M^4}{(g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4)^2} = 4lu_0^2\theta_0^4 \frac{3lu_0^2\theta_0^4 - 3g\theta_M^4}{(g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4)^2} = 0 \quad (6.20)$$

Puesto que $4lu_0^2\theta_0^4/(g\theta_M^4 + 3lu_0^2\theta_0^4)^2 > 0$:

$$3lu_0^2\theta_0^4 - 3g\theta_M^4 = 0 \Rightarrow \theta_M = \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \quad (6.21)$$

Sustituyendo θ_M en la función $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{4lu_0^2\theta_0^5 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4}}{lu_0^2\theta_0^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{3u_0^2\theta_0^4}{\theta_0^4 \frac{l}{g}u_0^2}} t \right) + \frac{4lu_0^2\theta_0^5 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4}}{lu_0^2\theta_0^4 + 3lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.21a)$$

$$\theta(t) = \left(\theta_0 - \frac{4lu_0^2\theta_0^5 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4}}{4lu_0^2\theta_0^4} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} + 3\frac{g}{l}} t \right) + \frac{4lu_0^2\theta_0^5 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4}}{4lu_0^2\theta_0^4} \quad (6.21b)$$

Lo cual conduce a la forma final de la función para el ángulo zenital:

$$\theta(t) = \theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \right) \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \quad (6.22)$$

Sustituyendo esta función en la relación diferencial de la Ecuación (6.5) con $C_1 = u_0\theta_0^2$:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{u_0\theta_0^2}{\left[\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \right) \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \right]^2} \quad (6.23)$$

Recordando la condición $\phi(0) = 0$, la función para el ángulo azimutal $\phi(t)$ viene dada por la integración de la Ecuación (6.23):

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{u_0\theta_0^2}{\left[\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \right) \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} r \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g}u_0^2\right)^{1/4} \right]^2} dr \quad (6.24)$$

Por ser las primeras soluciones encontradas, se les colocará el subíndice 1 ($\theta_1(t)$, $\phi_1(t)$). Con la obtención de estas funciones, queda finalizada la tarea de solucionar las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico con el supuesto de ángulos pequeños y baja variación del ángulo zenital.

Nótese que la frecuencia angular de oscilación encontrada para θ , la constante del argumento del coseno, es 2 veces la del péndulo simple, $\sqrt{g/l}$, por lo que su período, sea este τ , es la mitad. Si $\omega = \sqrt{g/l}$ y $\omega' = 2\omega = 2\sqrt{g/l}$, entonces:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega} \therefore \tau = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.25)$$

Se le llamará a esta expresión τ_1 por ser la primera encontrada para el período. De la misma forma, cualitativamente se puede establecer que la trayectoria de la masa en el plano xy describe, en general, elipses. Si se considera que media elipse es generada por una oscilación completa del ángulo θ , entonces se puede plantear el período de rotación de la masa, sea este T , como:

$$T = 2\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.26)$$

El cual, nótese, coincide con el período de oscilación del péndulo simple.

6.1.2. Análisis de la solución para la coordenada angular zenital considerando ángulos pequeños y baja variación

Con la expresión encontrada para el ángulo zenital θ (Ecuación (6.22)), se pueden obtener resultados y propiedades mecánicas del sistema mediante el análisis de la misma.

Con la función se puede establecer la forma de θ_f , el otro ángulo extremo, basta con simplemente evaluar la función en el tiempo $t = \nu$:

$$\theta_1(\nu) = \theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) (-1) + \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \Rightarrow \theta_f = \theta_0 \left(2 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} - 1 \right) \quad (6.27)$$

Considérese la amplitud de la oscilación en $\theta(t)$: $\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right)$. Lo que hace que θ_f sea el ángulo máximo o mínimo de la oscilación está determinado por el signo de esta amplitud, es decir, si este es positivo, θ_0 será un máximo y θ_f el mínimo, pero si es negativo, será el mínimo y el otro extremo el máximo. Dado que en esta amplitud todas las variables son positivo definidas, lo único que define el signo es u_0 , lo cual es coherente con lo que se puede esperar.

De esta manera, evaluemos el caso en el que la amplitud es positiva ($\theta_0 > \theta_f$):

$$\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) > 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} > 0 \quad (6.27a)$$

Lo cual lleva a la relación:

$$u_0 < \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.28)$$

En este caso, considerando la Ecuación (6.27) y que θ es positivo definido, θ_f es una fracción propia de θ_0 , esto es $\theta_f < \theta_0$.

Similarmente con el caso de amplitud negativa ($\theta_0 < \theta_f$):

$$\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} < 0 \Rightarrow u_0 > \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.29)$$

Del mismo modo, considerando la relación entre los extremos y la positivo definición de θ , θ_f es una fracción impropia de θ_0 , esto es $\theta_f > \theta_0$.

Como caso especial, si la amplitud es igual a cero, el péndulo esférico se vuelve cónico al reducir un grado de libertad en el sistema eliminando la oscilación. Si esto ocurre, entonces:

$$\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} = 1 \Rightarrow u_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (6.30)$$

Y la expresión para θ se reduce a:

$$\theta_1(t) = \theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \right)^2 \right)^{1/4} \right) \cos \left(2 \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} \right)^2 \right)^{1/4} = \theta_0 \quad (6.31)$$

Asimismo, $\theta_f = \theta_0$. De esta manera, este resultado expresa la condición necesaria para que el péndulo esférico con valores de ángulos zenitales pequeños se reduzca al caso especial del cónico, y está asociada a la rapidez angular azimutal inicial, que depende del largo de la cuerda y el valor de la aceleración gravitacional. Se puede llegar a este último resultado con mecánica newtoniana, por lo que este desarrollo es coherente.

6.2. Método del ajuste: segundo modelo analítico

En todas las deducciones realizadas, solo una concierne a soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales del sistema, y fue bajo la aproximación de ángulos pequeños con el supuesto de baja variación del ángulo zenital. No es una solución que sea aplicable a todos los casos, solo es para una pequeña parte de los mismos. No obstante, a juzgar por la forma de esta solución para θ (véase Ecuación (6.22)), se puede proponer un modelo de la forma:

$$\theta(t) = A \cos \omega t + B \quad (6.32)$$

Similarmente (por la relación de conservación de momento angular):

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{(A \cos \omega r + B)^2} dr \quad (6.33)$$

donde A, B, ω son constantes a determinar; nótese que el modelo cumple, de partida, con $\dot{\theta}(0) = 0$. Esta expresión se puede ajustar con las condiciones requeridas. Recordando $\theta(0) = \theta_0$, se tiene que:

$$\theta(0) = A + B = \theta_0 \quad (6.33a)$$

Del mismo modo, $\theta(\nu) = \theta_f$ (véase Sección 6.1.1. para explicación de esta condición), por lo que:

$$\theta(\nu) = -A + B = \theta_f \quad (6.33b)$$

Se tienen entonces 2 ecuaciones lineales para los coeficientes A y B , cuya solución es trivial, siendo:

$$A = \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \quad (6.34)$$

$$B = \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.35)$$

por lo que el modelo para $\theta(t)$ es:

$$\theta(t) = \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \cos \omega t + \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.36)$$

- Determinación de ω con *odeint*

En la solución de las ecuaciones de movimiento con el supuesto mencionado, se obtuvo una frecuencia angular constante igual a $2\sqrt{g/l}$, por lo que con la simulación utilizada anteriormente (véase Sección 6.1.1.) se evaluó si esta frecuencia cambiaba si los ángulos y la variación no eran necesariamente pequeñas; se utilizó el primer conjunto de condiciones iniciales del cuadro 6.1 para comparar. Se hicieron pruebas numéricas con un péndulo con $l = 0.270$ m y $g = 9.8$ m/s².

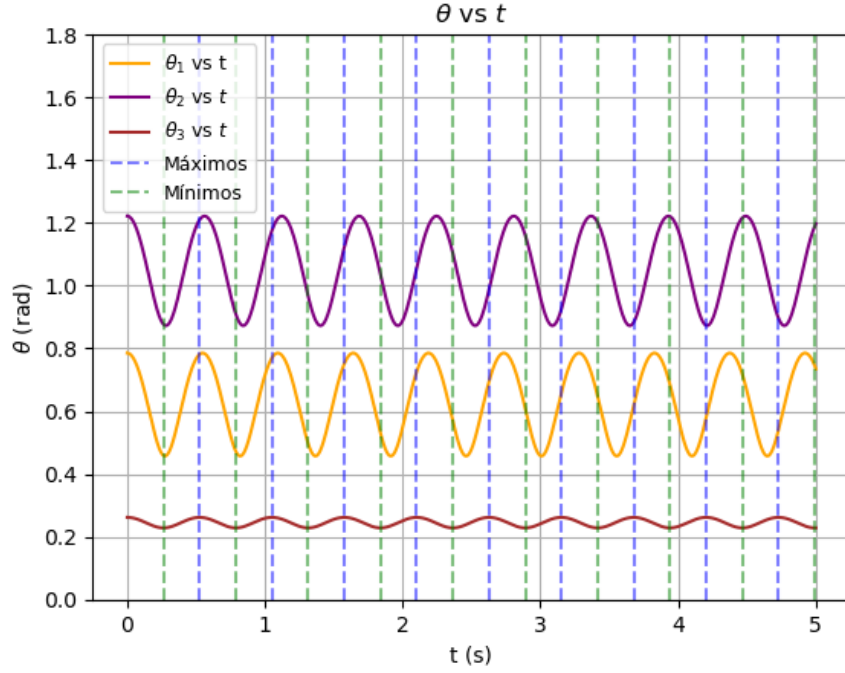


Figura 6.4: Solución de $\theta(t)$ para 2 sistemas de ángulo y variación grande (θ_1 y θ_2) y un sistema con ángulo y variación pequeña (θ_3)

Nota: condiciones iniciales $\theta(0) = \pi/4, 7\pi/18, \pi/12$ y $\dot{\phi}(0) = 4.20 \text{ rad/s}, 7.00 \text{ rad/s}, 5.35 \text{ rad/s}$, con esos valores respectivamente. Se identifica cada curva con el número de caso en el subíndice de θ en la leyenda.

Nótese que al inicio del movimiento, la frecuencia angular es aproximadamente para casos de ángulo grande y pequeño, pero conforme pasa el tiempo, se hace más evidente la diferencia entre el período de los mismos (esto se aborda en la Sección 6.4.). Sin embargo, al ser la frecuencia del sistema con ángulo pequeño una buena aproximación en una fracción del intervalo temporal, se utilizará $\omega = 2\sqrt{g/l}$ para este modelo de ajuste.

Se concluye entonces que se utilizará la frecuencia angular ω como $2\sqrt{g/l}$; por ser un segundo conjunto de modelos, se les llamará a los mismos en este trabajo como $\theta_2(t)$ y $\phi_2(t)$. La forma final de los modelos correspondientes al método del ajuste son:

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.37)$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{\left(\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \cos\left(2\sqrt{\frac{g}{l}}r\right) + \frac{\theta_0 + \theta_f}{2}\right)^2} dr \quad (6.38)$$

6.3. Combinación de las 2 soluciones: tercer modelo analítico

Es válido preguntarse el porqué de combinar las 2 soluciones analíticas planteadas hasta este punto, pero en la sección de resultados se podrá observar que en la mayoría de los experimentos se obtuvieron gráficas θ vs t con amplitudes intercalantes, las cuales en ciertas ocasiones coincidían con las de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$; concretamente, la primera amplitud correspondió a $\theta_2(t)$ y la segunda a $\theta_1(t)$. Un resultado genérico de este tipo se ve de la siguiente manera:

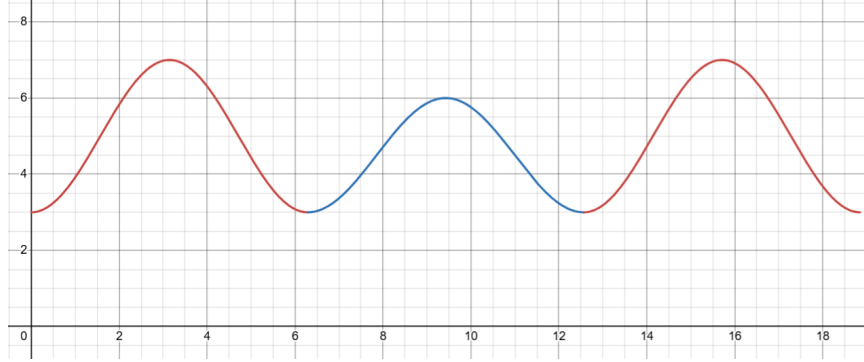


Figura 6.5: Función genérica que combina expresiones de la forma $\alpha \cos \omega t + \beta$ y $\gamma \cos \omega t + \sigma$ en un dominio temporal $[0, 3\tau]$

Nota: la condición de continuidad es $\alpha + \beta = \gamma + \sigma$ (se obtiene al imponer $f_1(t = \tau) = f_2(t = \tau)$), y en este caso se usaron $\alpha = -2$, $\beta = 5$, $\gamma = -3/2$ y $\sigma = 9/2$. Nótese las amplitudes intercalantes.

Una forma de combinar las soluciones es aprovechar su periodicidad mediante una serie de Fourier de una función por partes definida como:

$$f(t) = \begin{cases} \theta_2(t), & \text{si } 0 \leq t < \tau, \\ \theta_1(t), & \text{si } \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases} \quad (6.39)$$

La representación de una función por medio de una serie de Fourier está definida en un intervalo del tipo $[-a, a]$, por lo que se puede redefinir la función para que cumpla con esto aunque no se use la parte negativa del dominio:

$$f(t) = \begin{cases} \theta_2(t), & \text{si } -2\tau \leq t < -\tau, \\ \theta_1(t), & \text{si } -\tau \leq t < 0, \\ \theta_2(t), & \text{si } 0 \leq t < \tau, \\ \theta_1(t), & \text{si } \tau \leq t \leq 2\tau. \end{cases} \quad (6.40)$$

El procedimiento para calcular los coeficientes de la serie de Fourier de esta función puede ser laborioso. Sin embargo, se puede lograr la representación con un intervalo del tipo $[0, a]$ si se utilizan propiedades de paridad. El problema es que la versión par y la impar de la primera $f(t)$ (Ecuación (6.39)) no corresponden a una observación de θ , porque en el primer caso generaría picos consecutivos con amplitudes iguales y en el segundo provocaría un cambio repentino en el signo de la amplitud y podría violar la positiva definición de la coordenada. La deducción a continuación emplea funciones arbitrarias de la forma $\alpha \cos \omega t + \beta$ para que sea general. Regresando al problema de la paridad, si se define la función de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = A \cos \omega t + B, & \text{si } 0 \leq t < \tau/2, \\ f_2(t) = C \cos \omega t + D, & \text{si } \tau/2 \leq t \leq \tau. \end{cases} \quad (6.41)$$

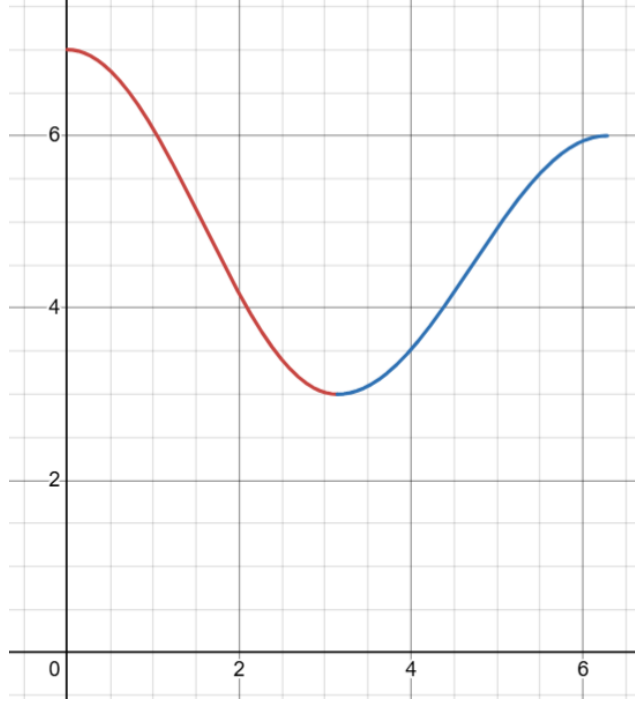


Figura 6.6: Ejemplo de la forma de la función por partes descrita en la Ecuación (6.41)

Nota: se usaron $A = 2$, $B = 5$, $C = 3/2$ y $D = 9/2$; la condición de continuidad es $A - C = B - D$ (se obtiene al imponer $f_1(t = \tau/2) = f_2(t = \tau/2)$), y en este caso se usaron $A = 2$, $B = 5$, $C = 3/2$ y $D = 9/2$.

Al aplicarle un corrimiento de $\tau/2$ a la derecha a su serie de Fourier en cosenos (la que genera su versión periódica par), se obtiene lo deseado; las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ no son necesariamente las de la figura 6.5. Sea la serie de Fourier resultante $S_f(t)$ y $\theta_3(t)$ el tercer modelo analítico para θ , entonces:

$$\theta_3(t) = S_f(t - \tau/2) \quad (6.42)$$

Para empezar el cálculo de $S_f(t)$, se debe recordar la forma general de una serie de Fourier en cosenos de una función $f(t)$ en el intervalo $[0, L]$; Zill y Cullen [20] indican que esta es:

$$S_f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad (6.43)$$

L en este caso es el período τ , entonces:

$$S_f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) \quad (6.44)$$

donde:

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt \quad (6.45)$$

y:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) dt \quad (6.46)$$

Empecemos con a_0 . Al sustituir $f(t)$, se obtiene la siguiente expresión con 2 integrales:

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \left[\int_0^{\tau/2} (A \cos \omega t + B) dt + \int_{\tau/2}^{\tau} (C \cos \omega t + D) dt \right] \quad (6.46a)$$

$$= \frac{2}{\tau} \left[\frac{A}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\tau/2} + Bt \Big|_0^{\tau/2} + \frac{C}{\omega} \sin \omega t \Big|_{\tau/2}^{\tau} + Dt \Big|_{\tau/2}^{\tau} \right] \quad (6.46b)$$

Al evaluar en los límites correspondientes y recordando que $\omega\tau = 2\pi$, se obtiene:

$$a_0 = B + D \quad (6.47)$$

Procediendo con el cálculo de a_n , sustituyendo $f(t)$:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \left[\int_0^{\tau/2} (A \cos \omega t + B) \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt + \int_{\tau/2}^{\tau} (C \cos \omega t + D) \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt \right] \quad (6.48)$$

Operando la primera integral:

$$\int_0^{\tau/2} (A \cos \omega t + B) \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt = A \int_0^{\tau/2} \cos \omega t \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt + B \int_0^{\tau/2} \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt \quad (6.48a)$$

Utilizando la identidad asociada al coseno de una suma y una resta:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \quad (6.49)$$

Se obtiene:

$$= \frac{A}{2} \int_0^{\tau/2} \left(\cos \left(\omega t + \frac{n\pi}{\tau} t \right) + \cos \left(\omega t - \frac{n\pi}{\tau} t \right) \right) dt + \frac{B\tau}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) \Big|_0^{\tau/2} \quad (6.49a)$$

$$= \frac{A}{2} \left(\frac{\tau}{\omega\tau + n\pi} \sin \left(\frac{\omega\tau + n\pi}{\tau} t \right) \Big|_0^{\tau/2} + \frac{\tau}{\omega\tau - n\pi} \sin \left(\frac{\omega\tau - n\pi}{\tau} t \right) \Big|_0^{\tau/2} \right) + \frac{B\tau}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (6.49b)$$

Simplificando utilizando la relación $\omega\tau = 2\pi$ y la identidad:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \quad (6.50)$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{A}{2} \left(-\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n} \right) + \frac{B}{n} \right] \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (6.50a)$$

Nótese que si n es par (excepto $n = 2$ porque se indefine un término), la expresión da como resultado 0. Si n es impar (haciendo la sustitución $n \rightarrow 2n - 1$):

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{A}{2} \left(-\frac{1}{2+2n-1} + \frac{1}{2-2n+1} \right) + \frac{B}{2n-1} \right] \sin \left((2n-1) \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.50b)$$

Simplificando y notando que el seno de un múltiplo impar de π (considerando que $n = 1, 2, \dots$) puede escribirse como $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$:

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{A}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3-2n} \right) - \frac{B}{2n-1} \right] (-1)^n \quad (6.50c)$$

$$= \left(\frac{A(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} + \frac{B}{2n-1} \right) \frac{\tau}{\pi} (-1)^{n+1} \quad (6.51)$$

Con un proceso similar, se opera la segunda integral:

$$\int_{\tau/2}^{\tau} (C \cos \omega t + D) \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt = C \int_{\tau/2}^{\tau} \cos \omega t \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt + D \int_{\tau/2}^{\tau} \cos \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) dt \quad (6.51a)$$

$$= \frac{C}{2} \int_{\tau/2}^{\tau} \left(\cos \left(\omega t + \frac{n\pi}{\tau} t \right) + \cos \left(\omega t - \frac{n\pi}{\tau} t \right) \right) dt + \frac{D\tau}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi t}{\tau} \right) \Big|_{\tau/2}^{\tau} \quad (6.51b)$$

$$= \frac{C}{2} \left(\frac{\tau}{\omega\tau + n\pi} \sin \left(\frac{\omega\tau + n\pi}{\tau} t \right) \Big|_{\tau/2}^{\tau} + \frac{\tau}{\omega\tau - n\pi} \sin \left(\frac{\omega\tau - n\pi}{\tau} t \right) \Big|_{\tau/2}^{\tau} \right) - \frac{D\tau}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (6.51c)$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[-\frac{C}{2} \left(-\frac{1}{2+n} + \frac{1}{2-n} \right) - \frac{D}{n} \right] \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \quad (6.51d)$$

Si n es par (excepto $n = 2$), la expresión es igual a 0; si n es impar ($n \rightarrow 2n - 1$):

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[-\frac{C}{2} \left(-\frac{1}{2+2n-1} + \frac{1}{2-2n+1} \right) - \frac{D}{2n-1} \right] \sin \left((2n-1) \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.51e)$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \left[-\frac{C}{2} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3-2n} \right) - \frac{D}{2n-1} \right] (-1)^{n+1} \quad (6.51f)$$

$$= \left(-\frac{C(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} - \frac{D}{2n-1} \right) \frac{\tau}{\pi} (-1)^{n+1} \quad (6.52)$$

Evaluemos el caso en el que $n = 2$, lo cual corresponde al coeficiente a_2 . Para la primera integral:

$$\int_0^{\tau/2} (A \cos \omega t + B) \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} \right) dt = A \int_0^{\tau/2} \cos \omega t \cos \omega t dt + B \int_0^{\tau/2} \cos \omega t dt \quad (6.52a)$$

$$= A \int_0^{\tau/2} \cos^2 \omega t dt + \frac{B}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\tau/2} = \frac{A}{2} \int_0^{\tau/2} (1 + \cos 2\omega t) dt \quad (4.52b)$$

$$\frac{A}{2} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^{\tau/2} = \frac{A}{4} \tau \quad (6.53)$$

Similarmente con la segunda integral valuada con $n = 2$:

$$\int_{\tau/2}^{\tau} (C \cos \omega t + D) \cos \left(\frac{2\pi t}{\tau} \right) dt = C \int_{\tau/2}^{\tau} \cos \omega t \cos \omega t dt + D \int_{\tau/2}^{\tau} \cos \omega t dt \quad (6.53a)$$

$$= C \int_{\tau/2}^{\tau} \cos^2 \omega t dt + \frac{D}{\omega} \sin \omega t \Big|_{\tau/2}^{\tau} = \frac{C}{2} \int_{\tau/2}^{\tau} (1 + \cos 2\omega t) dt \quad (4.53b)$$

$$\frac{C}{2} \left(t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{\tau/2}^{\tau} = \frac{C}{4} \tau \quad (6.54)$$

Por lo tanto, el coeficiente a_2 , el cual abandona la serie, viene dado por la suma de (6.53) y (6.54) multiplicada por $2/\tau$:

$$a_2 = \frac{2}{\tau} \left(\frac{A}{4} \tau + \frac{C}{4} \tau \right) = \frac{A+C}{2} \quad (6.55)$$

Regresando al generador de coeficientes, a_n , sustituyendo lo calculado en las 2 integrales ((6.51) y (6.52)) en la Ecuación (6.48):

$$a_n = \frac{2}{\tau} \left[\frac{A(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} + \frac{B}{2n-1} - \frac{C(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} - \frac{D}{2n-1} \right] \frac{\tau}{\pi} (-1)^{n+1} \quad (6.55a)$$

$$= \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \left[\frac{(A-C)(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} + \frac{B-D}{2n-1} \right] \quad (6.56)$$

Puesto que se tienen a_0 , a_2 y a_n , se puede proceder a explicitar la serie de Fourier $S_f(t)$:

$$S_f(t) = \frac{B+D}{2} + \frac{A+C}{2} \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \left[\frac{(A-C)(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} + \frac{B-D}{2n-1} \right] \cos \left(\frac{2n-1}{2} \omega t \right) \quad (6.57)$$

Para formar $\theta_3(t)$, se debe realizar un corrimiento temporal de $\tau/2$ a la derecha ($t - \tau/2$); tal procedimiento tiene efecto únicamente en los cosenos de la serie, el resto son constantes independientes del tiempo. Realizando los desplazamientos correspondientes:

$$\cos(\omega(t - \tau/2)) = \cos(\omega t - \pi) = \cos \omega t \cos \pi + \sin \omega t \sin \pi = -\cos \omega t \quad (6.58)$$

$$\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\omega(t - \tau/2)}{2}\right) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\omega t - (2n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.58a)$$

$$= \cos\left(\frac{2n-1}{2}\omega t\right) \cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n-1}{2}\omega t\right) \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (6.58b)$$

Notando que $(2n-1)\pi/2$ representa un múltiplo impar de $\pi/2$, cuya valuación en el coseno es 0 y en el seno puede ser escrita como $(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\omega(t - \tau/2)}{2}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\omega t\right) \quad (6.59)$$

Por lo tanto:

$$\theta_3(t) = S_f(t - \tau/2) = \frac{B+D}{2} - \frac{A+C}{2} \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{(A-C)(2n-1)}{(2n+1)(3-2n)} + \frac{B-D}{2n-1} \right] \sin\left(\frac{2n-1}{2}\omega t\right) \quad (6.60)$$

Queda entonces mostrada la forma de la solución analítica $\theta_3(t)$; sin embargo, quedan pendientes los valores de las constantes A , B , C y D . Dado que se efectuó un corrimiento temporal, también se le debe realizar a las funciones que constituyen $f(t - \tau/2)$. Considerando la Ecuación (6.58), estas funciones, $f_1(t)$ y $f_2(t)$, después del desplazamiento resultan en:

$$f_1(t - \tau/2) = -A \cos \omega t + B \quad (6.61)$$

$$f_2(t - \tau/2) = -C \cos \omega t + D \quad (6.62)$$

Una condición importante que debe cumplirse es que las funciones sean continuas cuando $t = \tau$, el valor temporal donde se hace la transición de funciones, definiendo así una restricción a los modelos que componen a $f(t)$. Para conocerla, simplemente debe imponerse a ambas funciones que sus imágenes sean iguales en $t = \tau$:

$$f_1(t = \tau) = f_2(t = \tau) \Rightarrow -A \cos \omega \tau + B = -C \cos \omega \tau + D \quad (6.62a)$$

$$-A \cos 2\pi + B = -C \cos 2\pi + D \quad \therefore A - C = B - D \quad (6.63)$$

Hay corresponder los resultados de $f_1(t - \tau/2)$ y $f_2(t - \tau/2)$ con las soluciones $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, en cualquier orden, si no se desea perder generalidad. Si se relaciona $\theta_1(t)$ con (6.61) y $\theta_2(t)$ con (6.62), las constantes son:

$$A = -\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) \quad (6.64)$$

$$B = \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \quad (6.65)$$

$$C = -\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \quad (6.66)$$

$$D = \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.67)$$

Si se relaciona $\theta_2(t)$ con (6.61) y $\theta_1(t)$ con (6.62), las constantes son:

$$A = -\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \quad (6.68)$$

$$B = \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.69)$$

$$C = -\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) \quad (6.70)$$

$$D = \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \quad (6.71)$$

Finalmente, se debe verificar el cumplimiento de la condición de continuidad indicada en la Ecuación (6.63) en ambos conjuntos de constantes (cuando se asocia $f_1(t - \tau/2)$ a $\theta_1(t)$ y $f_2(t - \tau/2)$ a $\theta_2(t)$, o al revés). Para el primer caso, se tiene:

$$A - C = -\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) + \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} = \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} + \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} - \theta_0 \quad (6.71a)$$

$$= \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} + \frac{-\theta_0 - \theta_f}{2} = \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} - \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} = B - D \quad \therefore \text{Se cumple la condición} \quad (6.71b)$$

Para el segundo caso:

$$A - C = -\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} + \theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) = -\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} + \theta_0 - \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \quad (6.71c)$$

$$= \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} - \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} = B - D \quad \therefore \text{Se cumple la condición} \quad (6.71d)$$

Naturalmente, $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ cumplen con la condición de continuidad encontrada en la formulación de esta tercera solución, porque ambos modelos cumplen con $\theta_i(0) = \theta_0$, que se puede generalizar a:

$$\theta_i(n\tau) = \theta_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.72)$$

Ya que se verificó que $A - C = B - D$, $\theta_3(t)$ puede expresarse de una forma más simple; se dejó aún en términos de las constantes A , B , C y D por fines de compactación. Las fracciones dentro del corchete en la sumatoria pueden escribirse como:

$$\frac{(A - C)(2n - 1)}{(2n + 1)(3 - 2n)} + \frac{A - C}{2n - 1} = (A - C) \frac{(2n - 1)^2 + (2n + 1)(3 - 2n)}{(2n + 1)(3 - 2n)(2n - 1)} \quad (6.72a)$$

$$= \frac{4(A - C)}{(2n + 1)(3 - 2n)(2n - 1)} \quad (6.73)$$

Sustituyendo en la expresión de $\theta_3(t)$, recordando que la frecuencia angular de los 2 modelos que la conforman es $\omega = 2\sqrt{g/l}$:

$$\theta_3(t) = \frac{B + D}{2} - \frac{A + C}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{A - C}{(2n + 1)(3 - 2n)(2n - 1)} \sin \left((2n - 1) \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (6.74)$$

Considerando la combinación de funciones realizada y que la solución asociada para ϕ ($\phi_3(t)$) viene dada por la misma relación de conservación de momento angular:

$$\phi_3(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{\left[\frac{B+D}{2} - \frac{A+C}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{A-C}{(2n+1)(3-2n)(2n-1)} \sin \left((2n-1) \sqrt{\frac{g}{l}} r \right) \right]^2} dr \quad (6.75)$$

6.4. Transformación de las integrales de energía

El hamiltoniano del péndulo esférico, en términos de las coordenadas espaciales angulares θ y ϕ y sus primeras derivadas temporales, está dado por la Ecuación (4.26):

$$H = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta \quad (4.26)$$

La lógica de la deducción que se emplea a continuación tomó inspiración en el trabajo mostrado en el texto de Thornton y Marion [1] sobre el péndulo plano. Asumiendo que es un sistema conservativo y notando que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, este es igual a la energía E [1], cantidad constante que puede ser determinada por las condiciones iniciales establecidas para todo este estudio. De esta manera, la energía, que es la suma de la cinética y potencial, está dada por:

$$E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2 u_0^2 \sin^2 \theta_0 - mgl \cos \theta_0 \quad (6.76)$$

Con esto en mente, se realiza la igualación $H = E$:

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2 u_0^2 \sin^2 \theta_0 - mgl \cos \theta_0 \quad (6.77)$$

Con el hecho de que la energía es la suma de la cinética T y la potencial V , entonces es correcto que:

$$T = E - V \quad (6.78)$$

$$\frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}ml^2 u_0^2 \sin^2 \theta_0 - mgl \cos \theta_0 + mgl \cos \theta \quad (6.78a)$$

Despejando para $\dot{\theta}^2$:

$$\dot{\theta}^2 = u_0^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0) - \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \quad (6.78b)$$

Con la relación dada por la conservación del momento angular L_z , $\dot{\phi} \sin^2 \theta = u_0 \sin^2 \theta_0$, se puede escribir la expresión para $\dot{\theta}^2$ únicamente en términos de θ :

$$\dot{\theta}^2 = u_0^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0) - u_0^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta} \quad (6.78c)$$

Escribiendo $\dot{\theta}$ como $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = u_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (6.78d)$$

Por lo que la expresión para el diferencial de tiempo dt es:

$$dt = \left(u_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)\right)^{-1/2} d\theta \quad (6.79)$$

Cuando el ángulo θ toma valores de extremo a extremo (de θ_0 a θ_f) antes de oscilar, el tiempo transcurrido es igual a medio período de oscilación, denótese como τ , por lo que se puede integrar la ecuación para obtener este período:

$$\frac{1}{2}\tau = \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(u_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)\right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.79a)$$

$$\therefore \tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(u_0^2 \sin^2 \theta_0 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \right) + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80)$$

El valor absoluto fue colocado por el caso en el que $\theta_0 > \theta_f$ y así siempre obtener un resultado positivo para el período. El integrando puede seguirse trabajando para expresarlo en términos de sus factores (lo cual será conveniente luego en la Sección 6.4.1.).

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80a)$$

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta_0)) + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80b)$$

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} (\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta) + \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80c)$$

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) - \frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} (\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80d)$$

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) - \frac{u_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta} (\cos \theta + \cos \theta_0) (\cos \theta - \cos \theta_0) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80e)$$

$$\tau = 2 \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left(\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0) \left(1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g \sin^2 \theta} (\cos \theta + \cos \theta_0) \right) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80f)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left((\cos \theta - \cos \theta_0) \left(\frac{\sin^2 \theta - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} (\cos \theta + \cos \theta_0)}{\sin^2 \theta} \right) \right)^{-1/2} d\theta \right| \quad (6.80g)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_f} \left((\cos \theta - \cos \theta_0) \left(1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta - \cos^2 \theta \right) \right)^{-1/2} \sin \theta d\theta \right| \quad (6.80h)$$

Sea $v = \cos \theta$:

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_f} \left((v - \cos \theta_0) \left(1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} v - v^2 \right) \right)^{-1/2} dv \right| \quad (6.80i)$$

Nótese que por el valor absoluto el signo negativo del diferencial $dv = -\sin \theta d\theta$ no fue escrito y cambiar el orden de los límites de integración representaría lo mismo que lo que se tiene ahora. Si se completa el cuadrado del polinomio dentro del segundo paréntesis, se tiene:

$$\left(1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \left(\cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{8g} \right) \right) - \left(v + \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} \right)^2 \quad (6.81)$$

Si se denotan:

$$\alpha^2 = 1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \left(\cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{8g} \right) \quad (6.82)$$

$$\beta = \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} \quad (6.83)$$

la expresión para el período de oscilación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta_f} \left((v - \cos \theta_0) \left(1 - \left(\frac{v + \beta}{\alpha} \right)^2 \right) \right)^{-1/2} dv \right| \quad (6.84)$$

Se puede realizar un último cambio de variable tal que $x = v + \beta$, y denotando:

$$\gamma = \cos \theta_0 + \beta \quad (6.85)$$

$$\sigma = \cos \theta_f + \beta \quad (6.86)$$

se obtiene una forma compacta de la integral para el período:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\gamma}^{\sigma} \left((x - \gamma) \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right) \right)^{-1/2} dx \right| \quad (6.87)$$

Se le llamará a esta expresión τ_2 , porque es la segunda ecuación deducida con la que se puede calcular el período de oscilación del ángulo zenital³. Nótese que no se separaron los factores como:

$$(x - \gamma)^{-1/2} \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (6.87a)$$

debido a que hay que ser precavidos en que ambos deben ser mayores a 0, de lo contrario, se evaluarían raíces cuadradas negativas; este es el caso en la mayoría de experimentos. Si ambos factores fueran positivos, el segundo de ellos podría ser expandido en una serie de potencias y resolver para el período como en el trabajo de Thornton y Marion [1] para el péndulo plano, sin embargo, la restricción para que esa aproximación represente un resultado exacto sin un gran número de términos es que la constante, en este caso $k = 1/\alpha$, no sea cercana a 1 (esto es $1/\alpha \ll 1$), y este parámetro en la Ecuación (6.82) regularmente es menor a 1. El período se expresa entonces como una integral que depende de 4 nuevos parámetros constantes definidos en las Ecuaciones (6.82), (6.83), (6.85) y (6.86), para compactar la ecuación lo más posible.

6.4.1. Análisis del integrando

Con un análisis del integrando en la expresión para el período de oscilación de la coordenada θ , se pueden obtener diversas propiedades acerca del péndulo esférico. Considérese la forma factorizada del integrando antes de iniciar con las sustituciones (mostrada en la Ecuación (6.80h)) y sea esta $f(\theta)$:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \left((\cos \theta - \cos \theta_0) \left(1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta - \cos^2 \theta \right) \right)^{-1/2} \sin \theta \quad (6.88)$$

Es trivial, dada la factorización, que $\theta = \theta_0$ es una asíntota vertical de la función (véase primer paréntesis), pero no se conoce el valor de la otra, lo único que se sabe es que debe corresponder a θ_f . Para encontrarla, se iguala a 0 el argumento de la raíz cuadrada del segundo factor:

$$1 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_0 - \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_f - \cos^2 \theta_f = 0 \quad (6.88a)$$

$$\cos^2 \theta_f + \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \cos \theta_f + \left(\frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{2g} - 1 \right) = 0 \quad (6.89)$$

Nótese que es una ecuación cuadrática para $\cos \theta_f$; sea $p = \cos \theta_f$. Entonces se puede utilizar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación, y se obtiene:

$$p = \frac{-\frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{2g} \right)^2 - 4 \left(\frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{2g} - 1 \right)}}{2} \quad (6.89a)$$

³La primera expresión que se dedujo para τ fue la de la Ecuación (6.25), en la que se utiliza la relación que tiene con la frecuencia angular de los modelos analíticos para las coordenadas ($\tau = 2\pi/\omega$).

Recordando la definición de β (Ecuación (6.83)):

$$p = \frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4(2\beta \cos \theta_0 - 1)}}{2} = \pm \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \quad (6.90)$$

Por lo tanto:

$$\theta_f = \cos^{-1}(\pm \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta) \quad (6.91)$$

En la Sección 8.2. hay gráficas de ejemplo de $f(\theta)$, y según la forma de la misma, solo se necesita una asíntota adicional a $\theta = \theta_0$ y esta expresión regresa dos, por lo que solo un signo para la raíz debe ser correcto. Si se evalúa el parámetro β con los valores de u_0 , θ_0 , l y g del cuadro 6.1 y se utiliza para calcular p , este es menor a -1 cuando se emplea el negativo de la raíz, por lo que no se le puede aplicar el coseno inverso al no pertenecer a su dominio y, por lo tanto, no representar un ángulo. Por esta razón, se utiliza el signo positivo de la raíz y la asíntota vertical está entonces dada por:

$$\theta_f = \cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) \quad (6.92)$$

Esta asíntota establece el valor para el ángulo extremo θ_f debido a que establece junto a θ_0 el dominio de la función a integrar para obtener el período de oscilación.

6.4.2. Límite del ángulo extremo diferente del inicial

En la sección anterior se dedujo una expresión para el ángulo θ_f , pero por sí sola no describe hasta dónde puede extenderse. Una forma de abordarlo es con el caso extremo en el que para un θ_0 dado (siempre con la condición $\dot{\theta}(0) = 0$), se busque el límite de θ_f (sea este Θ) si se le imparte una rapidez angular azimutal inicial (u_0) muy grande, lo cual se traduce a $\beta \rightarrow \infty$:

$$\Theta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \theta_f(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) \quad (6.93)$$

Para conocer este límite, se debe conocer el del argumento del coseno inverso:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) \quad (6.94)$$

Si este límite se evalúa directamente, se obtiene $\infty - \infty$, lo cual es indefinido, por lo que se busca llevar la función a una forma indeterminada para luego aplicar la regla de L'Hopital. Entonces, completando el cuadrado del argumento de la raíz:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(\beta - \cos \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} - \beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\sqrt{(\beta - \cos \theta_0)^2 + \sin^2 \theta_0} - (\beta - \cos \theta_0) - \cos \theta_0 \right) \quad (6.94a)$$

Factorizando $\beta - \cos \theta_0$:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} (\beta - \cos \theta_0) \left(\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}} - 1 - \frac{\cos \theta_0}{\beta - \cos \theta_0} \right) \quad (6.94b)$$

Esta expresión de la función es un caso de $(\infty)(0)$, lo cual sigue siendo indefinido, pero se puede llevar a la forma indeterminada $0/0$ si se coloca el primer factor en el denominador, de esta manera:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}} - 1 - \frac{\cos \theta_0}{\beta - \cos \theta_0}}{1/(\beta - \cos \theta_0)} \quad (6.94c)$$

Por lo que ahora se puede utilizar la regla de L'Hopital para calcular el límite:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2 \sin^2 \theta_0 (\beta - \cos \theta_0)^{-3}}{2 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}} + \frac{\cos \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}}{-1/(\beta - \cos \theta_0)^2}}{(\beta - \cos \theta_0)^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\beta - \cos \theta_0)^2} \left(\frac{-\sin^2 \theta_0 (\beta - \cos \theta_0)^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}}} + \cos \theta_0 \right)}{-1/(\beta - \cos \theta_0)^2}}{(\beta - \cos \theta_0)^2}} \quad (6.94d)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin^2 \theta_0 (\beta - \cos \theta_0)^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta_0}{(\beta - \cos \theta_0)^2}}} - \cos \theta_0 \right) = -\cos \theta_0 \quad (6.94e)$$

$$\Rightarrow \Theta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) = \cos^{-1}(-\cos \theta_0) \quad (6.94f)$$

Para ángulos θ_0 en el intervalo abierto $(0, \pi)$, esta expresión se simplifica a:

$$\Theta = \pi - \theta_0 \quad (6.95)$$

Este resultado implica que θ_f está acotado, ya sea superior o inferiormente, por $\pi - \theta_0$ cuando se aplica una rapidez angular azimutal inicial muy grande. Θ sería una cota inferior si $\Theta < \theta_0$, por lo que:

$$\pi - \theta_0 < \theta_0 \Rightarrow \theta_0 > \frac{\pi}{2} \quad (6.96)$$

Similarmente, sería una cota superior si $\Theta > \theta_0$, por lo que:

$$\pi - \theta_0 > \theta_0 \Rightarrow \theta_0 < \frac{\pi}{2} \quad (6.97)$$

Cuando $\theta_f = \theta_0$ con la condición de u_0 muy grande, se trata de un caso especial de péndulo cónico en el que para mantener el ángulo θ constante, se le debe aplicar una rapidez angular azimutal inicial muy grande. Con base en lo recientemente deducido:

$$\pi - \theta_0 = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (6.98)$$

Realmente, la superficie formada no sería un cono, sino un círculo con radio l (el largo de la cuerda), cuya condición de formación es un valor de u_0 tal que $u_0 \rightarrow \infty$, lo cual es algo que se puede intuir y es coherente con la experimentación, pero esta es una forma de demostrarlo matemáticamente.

6.4.3. Separación de casos en función de la rapidez angular azimutal inicial

En secciones anteriores se ha mencionado la frase “signo de la amplitud de oscilación”, haciendo referencia a la relación de desigualdad entre los ángulos extremos θ_0 y θ_f , por lo que es natural preguntarse qué condición o intervalo de valores de determinada cantidad física es la que establece esta correspondencia. Tal condición puede ser determinada si se parte de la Ecuación (6.92); si $\theta_f < \theta_0$:

$$\cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) < \theta_0 \quad (6.99)$$

Considérese como primer acercamiento el intervalo $0 < \theta_0 < \pi/2$; aplicando la función coseno a ambos lados de la desigualdad y recordando que un ángulo menor a otro en este intervalo presenta un mayor valor como imagen del coseno:

$$\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta > \cos \theta_0 \quad (6.99a)$$

$$\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} > \cos \theta_0 + \beta \quad (6.99b)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad (considerando que ambos lados son positivos):

$$\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1 > \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2 \quad (6.99c)$$

$$4\beta \cos \theta_0 < 1 - \cos^2 \theta_0 = \sin^2 \theta_0 \Rightarrow \beta < \frac{1 \sin^2 \theta_0}{4 \cos \theta_0} \quad (6.99d)$$

Recordando la expresión para β (Ecuación (6.83)):

$$u_0^2 < \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.99e)$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos lados (no hay cambio en la desigualdad, pues esta es una función creciente) notando que ambos lados son positivos:

$$u_0 < \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \quad (6.100)$$

Este resultado indica que para que la cota del ángulo θ_f sea inferior (que es equivalente a decir que $\theta_f < \theta_0$), la rapidez angular azimutal inicial u_0 debe cumplir con esta desigualdad.

Si ahora se considera el intervalo $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, al aplicar la función coseno, el cambio en la desigualdad se mantiene, pero al elevar al cuadrado sí sucede esto (si $\beta < -\cos \theta_0$, que es lo común), lo cual lleva al resultado:

$$u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.101)$$

Lo cual siempre es cierto dado que $u_0 \in \mathbb{R}^+$ y el lado derecho de la desigualdad es negativo por el intervalo del ángulo inicial.

Si ahora se desea conocer cuándo $\theta_f > \theta_0$, entonces se tiene que plantear la relación:

$$\cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) > \theta_0 \quad (6.102)$$

Siguiendo el anterior procedimiento, comenzando con el intervalo $0 < \theta_0 < \pi/2$, al aplicar el coseno a ambos lados, habría una inversión en la desigualdad, al elevar al cuadrado no sucedería considerando el intervalo, lo cual conduce a:

$$u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.102a)$$

$$u_0 > \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \quad (6.103)$$

Con el intervalo $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, en la parte de elevar al cuadrado se da una inversión en la desigualdad y se obtiene:

$$u_0^2 < \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (\Rightarrow \Leftarrow) \quad (6.104)$$

Esto es una contradicción porque el lado de la derecha de la desigualdad es negativo y $u_0^2 \in \mathbb{R}^+$ y por tanto no puede ser menor que 0.

Por el momento, se tienen los siguientes enunciados:

- Si $\theta_f < \theta_0$ en el intervalo $0 < \theta_0 < \pi/2$, entonces $u_0 < \sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$.
- Si $\theta_f < \theta_0$ en el intervalo $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, entonces $u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0$. Puesto que $\forall u_0$ se cumple, se puede escribir como: si $\theta_f < \theta_0$ en el intervalo $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, entonces no hay restricción sobre u_0 además de que sea positivo definido ($\forall u_0$).
- Si $\theta_f > \theta_0$ en el intervalo $0 < \theta_0 < \pi/2$, entonces $u_0 > \sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$.
- No existe un valor de u_0 tal que genere el caso $\theta_f > \theta_0 : \pi/2 < \theta_0 < \pi$.

Los primeros 3 enunciados son de implicación, por lo que a continuación se realizarán pruebas en el sentido opuesto para evaluar si pueden ser casos de doble implicación.

Empecemos con:

$$u_0^2 < \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.99e)$$

Esta relación solo puede obtenerse si $0 < \theta_0 < \pi/2$, por lo que:

$$\frac{u_0^2 l}{g} < \sec \theta_0 \rightarrow \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} < \frac{\sec \theta_0 \sin^2 \theta_0}{4} \rightarrow \beta < \frac{1 \sin^2 \theta_0}{4 \cos \theta_0} \quad (6.104a)$$

$$4\beta \cos \theta_0 < \sin^2 \theta_0 = 1 - \cos^2 \theta_0 \rightarrow \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 < 1 \quad (6.104b)$$

$$\rightarrow -2\beta \cos \theta_0 + 1 > \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 \quad (6.104c)$$

Sumando β^2 a ambos lados:

$$\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1 > \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2 = (\cos \theta_0 + \beta)^2 \quad (6.104d)$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos lados:

$$\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} > \cos \theta_0 + \beta \rightarrow \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta > \cos \theta_0 \quad (6.104e)$$

Aplicando coseno inverso y considerando que el lado izquierdo de la desigualdad es el mayor:

$$\cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) < \theta_0 \quad (6.104f)$$

$$\Rightarrow \theta_f < \theta_0 \quad \therefore \text{Si } u_0^2 < \frac{g}{l} \sec \theta_0 : 0 < \theta_0 < \pi/2, \theta_f < \theta_0 \quad (6.105)$$

Ahora, si se analiza:

$$u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.102a)$$

Esta relación puede obtenerse con ambos intervalos de θ_0 ($0 < \theta_0 < \pi/2$ o $\pi/2 < \theta_0 < \pi$).
Prosiguiendo:

$$\frac{u_0^2 l}{g} > \sec \theta_0 \rightarrow \frac{u_0^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} > \frac{\sec \theta_0 \sin^2 \theta_0}{4} \rightarrow \beta > \frac{1 \sin^2 \theta_0}{4 \cos \theta_0} \quad (6.105a)$$

- Si $0 < \theta_0 < \pi/2$:

$$4\beta \cos \theta_0 > \sin^2 \theta_0 = 1 - \cos^2 \theta_0 \rightarrow \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 > 1 \quad (6.105b)$$

$$\rightarrow -2\beta \cos \theta_0 + 1 < \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 \quad (6.105c)$$

$$\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1 < \cos^2 \theta_0 + 2\beta \cos \theta_0 + \beta^2 = (\cos \theta_0 + \beta)^2 \quad (6.105d)$$

$$\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} < \cos \theta_0 + \beta \rightarrow \sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta < \cos \theta_0 \quad (6.105e)$$

Aplicando coseno inverso y considerando que el lado izquierdo de la desigualdad es el menor:

$$\cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) > \theta_0 \quad (6.105f)$$

$$\Rightarrow \theta_f > \theta_0 \quad \therefore \text{Si } u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 : 0 < \theta_0 < \pi/2, \theta_f > \theta_0 \quad (6.106)$$

- Si $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, esta desigualdad siempre se cumple (no hay restricción sobre u_0) y ocurre una inversión en la desigualdad, por lo que:

$$\cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) < \theta_0 \quad (6.106a)$$

$$\Rightarrow \theta_f < \theta_0 \quad \therefore \text{Si } u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 : \pi/2 < \theta_0 < \pi, \theta_f < \theta_0 \quad (6.107)$$

Se obtuvieron entonces propiedades de doble implicación sobre los máximos y mínimos del ángulo zenital y la rapidez angular azimutal inicial:

- Para $0 < \theta_0 < \pi/2$:

- Puesto que $\sec \theta_0 > 0$ en este intervalo:

$$\theta_f < \theta_0 \text{ si y solo si } u_0 < \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \quad \left(\theta_f < \theta_0 \iff u_0 < \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \right) \quad (6.108)$$

- Puesto que $\sec \theta_0 > 0$, la propiedad correspondiente puede escribirse como:

$$\theta_f > \theta_0 \text{ si y solo si } u_0 > \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \quad \left(\theta_f > \theta_0 \iff u_0 > \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \right) \quad (6.109)$$

- Para $\pi/2 < \theta_0 < \pi$:

- Puesto que $\sec \theta_0 < 0$ en este intervalo, esta propiedad no puede escribirse con la raíz de u_0^2 :

$$\theta_f < \theta_0 \text{ si y solo si } u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.109a)$$

En este caso, siempre se cumple esta desigualdad independientemente del valor de u_0 , por lo que se puede escribir como:

$$\theta_f < \theta_0 \iff \forall u_0, u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0 \quad (6.110)$$

Las propiedades previamente mencionadas expresadas de esta forma son muy útiles porque pueden utilizarse como un criterio para predecir el signo de la amplitud de oscilación (la relación entre θ_f y θ_0) en función de u_0 .

Finalmente, considérese ahora el caso especial en el que $\theta_0 = \theta_f$, lo cual es la condición para que el péndulo esférico se convierta en uno cónico. Con el procedimiento expuesto anteriormente⁴, se obtiene que:

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0} \quad (6.111)$$

Con este resultado, se puede establecer que la condición que se tiene que cumplir para que un péndulo esférico con ángulos zenitales no necesariamente pequeños se convierta en uno cónico está relacionada con la rapidez angular azimutal inicial, como se podría esperar, y esta debe ser igual a $\sqrt{\frac{g}{l} \sec \theta_0}$; evidentemente θ_0 tiene que estar en el intervalo $(0, \pi/2)$ para que el argumento de la raíz sea positivo y así pertenezca a \mathbb{R} , lo cual es coherente con la experimentación porque no puede hacerse un péndulo cónico con un ángulo zenital inicial mayor a $\pi/2$ (el caso cuando $\theta_0 = \pi/2$ se discutió en la sección anterior). Este mismo resultado puede obtenerse también con un análisis newtoniano del péndulo cónico, por lo que lo deducido es coherente con lo conocido. Estos resultados son una generalización de lo encontrado en la Sección 6.1.2., porque en ese límite $\sec \theta_0 \approx 1$.

⁴Esto indica que se obtiene haciendo las mismas operaciones pero sustituyendo las desigualdades por una igualdad, lo cual es más sencillo porque no hay que estar atento a las inversiones de desigualdad.

6.5. Propuesta de aporte teórico para el péndulo esférico

Con el desarrollo teórico realizado, se pueden agregar elementos a la lista elaborada en la Sección 4.4.3. Es importante aclarar nuevamente que las deducciones realizadas corresponden a condiciones iniciales fijas, específicamente a $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = u_0$.

- La frecuencia angular del ángulo zenital θ es aproximadamente, con el supuesto de ángulo zenital pequeño y baja variación, $2\sqrt{g/l}$, el doble de la del péndulo simple.
- La solución a las ecuaciones de movimiento con los supuestos de ángulo zenital pequeño y baja variación del mismo está compuesta por las Ecuaciones (6.22) y (6.24):

$$\theta_1(t) = \theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \quad (6.22)$$

$$\phi_1(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{\left[\theta_0 \left(1 - \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right) \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} r \right) + \theta_0 \left(\frac{l}{g} u_0^2 \right)^{1/4} \right]^2} dr \quad (6.24)$$

- Se propuso un modelo de ajuste inspirado en la forma de $\theta_1(t)$ y $\phi_1(t)$, resultando en las Ecuaciones (6.37) y (6.38):

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \quad (6.37)$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{\left[\frac{\theta_0 - \theta_f}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} r \right) + \frac{\theta_0 + \theta_f}{2} \right]^2} dr \quad (6.38)$$

- El modelo para θ que considera amplitudes intercalantes correspondientes a las de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ es una combinación de las mismas en forma de una serie de Fourier (Ecuación (6.74)):

$$\theta_3(t) = \frac{B + D}{2} - \frac{A + C}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{A - C}{(2n + 1)(3 - 2n)(2n - 1)} \sin \left((2n - 1) \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad (6.74)$$

donde A y C son el negativo de las amplitudes de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, y B y D sus constantes libres; el orden de asignación (si A y B reciben los parámetros de $\theta_1(t)$ y C y D de $\theta_2(t)$, o al revés) depende de qué amplitud se requiere que sea la primera en aparecer en la gráfica. El modelo de ϕ correspondiente a amplitudes intercalantes es el de la Ecuación (6.75):

$$\phi_3(t) = \int_0^t \frac{u_0 \theta_0^2}{\left[\frac{B + D}{2} - \frac{A + C}{2} \cos \left(2\sqrt{\frac{g}{l}} r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{A - C}{(2n + 1)(3 - 2n)(2n - 1)} \sin \left((2n - 1) \sqrt{\frac{g}{l}} r \right) \right]^2} dr \quad (6.75)$$

- Una expresión compacta para el período de oscilación exacto (sin aproximaciones) del péndulo esférico con las condiciones iniciales especificadas está dada por la Ecuación (6.87):

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{2l}{g}} \left| \int_{\gamma}^{\sigma} \left[(x - \gamma) \left(1 - \left(\frac{x}{\alpha} \right)^2 \right) \right]^{-1/2} dx \right| \quad (6.87)$$

donde los parámetros α , β , γ y σ se definen en las Ecuaciones (6.82), (6.83), (6.85) y (6.86).

- La expresión para el ángulo extremo θ_f está dada por la Ecuación (6.92):

$$\theta_f = \cos^{-1} \left(\sqrt{\beta^2 - 2\beta \cos \theta_0 + 1} - \beta \right) \quad (6.92)$$

- Si se aplica una rapidez angular azimutal inicial muy grande ($u_0 \rightarrow \infty$), el límite del ángulo extremo θ_f , Θ , está dado por la Ecuación (6.95):

$$\Theta = \pi - \theta_0 \quad (6.95)$$

Si $\Theta < \theta_0$, entonces $\theta_0 > \pi/2$; si $\Theta > \theta_0$, entonces $\theta_0 < \pi/2$. Si $\Theta = \theta_0$, entonces $\theta_0 = \pi/2$, y sería un caso de péndulo cónico en el que para mantener el ángulo constante hay que aplicar un u_0 muy grande; no se formaría un cono, sino un círculo de radio l .

- El criterio para determinar el signo de la amplitud de oscilación de θ , independientemente de si es ángulo pequeño, está dada por el Cuadro 6.3:

Intervalo de θ	$u_0^2 < \frac{g}{l} \sec \theta_0$	$u_0^2 > \frac{g}{l} \sec \theta_0$
$(0, \pi/2)$	Amplitud positiva	Amplitud negativa
$(\pi/2, \pi)$	No puede ocurrir	Siempre amplitud positiva

Cuadro 6.3: Criterios para determinar signo de la amplitud de oscilación de θ

7.1. Diseño experimental

7.1.1. Material y equipo

Se utilizó una computadora laptop marca *Dell*, línea *G3*, con las siguientes especificaciones:

- Procesador *Core i7* de octava generación
- 6 núcleos
- 8.0 GB de memoria *RAM*
- Sistema operativo *Windows 11*
- Instalación de *Anaconda* con *Python 3.12.7*
- Instalación de *Tracker 6*

Para la realización de experimentos, se elaboró un péndulo esférico (véase Figura 14.2 en Anexos Parte B) con los siguientes componentes hechos de fibropanel de densidad media (*MDF*, por su abreviación en inglés) de $(0.4 \pm 5 \times 10^{-2})$ cm de grosor, los cuales fueron segmentados con una cortadora láser en el espacio *DHive* de la Universidad del Valle de Guatemala; las dimensiones de cada pieza fueron determinadas con un metro con una incertidumbre de $\pm 5 \times 10^{-2}$ cm:

- Base inferior de 16.6 cm de ancho por 35.0 cm de largo.
- 4 piezas de 3.1 cm de ancho por 32.2 cm de largo para formar el brazo vertical.
- 2 piezas de 2.7 cm de ancho por 23.0 cm de largo para formar el brazo horizontal.

Tales componentes fueron ensamblados con *Super Bonder*, y los cortes realizados en el brazo vertical con la finalidad de unirlo con el horizontal fueron hechos con un *dremel* (multiherramienta rotativa); para afianzar algunas uniones, se aprovechó la reacción entre el pegamento utilizado y el bicarbonato de sodio, la cual une rápida y fuertemente los objetos involucrados.



Figura 7.1: Multiherramienta rotativa (dremel) utilizada para hacer el corte en el brazo vertical y así colocar el horizontal

Adicionalmente, se utilizaron:

- 1 garfio tipo S
- Impresión en papel de un plano polar con 5 radios utilizados como referencia (véase Figura 7.2); mediciones realizadas con el mismo metro de incertidumbre $\pm 5 \times 10^{-2}$ cm:
 - $R_1 = 1.6$ cm
 - $R_2 = 3.2$ cm
 - $R_3 = 4.7$ cm
 - $R_4 = 6.3$ cm
 - $R_5 = 7.9$ cm

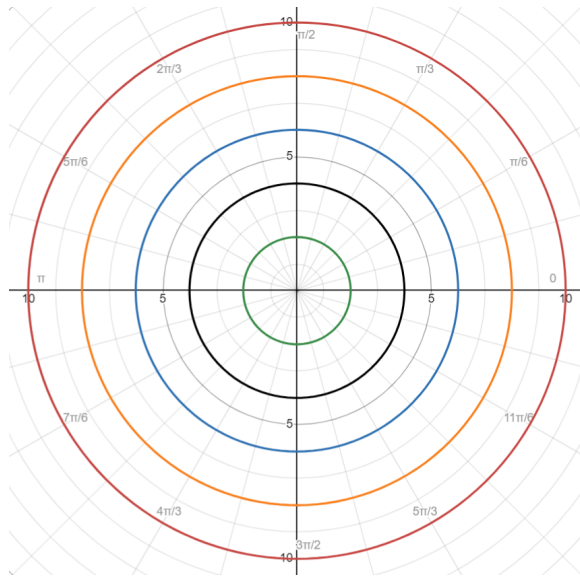


Figura 7.2: Plano polar impreso con 5 radios de referencia

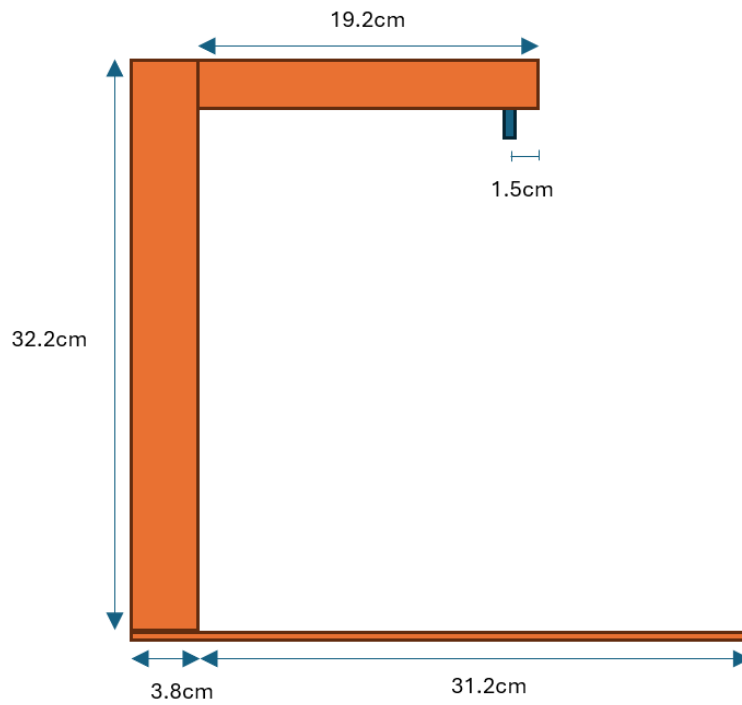


Figura 7.3: Diagrama a escala que muestra la forma en la que se ensamblaron las piezas para armar el sistema del péndulo esférico; el rectángulo más pequeño representa el garfio tipo S

Para la filmación de experimentos se utilizó la cámara de un teléfono celular:

- *iPhone XR* en su modo de grabación a 60 cuadros por segundo.

7.1.2. Segmentación y delimitación de experimentos

En este trabajo se buscó evaluar el desempeño de modelos analíticos e híbridos (elaborados con correcciones realizadas por modelos de *machine learning*) para la evolución temporal de las coordenadas angulares del péndulo esférico, por lo que se hicieron experimentos con diferentes longitudes de cuerda y esferas, concretamente, con 3 conjuntos cuerda-esfera. La esfera fue caracterizada por su masa y diámetro; las longitudes de las cuerdas, l_i ($i = 1, 2, 3$), fueron determinadas con el metro de incertidumbre $\pm 5 \times 10^{-2}$ cm, la masa de las esferas, m_i ($i = 1, 2, 3$), con una balanza analítica marca *OHAUS* de 210 gramos con incertidumbre $\pm 1 \times 10^{-4}$ gramos y el diámetro de las mismas, d_i ($i = 1, 2, 3$), con un vernier con incertidumbre ± 0.02 mm. En este estudio, a cada conjunto cuerda-esfera se le denota *sistema*, y en el Cuadro 7.1 se muestran los valores l_i , m_i y d_i :

Sistema	Longitud de cuerda l_i (m)	Masa m_i (g)	Diámetro d_i (mm)
1	17.1	1.434	14.0
2	18.2	5.384	16.0
3	15.3	5.934	16.4

Cuadro 7.1: Longitudes de cuerda y masas que conforman cada sistema

Para *cada uno* de los sistemas, se grabaron 3 videos, a 60 *fps*, *por radio* en el plano polar, más 1 radio libre, con el objetivo de estudiar la evolución temporal de las coordenadas a partir de las condiciones iniciales establecidas para este estudio; dado que son 5 radios y uno adicional, el total de videos grabados fue $3 \times 3 \times 6 = 54$; en el Cuadro 7.2 se ilustra la distribución de experimentos *para un sistema* cuerda-esfera arbitrario con esta metodología. Para cada uno de los experimentos, se procuró el cumplimiento de las condiciones iniciales establecidas para este estudio: $\theta(0) = \theta_0$ (asociado con el radio polar escogido, de modo que $\theta_0 = \sin^{-1}(R_i/l)$), $\dot{\theta}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = u_0$, que es un valor tal que $u_0 > 0$ rad/s, y que fuera apreciable para que no generara una dinámica aproximada a la de un péndulo simple o plano.

No. video	Radio inicial	Repeticiones
1	R_1	3
2	R_2	3
3	R_3	3
4	R_4	3
5	R_5	3
6	R_L (radio a elección del experimentador)	3

Cuadro 7.2: Distribución de experimentos por cada sistema cuerda-masa. El número de videos indicados en este cuadro es 18, pero este valor corresponde a un sistema, y al ser 3, da un total de 54

7.2. Procedimiento experimental

- 1) Construir un péndulo esférico con las especificaciones descritas anteriormente (en la Sección 7.1.1.).
- 2) Imprimir un plano polar con 5 radios resaltados, como el de la Figura 7.2, y pegarlo en la base del péndulo de tal manera que el centro de masa de la esfera coincida con el origen del plano; para realizar esto se puede utilizar una plomada.
- 3) Grabar 54 videos de la dinámica del péndulo esférico con las condiciones iniciales y los requerimientos mencionados.

-
- I) Colocar el teléfono arriba del péndulo (puede ser sobre una mesa de altura promedio o más baja) y hacer que esté centrada con la masa en reposo o, equivalentemente, con el centro del plano polar. Por la forma en que se decidió grabar los experimentos, se estableció que $\theta_0 < \pi/2$ (véase Nota #2).
 - II) Colocar el dispositivo en modo de grabación a 60 fps. Con una regla metálica de 30 cm, alinear el centro de masa de la esfera con el primer radio marcado en el plano.
 - III) Con un objeto auxiliar (un marcador fue utilizado en este caso), darle un impulso tangencial a la esfera respecto a la circunferencia correspondiente.
 - IV) Grabar hasta que la masa complete aproximadamente 8 revoluciones polares.
 - V) Guardar el video con la siguiente nomenclatura: [nombre del sistema]_[número de radio]_[número de repetición]. Por ejemplo, S2_R4_2.
 - VI) Repetir los pasos del I) al V) hasta tener 3 videos con ese radio inicial.
- 4) Con el software *Tracker*, utilizando como longitud de calibración el diámetro del primer círculo [$3.15 \pm 5 \times 10^{-3}$]cm] y empleando las herramientas de *tape measure* y *protractor*, extraer datos de tiempo¹, radio², ángulo azimutal y su rapidez angular asociada³.
 - 5) Pasar estos datos a un archivo de *Excel*.
 - 6) Con el lenguaje *Python* 3.12.7, elaborar programas en documentos *Jupyter Notebook* (guardado con una nomenclatura similar a la anteriormente descrita: [nombre del sistema]_[número de radio], sin el número de la repetición porque se trabajaron todas las correspondientes a un radio dado en un mismo archivo) que realice lo siguiente para cada conjunto de datos (para cada experimento/video):
 - I) Leer el archivo de *Excel* para pasar los datos a un *Pandas Dataframe*.
 - II) A partir de los datos numéricos del radio, calcular el ángulo zenital correspondiente y crear una columna del mismo (θ).
 - III) Calcular la rapidez azimutal inicial u_0 a partir de un promedio de los 3 primeros máximos (para amplitudes negativas) o mínimos (para amplitudes positivas) en la gráfica ω vs t .
 - IV) Hacer columnas *theta1* y *theta2*, y *phi1* y *phi2* (y en casos especiales⁴, *theta3* y *phi3*), correspondientes a la aplicación de los modelos analíticos⁵ para $\theta(t)$ y $\phi(t)$.
 - V) Graficar el integrando de la Ecuación (6.87) (Ecuación (6.88)), con sus 2 asíntotas y calcular el período de oscilación de θ con los 2 métodos propuestos (con las Ecuaciones (6.25) y (6.87)), determinar el período experimental (asociado a la frecuencia dominante) con una transformada rápida de Fourier y calcular su porcentaje de error.
 - VI) Calcular el ángulo extremo teórico con la Ecuación (6.92) y determinar su porcentaje de error con lo obtenido experimentalmente.
 - VII) Graficar θ vs t , ϕ vs t , y residuos estándar de los modelos vs t .
 - VIII) Calcular métricas de error *MAE*, *MdAE*, *MAPE* y *MdAPE* para los modelos analíticos $\theta_i(t)$ y $\phi_i(t)$.

¹Los videos fueron grabados aproximadamente a 60 fps (la parte entera de los cuadros por segundo de cada metraje se redondea a 60), por lo que la incertidumbre fue de $\pm 1/60$ segundos.

² El diámetro del primer círculo fue medido con un metro con incertidumbre de $\pm 5 \times 10^{-2}$ cm ($\pm 5 \times 10^{-4}$ m), por lo que esta fue también la incertidumbre de las mediciones de radio L .

³Se utilizaron como unidades más pequeñas las del orden de 1×10^{-2} rad y 1×10^{-2} rad/s, para ϕ y $\dot{\phi}$, respectivamente.

⁴Son experimentos en los que las primeras amplitudes consecutivas corresponden a las de $\theta_2(t)$ y $\theta_1(t)$. Se dice que deben ser las primeras porque conforme avanza el tiempo, se pierde energía y ya no se observa la correspondencia.

⁵Se observó que la serie involucrada en los modelos mostrados en las Ecuaciones (6.74) y (6.75) convergía rápido, por lo que para $\theta_3(t)$, se utilizaron 50 términos, y para $\phi_3(t)$, se usaron 20 (menos términos porque para obtener ϕ es necesario hacer un proceso de integración, y se buscó no saturar el uso de recursos de la computadora utilizada).

- IX) La lógica detrás de la corrección es que si los residuos (R) de un modelo son la observación (Y_{real}) menos la predicción (Y_{Modelo}), entonces $Y_{\text{Real}} = Y_{\text{Modelo}} + R$; si los residuos son predichos por un modelo de *machine learning*:

$$Y_{\text{Real/Híbrido}} = Y_{\text{Modelo}} + R_{\text{ML}} \quad (7.1)$$

Por esto, crear columnas *resids1* y *resids2* (en casos especiales, *resids3*) con los residuos de cada solución. Aplicar modelos de *machine learning* (*Random Forest*, *XGBoost* y redes neuronales *feedforward*) para predecir los de θ , y que sean entrenados con el 80 % de estos datos; evaluar predicciones de residuos con el 20 % restante de los datos.

- X) Crear columnas *theta1*[NombreDelModeloAplicado] y *theta2*[NombreDelModeloAplicado] (de ser aplicable, *theta3*[NombreDelModeloAplicado]) que contengan la corrección de los modelos analíticos en *theta1* y *theta2* (si aplica, *theta3*) realizada por los modelos de *machine learning*.
- XI) Crear modelos híbridos para ϕ utilizando las correcciones de θ utilizando la relación integral de la conservación del momento angular. Al no tener una expresión analítica para θ corregida, se calculó la integral correspondiente a estos modelos con los valores numéricos de esta coordenada utilizando la regla de Simpson.
- XII) Evaluar los modelos híbridos con la métrica *MdAPE*⁶ y coeficiente de determinación R^2 para la coordenada θ .
- 7) Repetir los pasos del 3) al 6) para cada radio en el plano polar más uno de libre elección, y para cada conjunto cuerda-esfera.

Notas

Nota 1: para garantizar que la cámara del teléfono estaba alineada con el centro del plano polar, se movió la masa (con la cuerda totalmente estirada) sobre el eje horizontal y luego sobre el vertical, y si la línea descrita por la cuerda coincidía con los ejes correspondientes en la imagen generada por el teléfono, entonces se cumplía esta condición.

Nota 2: el radio L y el ángulo zenital θ están relacionados mediante:

$$\theta = \sin^{-1}(L/l) \quad (7.2)$$

donde l es el largo de la cuerda; si se tratan las incertidumbres como diferenciales:

$$d\theta = \left| \frac{dL - \frac{L}{l} dl}{\sqrt{l^2 - L^2}} \right| \quad (7.3)$$

Puesto que $dL = dl$ (véase el pie de página número 2 de esta sección):

$$d\theta = \left| \frac{1 - L/l}{\sqrt{l^2 - L^2}} \right| dl \quad (7.4)$$

expresión en la que se incluyó el valor absoluto para obtener valores positivos.

Nota 3: al grabar desde un plano paralelo al polar, se da una indistinguibilidad de ángulos superiores a $\pi/2$. Por ejemplo, el ángulo $\pi/3$ es indistinguible de uno de $2\pi/3$ desde esa perspectiva. Por simplicidad, se estableció que $\theta_0 < \pi/2$ porque para realmente distinguir se debe hacer uso de otro parámetro (como una altura z) adicional al radio, y porque al aplicar la función *arcsin* en Excel se obtiene una imagen entre 0 y $\pi/2$.

⁶Se calculó únicamente el *MdAPE* porque es una forma de medir el error que no es sumamente sensible a predicciones atípicas y, por ser porcentual, da una idea apropiada de la magnitud del mismo.

Nota 4: el marcador se deslizó por el riel de la regla de 30 cm hasta llegar a la esfera y proporcionarle la rapidez azimutal inicial necesaria para el inicio de la dinámica del sistema. Se procuró que la regla fuera paralela con el piso para que se cumpliera $\dot{\theta}(0) = 0$.

Nota 5: el radio libre (R_L) debe ser uno tal que se pueda identificar fácilmente en el plano polar para realizar sus 3 experimentos asociados.

Los documentos de Excel con los datos crudos obtenidos con *Tracker* y los documentos en formato *Jupyter Notebook* en los que se encuentra el procesamiento de los mismos junto con todos los resultados, están disponibles como se indica en Anexo A.

8.1. Incerteza en la medición del ángulo zenital

Se muestra a continuación un cuadro con las incertidumbres resultantes de la aplicación de la Ecuación (7.4) para el conjunto de datos de radio (L) de cada experimento.

Incertidumbre de θ ($\times 10^{-5}$ rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
R_2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
R_3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
R_4	3	3	3	3	8	3	3	3	3
R_5	3	3	3	3	3	3	3	3	3
R_L	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Cuadro 8.1: Incertidumbres de θ calculadas para cada experimento

8.2. Aplicación de los modelos teóricos para descripción de las coordenadas, y cálculo de período de oscilación y ángulo zenital extremo

En este apartado se muestran los resultados obtenidos con las soluciones analíticas para $\theta(t)$ y $\phi(t)$ de las Ecuaciones (6.22), (6.24) (a las que les corresponden las curvas en color verde), (6.37) y (6.38) (curvas en color gris). Se incluyen gráficas de 2 radios iniciales (con amplitudes de oscilación negativa

y positiva, respectivamente). Los datos experimentales están representados como puntos celestes. Las líneas punteadas verticales representan múltiplos enteros positivos de los períodos de oscilación teóricos correspondientes a la evaluación de las Ecuaciones (6.25) (líneas punteadas amarillas) y (6.87) (líneas punteadas rojas).

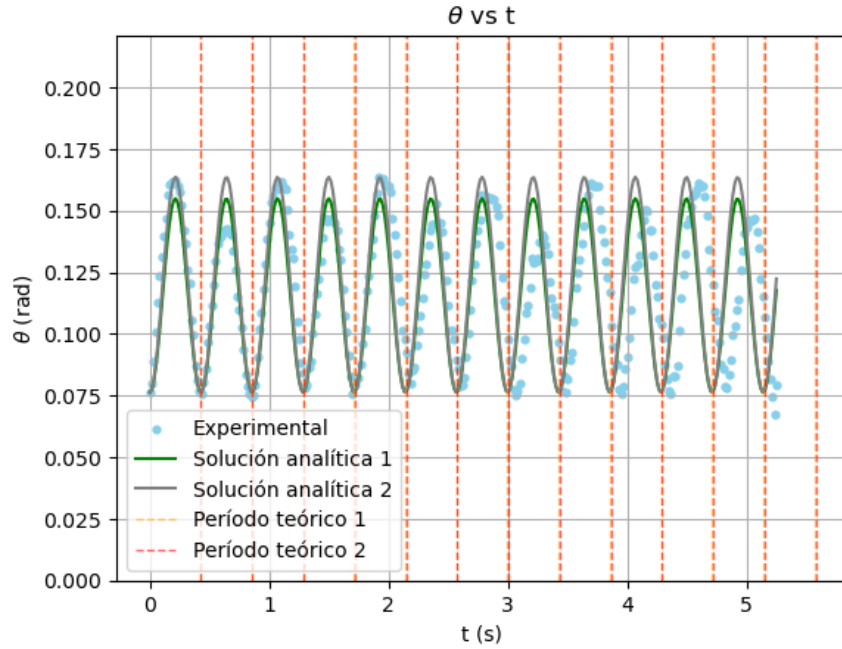


Figura 8.1: Evolución de la coordenada $\theta(t)$ para el sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2

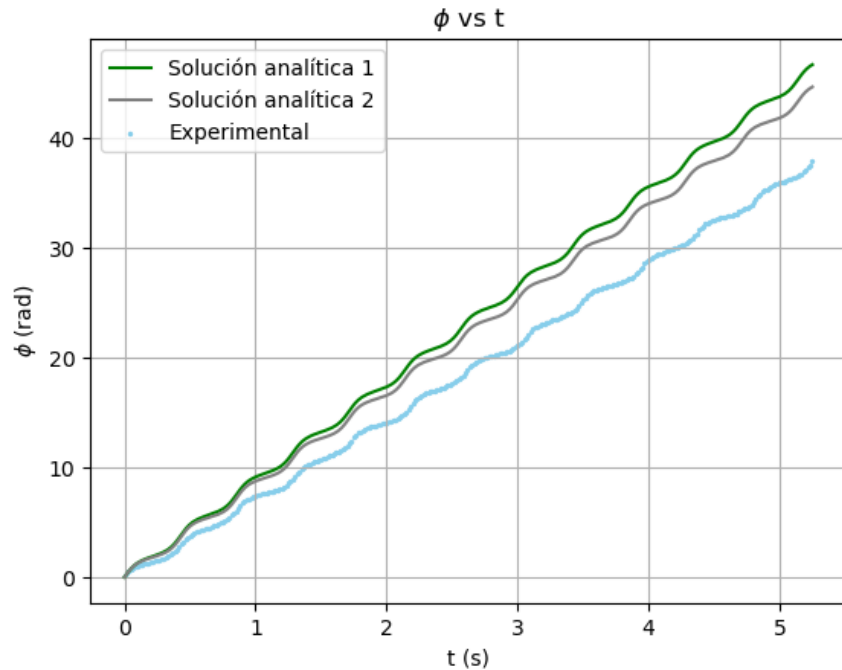


Figura 8.2: Evolución de la coordenada $\phi(t)$ para el sistema 2 con el radio inicial R_1 , repetición 2

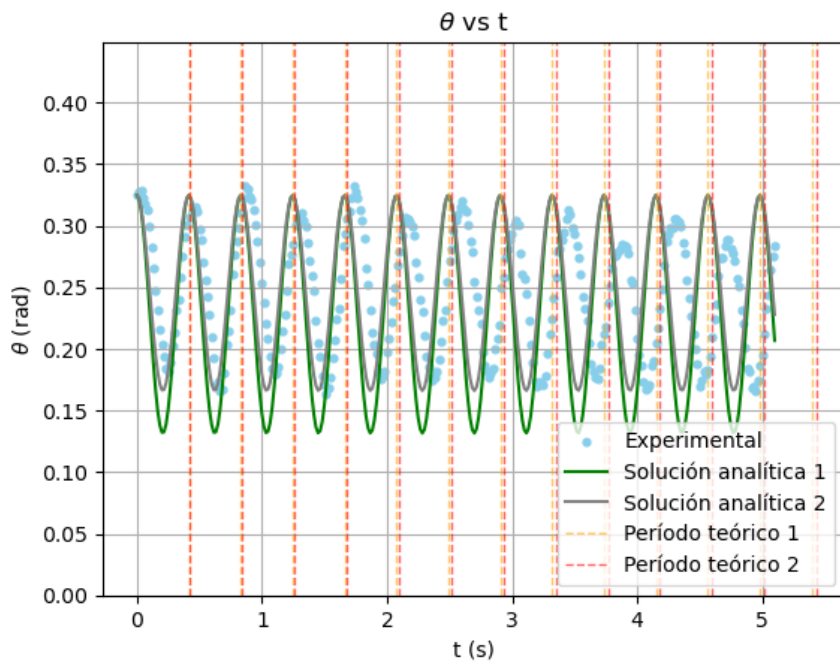


Figura 8.3: Evolución de la coordenada $\theta(t)$ para el sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3

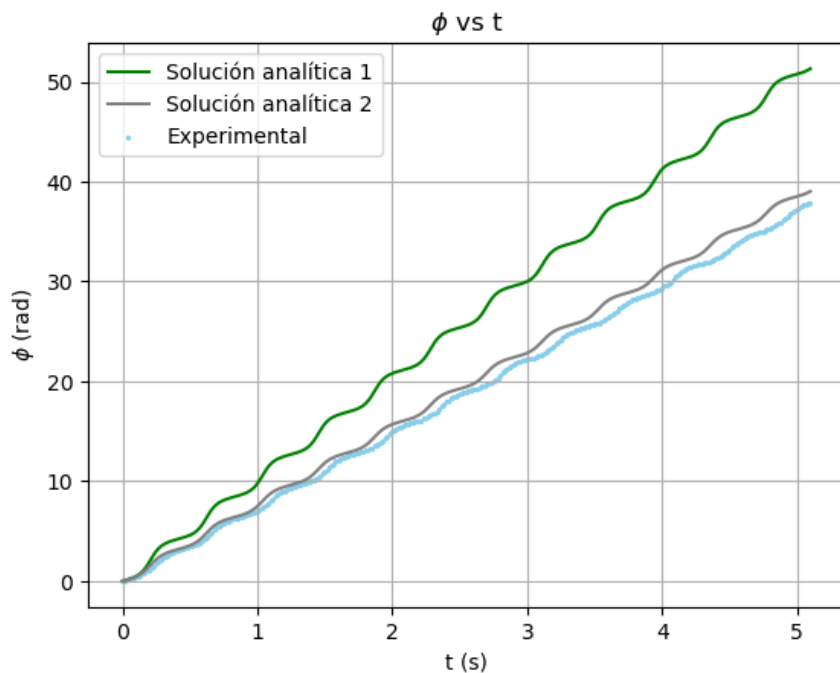


Figura 8.4: Evolución de la coordenada $\phi(t)$ para el sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3

Se muestra ahora un caso en el que las soluciones $\theta_3(t)$ y $\phi_3(t)$ (Ecuaciones (6.74) y (6.75)) fueron aplicables; el tercer conjunto de soluciones analíticas está representado en las gráficas por curvas color corinto.

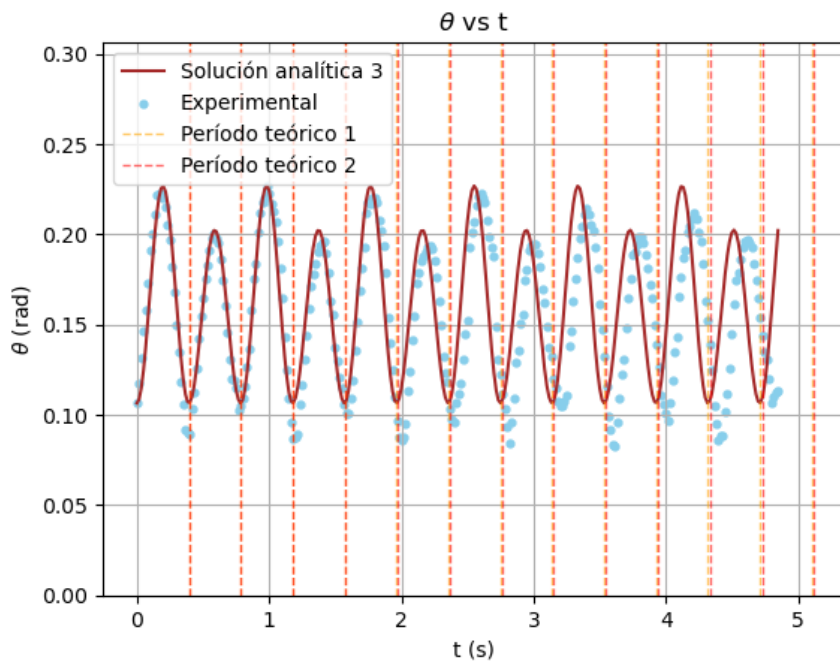


Figura 8.5: Evolución de la coordenada $\theta(t)$ con aplicación de la tercera solución analítica para el sistema 3 con radio inicial R_1 , repetición 2

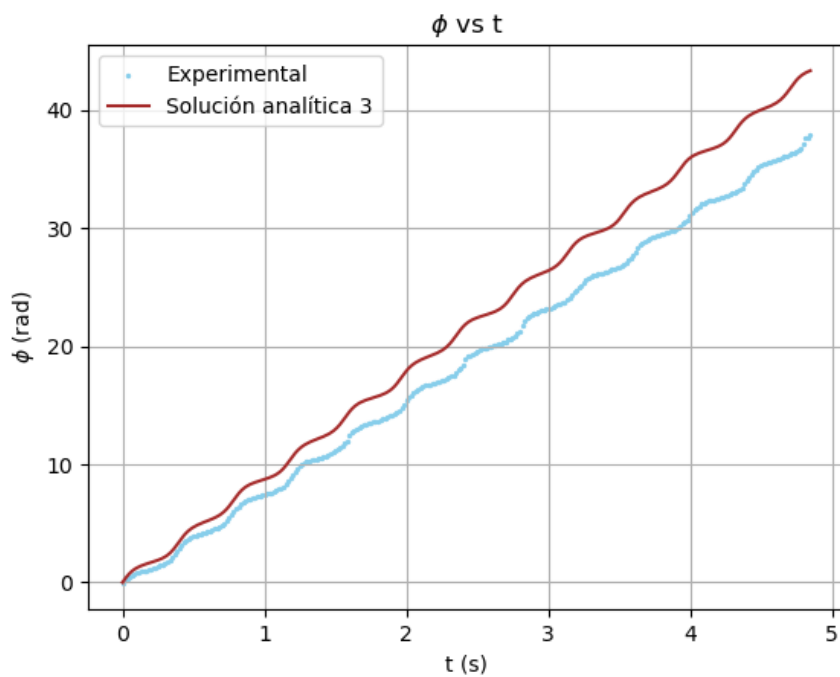


Figura 8.6: Evolución de la coordenada $\phi(t)$ con aplicación de la tercera solución analítica para el sistema 3 con radio inicial R_1 , repetición 2

Del mismo modo, se muestran cuadros con los períodos teóricos obtenidos para los 3 sistemas

con la evaluación de la Ecuación (6.25) y los períodos calculados con la integral de la Ecuación (6.87) para cada experimento realizado; con el propósito de mostrar el tipo de funciones que se están integrando para calcular τ , se adjuntan gráficas de la función $f(\theta)$ (Ecuación (6.88)) con sus dos asíntotas en forma de rectas verticales punteadas de color negro.

Período teórico 1 de θ para cada sistema					
Sistema 1		Sistema 2		Sistema 3	
l (m)	τ_1 (s)	l (m)	τ_1 (s)	l (m)	τ_1 (s)
0.171	0.415	0.182	0.428	0.153	0.393

Cuadro 8.2: Período teórico asociado a la frecuencia angular de las soluciones teóricas

Nota: solo hay un resultado por sistema porque la expresión utilizada para calcularlo solo depende del largo de la cuerda l y la magnitud de la aceleración gravitacional g .

Período teórico τ_2 (s)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.417	0.415	0.416	0.429	0.429	0.430	0.393	0.394	0.393
R_2	0.419	0.422	0.417	0.434	0.429	0.429	0.394	0.399	0.394
R_3	0.418	0.433	0.418	0.433	0.441	0.435	0.404	0.397	0.396
R_4	0.433	0.421	0.421	0.449	0.433	0.440	0.404	0.399	0.408
R_5	0.436	0.423	0.424	0.437	0.436	0.437	0.417	0.404	0.404
R_L	0.417	0.421	0.418	0.441	0.432	0.432	0.404	0.398	0.396

Cuadro 8.3: Resultado de la evaluación de la integral en la Ecuación (6.87) para todos los experimentos realizados

Asimismo, se presentan gráficas de ejemplo de la función $f(\theta)$ (Ecuación (6.88)) correspondientes a los experimentos de las Figuras de la 8.1 a la 8.6, en las que se muestran las asíntotas $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_f$.

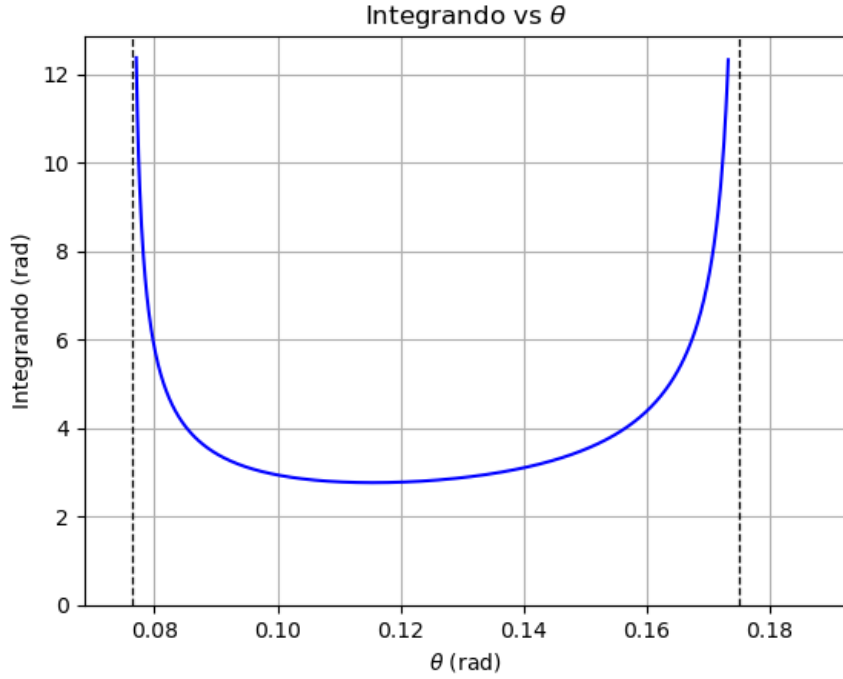


Figura 8.7: Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2. Asíntotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período

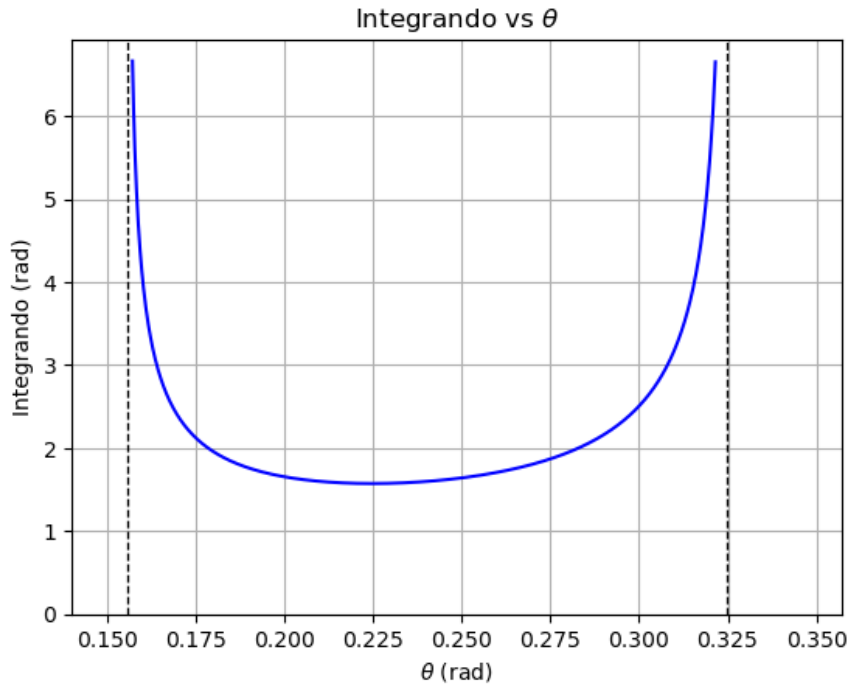


Figura 8.8: Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3. Asíntotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período

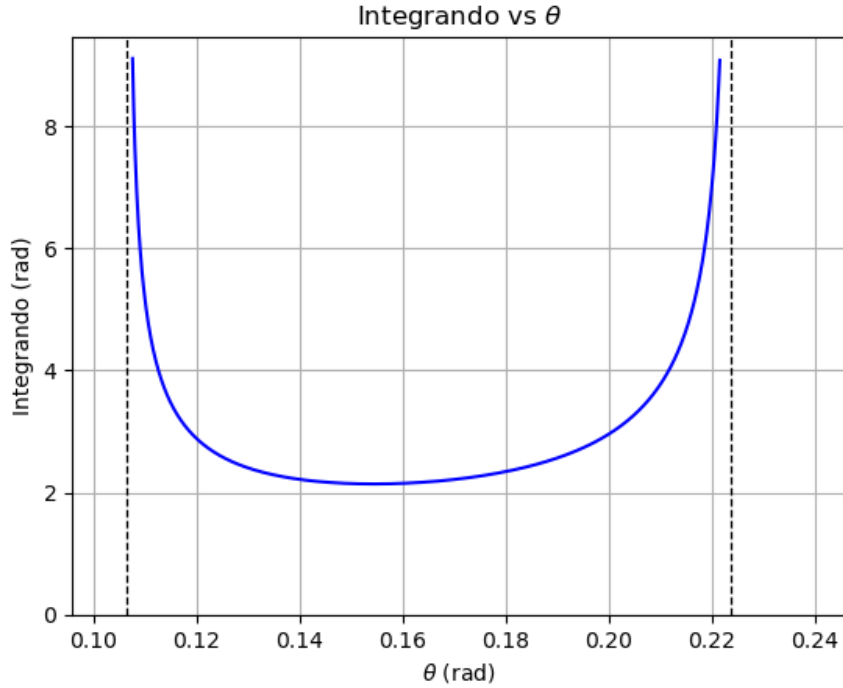


Figura 8.9: Gráfica del integrando para la expresión del período (Ecuación (6.88)), correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2. Asintotas verticales correspondientes a θ_0 y θ_f teórico representan el intervalo de integración para obtener el período

Finalmente para este apartado, se muestran cuadros con la magnitud teórica del ángulo extremo θ_f , con clasificaciones para cada experimento de acuerdo a si fue un caso de ángulo zenital pequeño (por consenso, menor o igual a $\pi/12$ rad) y según la variación del ángulo extremo θ_f medido respecto del inicial (se consideró que variaciones bajas fueron las menores al 40% respecto a θ_0).

Ángulo extremo θ_f teórico (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.256	0.115	0.148	0.135	0.175	0.210	0.0425	0.224	0.153
R_2	0.338	0.487	0.117	0.451	0.106	0.0897	0.141	0.448	0.116
R_3	0.187	0.747	0.156	0.357	0.623	0.425	0.607	0.206	0.196
R_4	0.730	0.201	0.220	0.802	0.172	0.547	0.541	0.205	0.642
R_5	0.771	0.172	0.301	0.210	0.231	0.301	0.861	0.306	0.353
R_L	0.263	0.452	0.320	0.625	0.202	0.225	0.626	0.368	0.148

Cuadro 8.4: Ángulo extremo teórico obtenido como la asíntota vertical diferente de $\theta = \theta_0$ de la función $f(\theta)$ en la Ecuación (6.88) (véase Ecuación (6.92))

Clasificación de experimentos según valor máximo de θ									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	>	\leq	\leq	\leq	\leq	>	\leq	>	\leq
R_2	>	>	>	>	\leq	\leq	>	>	>
R_3	>	>	>	>	>	>	>	>	>
R_4	>	>	>	>	>	>	>	>	>
R_5	>	>	>	>	>	>	>	>	>
R_L	>	>	>	>	>	>	>	>	>

Cuadro 8.5: Clasificación de experimentos en función del valor máximo del ángulo θ . Si el ángulo mayor en la oscilación fue menor o igual a $\pi/12$, entonces le correspondió un \leq , de lo contrario, $>$

Variación de θ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	298	56.0	45.1	34.2	114	128	53.1	113	20.5
R_2	88.1	154	45.0	144	21.5	30.3	17.5	74.4	47.6
R_3	28.3	54.6	48.8	32.7	119	44.3	77.3	36.6	36.7
R_4	46.6	47.7	38.3	137	51.0	22.9	16.9	52.6	16.4
R_5	40.1	71.9	38.1	56.8	52.5	30.6	47.8	50.0	32.4
R_L	49.2	171	53.0	104	33.3	32.1	103	28.7	43.5

Cuadro 8.6: Variación del ángulo zenital θ respecto del ángulo inicial θ_0

Clasificación de experimentos según variación de θ									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	>	>	>	\leq	>	>	>	>	\leq
R_2	>	>	>	>	\leq	\leq	\leq	>	>
R_3	\leq	>	>	\leq	>	>	>	\leq	\leq
R_4	>	>	\leq	>	>	\leq	\leq	>	\leq
R_5	>	>	\leq	>	>	\leq	>	>	\leq
R_L	>	>	>	>	\leq	\leq	>	\leq	>

Cuadro 8.7: Clasificación de experimentos en función de la variación del ángulo θ . Si la variación fue menor al 40%, entonces le correspondió un \leq , de lo contrario, $>$

Experimentos por categoría			
>, >	\leq , >	>, \leq	\leq , \leq
31	4	15	4

Cuadro 8.8: Número de experimentos que pertenecen a las categorías en función del valor del ángulo máximo de la oscilación en θ y su variación

Nota: la primer categoría se refiere a casos de ángulo no pequeño y alta variación, el segundo a los de ángulo pequeño y alta variación, el tercero a los de ángulo no pequeño y baja variación, y el último a los de ángulo pequeño y baja variación.

8.2.1. Error de las soluciones analíticas

A continuación, se presentan los diagramas de residuos estándar¹ correspondientes a las Figuras de la 8.1 a la 8.6, y cuadros con el resultado de las métricas *MAE*, *MdAE*, *MAPE* y *MdAPE*² para todos los experimentos y del coeficiente de determinación³ para los modelos $\theta_i(t)$. Es importante mencionar que los cuadros con algunas celdas nulas (con “-” como entrada, a excepción del Cuadro 8.43) denotan experimentos en los que el tercer conjunto de modelos analíticos no fue aplicable.

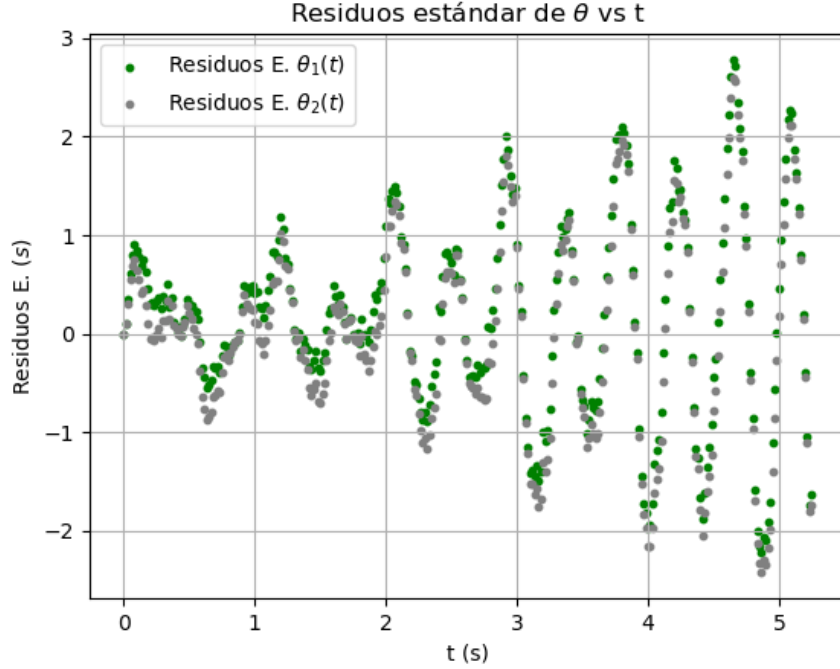


Figura 8.10: Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\theta(t)$ correspondientes al sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2

¹En los gráficos de residuos, una unidad vertical representa una desviación estándar muestral s , razón por la que en el eje vertical aparece “Residuos E. (s)”, donde s representa la unidad de medida.

²Para los modelos analíticos ($\theta_i(t)$, $\phi_i(t)$) se calcularon las 4 métricas, pero se muestran gráficos de barras únicamente de los porcentuales (*MAPE* y *MdAPE*) por fines de compactación.

³El coeficiente de determinación se calculó como:

$$R^2 = 1 - \frac{[\text{suma de residuos al cuadrado}]}{[\text{suma total de cuadrados}]} = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (8.1)$$

de modo que es posible la obtención de valores negativos, lo cual indicaría que el modelo fue tal que haber usado el promedio de los datos hubiera sido mejor ($R^2 = 0$); se puede decir que el modelo fue comparable a uno basado en el resultado aleatorio del lanzamiento de una moneda.

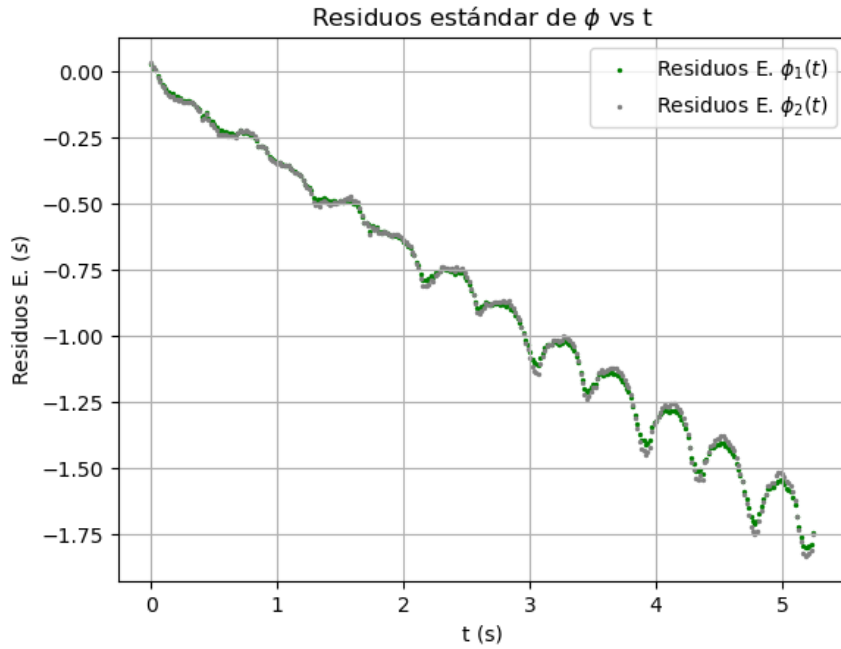


Figura 8.11: Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\phi(t)$ correspondientes al sistema 2 con radio inicial R_1 , repetición 2

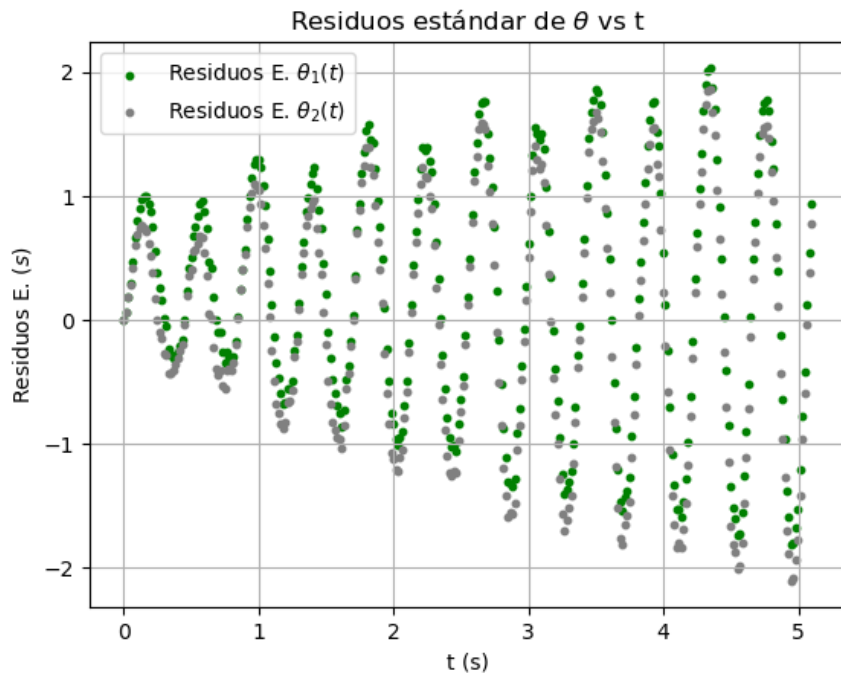


Figura 8.12: Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\theta(t)$ correspondientes al sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3

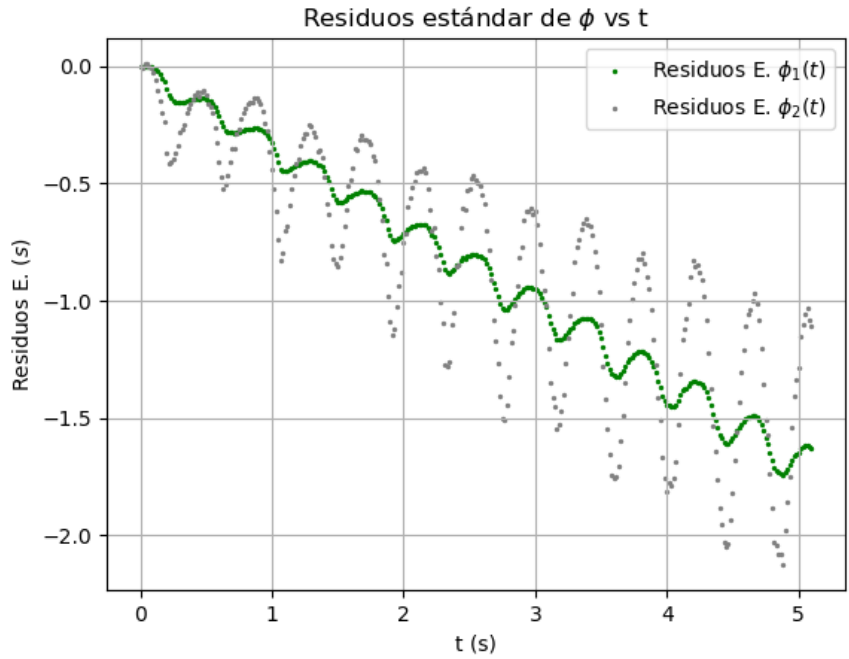


Figura 8.13: Residuos estándar de las soluciones analíticas 1 y 2 para $\phi(t)$ correspondientes al sistema 1 con radio inicial R_3 , repetición 3

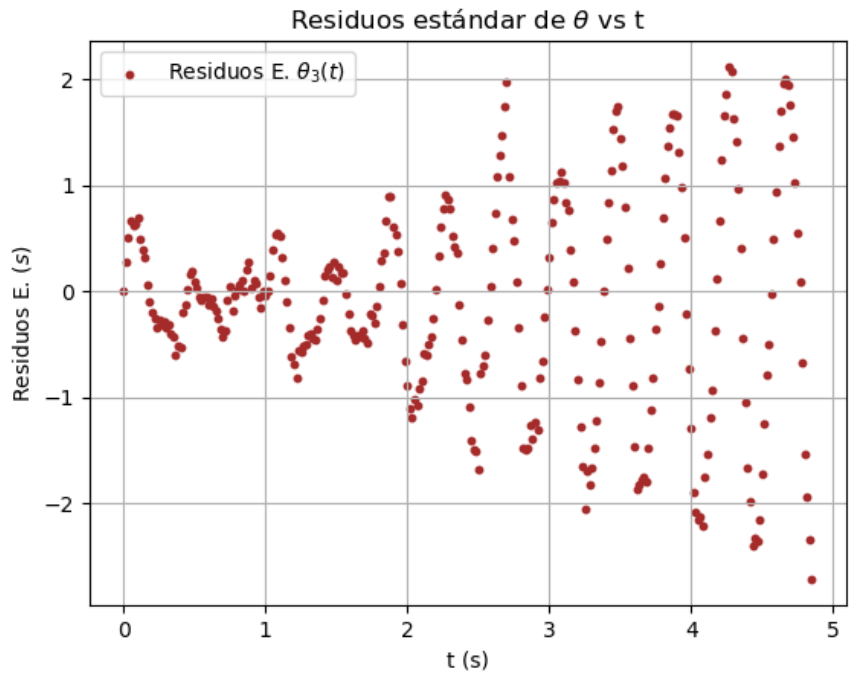


Figura 8.14: Residuos estándar de la solución analítica 3 para $\theta(t)$ correspondiente al sistema 3 con su radio inicial R_1 , repetición 2

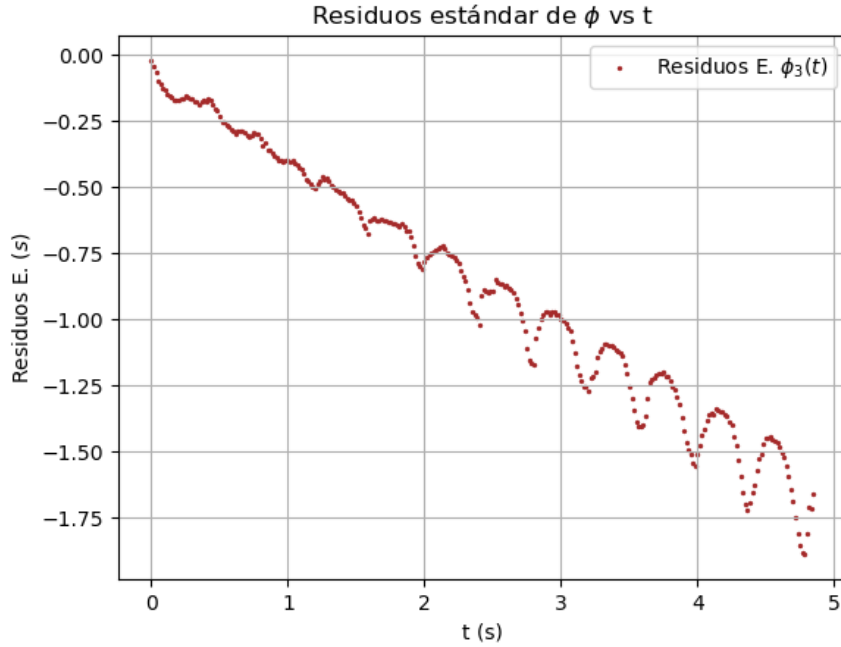


Figura 8.15: Residuos estándar de la solución analítica 3 para $\phi(t)$ correspondiente al sistema 3 con su radio inicial R_1 , repetición 2

<i>MAE</i> de $\theta_1(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.0734	0.0119	0.0185	0.0106	0.0183	0.0267	0.0375	0.0257	0.0195
R_2	0.0578	0.0989	0.0285	0.0836	0.0319	0.0390	0.0303	0.0483	0.0451
R_3	0.0547	0.132	0.0696	0.0343	0.113	0.0478	0.0862	0.0494	0.0526
R_4	0.114	0.0937	0.0684	0.200	0.106	0.0782	0.0514	0.123	0.0998
R_5	0.120	0.155	0.0902	0.137	0.125	0.0793	0.122	0.138	0.0912
R_L	0.0296	0.0766	0.0453	0.127	0.0475	0.0348	0.112	0.0303	0.0802

Cuadro 8.9: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos

<i>MAE</i> de $\phi_1(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	12.6	2.76	3.07	1.09	4.39	4.02	40.1	3.95	1.05
R_2	4.31	4.57	4.40	4.71	3.07	5.35	2.16	2.54	8.09
R_3	2.82	2.99	7.11	1.09	2.94	1.07	2.19	2.86	3.17
R_4	2.04	6.72	3.99	2.78	9.14	1.19	0.346	9.90	0.595
R_5	0.897	29.5	2.26	11.7	7.27	1.86	0.157	4.33	1.52
R_L	2.37	7.25	3.10	2.69	2.30	1.53	3.09	1.13	8.44

Cuadro 8.10: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos

MAE de $\theta_2(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.0747	0.0112	0.0141	0.00955	0.0190	0.0280	0.0283	0.0288	0.0150
R_2	0.0607	0.107	0.0271	0.0856	0.0211	0.0277	0.0165	0.0515	0.0364
R_3	0.0411	0.0929	0.0604	0.0263	0.119	0.0477	0.0924	0.0461	0.0484
R_4	0.0858	0.0832	0.0592	0.227	0.0935	0.0435	0.0373	0.106	0.0605
R_5	0.103	0.144	0.0859	0.122	0.115	0.0690	0.129	0.135	0.0855
R_L	0.0252	0.0806	0.0299	0.137	0.0436	0.0345	0.118	0.0298	0.0643

Cuadro 8.11: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos

MAE de $\phi_2(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	4.07	3.14	5.07	1.46	3.37	1.69	3.80	1.90	2.30
R_2	3.40	0.744	1.60	2.03	3.80	3.80	3.47	1.97	0.340
R_3	2.28	5.89	0.846	2.21	1.46	1.08	1.15	0.163	0.242
R_4	4.01	0.460	0.885	0.800	0.613	4.23	1.43	0.746	3.25
R_5	1.86	10.6	0.857	1.81	2.14	0.791	0.493	3.10	0.174
R_L	3.26	4.77	5.75	0.590	0.180	0.921	1.19	1.19	1.91

Cuadro 8.12: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos

MAE de $\theta_3(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	0.0179	0.0254	0.0317	0.0251	-
R_2	0.0590	-	0.0269	-	0.0251	0.0320	-	0.0494	0.0395
R_3	-	-	-	-	-	-	0.0879	0.0464	0.0494
R_4	-	0.0879	0.0628	-	0.0996	-	-	-	-
R_5	-	0.150	0.0880	0.129	0.119	-	0.125	-	0.0879
R_L	-	-	-	-	0.0451	-	0.113	-	0.0710

Cuadro 8.13: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable

MAE de $\phi_3(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	3.84	2.76	16.4	2.85	-
R_2	3.82	-	2.89	-	0.642	0.523	-	2.23	3.56
R_3	-	-	-	-	-	-	1.62	1.36	1.35
R_4	-	3.34	1.37	-	4.53	-	-	-	-
R_5	-	19.3	1.50	6.34	4.49	-	0.269	-	0.736
R_L	-	-	-	-	1.12	-	2.06	-	2.88

Cuadro 8.14: Métrica *MAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable

MdAE de $\theta_1(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.0701	0.0101	0.0173	0.00886	0.0133	0.0226	0.0369	0.0220	0.0157
R_2	0.0499	0.0895	0.0226	0.0703	0.0302	0.0356	0.0285	0.0387	0.0412
R_3	0.0550	0.114	0.0690	0.0273	0.0990	0.0412	0.0675	0.0412	0.0448
R_4	0.0887	0.0868	0.0620	0.181	0.104	0.0764	0.0450	0.117	0.102
R_5	0.0846	0.139	0.0869	0.125	0.116	0.0765	0.103	0.128	0.0886
R_L	0.0247	0.0653	0.0384	0.113	0.0428	0.0276	0.0945	0.0281	0.0738

Cuadro 8.15: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos

MdAE de $\phi_1(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	12.6	2.88	3.06	1.08	4.45	4.06	39.3	3.97	1.07
R_2	4.26	4.49	4.19	4.67	3.00	5.29	2.15	2.53	7.86
R_3	2.78	3.00	6.96	1.10	2.92	1.05	2.15	2.81	3.10
R_4	2.00	6.64	3.93	2.70	9.00	1.20	0.334	9.72	0.577
R_5	0.826	28.9	2.25	11.5	7.11	1.84	0.145	4.28	1.48
R_L	2.38	7.27	3.14	2.68	2.31	1.48	3.03	1.09	8.32

Cuadro 8.16: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos

<i>MdAE</i> de $\theta_2(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.0626	0.00919	0.0124	0.00782	0.0152	0.0237	0.0263	0.0230	0.0109
R_2	0.0525	0.0875	0.0217	0.0709	0.0193	0.0278	0.0150	0.0405	0.0313
R_3	0.0407	0.0771	0.0556	0.0204	0.101	0.0411	0.0714	0.0381	0.0409
R_4	0.0683	0.0763	0.0514	0.213	0.0876	0.0377	0.0314	0.0959	0.0571
R_5	0.0693	0.131	0.0825	0.113	0.107	0.0671	0.111	0.122	0.0808
R_L	0.0200	0.0627	0.0252	0.121	0.0385	0.0273	0.0912	0.0274	0.0585

Cuadro 8.17: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos

<i>MdAE</i> de $\phi_2(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	3.97	3.26	5.05	1.44	3.38	1.63	3.78	1.89	2.22
R_2	3.36	0.509	1.60	1.99	3.94	3.87	3.51	1.94	0.216
R_3	2.29	5.95	0.794	2.30	1.39	1.07	1.07	0.106	0.155
R_4	4.07	0.335	0.852	0.731	0.473	4.23	1.43	0.616	3.21
R_5	1.82	10.4	0.800	1.74	2.08	0.761	0.472	3.05	0.145
R_L	3.28	4.69	5.79	0.415	0.135	0.911	1.08	1.14	1.83

Cuadro 8.18: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos

<i>MdAE</i> de $\theta_3(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	0.0134	0.0202	0.0310	0.0181	-
R_2	0.0501	-	0.0202	-	0.0231	0.0311	-	0.0389	0.0329
R_3	-	-	-	-	-	-	0.0686	0.0384	0.0421
R_4	-	0.0832	0.0565	-	0.0942	-	-	-	-
R_5	-	0.132	0.0835	0.117	0.107	-	0.111	-	0.0841
R_L	-	-	-	-	0.0395	-	0.0895	-	0.0661

Cuadro 8.19: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable

<i>MdAE</i> de $\phi_3(t)$ (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	3.88	2.75	17.3	2.86	-
R_2	3.77	-	2.84	-	0.623	0.451	-	2.21	3.57
R_3	-	-	-	-	-	-	1.59	1.31	1.28
R_4	-	3.28	1.31	-	4.51	-	-	-	-
R_5	-	19.6	1.45	6.50	4.54	-	0.211	-	0.688
R_L	-	-	-	-	1.10	-	2.03	-	2.82

Cuadro 8.20: Métrica *MdAE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable

<i>MAPE</i> de $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	44.0	15.8	19.7	10.4	15.8	18.0	44.7	18.0	17.9
R_2	29.2	29.7	19.3	26.9	20.6	27.3	15.4	16.2	25.4
R_3	20.8	34.8	29.5	13.0	27.2	14.8	20.0	19.3	21.2
R_4	25.9	32.4	23.0	33.4	40.4	20.8	11.5	36.9	21.2
R_5	23.7	57.8	23.4	40.4	35.9	19.8	16.8	33.0	19.7
R_L	17.3	30.5	24.8	28.5	18.8	13.4	25.3	10.5	34.0

Cuadro 8.21: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos

<i>MAPE</i> de $\phi_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	49.5	14.9	18.9	6.34	24.4	21.3	216	25.2	8.05
R_2	18.2	26.7	23.4	26.4	17.7	30.2	12.4	16.0	42.8
R_3	15.8	21.0	38.3	6.78	20.4	6.10	13.7	15.4	17.6
R_4	75.7	36.2	21.3	16.0	51.7	9.70	3.52	52.5	5.72
R_5	7.02	156	12.6	60.4	39.1	10.6	1.82	23.2	8.50
R_L	22.1	61.4	20.5	15.5	13.1	8.37	18.6	17.3	45.6

Cuadro 8.22: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos

<i>MAPE</i> de $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	53.4	15.0	15.4	9.43	16.7	19.8	38.2	20.7	13.9
R_2	30.9	35.3	18.9	29.5	14.4	20.7	8.57	17.3	21.1
R_3	16.2	25.5	26.3	10.2	29.9	14.8	21.8	18.6	20.2
R_4	20.0	29.8	20.6	41.5	37.1	12.1	8.43	33.3	13.3
R_5	20.6	55.9	22.5	37.3	33.9	17.6	17.9	32.6	18.7
R_L	14.9	33.8	17.0	32.2	17.6	13.4	27.9	10.4	28.9

Cuadro 8.23: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos

<i>MAPE</i> de $\phi_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	16.0	16.6	27.0	8.26	19.0	9.21	20.1	14.2	14.7
R_2	14.6	6.49	9.09	12.3	19.8	19.6	18.1	13.0	2.65
R_3	12.5	36.5	5.67	12.6	10.9	6.20	8.24	1.37	2.04
R_4	86.3	3.59	4.84	4.59	6.17	25.8	9.20	4.80	19.6
R_5	12.1	57.9	5.35	10.3	12.4	4.46	3.10	16.8	1.55
R_L	26.9	47.3	34.7	4.47	2.04	5.23	8.65	17.7	9.94

Cuadro 8.24: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos

<i>MAPE</i> de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	15.7	17.7	39.6	18.2	-
R_2	29.9	-	18.4	-	16.5	22.9	-	16.6	22.5
R_3	-	-	-	-	-	-	20.6	18.4	20.2
R_4	-	30.9	21.5	-	38.6	-	-	-	-
R_5	-	56.6	22.9	38.7	34.8	-	17.3	-	19.1
R_L	-	-	-	-	18.0	-	26.1	-	30.8

Cuadro 8.25: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable

<i>MAPE</i> de $\phi_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	21.2	14.2	80.1	18.7	-
R_2	16.2	-	15.0	-	4.90	4.25	-	14.3	17.6
R_3	-	-	-	-	-	-	10.5	6.94	7.25
R_4	-	17.1	6.97	-	24.8	-	-	-	-
R_5	-	98.6	8.35	31.2	23.4	-	2.10	-	4.10
R_L	-	-	-	-	6.44	-	12.7	-	14.6

Cuadro 8.26: Métrica *MAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable

<i>MdAPE</i> de $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	37.1	11.5	16.5	8.37	11.8	14.8	45.7	14.2	13.2
R_2	22.1	23.3	14.4	22.2	20.7	26.5	14.7	11.8	22.8
R_3	20.5	26.8	28.7	9.91	22.2	12.1	14.3	14.6	16.6
R_4	18.2	29.1	20.8	29.6	37.2	19.5	9.48	33.0	20.9
R_5	14.2	45.1	21.3	35.7	32.0	18.8	13.5	26.2	18.5
R_L	13.4	23.5	20.2	24.2	16.6	9.80	18.6	9.05	32.6

Cuadro 8.27: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.22) para todos los experimentos

<i>MdAPE</i> de $\phi_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	48.6	12.7	12.5	5.80	23.3	20.7	213	21.6	5.65
R_2	17.4	24.8	22.7	25.1	16.5	28.4	11.5	13.8	42.1
R_3	14.8	16.4	37.3	5.96	19.0	5.66	12.1	15.0	16.9
R_4	11.3	35.3	20.7	15.2	48.8	6.44	1.94	52.0	3.11
R_5	5.09	154	11.8	60.0	38.2	9.80	0.895	22.5	7.97
R_L	12.9	40.1	16.8	14.5	12.3	7.93	16.9	6.11	44.5

Cuadro 8.28: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.24) para todos los experimentos

<i>MdAPE</i> de $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	37.5	11.2	12.0	7.55	12.7	15.7	28.3	14.6	9.68
R_2	22.5	25.6	13.3	23.0	11.9	19.3	7.59	12.7	16.7
R_3	14.9	17.1	23.4	7.27	22.2	12.0	15.9	14.1	15.6
R_4	13.6	24.0	16.2	31.8	31.2	9.91	7.03	27.1	11.8
R_5	12.4	40.7	20.3	30.4	27.8	16.3	14.6	26.0	15.9
R_L	11.5	23.1	13.6	24.6	14.3	10.1	20.6	9.03	24.1

Cuadro 8.29: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.37) para todos los experimentos

<i>MdAPE</i> de $\phi_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	14.8	14.4	20.5	7.77	18.0	8.35	20.7	10.6	12.3
R_2	13.9	4.66	8.32	11.0	20.3	20.2	18.4	10.8	1.99
R_3	12.1	31.5	4.40	11.9	9.35	5.76	6.62	0.802	1.48
R_4	21.6	2.38	4.79	4.20	3.36	22.5	7.66	3.68	17.2
R_5	10.2	55.4	4.45	8.79	11.1	4.19	2.47	16.1	0.927
R_L	17.6	26.7	30.8	3.27	0.872	4.79	6.98	6.42	10.2

Cuadro 8.30: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.38) para todos los experimentos

<i>MdAPE</i> de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	12.1	13.4	34.5	12.5	-
R_2	22.2	-	12.9	-	14.8	22.0	-	12.3	18.6
R_3	-	-	-	-	-	-	14.4	13.6	15.9
R_4	-	26.9	17.6	-	33.8	-	-	-	-
R_5	-	43.0	20.7	33.0	29.6	-	13.5	-	16.5
R_L	-	-	-	-	15.6	-	19.5	-	26.8

Cuadro 8.31: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para θ expresada en la Ecuación (6.74) para los experimentos a los que fue aplicable

<i>MdAPE</i> de $\phi_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	20.4	13.8	91.3	15.7	-
R_2	15.4	-	14.6	-	3.38	2.75	-	12.2	18.7
R_3	-	-	-	-	-	-	9.15	6.72	6.90
R_4	-	17.3	6.90	-	24.3	-	-	-	-
R_5	-	101.7	7.76	32.8	23.2	-	1.41	-	3.70
R_L	-	-	-	-	5.82	-	11.4	-	15.0

Cuadro 8.32: Métrica *MdAPE* correspondiente a la solución analítica para ϕ expresada en la Ecuación (6.75) para los experimentos a los que fue aplicable

Coeficiente de determinación R^2 para $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	23.9	56.4	-19.1	19.1	87.2	77.2	-42.7	85.6	-430
R_2	65.8	61.1	88.4	65.3	-135	-134	-283	86.7	47.4
R_3	-124	-33.1	-4.99	15.6	70.3	57.8	86.5	82.5	62.2
R_4	7.06	18.6	45.5	33.7	-20.1	-172	-135	28.6	-329
R_5	14.5	42.3	-5.53	29.8	30.0	-15.8	62.4	61.0	45.3
R_L	24.7	79.6	-18.2	57.9	40.8	80.4	76.8	1.56	-14.3

Cuadro 8.33: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_1(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento

Coeficiente de determinación R^2 para $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	74.5	62.4	31.3	35.5	87.6	86.7	38.3	83.6	-241
R_2	60.9	84.7	88.5	83.7	14.0	-5.67	27.9	82.9	76.8
R_3	-1.92	38.4	35.3	63.2	77.7	58.1	85.7	80.3	64.1
R_4	57.7	41.9	63.1	51.8	14.7	7.81	-21.0	56.2	-77.5
R_5	48.7	55.3	4.90	51.2	44.5	15.4	56.3	62.0	51.2
R_L	49.0	89.9	53.5	67.6	50.2	78.4	84.5	3.95	39.5

Cuadro 8.34: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_2(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento

Coeficiente de determinación R^2 de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	91.5	90.9	13.6	93.1	-
R_2	64.8	-	91.6	-	-34.0	-42.9	-	86.7	69.0
R_3	-	-	-	-	-	-	89.0	86.4	70.1
R_4	-	32.7	60.2	-	-0.253	-	-	-	-
R_5	-	49.0	0.0543	42.0	38.1	-	62.2	-	49.8
R_L	-	-	-	-	50.7	-	85.1	-	20.6

Cuadro 8.35: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos $\theta_3(t)$ en 1/3 de los datos de cada experimento

R^2 de $\theta_1(t)$ superior a 65 % por categoría (%)			
>, >	\leq , >	>, \leq	\leq , \leq
32.3	25	13.3	0

Cuadro 8.36: Porcentaje de experimentos de cada categoría (véase Cuadro 8.8) en los que el coeficiente de determinación R^2 de la solución analítica $\theta_1(t)$ fue superior a 65 %

A continuación, se muestran gráficos de barras comparativos de las métricas porcentuales ($MAPE$ y $MdAPE$) y del R^2 que resumen el desempeño de los modelos en todos los experimentos; están ordenados por solución, sistema y radio inicial.

MAPE y MdAPE de las soluciones teóricas de $\theta(t)$ de todos los experimentos

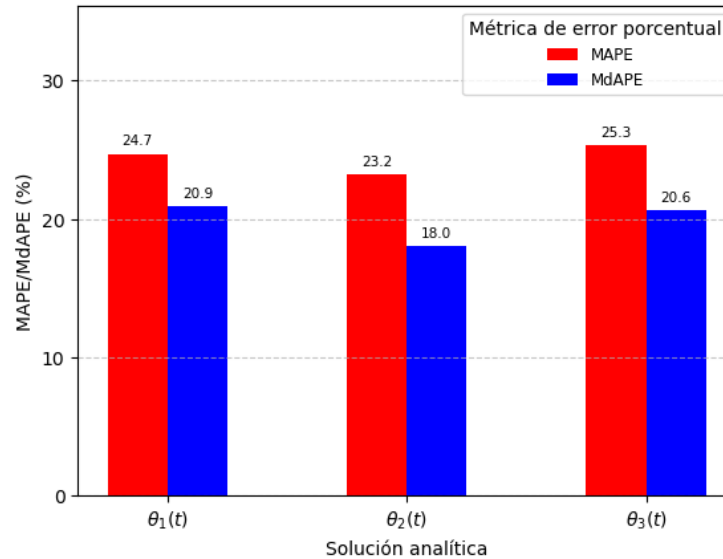


Figura 8.16: Resultados de las métricas de error porcentual $MAPE$ y $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\theta(t)$. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central

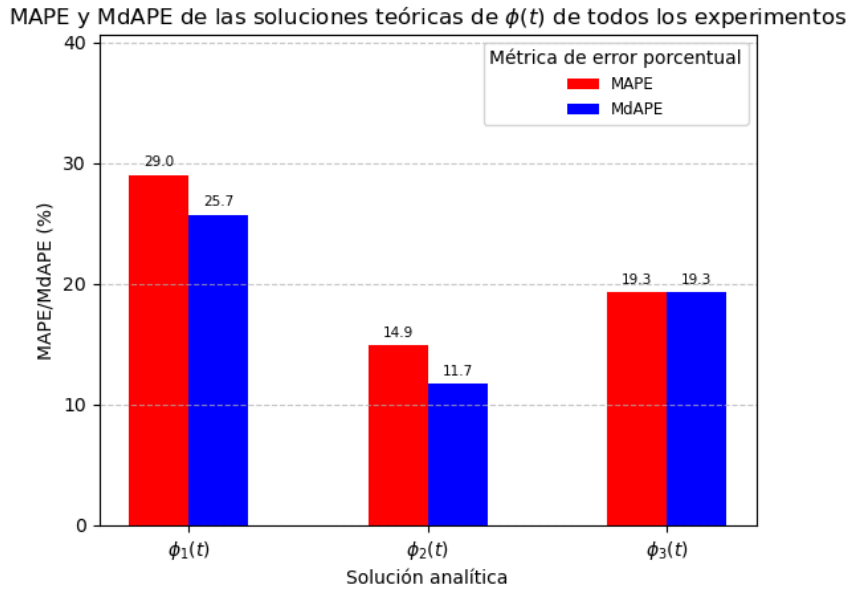


Figura 8.17: Resultados de las métricas de error porcentual $MAPE$ y $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\phi(t)$. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central

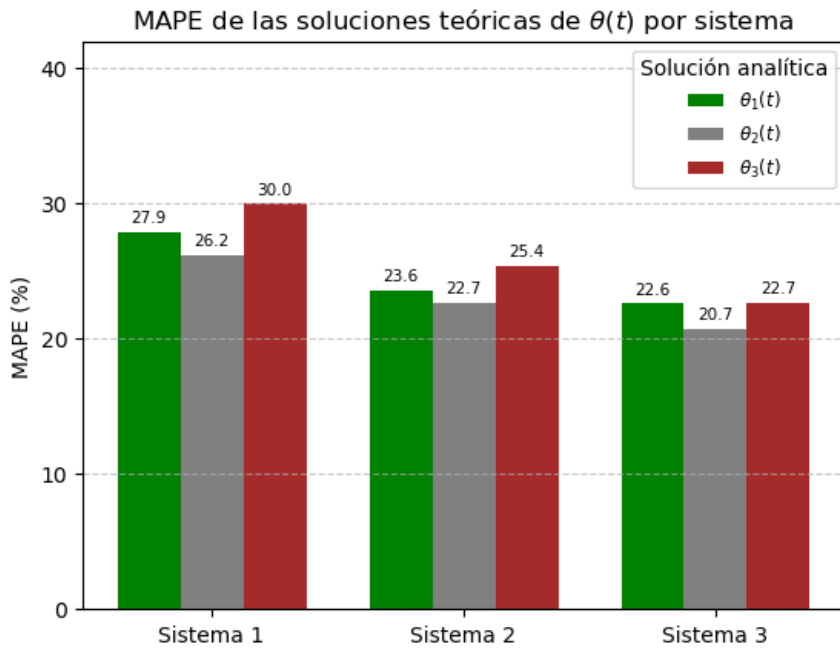


Figura 8.18: Resultado de la métrica de error porcentual $MAPE$ para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central

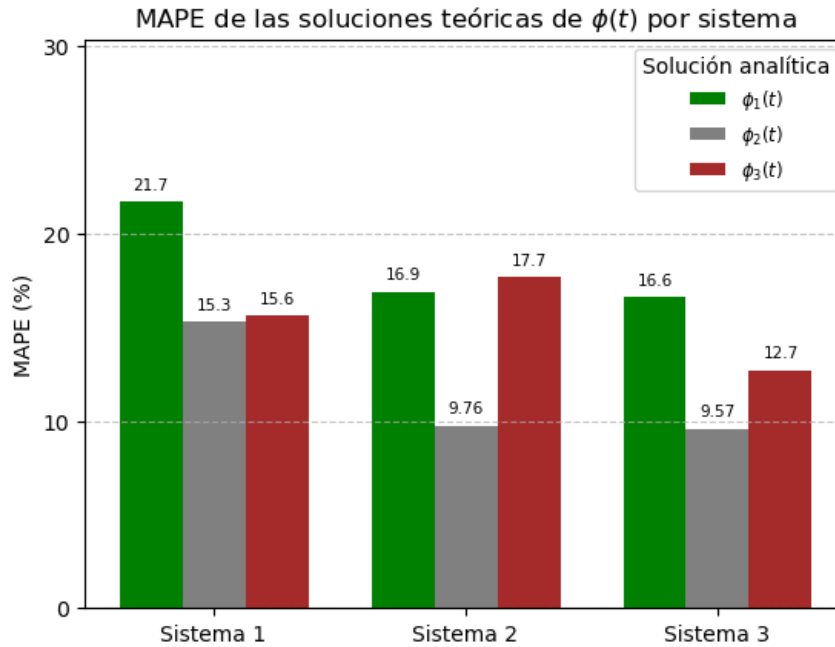


Figura 8.19: Resultado de la métrica de error porcentual $MAPE$ para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

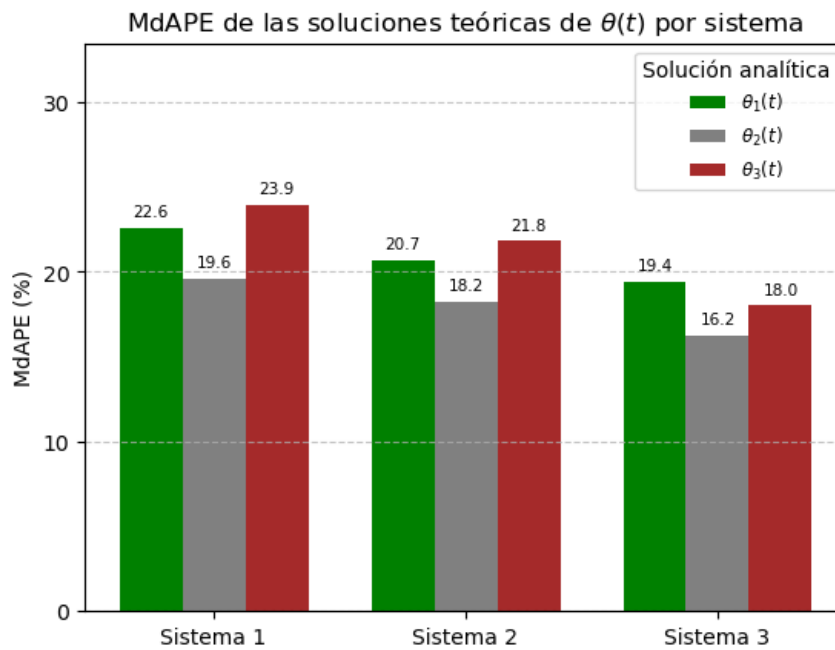


Figura 8.20: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central

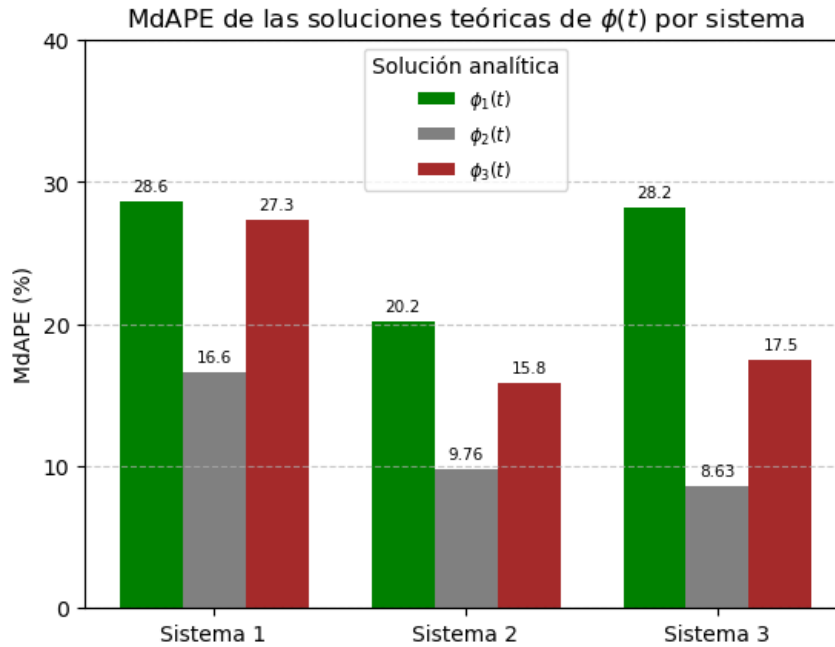


Figura 8.21: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ por sistema. Se utilizó la media como medida de tendencia central

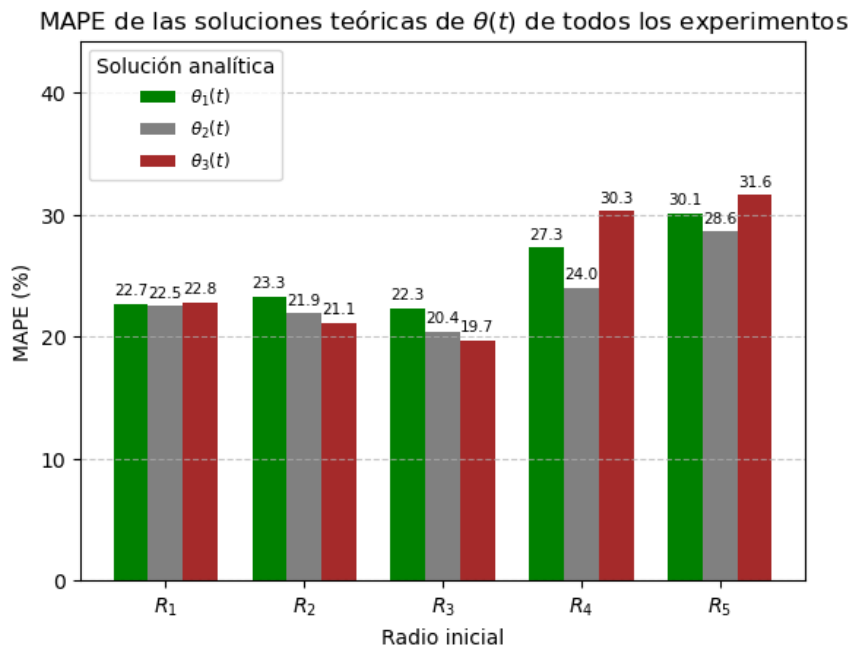


Figura 8.22: Resultado de la métrica $MAPE$ para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media como medida de tendencia central

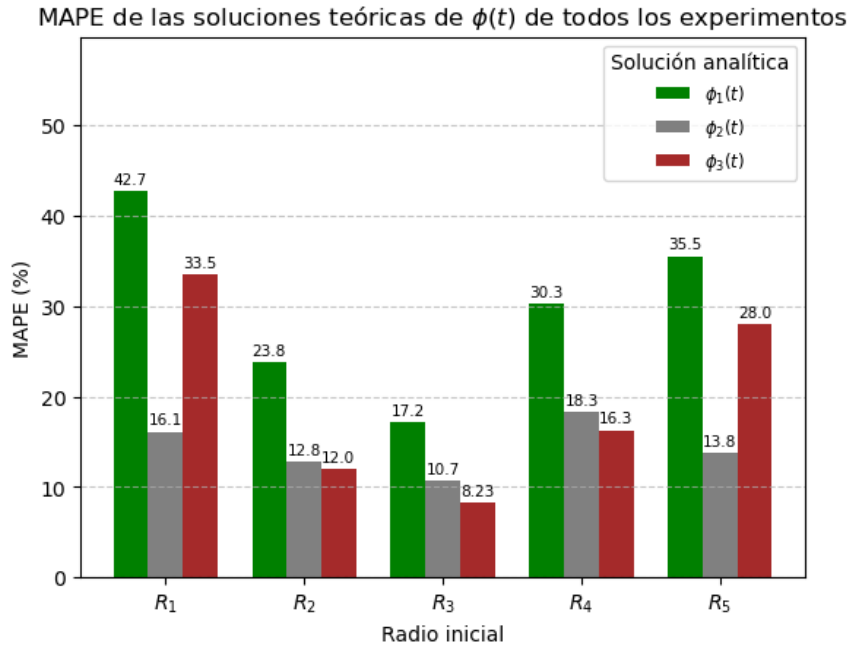


Figura 8.23: Resultado de la métrica $MAPE$ para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media como medida de tendencia central

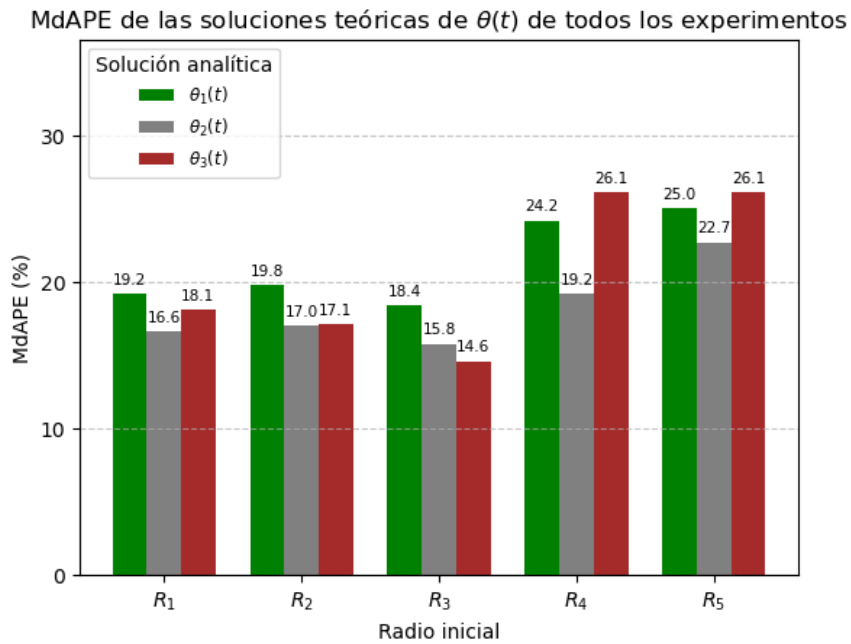


Figura 8.24: Resultado de la métrica $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\theta(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central

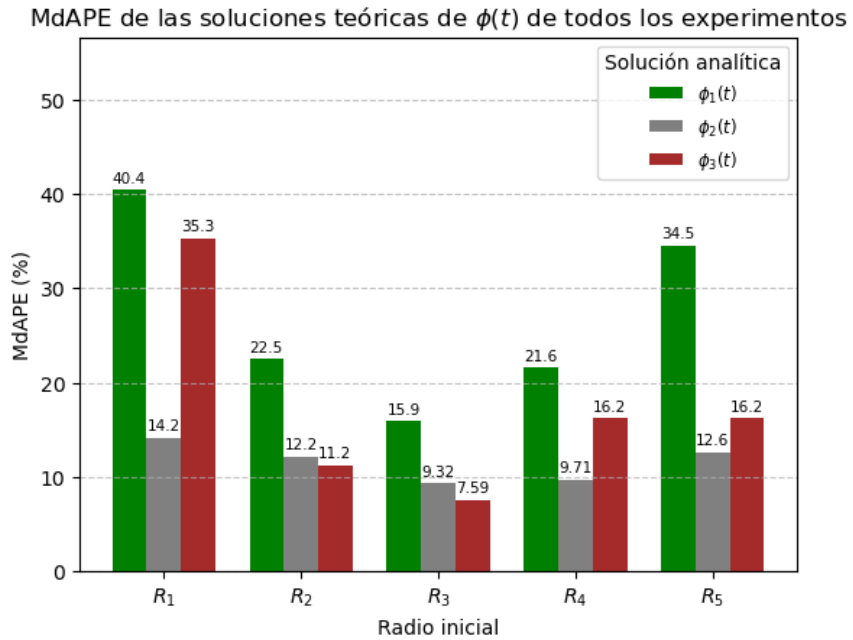


Figura 8.25: Resultado de la métrica $MdAPE$ para las soluciones analíticas de $\phi(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó el promedio como medida de tendencia central

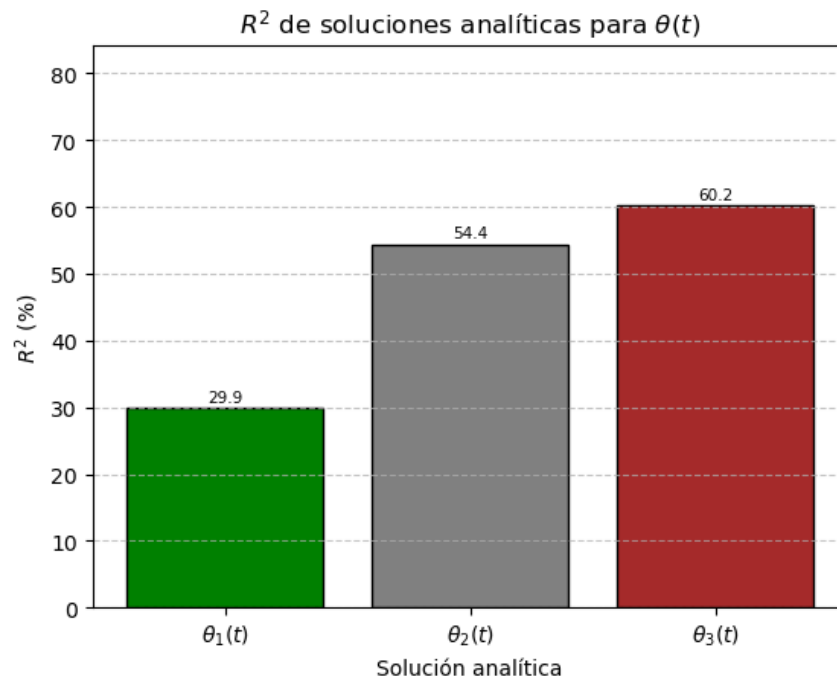


Figura 8.26: Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos

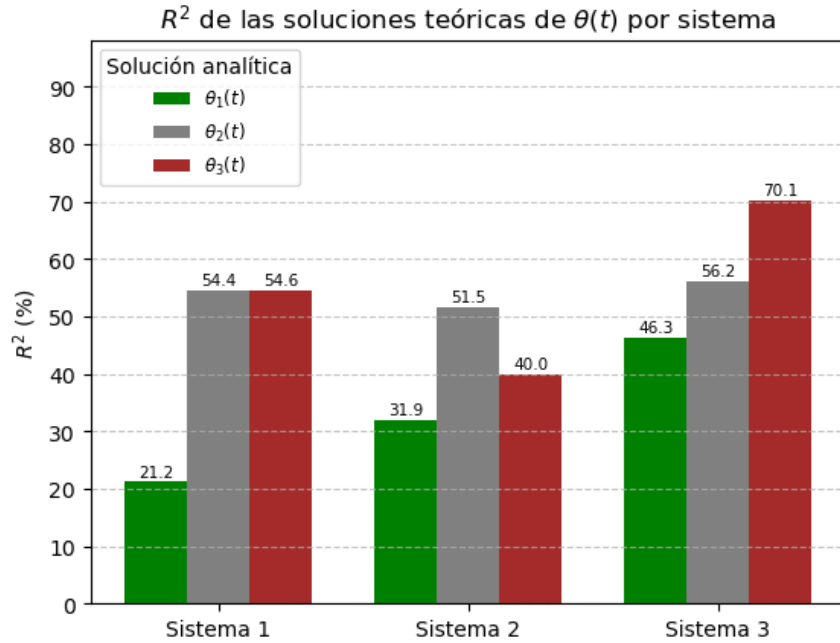


Figura 8.27: Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos

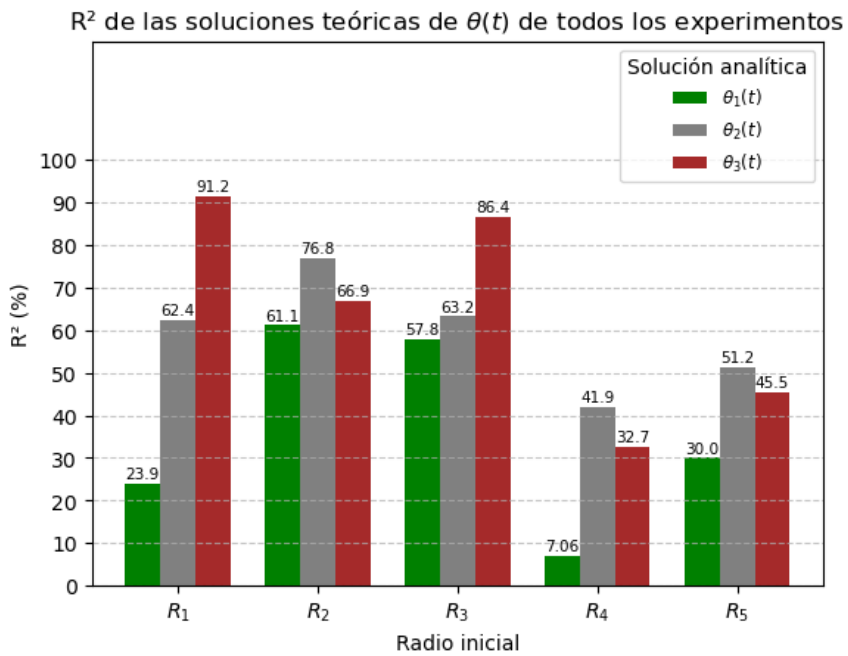


Figura 8.28: Coeficiente de determinación R^2 de las soluciones analíticas de $\theta(t)$ en 1/3 de los datos ordenado por radio inicial. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central por los datos atípicos

8.2.2. Error en el cálculo del período de oscilación del ángulo zenital

En esta sección se muestran cuadros con el período obtenido experimentalmente mediante una transformada rápida de Fourier, y con los porcentajes de error de los períodos teóricos τ_1 y τ_2 respecto al valor experimental⁴.

Período experimental τ_{exp} (s)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.427	0.435	0.429	0.438	0.439	0.438	0.401	0.406	0.808
R_2	0.428	0.432	0.432	0.440	0.436	0.438	0.403	0.404	0.407
R_3	0.426	0.428	0.426	0.436	0.469	0.433	0.400	0.399	0.400
R_4	0.425	0.425	0.424	0.459	0.433	0.435	0.430	0.399	0.396
R_5	0.452	0.424	0.421	0.435	0.435	0.433	0.414	0.397	0.396
R_L	0.432	0.432	0.432	0.432	0.439	0.435	0.404	0.406	0.403

Cuadro 8.37: Período experimental obtenido con una transformada rápida de Fourier para todos los experimentos realizados

Porcentaje de error de τ_1 (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	2.85	4.50	3.31	2.14	2.45	2.14	2.20	3.23	51.4
R_2	3.07	3.93	3.93	2.76	1.83	2.14	2.54	2.88	3.54
R_3	2.67	2.99	2.67	1.85	8.62	1.20	1.87	1.52	1.87
R_4	2.36	2.36	2.04	6.74	1.20	1.52	8.78	1.52	0.832
R_5	8.09	2.04	1.39	1.54	1.52	1.20	5.10	1.18	0.832
R_L	3.94	3.93	3.93	0.884	2.47	1.52	2.88	3.21	2.54

Cuadro 8.38: Porcentaje de error del período asociado a la frecuencia angular de las soluciones analíticas, respecto al obtenido experimentalmente

Porcentaje de error de τ_2 (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	2.42	4.39	3.13	1.97	2.23	1.82	2.10	2.86	51.3
R_2	2.20	2.24	3.57	1.31	1.57	1.92	2.13	1.30	3.09
R_3	1.86	1.18	1.89	0.700	5.98	0.404	1.05	0.514	0.932
R_4	1.86	1.03	0.726	2.28	0.0858	1.13	6.06	0.174	3.02
R_5	3.45	0.172	0.792	0.421	0.404	0.827	0.801	1.79	1.97
R_L	3.38	2.55	3.14	2.12	1.59	0.517	0.0529	1.92	1.78

Cuadro 8.39: Porcentaje de error del período obtenido con la evaluación de la integral en la Ecuación (6.87), respecto al experimental

A continuación, se presentan gráficos de barras que comparan el error de los resultados obtenidos con los 2 métodos; están organizados por método, sistema y radio inicial.

⁴Se calculó el valor absoluto de la diferencia entre lo teórico y experimental, dividido entre la medición, puesto que se buscó evaluar si las expresiones deducidas describían lo observado.

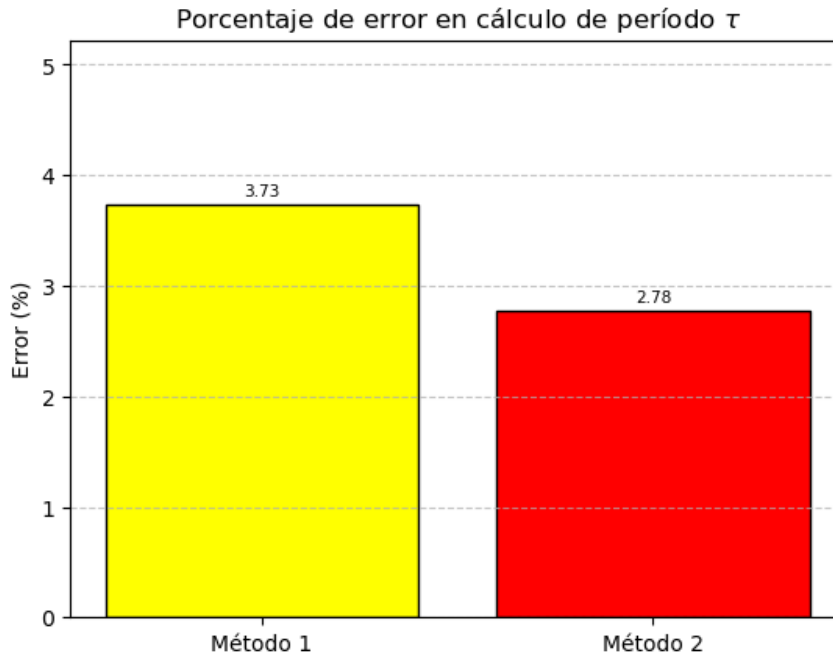


Figura 8.29: Media del porcentaje de error en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87)

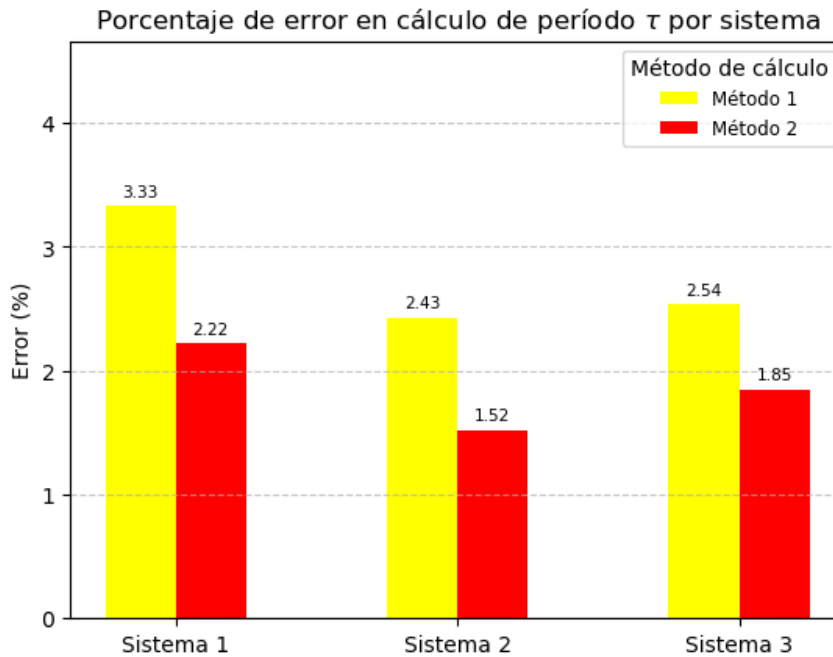


Figura 8.30: Porcentaje de error presentado por sistema en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87). Se utilizó la media para los sistemas 1 y 2, y la mediana para el sistema 3 por datos atípicos

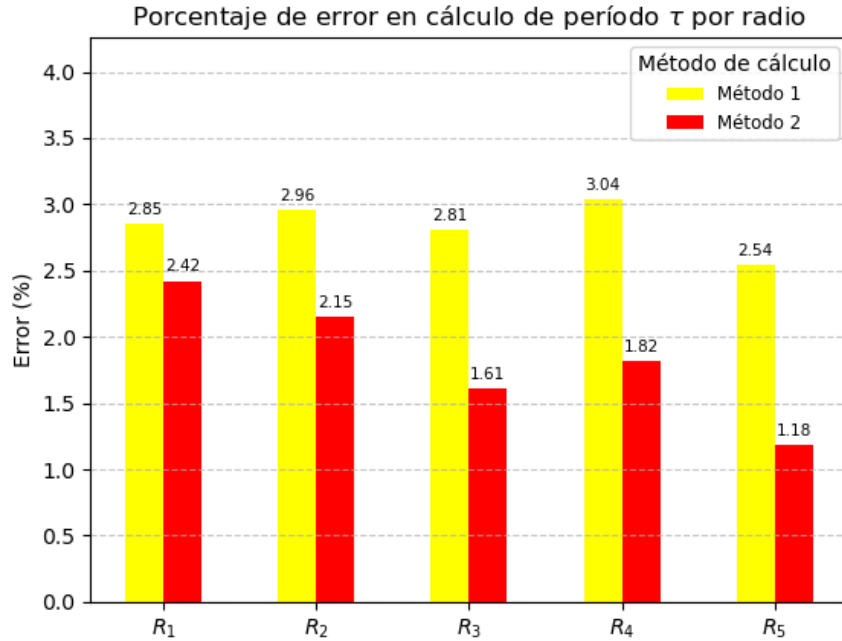


Figura 8.31: Porcentaje de error presentado por radio en el cálculo del período τ obtenido con el método de la relación con la frecuencia angular de las soluciones analíticas y el de evaluación de la integral en la Ecuación (6.87). Se utilizó la mediana para el radio R_1 por datos atípicos y la media para el resto

8.2.3. Rapidez angular azimutal inicial y tipo de amplitud de oscilación

Se muestran cuadros con la rapidez angular azimutal ideal para generar un péndulo cónico ($u_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$), la inicial que se midió, la relación de desigualdad entre estos valores y el signo de la amplitud de oscilación para cada experimento. Estos cuadros son para evaluar la condición teórica del signo de la amplitud de oscilación (véase Sección 6.4.3.), esto es, en otras palabras, si la dinámica de θ comienza con un máximo o un mínimo.

Rapidez angular azimutal necesaria para generar un péndulo cónico (rad/s)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	7.58	7.58	7.59	7.36	7.35	7.35	8.04	8.03	8.03
R_2	7.63	7.66	7.66	7.40	7.40	7.39	8.10	8.13	8.13
R_3	7.76	7.88	7.78	7.45	7.49	7.50	8.25	8.26	8.24
R_4	7.96	7.93	7.90	7.63	7.63	7.62	8.44	8.51	8.55
R_5	8.17	8.13	8.13	7.89	7.86	7.82	8.95	8.90	8.76
R_L	7.62	7.62	7.63	7.53	7.54	7.55	8.21	8.17	8.22

Cuadro 8.40: Rapidez angular azimutal que se requiere para que cada péndulo esférico, caracterizado por sus condiciones iniciales, presente el caso especial de péndulo cónico

Rapidez angular azimutal inicial u_0 (rad/s)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	27.3	12.7	12.5	10.3	16.8	16.5	2.69	16.8	10.5
R_2	15.0	17.4	4.22	17.6	4.44	3.90	5.24	14.5	3.83
R_3	4.63	14.6	3.74	10.6	16.3	11.0	14.3	4.88	4.78
R_4	13.0	3.78	4.26	15.4	3.40	10.8	10.0	3.62	10.9
R_5	11.6	2.69	4.74	3.17	3.57	4.78	11.9	4.37	5.33
R_L	12.4	21.7	14.2	14.5	4.72	5.06	16.0	10.5	3.79

Cuadro 8.41: Rapidez angular azimutal inicial medida en cada experimento

Desigualdad entre u_0 experimental e ideal									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	>	>	>	>	>	>	<	>	>
R_2	>	>	<	>	<	<	<	>	<
R_3	<	>	<	>	>	>	>	<	<
R_4	>	<	<	>	<	>	>	<	>
R_5	>	<	<	<	<	<	>	<	<
R_L	>	>	>	>	<	<	>	>	<

Cuadro 8.42: Relación de desigualdad entre la rapidez angular azimutal inicial medida y la ideal para generar el caso especial de péndulo cónico

Signo de la amplitud de oscilación de $\theta(t)$									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	-	-	+	-	-
R_2	-	-	+	-	+	+	+	-	+
R_3	+	-	+	-	-	-	-	+	+
R_4	-	+	+	-	+	-	-	+	-
R_5	-	+	+	+	+	+	-	+	+
R_L	-	-	-	-	+	+	-	-	+

Cuadro 8.43: Tipo de oscilación en $\theta(t)$ determinada con base en la forma de gráfica θ vs t . Si empieza con un máximo, la amplitud es positiva, y si lo hace con un mínimo, es negativa

8.2.4. Error en el cálculo del ángulo extremo

A continuación, se muestran cuadros con el ángulo extremo medido, que en los experimentos con $u_0 > \sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$, se utilizó el primer máximo de θ , y en los que $u_0 < \sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$, se utilizó el primer mínimo. También se muestra el error que representa el ángulo extremo obtenido teóricamente con la Ecuación (6.92), como la asíntota diferente de $\theta = \theta_0$ de la función $f(\theta)$ en la Ecuación (6.88).

Ángulo extremo θ_f experimental (rad)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	0.281	0.107	0.131	0.130	0.164	0.213	0.0595	0.224	0.142
R_2	0.323	0.538	0.117	0.459	0.139	0.119	0.180	0.436	0.129
R_3	0.226	0.613	0.166	0.331	0.621	0.418	0.616	0.222	0.215
R_4	0.648	0.221	0.253	0.923	0.191	0.470	0.531	0.230	0.583
R_5	0.753	0.147	0.322	0.227	0.243	0.343	0.952	0.314	0.394
R_L	0.240	0.428	0.261	0.658	0.216	0.229	0.646	0.368	0.182

Cuadro 8.44: Ángulo extremo experimental medido en los experimentos como el primer máximo o mínimo después de θ_0

Porcentaje de error en el ángulo extremo θ_f (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	9.13	7.14	13.4	4.34	7.01	1.44	28.6	1.38	8.06
R_2	4.75	9.52	0.0294	1.68	23.6	24.4	21.7	2.73	10.2
R_3	17.1	21.9	6.35	7.79	0.329	1.73	1.42	7.14	8.59
R_4	12.6	9.42	13.1	13.1	9.54	16.4	1.86	10.9	9.98
R_5	2.35	16.9	6.31	7.63	4.87	12.5	9.62	2.68	10.5
R_L	9.48	5.59	22.3	4.97	6.24	1.60	3.16	0.0932	18.6

Cuadro 8.45: Porcentaje de error en el ángulo extremo respecto al experimental

Se presentan ahora gráficos de barras que muestran el porcentaje de error general, y organizado por sistema y radio inicial.

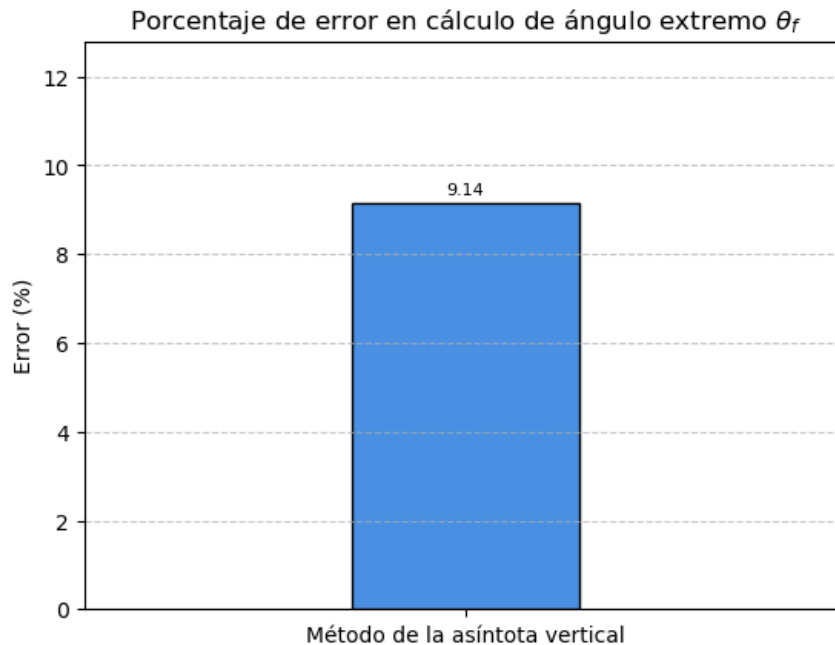


Figura 8.32: Porcentaje de error general en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central

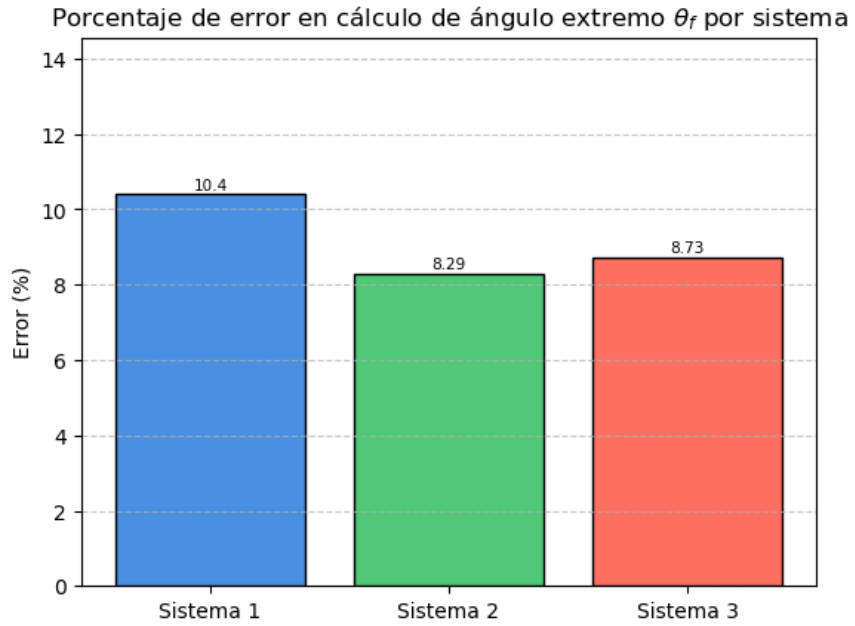


Figura 8.33: Porcentaje de error presentado por sistema en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central

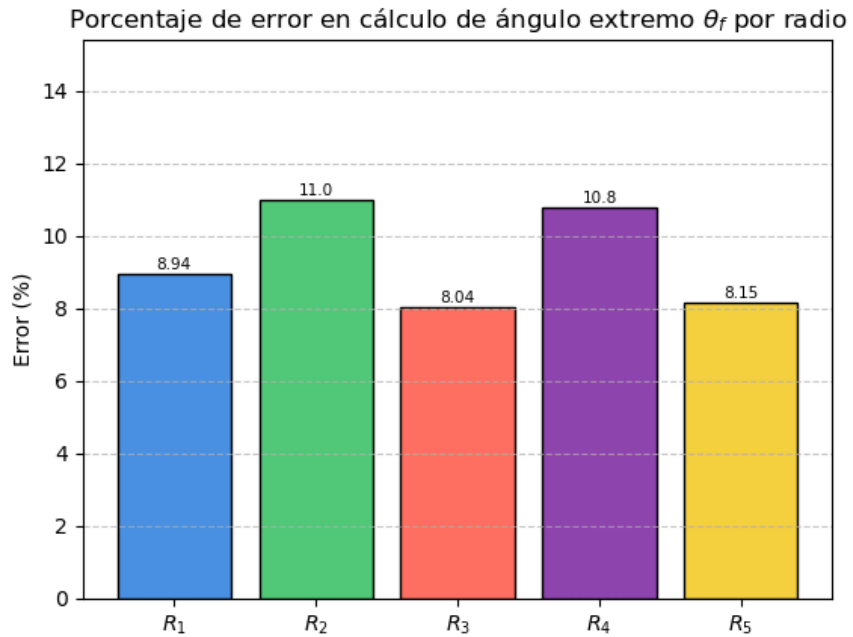


Figura 8.34: Porcentaje de error presentado por radio en el cálculo del ángulo extremo respecto al experimental. Se utilizó la media como medida de tendencia central

8.3. Implementación de modelos de aprendizaje automático

Como se mencionó en la Sección 7.2., se emplearon 3 modelos de aprendizaje automático para este trabajo de investigación: *Random Forest*, *XGBoost* y redes neuronales *feedforward*. Se utilizaron para la corrección de las soluciones analíticas de $\theta(t)$, y crear de esta manera modelos híbridos para la descripción de esta coordenada angular; del mismo modo, con estas soluciones corregidas, se aplicó la relación integral para $\phi(t)$ (Ecuación (6.5)).

Nota: las gráficas incluidas en esta sección corresponden a la última vez que se compilaron todos los *notebooks*, pero los cuadros con los errores son de la primera vez, los cuales difieren en el caso de los modelos que utilizan redes neuronales *feedforward*, pero estos solo presentan una pequeña variación debido a los pesos aleatorios, que no cambian mucho entre sí, que emplea tal algoritmo.

8.3.1. Corrección de soluciones analíticas para el ángulo zenital

A continuación, se presentan ejemplos de las gráficas θ vs t de la implementación de algoritmos de aprendizaje automático para la corrección de modelos analíticos $\theta_i(t)$ correspondientes a los experimentos en las Figuras 8.1, 8.3 y 8.5. En cada gráfico, se colocan los datos experimentales siempre de color celeste, el modelo analítico con su color distintivo (verde, gris o café) y la aplicación del modelo con su corrección con una curva de color naranja.

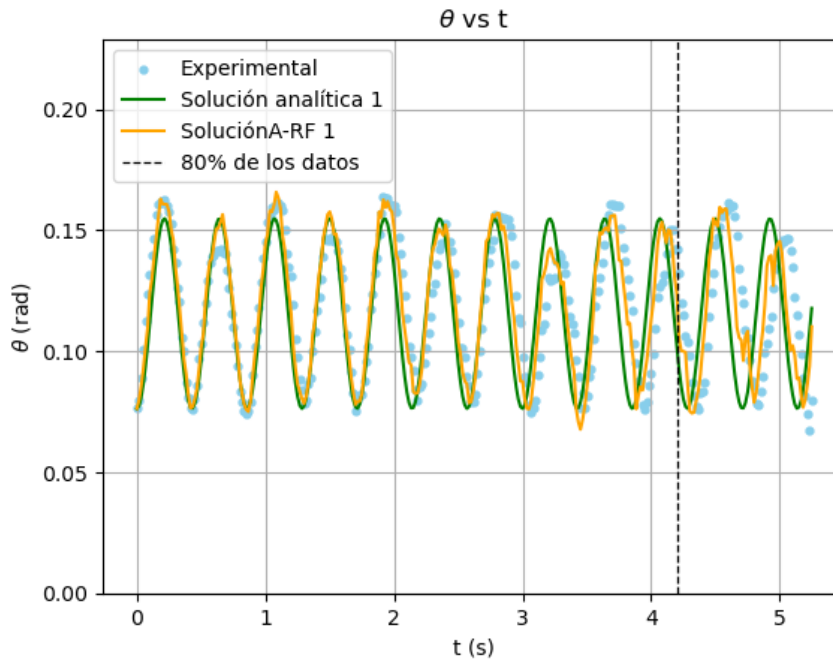


Figura 8.35: Modelo híbrido entre la solución $\theta_1(t)$ y modelo *Random Forest* del sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2

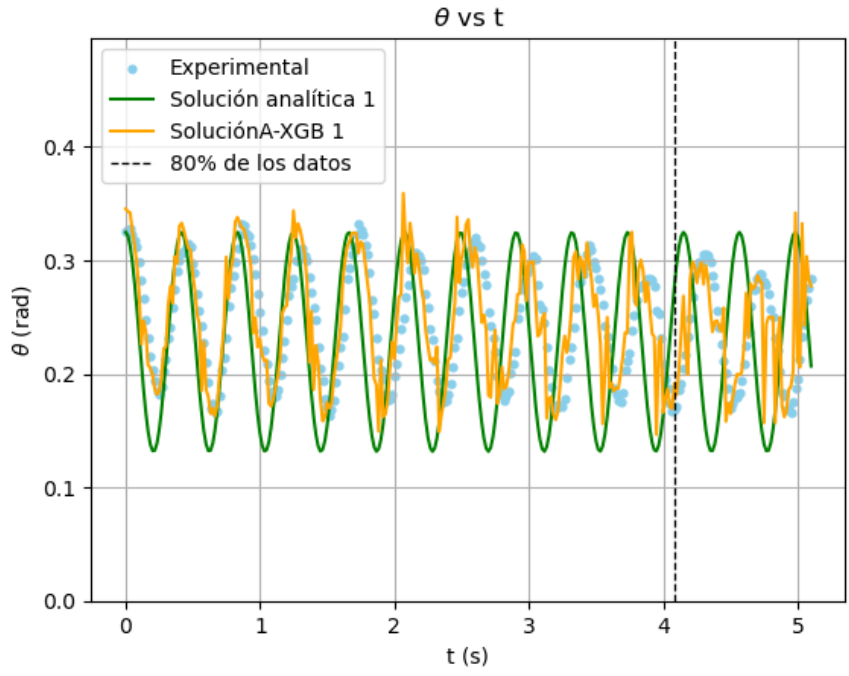


Figura 8.36: Modelo híbrido entre la solución $\theta_1(t)$ y modelo *XGBoost* del sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3

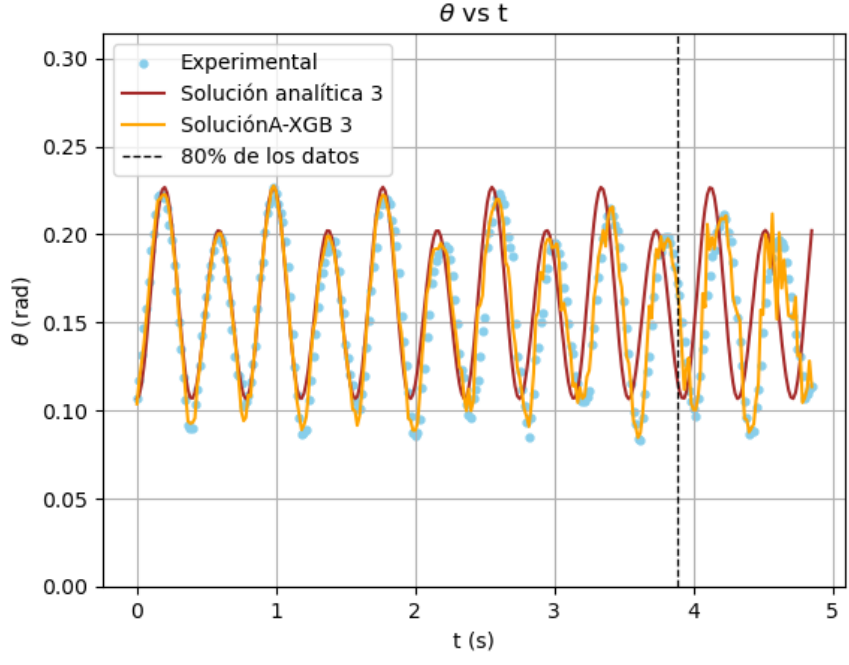


Figura 8.37: Modelo híbrido entre la solución $\theta_3(t)$ y modelo *XGBoost* del sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2

8.3.2. Utilización de las soluciones corregidas para predicción del ángulo azimutal

Se presentan ejemplos de las gráficas resultantes de ϕ vs t , con los datos experimentales, el modelo original con su color correspondiente y la nueva solución (en naranja) aplicando las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre θ . Las gráficas que se muestran corresponden a los experimentos de las Figuras 8.2, 8.4 y 8.6.

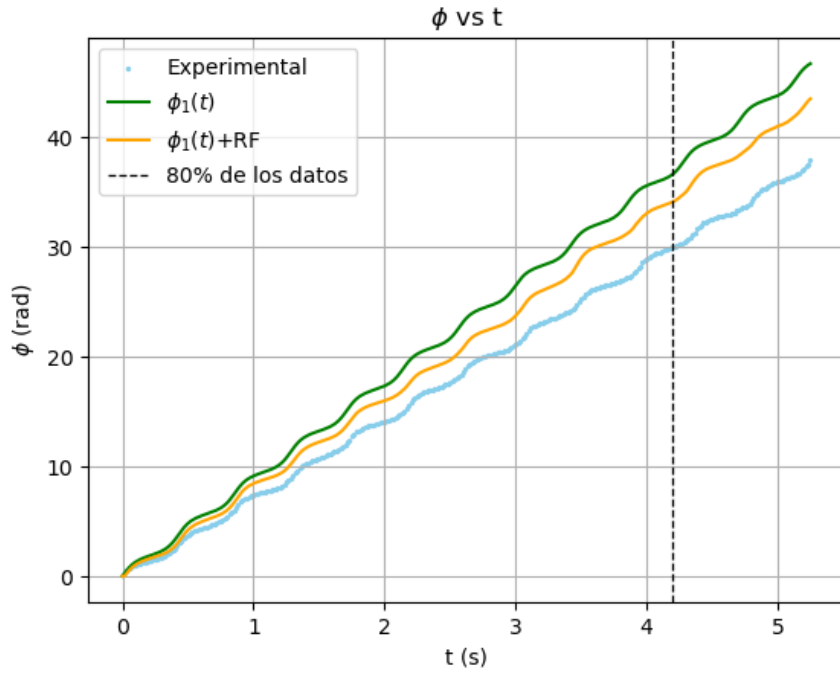


Figura 8.38: Evolución de la coordenada $\phi_1(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_1(t)$ con el modelo *Random Forest*, para el sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2

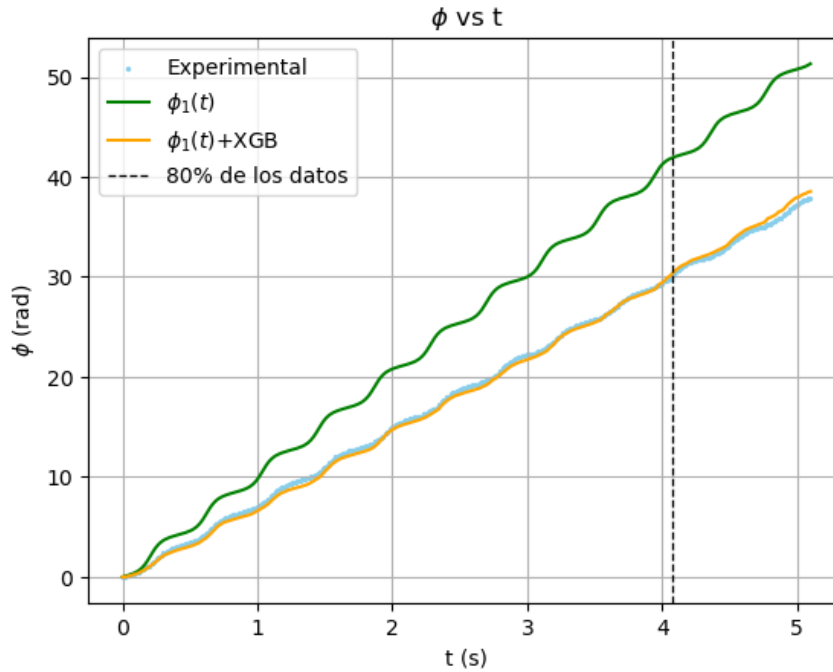


Figura 8.39: Evolución de la coordenada $\phi_1(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_1(t)$ con el modelo *XGBoost*, para el sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3

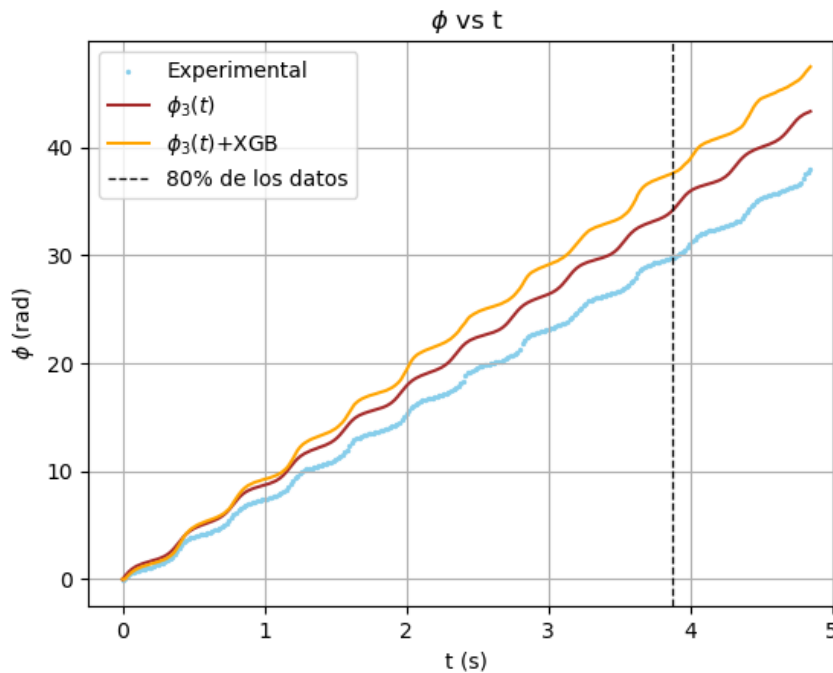


Figura 8.40: Evolución de la coordenada $\phi_3(t)$ y la solución obtenida a partir de la solución híbrida para $\theta_3(t)$ con el modelo *XGBoost*, para el sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2

8.3.3. Error de los modelos híbridos para predicción del ángulo zenital

Se muestran ahora gráficos de residuos estándar de los modelos híbridos correspondientes a los experimentos mostrados en las Figuras 8.35, 8.36 y 8.37, y cuadros con la métrica de error porcentual $MdAPE$ de cada modelo aplicado en la fase de evaluación sobre predicción de residuos, y con el coeficiente de determinación R^2 de la aplicación de la solución corregida sobre el conjunto de datos completo de todos los experimentos.

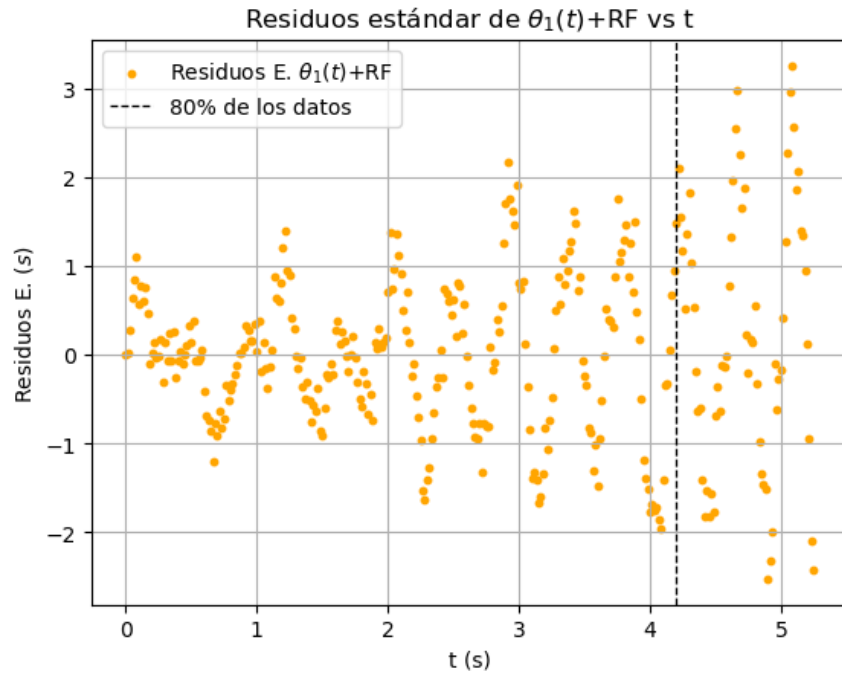


Figura 8.41: Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_1(t)$ con correcciones realizadas por el modelo *Random Forest*, correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2

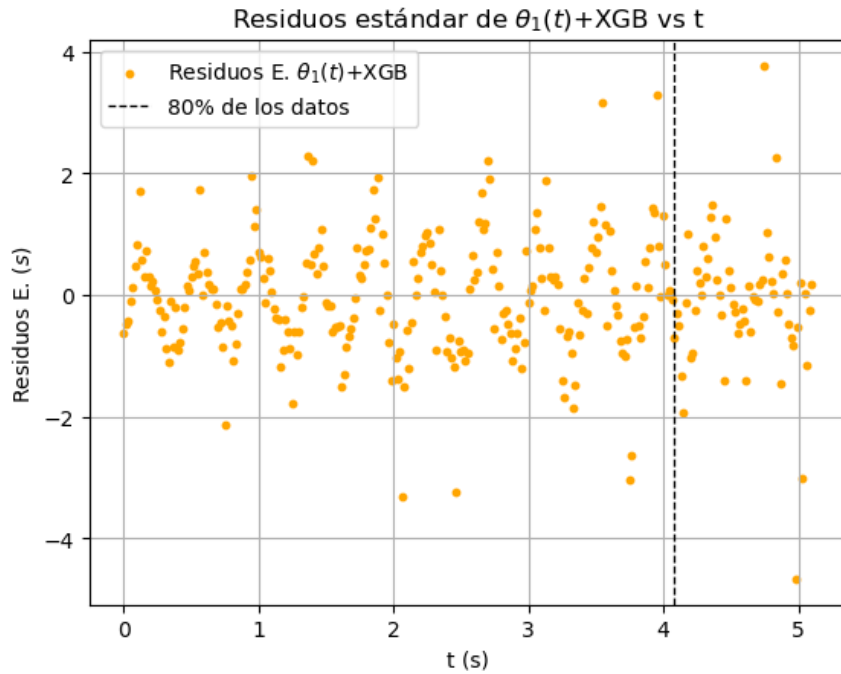


Figura 8.42: Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_1(t)$ con correcciones realizadas por el modelo *XGBoost*, correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3

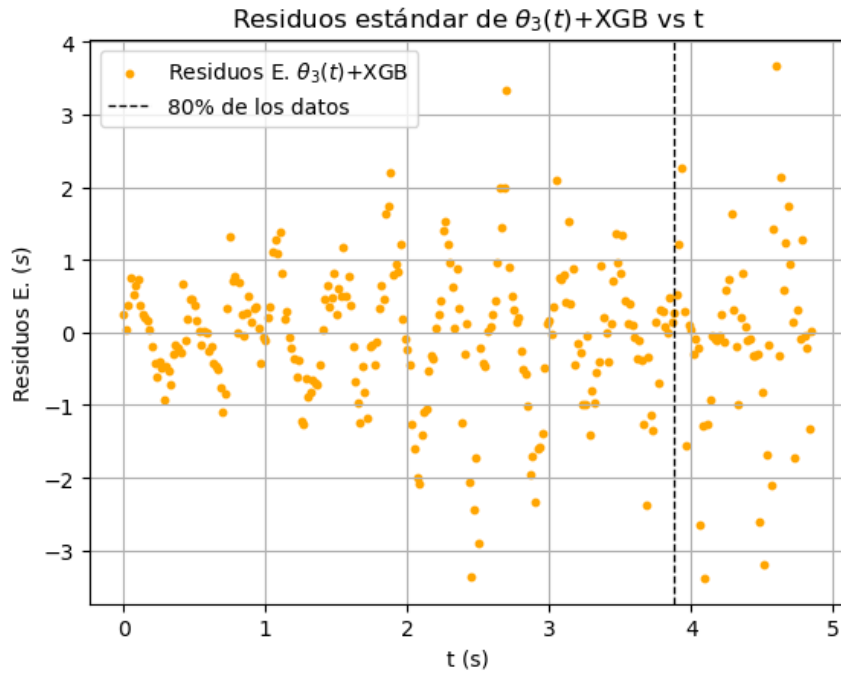


Figura 8.43: Residuos estándar de la solución híbrida $\theta_3(t)$ con correcciones realizadas por el modelo *XGBoost*, correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2

<i>MdAPE</i> de modelo <i>Random Forest</i> para predicción de residuos de $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	31.1	82.6	41.5	43.5	59.6	48.2	75.8	70.9	32.6
R_2	52.5	35.2	80.9	48.1	69.7	49.2	61.7	60.3	65.3
R_3	61.6	33.5	62.8	42.1	37.5	55.7	47.5	75.0	77.6
R_4	41.3	55.0	67.7	33.0	62.6	30.8	29.5	63.4	21.1
R_5	27.8	48.6	65.1	56.0	64.1	46.5	56.4	52.1	61.3
R_L	40.6	45.5	31.4	39.3	60.1	76.8	48.0	45.8	60.9

Cuadro 8.46: Métrica *MdAPE* del modelo *Random Forest* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$

<i>MdAPE</i> de modelo <i>Random Forest</i> para predicción de residuos de $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	62.9	75.9	41.9	46.6	70.2	76.3	56.7	69.9	34.0
R_2	57.4	58.0	78.0	77.5	59.7	48.1	60.2	58.3	87.8
R_3	48.1	40.0	55.5	58.6	54.0	54.6	44.0	69.2	82.7
R_4	43.5	56.7	50.8	45.9	54.6	39.6	27.8	57.7	24.0
R_5	36.6	49.6	60.7	59.2	60.4	46.0	61.4	53.6	75.0
R_L	50.0	71.0	40.6	67.6	64.8	71.5	68.9	48.5	59.7

Cuadro 8.47: Métrica *MdAPE* del modelo *Random Forest* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$

<i>MdAPE</i> de modelo <i>Random Forest</i> para predicción de residuos de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	70.1	76.2	68.3	78.2	-
R_2	58.3	-	85.4	-	73.8	53.0	-	57.9	72.1
R_3	-	-	-	-	-	-	43.5	75.4	87.2
R_4	-	57.9	61.3	-	60.7	-	-	-	-
R_5	-	51.3	65.2	56.4	54.1	-	56.8	-	65.7
R_L	-	-	-	-	67.7	-	61.0	-	63.3

Cuadro 8.48: Métrica *MdAPE* del modelo *Random Forest* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$

<i>MdAPE</i> de modelo <i>XGBoost</i> para predicción de residuos de $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	29.4	45.0	31.1	33.4	40.9	48.3	56.4	61.1	26.2
R_2	57.0	19.5	60.8	41.9	55.2	35.4	59.1	48.1	54.4
R_3	49.0	21.8	47.8	35.2	25.5	46.6	40.3	59.7	67.1
R_4	27.6	44.1	56.9	20.6	32.9	21.0	27.0	44.7	15.6
R_5	25.2	40.1	42.5	47.3	47.0	39.5	41.5	45.3	57.8
R_L	27.7	36.7	23.0	33.5	46.4	60.6	35.9	35.4	49.1

Cuadro 8.49: Métrica *MdAPE* del modelo *XGBoost* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$

<i>MdAPE</i> de modelo <i>XGBoost</i> para predicción de residuos de $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	50.7	49.3	32.4	36.7	47.4	57.8	40.5	53.7	23.8
R_2	56.8	31.0	69.2	65.6	41.9	29.3	52.4	41.3	64.4
R_3	41.2	25.8	38.2	36.9	58.1	48.6	45.9	49.5	58.9
R_4	31.9	42.3	37.7	40.1	32.6	29.4	27.3	43.3	17.7
R_5	32.1	34.6	39.9	45.0	45.7	34.7	46.1	39.2	53.2
R_L	36.0	46.5	31.8	44.1	51.7	57.3	47.3	35.1	58.7

Cuadro 8.50: Métrica *MdAPE* del modelo *XGBoost* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$

<i>MdAPE</i> de modelo <i>XGBoost</i> para predicción de residuos de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	43.0	69.3	52.0	70.7	-
R_2	52.5	-	73.7	-	57.3	38.5	-	45.8	61.9
R_3	-	-	-	-	-	-	53.8	58.2	71.3
R_4	-	43.0	57.2	-	33.3	-	-	-	-
R_5	-	40.9	40.3	41.5	49.7	-	44.2	-	49.3
R_L	-	-	-	-	47.6	-	53.7	-	53.1

Cuadro 8.51: Métrica *MdAPE* del modelo *XGBoost* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$

<i>MdAPE</i> de redes neuronales <i>feedforward</i> para predicción de residuos de $\theta_1(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	16.3	80.1	94.3	105	50.6	47.7	19.4	43.9	99.8
R_2	40.4	18.9	49.2	19.2	73.1	47.3	92.3	49.4	41.6
R_3	76.2	33.5	42.6	104	21.4	38.6	26.0	27.3	30.9
R_4	71.6	46.4	84.6	18.2	20.8	113	89.0	17.9	90.0
R_5	30.5	35.6	39.4	21.0	21.5	65.6	63.3	19.1	28.4
R_L	109	31.2	65.0	40.1	32.9	57.0	22.9	80.9	27.7

Cuadro 8.52: Métrica *MdAPE* de redes neuronales *feedforward* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_1(t)$

<i>MdAPE</i> de redes neuronales <i>feedforward</i> para predicción de residuos de $\theta_2(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	29.7	74.9	82.3	98.2	53.6	55.0	22.3	53.8	115
R_2	40.4	27.6	52.6	19.6	76.8	37.4	80.3	51.4	43.8
R_3	56.5	55.1	42.0	84.9	25.7	66.0	39.3	36.3	23.7
R_4	45.3	59.2	62.1	32.4	26.0	58.2	67.7	25.5	46.0
R_5	57.1	29.1	43.8	23.5	15.6	68.5	58.4	17.2	35.2
R_L	94.2	38.4	79.0	24.7	31.3	48.7	27.8	86.3	31.7

Cuadro 8.53: Métrica *MdAPE* del modelo de redes neuronales *feedforward* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_2(t)$

<i>MdAPE</i> de redes neuronales <i>feedforward</i> para predicción de residuos de $\theta_3(t)$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	37.3	46.2	37.2	48.1	-
R_2	35.3	-	52.7	-	94.2	30.9	-	53.9	35.3
R_3	-	-	-	-	-	-	31.1	32.2	29.2
R_4	-	60.1	75.2	-	26.7	-	-	-	-
R_5	-	27.2	34.5	27.9	19.0	-	48.4	-	28.0
R_L	-	-	-	-	42.2	-	26.9	-	22.2

Cuadro 8.54: Métrica *MdAPE* del modelo de redes neuronales *feedforward* para la predicción de residuos de la solución analítica $\theta_3(t)$

Nota: es importante recordar que por la definición utilizada para R^2 (Ecuación (8.1)), es posible la obtención de valores negativos.

R^2 para modelo híbrido de $\theta_1(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	82.6	66.7	56.3	75.2	78.9	81.2	16.0	83.0	44.0
R_2	67.7	81.6	69.3	77.9	1.20	-1.70	-41.4	75.5	41.0
R_3	-14.9	65.5	21.2	57.6	76.4	62.4	77.3	64.5	49.3
R_4	63.6	35.1	32.7	83.4	41.5	65.2	61.5	46.1	64.7
R_5	69.8	46.9	33.4	47.7	51.3	36.1	65.5	66.7	62.2
R_L	64.2	76.0	59.7	79.8	51.0	66.4	79.8	83.6	34.1

Cuadro 8.55: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *Random Forest*

R^2 para modelo híbrido de $\theta_2(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	61.4	68.9	69.0	78.4	75.2	72.9	61.8	77.0	60.9
R_2	63.4	64.8	73.2	65.6	56.0	54.6	53.1	72.9	59.5
R_3	41.6	80.2	43.2	88.5	67.6	62.6	70.9	73.3	63.6
R_4	77.0	54.0	55.0	66.8	60.4	86.1	75.3	63.1	86.9
R_5	76.4	56.1	42.5	61.7	62.1	57.2	59.9	69.1	69.1
R_L	69.2	66.8	76.0	68.7	63.4	69.2	70.8	83.9	63.0

Cuadro 8.56: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *Random Forest*

R^2 para modelo híbrido de $\theta_3(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	77.6	79.1	39.3	81.9	-
R_2	65.7	-	70.8	-	29.7	30.6	-	74.3	49.1
R_3	-	-	-	-	-	-	74.0	69.4	56.8
R_4	-	44.4	43.6	-	50.0	-	-	-	-
R_5	-	51.3	36.7	53.3	55.7	-	63.2	-	65.1
R_L	-	-	-	-	57.9	-	75.7	-	47.8

Cuadro 8.57: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *Random Forest*

R^2 para modelo híbrido de $\theta_1(t)$ y $XGBoost$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	90.0	86.0	79.0	91.3	93.7	91.9	58.8	92.3	79.6
R_2	78.0	93.1	83.4	90.5	50.5	43.3	20.2	88.6	71.9
R_3	43.3	85.2	54.9	84.6	91.9	82.0	90.2	85.1	78.1
R_4	84.2	68.2	68.3	94.3	77.4	87.5	82.5	80.1	87.6
R_5	84.2	78.9	66.7	78.1	79.9	72.4	83.6	87.4	81.3
R_L	86.0	91.0	85.7	91.5	73.7	85.8	92.0	94.2	67.1

Cuadro 8.58: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo $XGBoost$

R^2 para modelo híbrido de $\theta_2(t)$ y $XGBoost$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	79.0	86.6	84.0	92.2	91.9	89.1	81.5	89.7	86.4
R_2	75.3	87.9	85.4	84.8	75.4	72.7	72.6	88.3	81.1
R_3	68.6	91.3	65.2	88.5	88.6	82.5	87.6	88.4	85.1
R_4	89.8	54.0	77.5	90.1	83.9	92.8	87.9	84.7	93.3
R_5	88.1	82.3	70.8	83.8	84.6	79.1	81.8	88.9	84.2
R_L	88.6	86.9	90.9	88.4	79.1	87.8	89.0	94.4	80.4

Cuadro 8.59: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo $XGBoost$

R^2 para modelo híbrido de $\theta_3(t)$ y $XGBoost$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	93.1	91.2	72.0	91.5	-
R_2	76.8	-	86.0	-	66.7	59.8	-	88.6	76.1
R_3	-	-	-	-	-	-	88.8	86.6	80.8
R_4	-	71.6	72.2	-	79.7	-	-	-	-
R_5	-	79.8	67.6	81.1	81.6	-	82.9	-	83.5
R_L	-	-	-	-	77.2	-	90.4	-	73.0

Cuadro 8.60: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo $XGBoost$

R^2 para modelo híbrido de $\theta_1(t)$ y redes neuronales <i>feedforward</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	91.0	52.3	16.0	38.5	86.1	91.6	85.3	90.0	-29.5
R_2	76.5	93.3	66.9	94.2	-51.9	12.2	-185	81.2	74.7
R_3	-113	81.2	-32.4	8.89	92.5	68.9	92.1	86.6	77.3
R_4	26.8	36.8	-46.0	89.7	85.7	17.1	4.09	88.5	23.0
R_5	68.9	75.1	44.8	88.7	88.8	0.609	40.0	90.9	80.2
R_L	12.8	86.1	53.6	80.4	74.3	85.5	93.1	60.8	75.2

Cuadro 8.61: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales *feedforward*

R^2 para modelo híbrido de $\theta_2(t)$ y redes neuronales <i>feedforward</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	75.7	52.2	40.3	45.1	80.6	88.2	87.4	88.5	8.34
R_2	72.2	92.7	78.7	91.6	15.6	44.1	0.597	88.8	74.3
R_3	-8.74	62.6	51.1	43.1	89.4	35.6	92.2	83.6	86.2
R_4	56.4	13.7	4.09	83.9	88.6	70.1	40.9	84.7	74.3
R_5	66.6	83.9	57.2	89.7	91.0	20.8	26.4	91.1	68.9
R_L	32.5	86.6	46.6	86.5	81.0	74.0	91.7	59.0	82.2

Cuadro 8.62: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales *feedforward*

R^2 para modelo híbrido de $\theta_3(t)$ y redes neuronales <i>feedforward</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	87.8	90.8	78.3	91.7	-
R_2	76.1	-	82.6	-	-51.1	37.4	-	80.7	73.7
R_3	-	-	-	-	-	-	89.4	79.1	86.0
R_4	-	-3.50	-27.2	-	88.1	-	-	-	-
R_5	-	80.6	51.7	82.1	89.0	-	35.3	-	73.3
R_L	-	-	-	-	64.4	-	93.0	-	85.1

Cuadro 8.63: Coeficiente de determinación R^2 para el modelo híbrido compuesto por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo de redes neuronales *feedforward*

Se presentan a continuación gráficos de barras comparativos del *MdAPE* y del R^2 de cada modelo analítico corregido por los 3 algoritmos de aprendizaje automático; se muestran organizados por algoritmo (por solución híbrida en el caso del R^2), sistema y radio inicial.

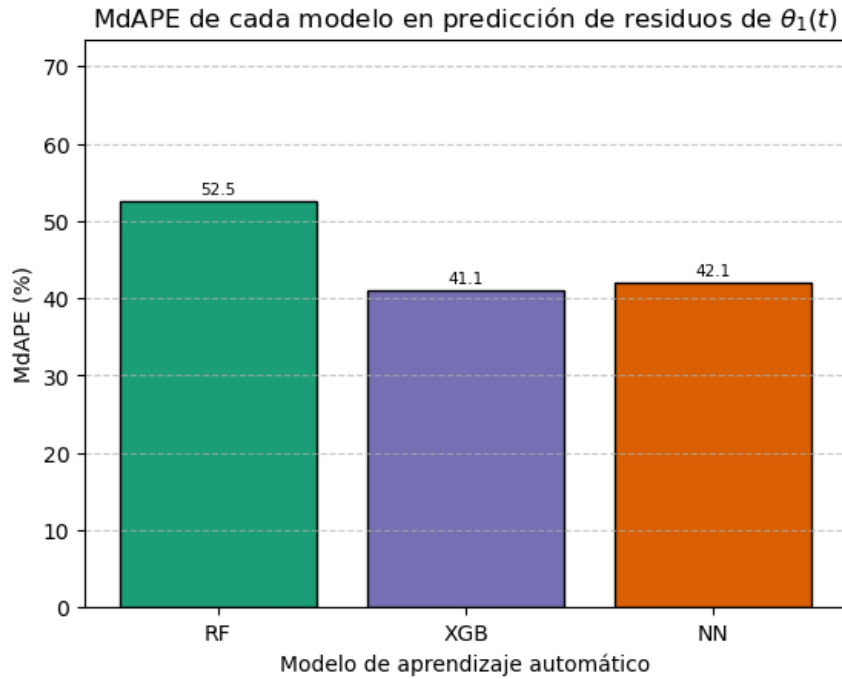


Figura 8.44: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

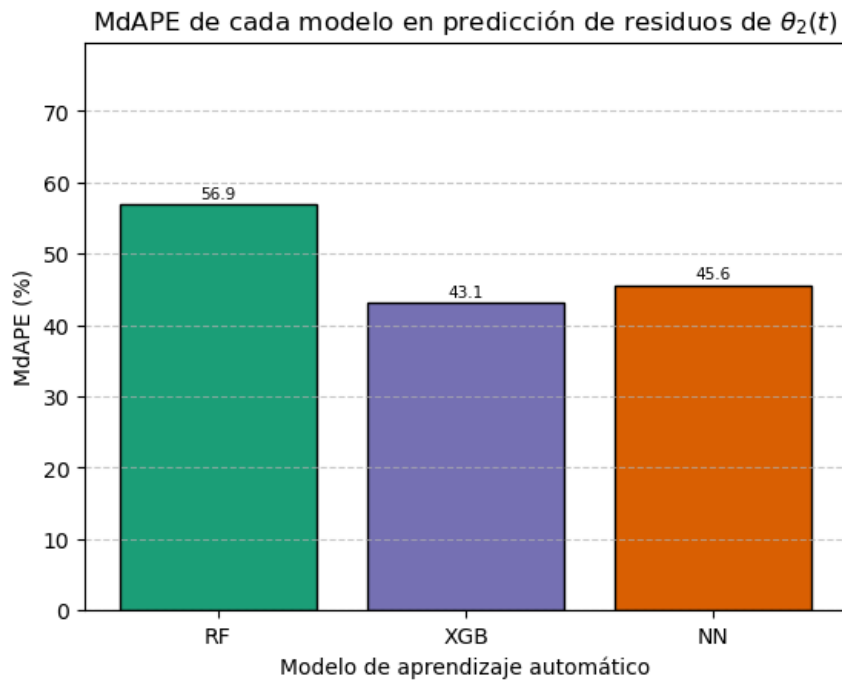


Figura 8.45: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

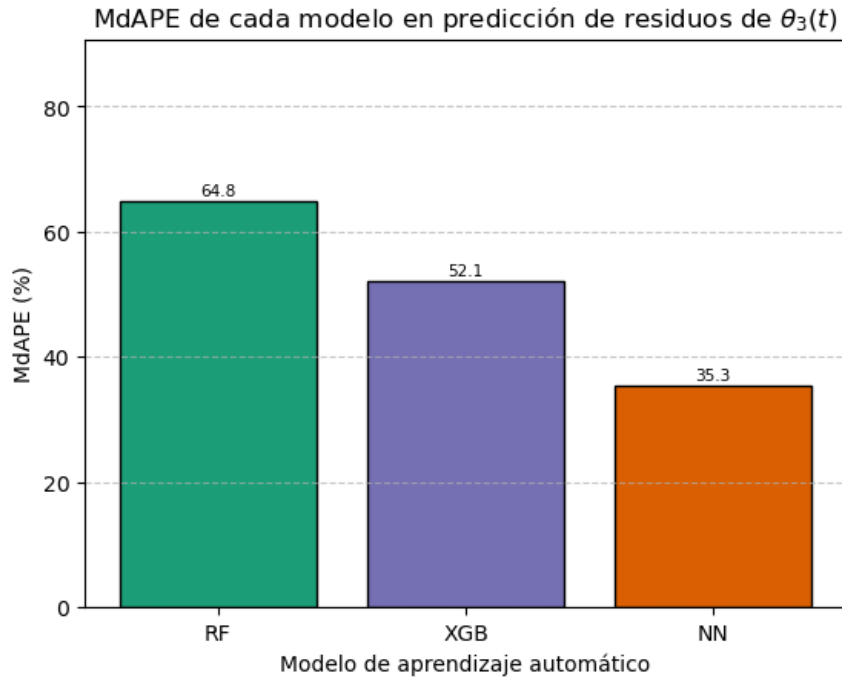


Figura 8.46: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_3(t)$. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

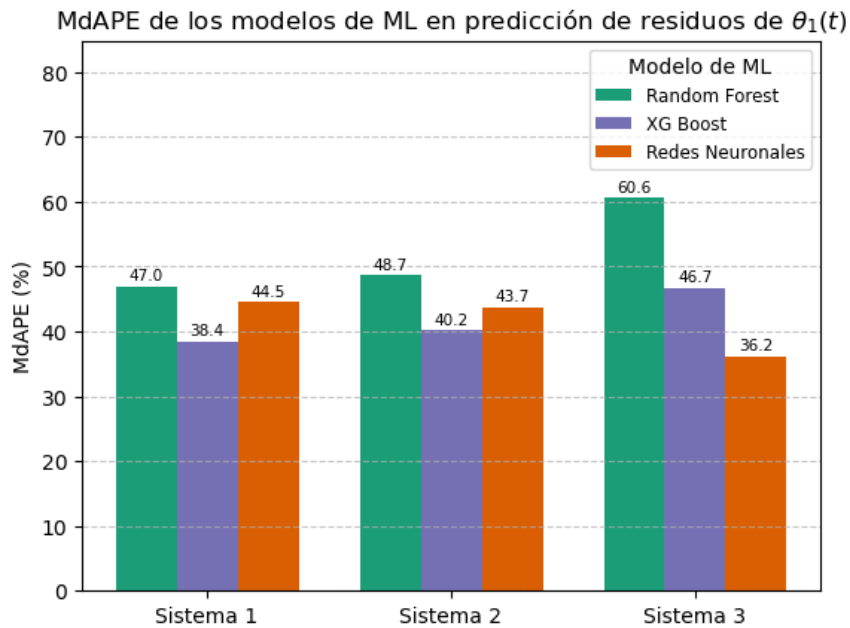


Figura 8.47: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

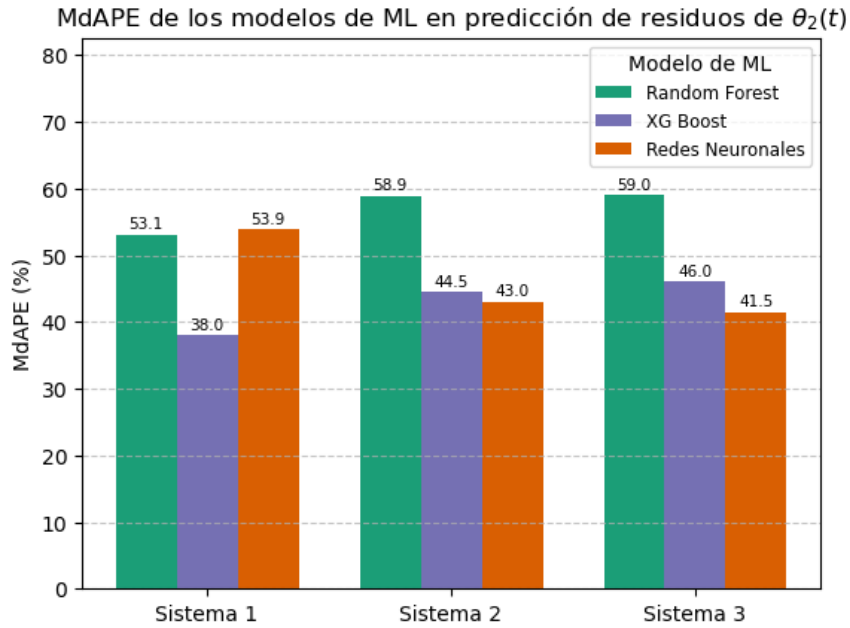


Figura 8.48: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

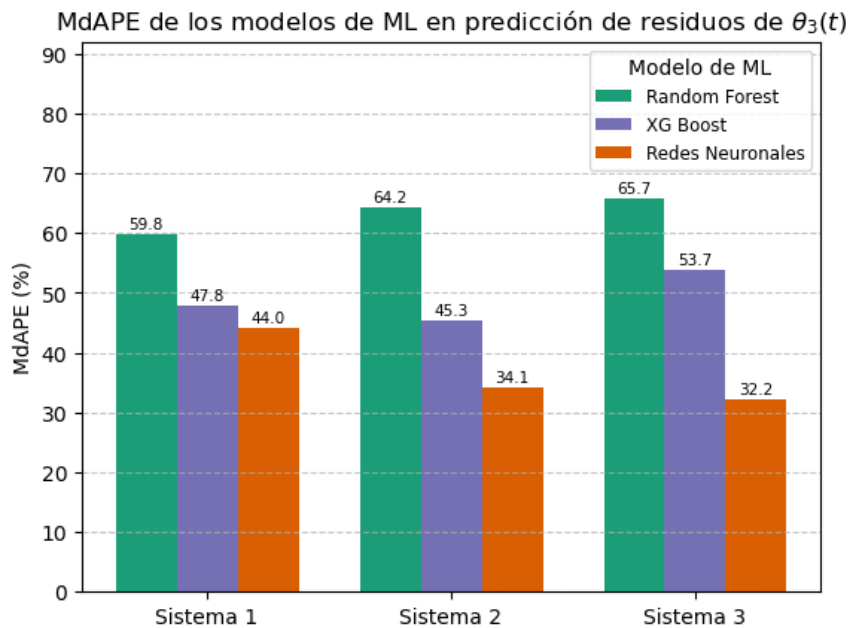


Figura 8.49: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_3(t)$ ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

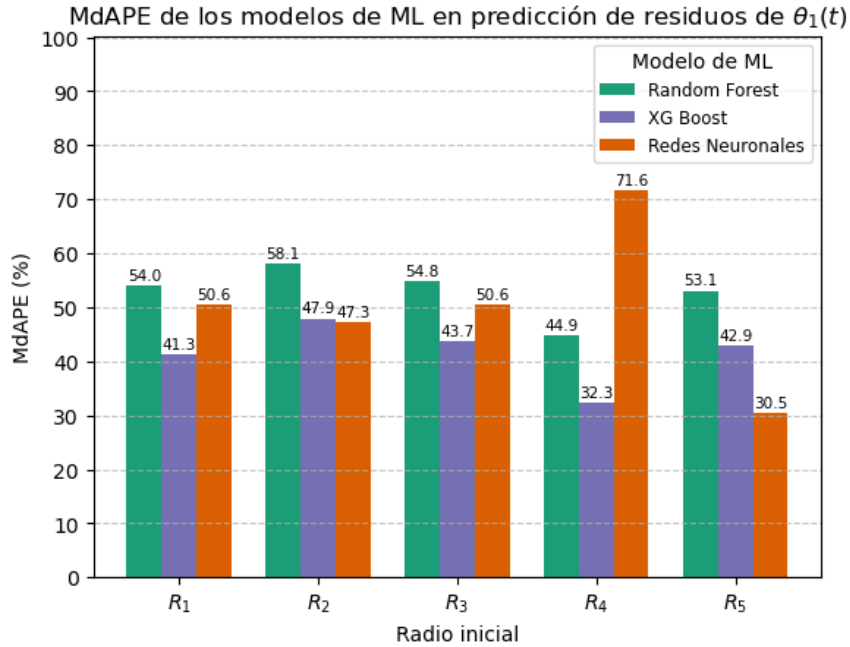


Figura 8.50: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_1(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

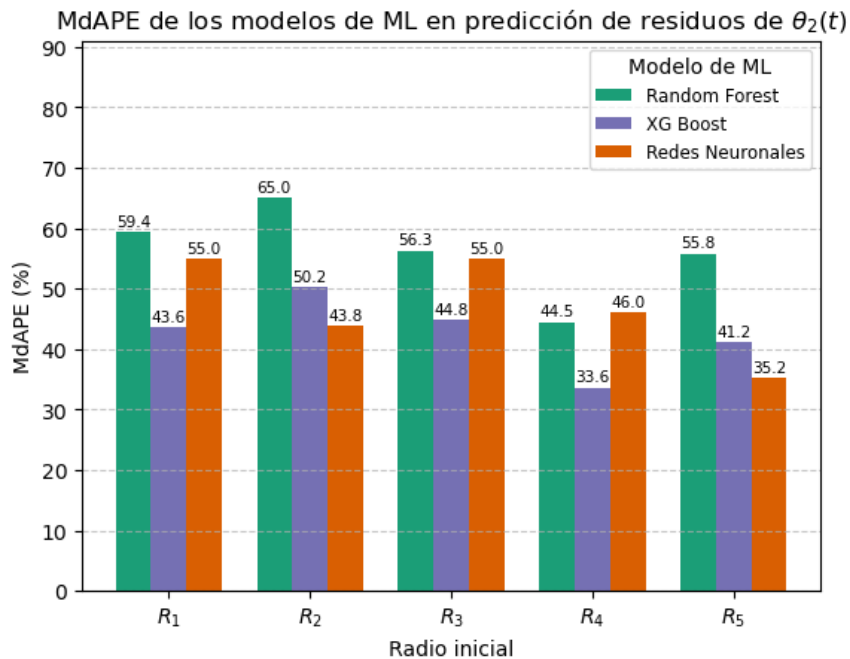


Figura 8.51: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

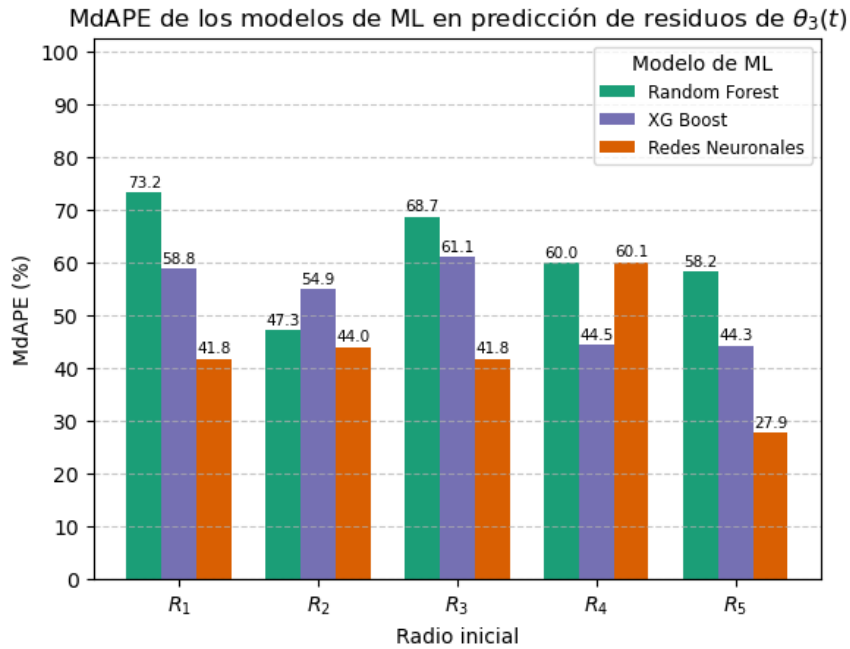


Figura 8.52: Resultado de la métrica de error porcentual $MdAPE$ para la fase de evaluación de los modelos de aprendizaje automático aplicados en la corrección de $\theta_2(t)$ ordenado por radio inicial. Se utilizó la media para los modelos de *Random Forest* y *XGBoost*, y la mediana para las redes neuronales *feedforward*

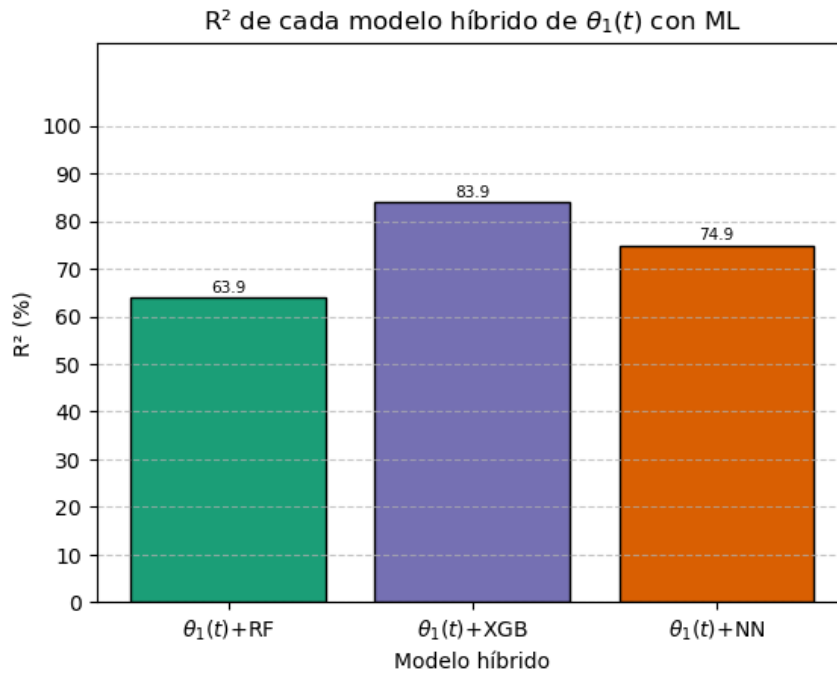


Figura 8.53: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

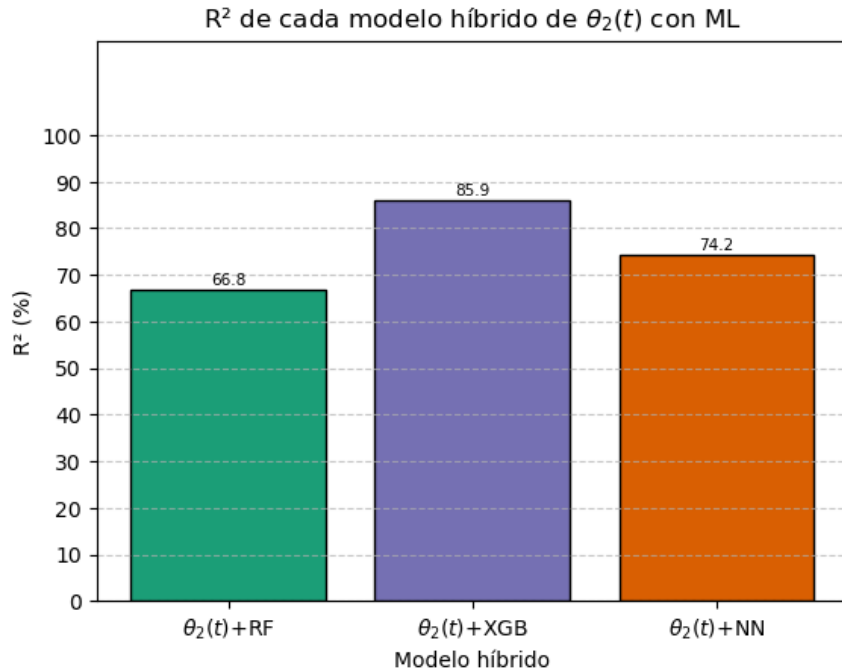


Figura 8.54: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

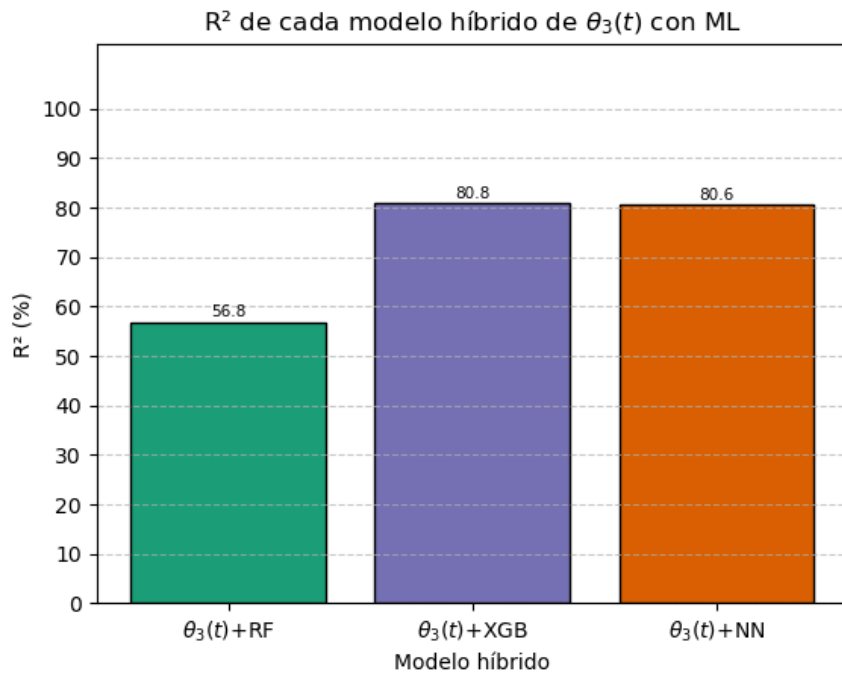


Figura 8.55: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

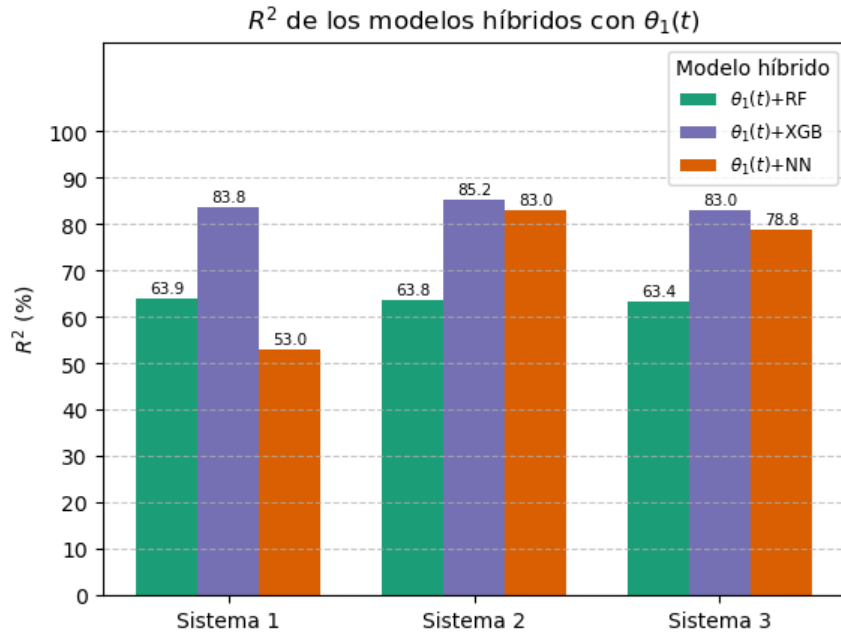


Figura 8.56: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

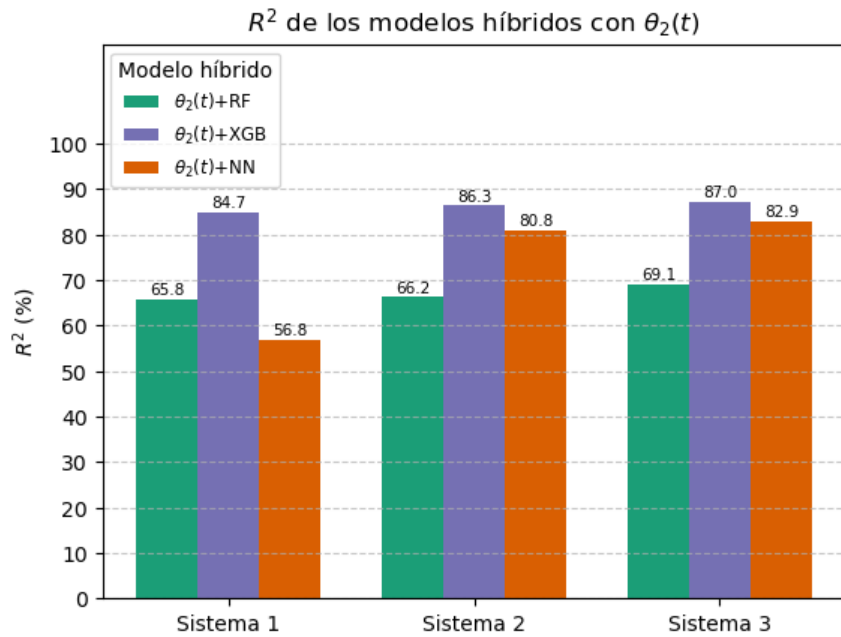


Figura 8.57: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

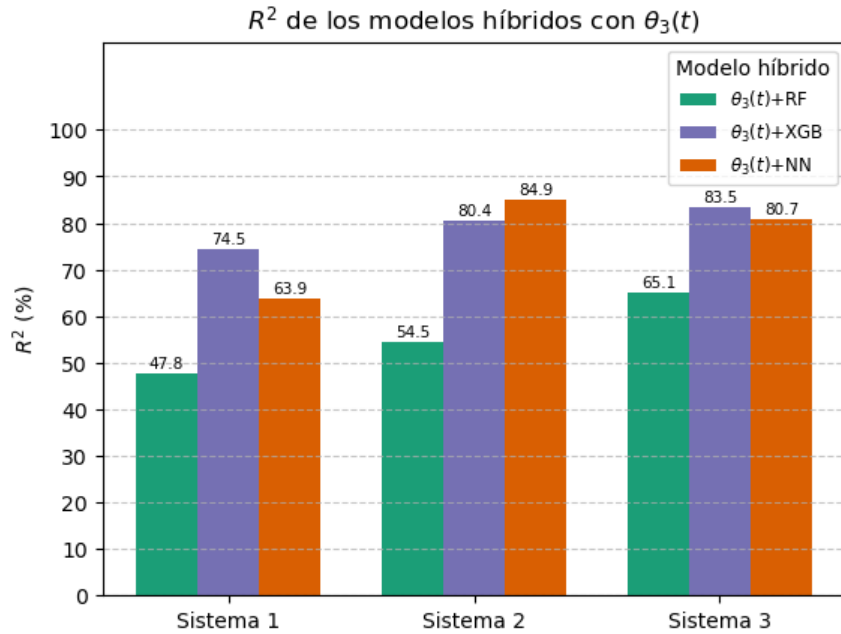


Figura 8.58: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por sistema. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

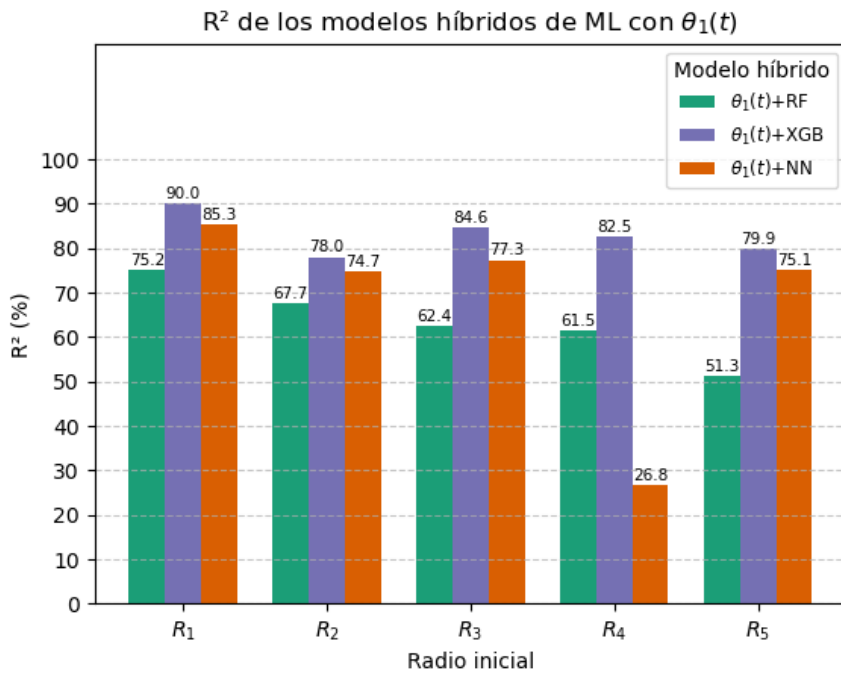


Figura 8.59: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

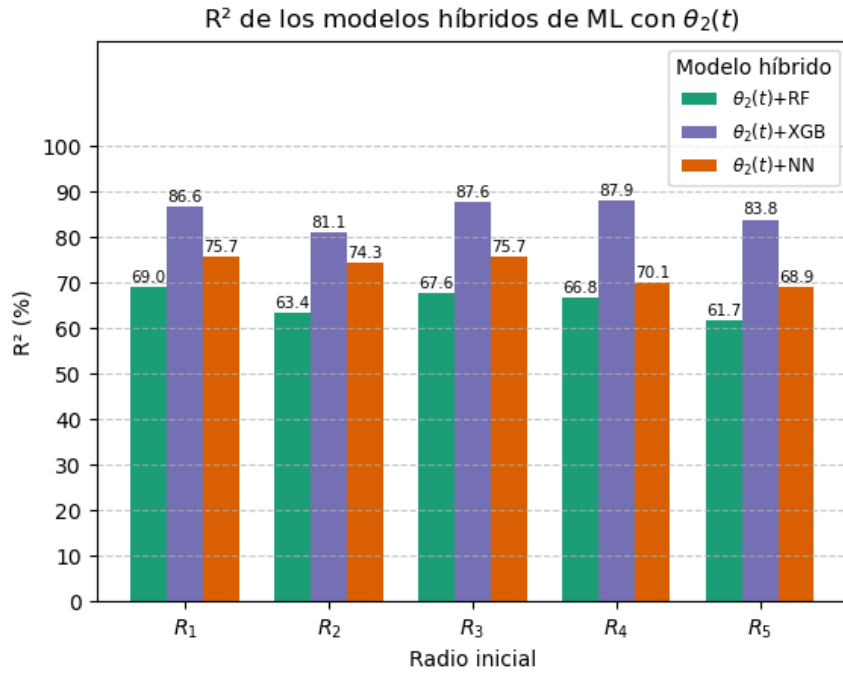


Figura 8.60: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_2(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central

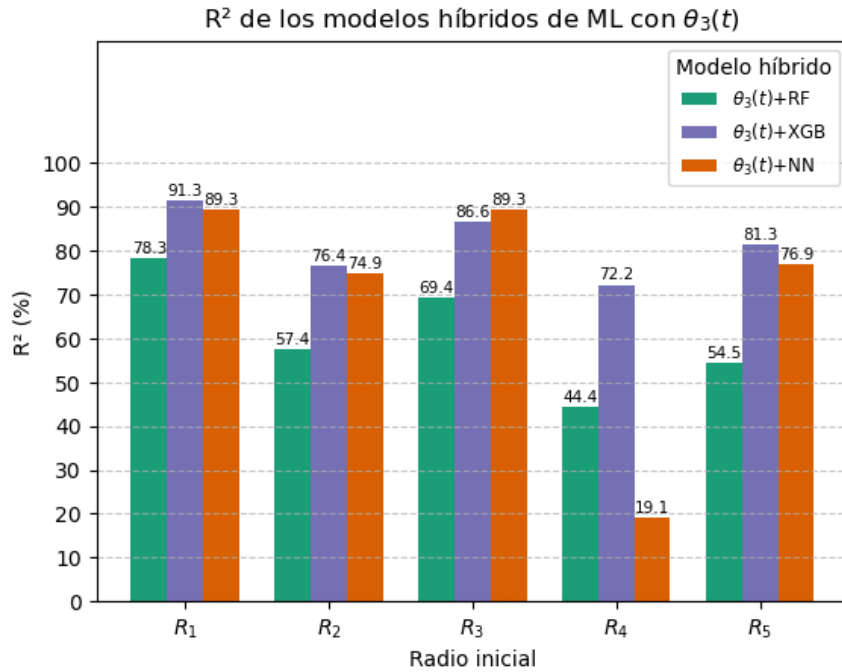


Figura 8.61: Coeficiente de determinación R^2 para los modelos híbridos compuestos por la solución $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático, ordenado por el radio inicial utilizado. Se utilizó la mediana como medida de tendencia central; la media fue usada en el radio 4 para el modelo híbrido con redes neuronales *feedforward* por 2 valores R^2 negativos de 3 que eran

8.3.4. Error de los modelos híbridos para predicción del ángulo azimutal

Similarmente a la coordenada anterior, se muestran gráficos de residuos estándar de los modelos híbridos para ϕ correspondientes a las gráficas mostradas en las Figuras 8.38, 8.39 y 8.40, cuadros con la métrica *MdAPE* para cada modelo y gráficos de barras comparativos entre los mismos.

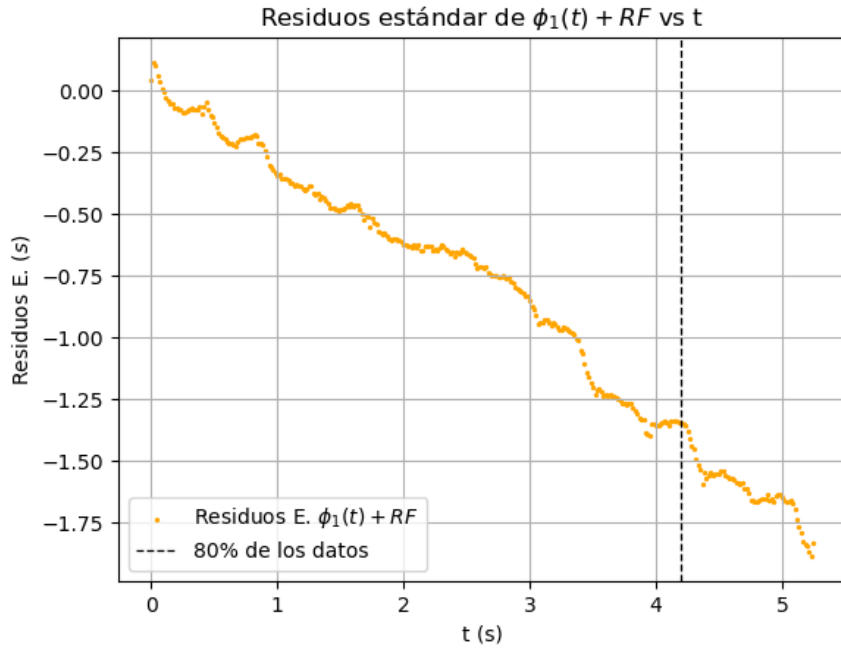


Figura 8.62: Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_1(t)$ con $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *Random Forest*, correspondiente al sistema 2, radio inicial R_1 , repetición 2

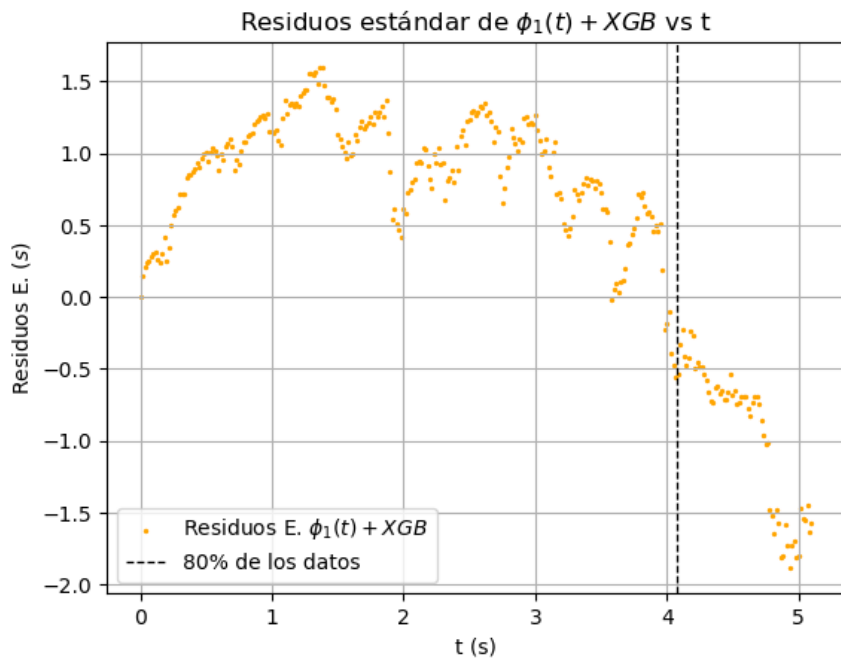


Figura 8.63: Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_1(t)$ con $\theta_1(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *XGBoost*, correspondiente al sistema 1, radio inicial R_3 , repetición 3



Figura 8.64: Residuos estándar de la solución híbrida de $\phi_3(t)$ con $\theta_3(t)$ y las correcciones realizadas por el modelo *XGBoost*, correspondiente al sistema 3, radio inicial R_1 , repetición 2

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_1(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	4.42	29.3	46.5	22.1	13.8	7.89	25.6	25.9	41.4
R_2	34.8	8.26	19.2	9.20	14.9	11.6	16.1	23.2	5.10
R_3	8.87	91.4	1.80	24.4	11.9	13.0	17.5	11.9	12.2
R_4	53.9	14.6	6.22	1.44	20.4	51.2	21.4	15.3	49.4
R_5	33.9	92.8	10.2	23.2	18.9	1.53	3.92	28.1	5.36
R_L	44.1	36.6	66.6	10.2	8.05	12.4	12.5	23.2	3.68

Cuadro 8.64: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo *Random Forest*

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_2(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	21.0	29.0	44.4	21.9	14.6	9.05	6.00	27.4	40.6
R_2	36.1	13.4	18.6	12.1	17.0	15.9	17.1	23.7	3.21
R_3	11.3	88.3	1.88	23.9	14.3	12.9	18.7	10.9	11.2
R_4	51.5	11.3	4.61	3.57	14.2	48.9	20.8	10.3	46.8
R_5	33.2	78.9	9.39	18.4	16.1	0.981	4.23	27.5	4.72
R_L	42.7	40.1	62.6	12.8	7.09	12.2	14.6	23.2	2.17

Cuadro 8.65: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo *Random Forest*

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_3(t)$ y <i>Random Forest</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	14.2	8.37	35.1	26.7	-
R_2	35.5	-	19.4	-	15.2	12.2	-	23.4	6.37
R_3	-	-	-	-	-	-	17.6	11.4	12.4
R_4	-	13.3	6.55	-	20.6	-	-	-	-
R_5	-	96.0	9.58	22.9	18.9	-	4.03	-	5.09
R_L	-	-	-	-	7.74	-	13.9	-	4.18

Cuadro 8.66: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo *Random Forest*

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_1(t)$ y <i>XGBoost</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	6.70	29.3	45.4	21.7	12.6	7.51	15.0	25.3	41.7
R_2	31.8	6.61	16.8	7.71	16.1	14.8	16.7	22.7	2.84
R_3	10.4	89.0	2.07	23.5	9.83	12.2	14.1	10.8	10.7
R_4	50.6	8.62	4.22	2.25	7.60	50.1	21.0	5.96	48.1
R_5	31.5	57.3	6.58	12.0	11.5	1.55	3.58	23.4	3.20
R_L	43.2	32.4	64.8	8.41	6.35	12.2	11.1	22.2	2.95

Cuadro 8.67: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo *XGBoost*

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_2(t)$ y <i>XGBoost</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	9.29	28.9	43.3	21.5	13.1	7.90	4.79	26.1	41.2
R_2	32.2	6.68	16.0	9.48	17.1	16.1	17.4	22.7	1.80
R_3	11.6	87.1	3.19	23.2	10.6	11.9	14.2	11.2	10.2
R_4	49.6	7.19	3.74	1.41	7.51	48.8	20.6	5.96	46.7
R_5	31.9	53.8	6.48	11.2	11.2	2.12	3.88	23.2	3.16
R_L	42.2	33.3	62.7	8.69	5.97	11.8	11.3	22.1	4.24

Cuadro 8.68: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo *XGBoost*

$MdAPE$ de Modelo Híbrido de $\phi_3(t)$ y $XGBoost$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	12.7	7.98	12.6	25.7	-
R_2	32.2	-	17.0	-	16.4	15.4	-	22.7	3.65
R_3	-	-	-	-	-	-	14.2	10.7	10.4
R_4	-	8.44	4.96	-	8.98	-	-	-	-
R_5	-	51.3	6.87	11.6	11.2	-	3.68	-	3.16
R_L	-	-	-	-	6.13	-	11.1	-	2.23

Cuadro 8.69: Métrica $MdAPE$ del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo $XGBoost$

$MdAPE$ de Modelo Híbrido de $\phi_1(t)$ y redes neuronales $feedforward$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	3.75	23.7	52.7	22.8	13.0	6.44	7.63	25.6	41.5
R_2	35.5	11.6	18.0	7.87	12.0	11.4	13.3	21.9	1.87
R_3	7.77	97.0	6.77	26.3	6.42	13.2	12.6	14.9	11.1
R_4	57.7	25.4	12.5	11.4	12.0	56.5	22.2	3.47	53.5
R_5	32.4	58.1	14.5	8.11	18.1	5.31	5.81	28.5	3.40
R_L	42.1	38.4	82.2	13.7	5.54	9.60	10.5	23.6	4.05

Cuadro 8.70: Métrica $MdAPE$ del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_1(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales $feedforward$

$MdAPE$ de Modelo Híbrido de $\phi_2(t)$ y redes neuronales $feedforward$ (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	3.96	34.1	45.0	22.3	13.8	11.1	2.05	24.8	42.0
R_2	58.2	11.3	18.9	9.53	19.4	24.3	17.9	21.7	0.806
R_3	10.9	87.2	5.06	23.7	13.1	15.2	14.1	12.6	10.6
R_4	45.0	12.4	6.79	8.65	21.6	49.8	21.8	3.28	49.1
R_5	36.3	45.5	4.84	6.20	14.8	4.77	5.95	15.0	2.08
R_L	42.9	32.0	65.2	10.9	8.88	12.6	11.8	24.1	9.78

Cuadro 8.71: Métrica $MdAPE$ del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_2(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales $feedforward$

<i>MdAPE</i> de Modelo Híbrido de $\phi_3(t)$ y redes neuronales <i>feedforward</i> (%)									
R_i	Sistema 1			Sistema 2			Sistema 3		
	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3	Rep. 1	Rep. 2	Rep. 3
R_1	-	-	-	-	10.3	5.38	60.8	22.9	-
R_2	28.9	-	23.2	-	13.0	15.3	-	20.7	1.21
R_3	-	-	-	-	-	-	16.0	9.28	12.0
R_4	-	17.6	9.39	-	14.9	-	-	-	-
R_5	-	11.7	5.80	22.4	17.4	-	5.35	-	5.56
R_L	-	-	-	-	7.12	-	7.82	-	6.58

Cuadro 8.72: Métrica *MdAPE* del modelo híbrido para ϕ formado por la solución $\theta_3(t)$ con las correcciones realizadas con el algoritmo de redes neuronales *feedforward*

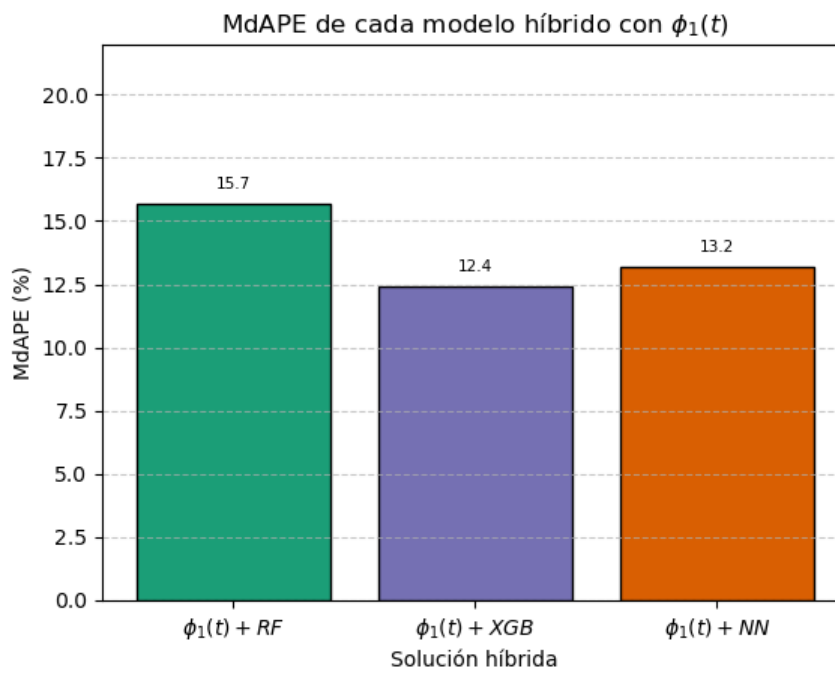


Figura 8.65: Métrica *MdAPE* de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$

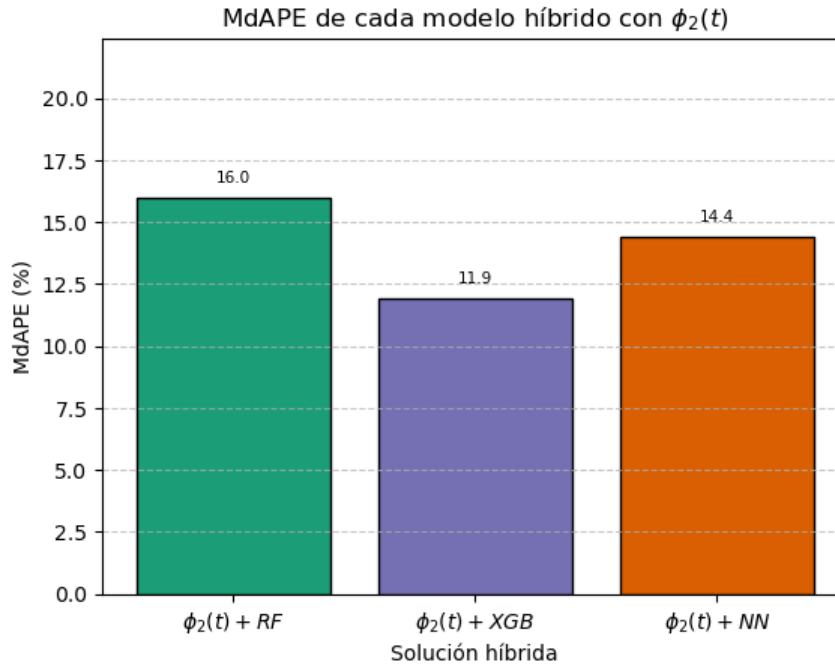


Figura 8.66: Métrica $MdAPE$ de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$

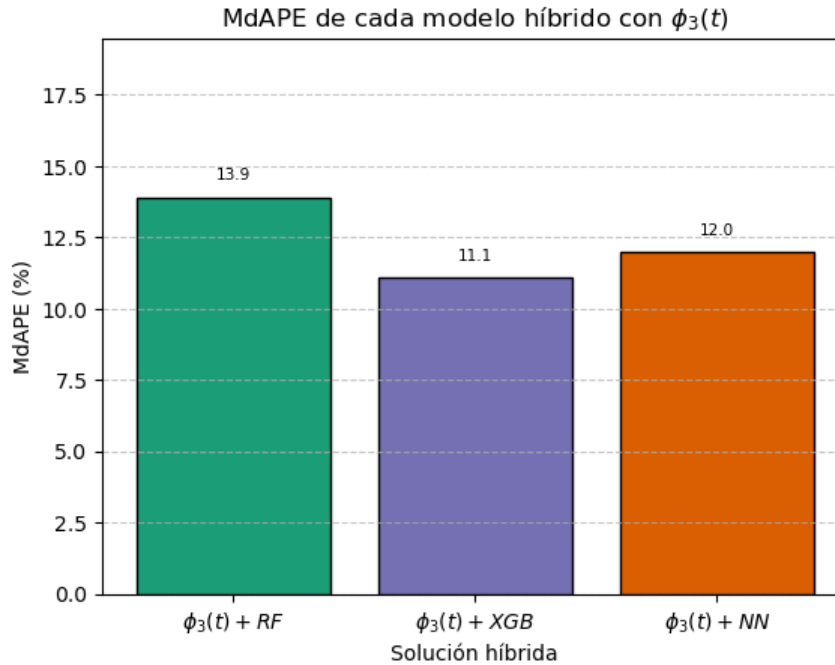


Figura 8.67: Métrica $MdAPE$ de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$

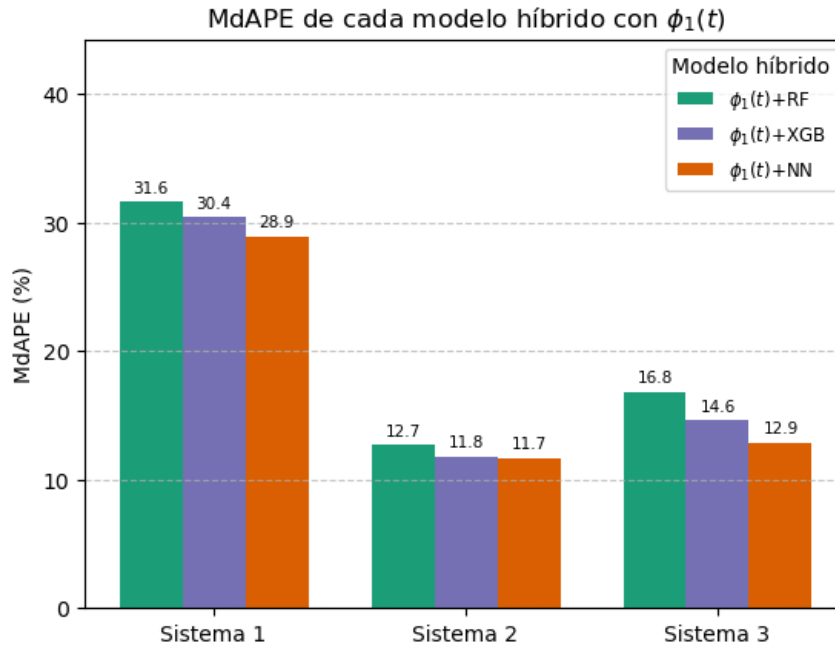


Figura 8.68: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$

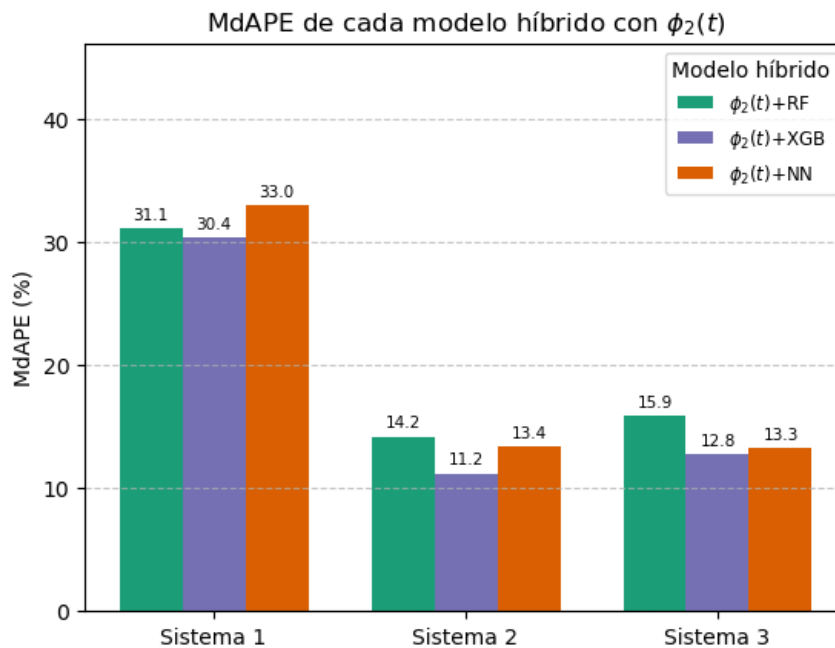


Figura 8.69: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$

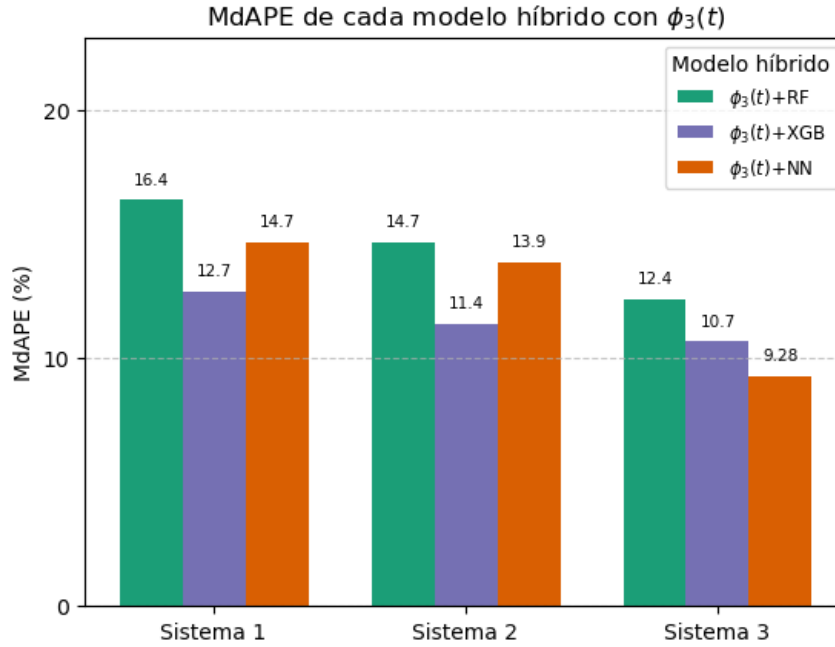


Figura 8.70: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por sistema, de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$

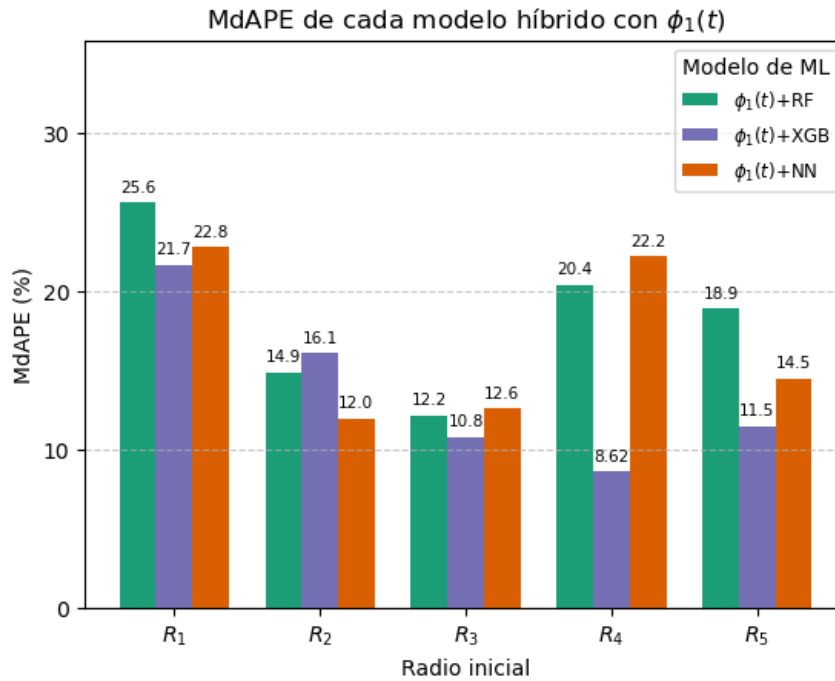


Figura 8.71: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_1(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_1(t)$

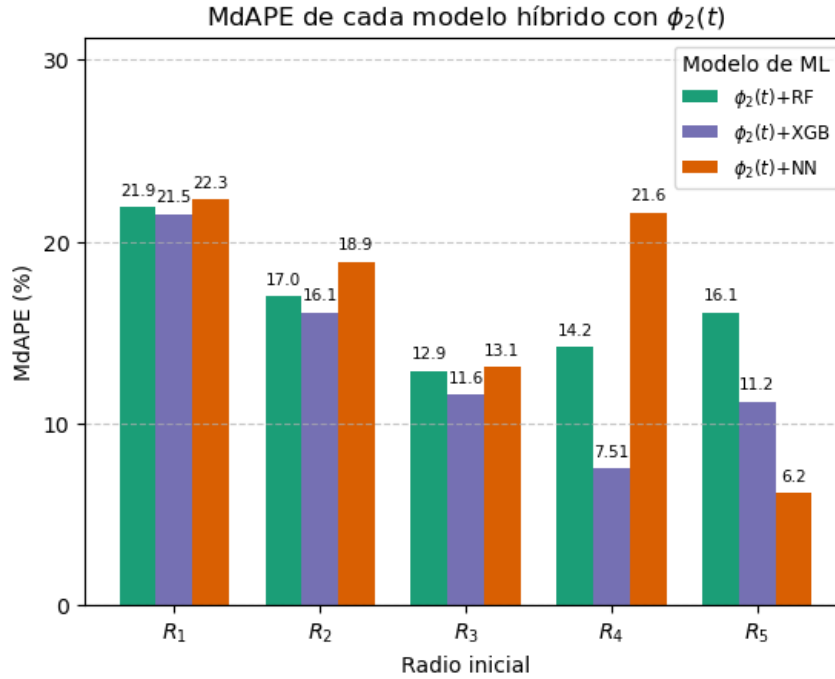


Figura 8.72: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_2(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_2(t)$

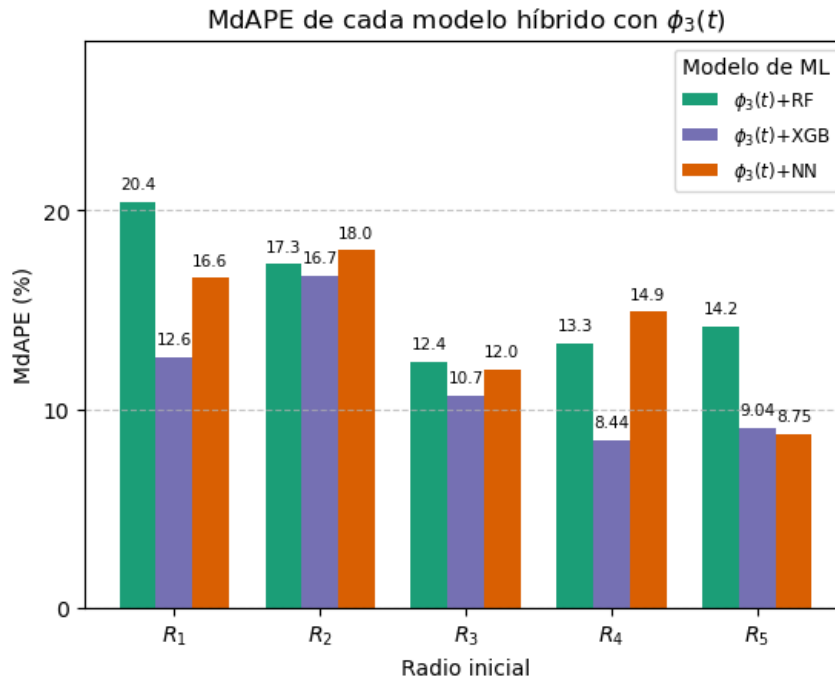


Figura 8.73: Resultados de la métrica $MdAPE$, ordenados por radio inicial, de los modelos híbridos con $\phi_3(t)$ y correcciones realizadas por los modelos de aprendizaje automático sobre $\theta_3(t)$

8.3.5. Comparación de la capacidad predictiva entre soluciones analíticas y modelos híbridos

Para el ángulo zenital θ , se utilizó como parámetro de comparación el coeficiente de determinación R^2 ; si bien es cierto que para las soluciones analíticas este se calculó en 1/3 de los datos de cada experimento, mientras que con los modelos híbridos se calculó para todos, se consideró válido usarlo porque los algoritmos de aprendizaje automático corrigieron cada modelo analítico para que teóricamente fuera aplicable en todo el dominio temporal; en otras palabras, el R^2 fue calculado en un dominio tal que las soluciones correspondientes fueron aplicables⁵. Para el ángulo azimutal ϕ , se utilizó la métrica de error porcentual $MdAPE$.

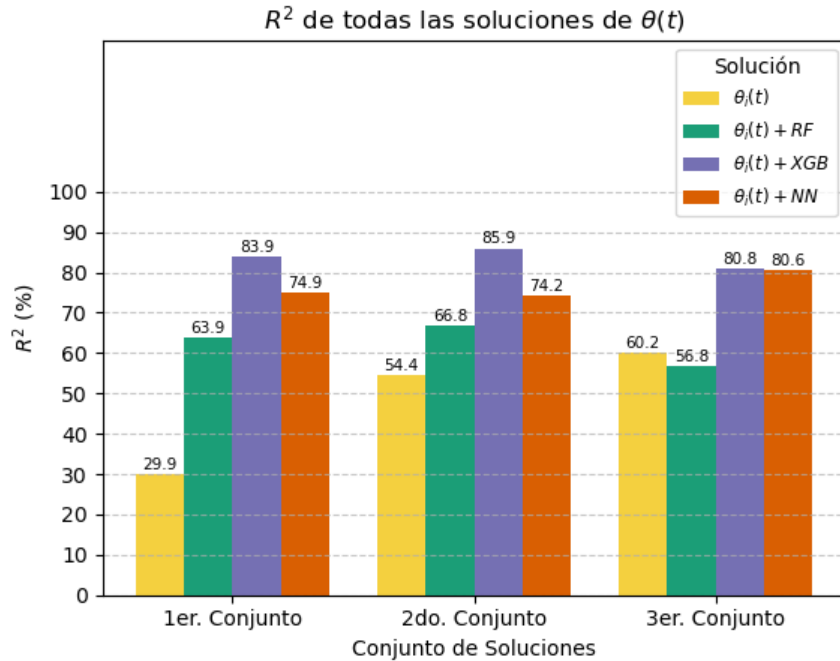


Figura 8.74: Gráfico de barras con la mediana de los coeficientes de determinación R^2 de cada solución (analítica e híbrida) correspondiente a la coordenada θ

⁵La aplicabilidad de un modelo se definió en este estudio como un dominio en el que la gran mayoría de experimentos no presentaran un R^2 negativo. En el caso de las soluciones analíticas, si se calculaba el R^2 en todo el dominio temporal, se obtenían siempre valores negativos, por eso se optó hacerlo en una fracción de los datos.

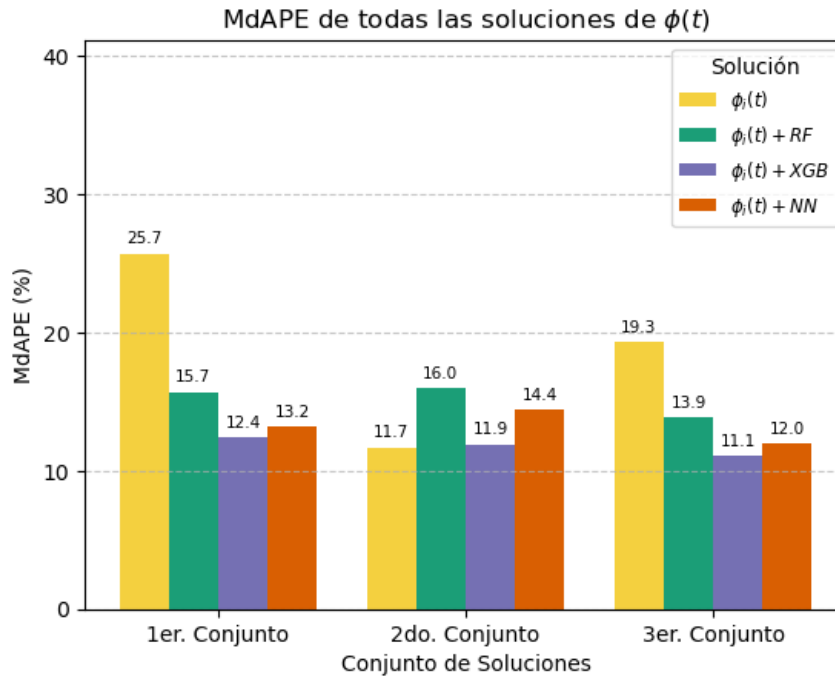


Figura 8.75: Gráfico de barras con la mediana de la métrica de error porcentual $MdAPE$ de cada solución (analítica e híbrida) correspondiente a la coordenada ϕ ; se utilizó el resultado medio para las soluciones analíticas y la mediana para los modelos híbridos

Discusión y análisis de resultados

En todo el proceso de grabación y obtención de datos se presentaron factores que determinaron directamente el desempeño y aplicabilidad de las soluciones y expresiones analíticas para los diferentes experimentos realizados sobre el péndulo esférico, de manera tal que las predicciones de unas propiedades y coordenadas angulares se vieron más afectadas que otras. Del mismo modo, condiciones experimentales, como la pérdida de energía y pequeñas contribuciones al hamiltoniano por la rotación de cuerpo rígido de las esferas, hicieron justificable la combinación de las 2 principales soluciones para la coordenada θ para lograr una descripción más exacta del ángulo en el tiempo. A continuación, se aborda el impacto de estos factores, *Tracker* como instrumento principal de medición, el desempeño del conjunto 3 de soluciones, la implementación de algoritmos de aprendizaje automático como método de corrección para los modelos analíticos, la aplicabilidad de los mismos y el efecto del uso de diferentes constantes l y m para formar cada sistema estudiado.

9.1. Impacto del cumplimiento de supuestos en las predicciones teóricas

9.1.1. Condiciones iniciales

Como fue indicado, las condiciones iniciales particulares que fueron estudiadas en este trabajo fueron $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = u_0$. Estas tuvieron un rol fundamental en todas las expresiones y propiedades teóricas deducidas: las soluciones para las ecuaciones de movimiento, el período de oscilación de θ y el ángulo extremo θ_f junto con su relación para la determinación del signo de la amplitud de oscilación. Es pertinente mencionar que, aunque se haya procurado el cumplimiento de las condiciones iniciales, esto no fue posible en todas las grabaciones, debido a que en el método de lanzamiento no se midió la ortogonalidad entre la regla y el piso, por lo que no se garantizó la condición $\dot{\theta}(0) = 0$; el resto sí se cumplió porque $\theta(0) = \theta_0$ solo tenía que ser una cantidad físicamente arbitraria entre 0 y π , $\dot{\phi}(0) = u_0$ representó el impulso tangencial ($u_0 > 0$) y $\phi(0) = 0$ podía ser ajustada rotando ligeramente el transportador en *Tracker* haciendo coincidir la masa al inicio del movimiento con el eje horizontal del plano polar (es una condición relacionada con el posicionamiento del sistema de coordenadas). En otras palabras, puede que algunos lanzamientos generaran $\dot{\theta}(0) \neq 0$.

En cuanto a las soluciones de las ecuaciones de movimiento, los valores θ_0 y u_0 aparecen explícitamente en las expresiones del conjunto 1 de soluciones ($\theta_1(t)$ y $\phi_1(t)$) (véanse ecuaciones (6.18) y (6.20)), volviéndolas las más sensibles a condiciones iniciales. En cuanto al conjunto 2, solo se depende de θ_0 y θ_f (que para esta solución fue un parámetro medido), reduciendo la dependencia. Finalmente, ya que el conjunto 3 son soluciones que combinan las primeras 2, es más dependiente que el 2, pero menos que el 1. Esto puede verse reflejado en las Figuras de la 8.18 a la 8.21 que indican el error de las soluciones aplicadas; nótese que, generalmente, el mejor modelo, bajo las métricas de *MAPE* y *MdAPE*, es $\theta_2(t)$, seguido por $\theta_3(t)$ y $\theta_1(t)$.

Se puede observar en algunos experimentos que los primeros puntos experimentales de la gráfica θ vs t no corresponden a un valor máximo o mínimo, lo cual no puede ser explicado por ninguna de las soluciones deducidas que son de la forma $A \cos(\omega t) + B$; la solución general, por lo menos en el caso de ángulo y variación pequeña, es una combinación lineal de senos y cosenos más una constante, y la condición inicial $\theta(0) = 0$ permite eliminar el coeficiente del seno, pero el hecho de que el movimiento inicie ($t = 0$) con un valor que no es un punto crítico indica que tal coeficiente podría no ser nulo, evidenciando así el incumplimiento de esta condición inicial, siendo esto una fuente de error en los modelos analíticos.

Respecto al período de oscilación τ , el método 1 (en el que se usa la relación de frecuencia angular) claramente depende del cumplimiento de las condiciones iniciales porque para su deducción se hizo uso de las soluciones analíticas para θ , sin embargo, esto no afectó significativamente a la estimación del período porque el error medio fue de 3.73% (véase Figura 8.29), y menor para la distribución por sistema y radio (véanse Figuras 8.30 y 8.31); el incumplimiento de $\theta(0) = 0$, como se mencionó anteriormente, modifica el hecho de que el movimiento no empieza con un punto crítico, pero el período parece no sufrir una alteración significativa. El método 2 (el de la integral) hace uso directo de todas las condiciones iniciales en la formulación del hamiltoniano del sistema; no obstante, como en el método 1, el incumplimiento de $\dot{\theta}(0) = 0$ en algunos experimentos no fue significativo porque el error medio fue de 2.78%, y menor para la misma distribución por sistema y radio; esto se debe principalmente a que el período con este método se obtiene mediante una integración convergente, en la que pequeñas perturbaciones en el hamiltoniano (como la que podría introducirse al usar $\theta(0) \neq 0$) o en su dominio no afectan significativamente al resultado; el tema del dominio se discute con detalle en el siguiente párrafo.

Por otro lado, en cuanto al cálculo del ángulo extremo θ_f , este presentó un error mayor, y una de las posibles razones fue el incumplimiento de $\dot{\theta}(0) = 0$. La expresión para θ_f nace del hamiltoniano del sistema, al igual que la del período, pero esta propiedad se basó en encontrar la primera asíntota diferente de $\theta = \theta_0$ de una función (el integrando), y esta podía variar trasladando el valor a lo largo del eje horizontal con una perturbación. La expresión para θ_f determina el intervalo de integración para el período τ , y ya que la integral es convergente, acortar o ampliar tal intervalo no introduce un error tan grande en comparación con el de la determinación misma de la asíntota (θ_f). Finalmente, la determinación del signo de la amplitud de oscilación (véanse Cuadros del 8.40 al 8.43) no fue afectada significativamente por el incumplimiento de la condición $\dot{\theta}(0) = 0$ porque, además de ser una propiedad cualitativa, este método se basó en evaluar la desigualdad entre las asíntotas θ_0 y θ_f ; es importante mencionar que en todos los experimentos, el signo de amplitud de oscilación fue coherente con la relación de desigualdad entre u_0 y $\sqrt{\frac{g}{l}} \sec \theta_0$ y, por lo tanto, predicho correctamente.

9.1.2. Ángulo zenital pequeño (radio inicial)

Este supuesto fue el principal acercamiento a una solución para las ecuaciones de movimiento de este sistema, pues se simplificaron con las aproximaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$ y permitieron obtener una ecuación desacoplada de segundo orden para el ángulo zenital θ . La amplitud máxima del ángulo θ en cada experimento fue mayor o igual a θ_0 , el cual está directamente relacionado, mediante un seno inverso, con el radio inicial del movimiento, es decir, a mayor radio inicial R_i , más

alejado está el experimento de ser un caso de ángulo pequeño, y las aproximaciones mencionadas anteriormente empiezan a ser una mayor fuente de error. En cuanto a θ , puede observarse en las gráficas de barras de las Figuras 8.22 y 8.24 que los resultados de las métricas $MAPE$ y $MdAPE$ de las soluciones analíticas, en general, aumentan con el radio inicial, notando que el subíndice de R se asocia de forma directa con la magnitud del error. Similarmente, en la gráfica de barras de la Figura 8.28 se puede apreciar que el coeficiente de determinación R^2 disminuye con el radio. Dado que la solución $\theta_1(t)$ fue obtenida con la resolución de la ecuación diferencial simplificada, tiene sentido que fuera la que en la mayoría de los casos presentó un mayor error, mientras que $\theta_2(t)$, puesto que no fue obtenida mediante la resolución directa de la ecuación, presentó un error menor; $\theta_3(t)$ al ser una combinación de las primeras 2, es más efectiva que $\theta_1(t)$ pero menos que $\theta_2(t)$ en términos generales.

Respecto al cálculo del período τ , se puede observar en la gráfica de barras por radio inicial de la Figura 8.31 que, en general, el error del método 1 se mantuvo estable, pero si se evalúan resultados de experimentos particulares con los radios iniciales más grandes, se aprecia que el período que se asocia de mejor manera a la oscilación (es decir, que se desfasa menos) es el correspondiente al método 2, razón por la que su error disminuye conforme la amplitud de oscilación aumenta. Esto se debe principalmente a que en el método 2 se plantea una integral que se deriva del hamiltoniano, en el que no se usaron las aproximaciones de $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, por lo que un ángulo mayor a $\pi/12$ no es una restricción para este cálculo y se hace más evidente con un radio inicial mayor. Sin embargo, considerando los errores obtenidos (menores al 4% en promedio), se puede establecer que ambos métodos son capaces de describir con exactitud el período de oscilación del ángulo zenital, siendo el de la integral el mejor de ellos.

Para el cálculo del ángulo extremo θ_f no se obtuvieron variaciones significativas en función del radio inicial (véase Figura 8.34), y esto se debe a que no se utilizaron aproximaciones de ángulo pequeño en el hamiltoniano del sistema, como fue mencionado en el párrafo anterior.

9.1.3. Variación angular zenital pequeña

Este supuesto, propio de la solución a las ecuaciones de movimiento, fue el que hizo posible la obtención de una solución analítica para la coordenada θ volviendo lineal su ecuación diferencial. A manera de estimación, se estableció que una variación pequeña presenta una diferencia porcentual de ángulos zenitales extremos (θ_0 y θ_f) del 40% respecto a θ_0 . A pesar de que solo 19 de 54 experimentos fueron un caso de variación pequeña (véase Cuadro 8.8), parece que esto no tuvo efecto en el desempeño de los modelos para θ , pues este solo disminuyó con el crecimiento de la amplitud del ángulo; hubo experimentos en los que se presentó un error mayor en casos de variación pequeña que grande. Se puede inferir que probablemente para que la variación influya significativamente en los resultados, esta debe ser mayor que la de los experimentos realizados en este trabajo.

9.1.4. Péndulo esférico como sistema conservativo

Todas las deducciones correspondientes al sistema del péndulo esférico, las existentes y las que son contribuciones de este trabajo, fueron realizadas desde una perspectiva conservativa, desde el uso de la ecuación de Euler-Lagrange, la cual, por lo menos en la forma que se conoce mayormente, es exclusiva para el uso de sistemas conservativos al no incluir algún parámetro de pérdida de energía. Respecto a la deducción del resto de propiedades, todas estas se basan en el hamiltoniano del sistema, en el que tampoco se consideró la pérdida de energía. Sin embargo, en el mundo experimental, el supuesto de sistema conservativo no se cumple en su totalidad, dado que los efectos de pérdida de energía se hacen evidentes con el tiempo.

En todos los experimentos realizados se puede notar el efecto de la pérdida de energía en las gráficas de θ vs t con dos fenómenos:

1. La disminución en amplitud de la oscilación, siendo esto más evidente en cada máximo y mínimo de los puntos experimentales. En los casos en los que el ángulo extremo θ_f fue un mínimo, la disminución del mismo con el tiempo fue mayor que en los experimentos en los que este parámetro fue un máximo.
2. Aumento del período de oscilación, lo cual se traduce en una frecuencia menor, y por lo tanto menor energía; esto se puede describir también como el desfase que se da entre los datos experimentales y las soluciones analíticas.

Por estas razones, se decidió aplicar las soluciones teóricas en $1/3$ del tiempo que duró cada experimento, porque era un dominio tal que la pérdida de energía tuvo un menor impacto en comparación con el resto de los valores temporales. Haciendo referencia al fenómeno 2, aunque se dé un desfase de período entre los datos experimentales y las soluciones, nótese que al principio del movimiento, en tiempos menores o iguales a $1/3$ del tiempo de cada experimento, estas soluciones lograron describir la evolución de la coordenada θ (como fue mencionado en párrafos anteriores, siendo $\theta_2(t)$ la que tuvo un desempeño general superior), incluyendo el período de oscilación inicial.

Similarmente, aunque $u_0 > 0$ se haya garantizado, la determinación del mismo introdujo una fuente de error: puesto que *Tracker* utiliza un método de diferencias discretas para el cálculo de las derivadas, esto es $\dot{\phi}(t = t_1) \approx \frac{\phi(t=t_1) - \phi(t=t_0)}{\Delta t}$, el valor inicial para $\dot{\phi}$ no es proporcionado y se tuvo que estimar con un promedio de los primeros 3 picos de la gráfica $\dot{\phi}$ vs t (dada su periodicidad), los cuales presentaron pérdida de energía, aumentando el error en el cálculo al subestimar ligeramente el resultado.

Se puede apreciar que la capacidad predictiva de las soluciones para $\theta(t)$ son, en general, mejores que las de $\phi(t)$. De igual manera, nótese que la que obtuvo un menor error fue la asociada a la función $\theta_2(t)$ (véanse Figuras 8.19, 8.21, 8.23 y 8.25). Las funciones del conjunto $\phi_i(t)$ aciertan en la forma de la gráfica formada por los puntos experimentales, la cual parece ser la de una función proporcional con perturbaciones oscilatorias; sin embargo, falla en la “pendiente” de la misma. En el párrafo anterior se mencionó que el valor utilizado para u_0 fue subestimado, por lo que al sustituir por algo mayor incrementaría la inclinación. No obstante, la mayor parte de las soluciones analíticas $\phi_i(t)$ se corregirían disminuyendo el valor de la constante $u_0\theta_0^2$, no aumentándolo; en todo caso, si la forma de arreglarlo sería incrementándolo (como es el caso de algunos experimentos), no lo modificaría lo necesario, puesto que la subestimación de u_0 fue ligera. Por estas razones, dado que las soluciones aciertan en las características generales de la función que representa la evolución de la coordenada ϕ , se propone que a las soluciones analíticas de $\phi(t)$ se les multiplique por un factor corrector para que mejore la capacidad predictiva de este conjunto de soluciones.

En el párrafo anterior se discutió una forma en la que las soluciones para $\phi(t)$ se pueden mejorar, pero no se habló sobre el principal origen del error de las mismas. Se hizo el supuesto de conservación del momento angular, lo cual se cumpliría en un sistema ideal dado que esta propiedad la indica la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada ϕ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \tag{9.1}$$

lo cual dio lugar a la solución expresada en la Ecuación (6.5). Teniendo en consideración que las soluciones $\phi_i(t)$ fallaron sistemáticamente en la descripción de la coordenada, se puede establecer que el momento angular de ϕ no se conservó en la mayoría de los experimentos realizados con los sistemas 1, 2 y 3.

9.2. *Tracker* como instrumento principal de medición

En el Capítulo 7 (Metodología), se agregó información acerca de la precisión que se utilizó, por lo que es válido preguntarse si *Tracker* es un instrumento ideal para un trabajo como este, o si uno mejor haría una diferencia apreciable en los resultados. En el caso de distancias, la incertidumbre fue de 5×10^{-4} m, por lo que los factores significativos de error fueron la calibración y la recolección manual de los datos (por no usar la función de *autotracking*¹). El ángulo zenital no se midió directamente con *Tracker*, sino con la Ecuación (7.2) por la simetría esférica, cuyo error se estimó con la (8.1); al aplicar esta última expresión, todas las incertidumbres obtenidas fueron de 3×10^{-5} rad (véase Cuadro 8.1). Por estas razones, para la medición de ambas coordenadas angulares del sistema, el software utilizado fue exacto (por no ser derivadas temporales, lo cual se discute a continuación) y preciso.

Por otro lado, independientemente de la resolución de la rapidez angular azimutal, dada la naturaleza del método de diferencias discretas enunciado anteriormente en la Sección 9.1.4., estos valores presentan un mayor error² que las coordenadas angulares, por lo que es un caso de una medición inexacta. Estos valores para $\dot{\phi}(t)$ fueron importantes porque era una de las variables con las que los modelos de aprendizaje automático trabajaron para hacer correcciones. El uso de un instrumento de medición que haga mediciones de $\dot{\phi}(t)$ con un mayor grado de exactitud representa un potencial de mejora general en los resultados, desde la determinación de u_0 hasta el entrenamiento de los algoritmos de *machine learning*.

9.3. Desempeño de la combinación de soluciones para descripción de las coordenadas

Analizando los resultados obtenidos, se notó que, en algunos experimentos, una solución, generalmente $\theta_2(t)$, describía la coordenada θ desde $t = 0$ hasta $t = \tau/2$, y otra, $\theta_1(t)$, desde $t = \tau/2$ hasta $t = \tau$; esto probablemente debido a la contribución del momento de inercia de la esfera como cuerpo extenso y la pérdida de energía. Por esta razón, se construyó una solución que combinaba ambas mediante una serie de Fourier de una función por partes: $\theta_3(t)$. Si bien es cierto que el modelo analítico con mejor desempeño general fue $\theta_2(t)$, hubo casos en los que el error estimado por las métricas *MAPE* y *MdAPE* correspondientes a $\theta_3(t)$ fue de los menores que se obtuvieron (véanse Figuras 8.22 y 8.24). Del mismo modo, se dieron casos en los que el coeficiente de determinación R^2 de $\theta_3(t)$ fue de los mayores que se alcanzaron (véanse Figuras 8.26, 8.27 y 8.28); esta característica se debe principalmente a que esta solución tomó en cuenta la amplitud intercalante de los experimentos en los que se aplicó. Nótese que conforme el radio fue mayor, el error aumentó y el coeficiente de determinación de $\theta_3(t)$ disminuyó, debido a que una parte fundamental de esta solución, $\theta_1(t)$, está sujeta a la restricción de ángulos pequeños.

En cuanto al ángulo azimutal, no se observó una mejora significativa en el desempeño del modelo $\phi_3(t)$; sin embargo, aunque en algunos casos superó a $\phi_2(t)$, el comportamiento general fue que presentó un error cuyo valor se encuentra entre los correspondientes a las primeras 2 soluciones, como era natural de esperar. La principal fuente de error fue la no conservación del momento angular de ϕ , es decir, la utilización de la relación entre $\dot{\phi}$ y θ (véase Ecuación (6.5)).

¹No se utilizó la función de *autotracking* en este trabajo porque en algunos cuadros de cada video, la esfera se perdía unos segundos al pasar por debajo del brazo horizontal (lo cual es otra fuente de error), por lo que se recolectaron los datos de forma manual.

²Al asumir $\dot{\phi}(t)$ como una función lineal por partes y no considerar su naturaleza como una curva suave (diferenciable) en todo su dominio.

9.4. Implementación de modelos de aprendizaje automático como método de corrección

Además de los resultados de las métricas de error y el coeficiente de determinación R^2 para los modelos analíticos, es necesario analizar sus residuos. Aunque las soluciones se hayan aplicado en un dominio temporal en el que la pérdida de energía fue menor, sus gráficas de residuos presentaron una tendencia clara, lo cual indica que realmente no eran los mejores modelos para describir el fenómeno, lo cual se sabía con anticipación considerando lo discutido anteriormente acerca de los supuestos, que no se cumplieron en su totalidad. En cuanto a los residuos, al presentar un patrón notable, fueron ideales para que modelos de aprendizaje automático aprendieran de ellos y así corrigieran los modelos analíticos.

9.4.1. Corrección de soluciones para el ángulo zenital

Los modelos de aprendizaje automático empleados para la predicción de residuos presentaron un diferente rendimiento dependiendo de la solución que corrigieron. Para $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, el mejor modelo, en términos de error, fue *XGBoost*, seguido del de redes neuronales *feedforward* y *Random Forest* (véanse Figuras 8.44 y 8.45), mientras que para $\theta_3(t)$ el mejor fue el de redes neuronales *feedforward*, seguido de *XGBoost* y *Random Forest* (véase Figura 8.46); esto pudo haberse debido a que el patrón de los residuos asociados a $\theta_3(t)$ era más complejo que el de los demás, razón por la que las redes neuronales *feedforward* superaron a los otros modelos. Del mismo modo, nótese que no se presentó una relación directa (creciente) entre el error y la magnitud del radio inicial, siendo esto una mejora frente a las soluciones analíticas.

En cuanto al coeficiente de determinación R^2 , para todos los modelos híbridos $\theta_i(t) + ML$, la corrección por parte de *XGBoost* explicó un mayor porcentaje de las mediciones, seguido de redes neuronales *feedforward* y *Random Forest*; como puede verse en las Figuras de la 8.56 a la 8.58, esta característica también se presentó en todos los sistemas. De la misma manera que el error, este parámetro eliminó la restricción de ángulo pequeño al no disminuir con el aumento del radio inicial, a excepción del modelo $\theta_1(t) + RF$ (véase Figura 8.59). Sin embargo, generalmente se obtuvieron mayores valores de R^2 en el radio inicial R_1 , puesto que se realizó la menor corrección debido a que es la región en la que las soluciones base (las teóricas) fueron más aplicables.

Teniendo en consideración que los residuos de las soluciones analíticas, tanto de θ como de ϕ , presentaron residuos con un patrón claro y con una varianza creciente, se puede establecer que los modelos híbridos realizados incorporando correcciones sobre $\theta_i(t)$ por parte de los algoritmos de aprendizaje automático tuvieron un mejor desempeño al presentar residuos con una tendencia significativamente menos evidente y una banda de residuos con un ancho más estable, en otras palabras, con varianza constante desde un punto de vista estadístico. La última ventaja mencionada tiene una implicación de suma importancia: muchas de las soluciones híbridas fueron aplicables en todo el dominio temporal, es decir, tuvieron un buen rendimiento independientemente de si la región era la inicial (menor pérdida de energía) o la final (evidente pérdida de energía), eliminando así el desfase entre solución y curva experimental presentado anteriormente, causado por el incumplimiento del supuesto de sistema conservativo.

Por haber utilizado un *split* 80-20 para la partición de los datos, en todas las gráficas relacionadas con modelos de aprendizaje automático se dibujó una línea punteada que indica dónde termina el 80% de las mediciones de cada experimento; el objetivo de esto fue evaluar el error en ambas regiones. Nótese que en las gráficas θ vs t , a la derecha de la línea punteada fue donde se hicieron las correcciones con mayor error, siendo esto más evidente en las realizadas por el modelo de redes neuronales *feedforward*; esto también puede apreciarse en los gráficos de residuos correspondientes al presentar las correcciones que están a más desviaciones estándar.

Es importante mencionar que, fundamentado en lo anteriormente discutido, los modelos híbridos $\theta_i(t) + ML$ fueron significativamente mejores en capacidad predictiva que los modelos analíticos $\theta_i(t)$. Esto se puede ver gráficamente en la Figura 8.74, siendo esto un indicador de que los modelos de aprendizaje automático, sobre todo el modelo *XGBoost*, son una herramienta útil y efectiva para la corrección de soluciones existentes y, por lo tanto, mejorar predicciones.

9.4.2. Corrección de soluciones para el ángulo azimutal

Si bien es cierto que por los resultados de la aplicación de las soluciones analíticas $\phi_i(t)$ se planteó que la expresión de la coordenada ϕ en términos de θ no era la adecuada para los experimentos realizados, la utilización de la relación integral haciendo la sustitución $\theta_i(t) \rightarrow \theta_i(t) + ML$ confirmó esta hipótesis. Al nuevamente utilizar la relación de la Ecuación (6.5) para describir ϕ , se generó un modelo con menor error, el híbrido, y se obtuvieron mejores resultados bajo una perspectiva general, ya que los valores de *MdAPE* fueron menores, pues hubo experimentos en los que la solución corregida fue mucho más exacta y precisa que el modelo analítico, como por ejemplo el de la Figura 8.39. No obstante, de igual manera, en varios casos este modelo híbrido presentaba resultados con errores sistemáticos de subestimación y sobreestimación, o una combinación de ambos errores por fases (como en la Figura 8.63), lo cual se puede apreciar en los gráficos de residuos, además de que se presentó una tendencia clara en todos.

Los modelos híbridos $\phi_i(t) + ML$ también fueron mejores que los modelos analíticos para la descripción de esta coordenada, como se muestra en la Figura 8.75; sin embargo, como modelos, no fueron los mejores para describirla por la distribución del error. Por lo tanto, con estos resultados se puede establecer que el momento angular de ϕ no se conservó en la mayoría de los experimentos, solo lo hizo en los casos en los que la curva se ajustó como en la Figura 8.39; de igual forma se aprecia el efecto del *split* 80-20, al ser más notable la bifurcación entre los datos experimentales y la curva naranja.

9.5. Impacto de los valores de largo de la cuerda y la masa

En general, considerando como un todo el desempeño de modelos, cálculo de período y ángulo extremo, no se puede concluir que el error de los resultados dependiera del sistema en que se realizaron las mediciones; sin embargo, se pueden hacer observaciones puntuales. En cuanto a modelos analíticos de θ , se obtuvo el menor *MdAPE* y el mayor R^2 en el sistema 3, al igual que el error en el cálculo del período de oscilación con los 2 métodos. Con los modelos híbridos de θ , no se apreciaron diferencias significativas en el *MdAPE* y el R^2 entre cada sistema, con excepción del *MdAPE* de $\theta_1(t) + RF$ del sistema 3, en el que el error fue mayor; para los modelos híbridos de ϕ , se cuantificó un menor error en los sistemas 2 y 3. Estas diferencias entre sistemas probablemente estén relacionadas con la masa, pues m_1 , al ser la de menor valor, pudo haber ocasionado que la cuerda no se mantuviera completamente estirada y tensa durante todo el tiempo que duró cada experimento, y se generaran oscilaciones irregulares³ de la masa; por otro lado, el alto desempeño del sistema 3 se puede explicar con que la masa m_3 , al ser la mayor de todas, hizo que sí se cumpliera lo anteriormente descrito y evitó los movimientos erráticos de la masa, y así los modelos analíticos fueran más aplicables (porque en ellos solo se consideró la cuerda completamente estirada y tensa, y se asumió una masa puntual) y los modelos de aprendizaje automático tuvieran una menor dificultad en la identificación de los patrones de movimiento. Nótese que el diámetro de la masa del sistema 3 fue el mayor de todos, pero esto, a excepción de alejarse del supuesto de masa puntual e introducir más error en la recolección manual de los datos, no tuvo un efecto apreciable en los resultados.

³Una palabra coloquial para este movimiento errático es “bamboleo”.

La finalización de la presente tesis en sus etapas de desarrollo teórico, construcción del sistema físico, grabación de experimentos, extracción y procesamiento de datos, aplicación de las expresiones teóricas, entrenamiento y evaluación de los modelos de aprendizaje automático, creación e implementación de modelos híbridos y comparación de resultados, se puede concluir lo siguiente:

1. Se lograron resolver las ecuaciones de movimiento del péndulo esférico con aproximaciones armónicas y baja variación de θ , proponiendo 2 modelos adicionales que describieron satisfactoriamente la coordenada θ . Se aportaron a la teoría expresiones matemáticas para propiedades del sistema: frecuencia angular aproximada de θ , período integral, ángulo extremo θ_f y su valor límite, y un método para predecir el tipo de oscilación.
2. El período obtenido evaluando la integral presentó un menor error que la aproximación, siendo esto más evidente en radios iniciales mayores; ambos métodos fueron exitosos presentando porcentajes de error menores al 4% en promedio. La expresión para el ángulo extremo presentó un error medio menor al 10% por no cumplir la condición $\dot{\theta}(0) = 0$ en todos los casos. Se predijo el tipo de oscilación correctamente en el 100% de los experimentos .
3. Los modelos analíticos ($\theta_i(t)$, $\phi_i(t)$) que presentaron menor $MdAPE$ fueron los del conjunto 2, seguido del 3 y 1, llegando a un valor medio de (18.0%, 11.7%), (20.6%, 19.3%) y (20.9%, 25.7%), respectivamente. En cuanto al R^2 de $\theta(t)$, el mayor fue el de $\theta_3(t)$ (60.2%), seguido de $\theta_2(t)$ (54.4%) y $\theta_1(t)$ (29.9%). Estas fueron aplicables en un dominio de menor pérdida de energía y su desempeño dependió inversamente de la amplitud de oscilación de θ (asociado a radio inicial).
4. Para la coordenada θ , los modelos híbridos presentaron coeficientes R^2 mayores (excepto por parte de $\theta_3(t) + RF$); estos se pudieron aplicar en todo el dominio temporal y su desempeño fue independiente del radio inicial. Para ϕ , se obtuvieron errores menores, excepto para el segundo conjunto de soluciones. El algoritmo *XGBoost* realizó las mejores correcciones, seguido de redes neuronales *feedforward* y *Random Forest*. Los modelos híbridos para ϕ no eliminaron la tendencia en los residuos, ni estabilizaron el ancho de la banda; por tanto, aunque hayan disminuido el $MdAPE$, no fueron soluciones adecuadas.
5. Se realizó de forma satisfactoria un trabajo de investigación en el que se hizo una propuesta de aporte a la teoría del péndulo esférico y se combinaron modelos analíticos y algoritmos de aprendizaje automático para mejorar las predicciones de la evolución temporal de las coordenadas.

Se identificaron potenciales de mejora en el área experimental de este trabajo de investigación en caso de que un lector decida replicar los resultados o realizar proyectos similares con modelos analíticos y algoritmos de aprendizaje automático:

1. Utilizar una herramienta de recolección de datos que utilice un mejor método que el de diferencias finitas para estimar rapidezces en un instante $t \approx 0$ para no hacerlo indirectamente, o, en su defecto, grabar con un mayor número de cuadros por segundo.
2. Para el enfoque de masa puntual, se recomienda utilizar esferas más densas, para que su energía cinética rotacional represente una menor contribución al hamiltoniano y para que exista menor incertidumbre en la medición de la posición de su centro de masa sobre el plano polar; si se desea reducirla más, resaltar el punto en el que se conecta la cuerda con la masa.
3. Idear un método (o mecanismo) de lanzamiento que garantice la condición inicial $\dot{\theta}(0) = 0$ para minimizar el error y aumentar la bondad de ajuste de las soluciones analíticas.
4. Grabar 2 videos en simultáneo (uno adicional, desde una vista lateral) por cada experimento y sincronizarlos para utilizar coordenadas cilíndricas (lo que se hizo en este trabajo, pero considerando z) y así permitir el estudio de casos en los que $\theta > \pi/2$ evaluando el signo de z .
5. Para hacer experimentos con el objetivo de comprobar la propiedad deducida en la Ecuación (6.95), que es algo que no hizo en este trabajo por el montaje construido (por la existencia del brazo del mismo), se recomienda hacerlo amarrando la cuerda a un cilindro delgado con largo mayor a l , colgado del techo; de esta manera, la cuerda no se enrollará al aplicar una rapidez angular azimutal inicial muy grande.
6. Ajustar los hiperparámetros de los algoritmos de aprendizaje automático utilizados para que puedan eliminar por completo la tendencia en los residuos de los modelos híbridos.
7. Diseñar un experimento que evidencie la relación de frecuencia angular entre un péndulo esférico (con ángulo pequeño) y uno simple, en el que se muestre la sincronización de una revolución en el plano xy del primer sistema y una oscilación completa del segundo.
8. Corregir modelos analíticos e híbridos para ϕ multiplicándolos por una constante de proporcionalidad adecuada, o corregirlas con algoritmos de aprendizaje automático aplicados directamente sobre sus residuos.

12.1. Referencias bibliográficas

- [1] P. F. Marroquín Alegre, *Análisis de predictibilidad en el sistema dinámico caótico del péndulo magnético mediante la aplicación de modelos de aprendizaje automático*, Tesis de licenciatura, Univ. del Valle de Guatemala, Guatemala, 2023. [En línea]. Disponible: <https://repositorio.uvg.edu.gt/handle/123456789/4820>
- [2] S. T. Thornton y J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, 5^a ed. Belmont, CA, USA: Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [3] V. C. Barbosa y P. C. G. de Moraes, “A Newtonian description of the motion of a spherical pendulum,” *Rev. Bras. Ens. Fis.*, vol. 32, no. 3, pp. 330–337, 2010. doi: 10.1590/S1806-11172010000300007
- [4] A. Hannachi, *Patterns identification and data mining in weather and climate*. Cham, Suiza: Springer, 2021.
- [5] V. A. Dobrushkin, *MATHEMATICA tutorial for the second course in applied differential equations*, Center for Fluid Mechanics, Brown University. [En línea]. Disponible: <https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am34/Mathematica/ch3/spherical.html>
- [6] M. Meerstetter, *A spherical pendulum: Modeling & control*, Tesis de maestría, Lund Inst. of Technology, Lund Univ., Lund, Suecia, 2005. [En línea]. Disponible: <https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordId=8847877&fileId=8859401>
- [7] C. M. Bishop, *Pattern recognition and machine learning*. New York, NY, USA: Springer, 2006.
- [8] J. Brownlee, *Deep learning for time series forecasting: Predict the future with MLPs, CNNs, and LSTMs in Python*. Vermont, Australia: Machine Learning Mastery, 2018.
- [9] F. Aghware *et al.*, “Enhancing the Random Forest Model via Synthetic Minority Oversampling Technique for Credit-Card Fraud Detection,” *J. Comput. Theor. Appl.*, vol. 2, pp. 190–203, 2024. doi: 10.62411/jcta.10323
- [10] T. Chen y C. Guestrin, “XGBoost: A scalable tree boosting system,” en *Proc. 22nd ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl. Discov. Data Min.*, 2016, pp. 785–794. doi: 10.1145/2939672.2939785
- [11] J.-J. Liu y J.-C. Liu, “Permeability Predictions for Tight Sandstone Reservoir Using Explainable

-
- Machine Learning and Particle Swarm Optimization,” *Geofluids*, vol. 2022, pp. 1–15, 2022. doi: 10.1155/2022/2263329
- [12] I. Goodfellow, Y. Bengio y A. Courville, *Deep learning*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2016. [En línea]. Disponible: <https://www.deeplearningbook.org>
- [13] J. McGonagle, J. Alonso y S. Mollick, *Feedforward Neural Networks / Brilliant Math & Science Wiki*. [En línea]. Disponible: <https://brilliant.org/wiki/feedforward-neural-networks/>
- [14] A. Habib y U. Yildirim, “Developing a physics-informed and physics-penalized neural network model for preliminary design of multi-stage friction pendulum bearings,” *Eng. Appl. Artif. Intell.*, vol. 113, art. no. 104953, 2022. doi: 10.1016/j.engappai.2022.104953
- [15] N. Heimann, J. Petermann, D. Hartwig, R. Schnabel y L. Mathey, “Predicting the motion of a high-Q pendulum subject to seismic perturbations using machine learning,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 122, no. 25, 2023. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.07694>
- [16] G. M. Moatimid y T. S. Amer, “Analytical approximate solutions of a magnetic spherical pendulum: Stability analysis,” *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 11, pp. 2155–2165, 2023. doi: 10.1007/s42417-022-00693-8
- [17] SciPy Community, *scipy.integrate.odeint*, 2025. [En línea]. Disponible: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>
- [18] A. Hindmarsh, *ODEPACK: Fortran ODE Solvers*, COMPUTING. [En línea]. Disponible: <https://computing.llnl.gov/projects/odepack>
- [19] A. C. Hindmarsh, *ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers*, *IMACS Trans. Sci. Comput.*, vol. 1, UCRL-88007, 1982. [En línea]. Disponible: https://computing.llnl.gov/sites/default/files/ODEPACK_pub1_u88007.pdf
- [20] D. G. Zill y M. R. Cullen, *Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera*, 9^a ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2014.

13.1. Plano de la base del sistema físico, bases de datos y archivos de simulación de ecuaciones, extracción, análisis y modelado

Los archivos utilizados para la etapa experimental y computacional de este estudio se encuentran en el repositorio de *GitHub* con el enlace <https://github.com/JuanCarlos2709/TesisPE-ML.git>; tal página contiene lo siguiente:

Nota: la mayoría de las pestañas están subdivididas en *Sistema 1*, *Sistema 2* y *Sistema 3*.

1. Pestaña *Dataframes*: se encuentran los archivos de *Excel* con las incertidumbres de θ (*d theta.xlsx*) y los datos obtenidos con *Tracker*, con la columna *theta* ya creada por los archivos *Jupyter Notebook* para cada sistema y radio. El dato $\omega[0]$ es nulo, pero su valor se estima con los programas y ahí se usa directamente.
2. Pestaña *DocsTracker*: documentos *.trk*, que contienen la extracción de datos con uso de herramientas del software *Tracker* para la fase de extracción de datos de los 54 experimentos realizados según lo especificado en la Sección 7.1.2.
3. Pestaña *Notebooks*: archivos *Jupyter Notebook* en el que se incluyen gráficas de barras que resumen y comparan los resultados encontrados en este estudio, como las métricas de error y coeficiente R^2 de los modelos analíticos e híbridos organizados por sistema y radio, y error en el cálculo de θ_f y τ . Por sistema, contiene 6 archivos *Jupyter Notebook*, uno por cada radio inicial, correspondientes a experimentos con el péndulo esférico con los 3 diferentes conjuntos cuerda-esfera; en cada documento se trabajan 3 iteraciones de experimentos con un radio inicial R_i específico. Su nomenclatura es acorde a lo descrito en la Sección 7.2., paso 3) V).
Cada archivo está segmentado de la siguiente manera:

- *Librerías*: se subdivide en *General* y *Modelos de ML*. En la primera categoría, se importan librerías para manejo de datos, visualización, manejo simbólico para implementar herra-

mientas matemáticas y análisis de señales. En la segunda categoría, se importan librerías para aplicar los modelos de aprendizaje automático declarados para esta tesis (*Random Forest*, *XGBoost* y Redes Neuronales *feedforward*).

- *Constantes*: asignación de valores a las constantes del sistema, g y l , junto con inicialización a 0 de las variables u_0 , θ_0 y θ_f , y A , B , C y D para el modelo $\theta_3(t)$.
 - *Funciones*: contiene funciones de elaboración propia para la extracción y transformación, así como para la implementación de modelos analíticos.
 - *Funciones machine learning (general)*: funciones de elaboración propia para el cálculo de residuos y corrección de θ y ϕ .
 - *Modelos específicos*: se subdivide en *Random Forest*, *XGBoost* y Redes Neuronales *feedforward*, en el que define distribución de datos para entrenamiento de los modelos y evaluación con métricas *MAPE* y *MdAPE*.
 - $R_i \rightarrow [\text{Número de iteración (1, 2 ó 3)}] \rightarrow [\text{Indicador de si } \theta_3 \text{ es aplicable}]$: debajo de estas etiquetas, se realiza el proceso de extracción de datos del archivo de Excel correspondiente. Se subdividen de la siguiente manera:
 - $\theta(t)$: se estima el valor de u_0 , θ_f y el período de oscilación, junto con la aplicación de las soluciones teóricas para esta coordenada, con las gráficas correspondientes y coeficiente R^2 .
 - $\phi(t)$: se aplican las soluciones teóricas para el ángulo azimutal, con las gráficas respectivas.
 - *Error de los modelos analíticos*: se elaboran gráficas de residuos contra la variable t , junto con resultados de métricas de error.
 - *Machine learning*: elaboración de columnas de residuos e implementación de los algoritmos de aprendizaje automático, junto con su evaluación para predicción de residuos de θ y construcción de los modelos híbridos, con gráficas y métricas de error, para ambas coordenadas angulares.
4. Pestaña *Plano*: contiene documentos *.svg* (para abrirlo y modificarlo con la aplicación *InkScape*) y *.pdf* con el plano de la base del péndulo esférico construido. En el archivo *.svg*, parece que falta una línea roja, pero no fue necesaria al momento de realizar el corte porque se utilizó uno de los bordes rectos del retazo de *MDF* como el lado que cierra el rectángulo más grande; el *.pdf* sirve principalmente al propósito de representar gráficamente el plano.
 5. Pestaña *SolucionesNuméricas*: se incluye el *Jupyter Notebook* con las simulaciones, realizadas con la librería *odeint*, del sistema de ecuaciones diferenciales correspondientes al péndulo esférico, cuyos valores generados (para θ_f y una aproximación de la frecuencia) y gráficas se utilizaron para resolver gráficamente la Ecuación (6.19) y determinar la frecuencia angular del modelo teórico $\theta_2(t)$, el del ajuste. También contiene el archivo *Jupyter Notebook* con el respaldo de la solución gráfica, en el que se emplea el método Newton-Raphson.
 6. Pestaña *Videos_Experimentos*: contiene un enlace de *Google Drive* en un archivo *.txt* a todos los videos correspondientes a los 54 experimentos realizados según lo especificado en la Sección 7.1.2.

14.1. Fotografías del sistema experimental



Figura 14.1: Vista frontal del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera

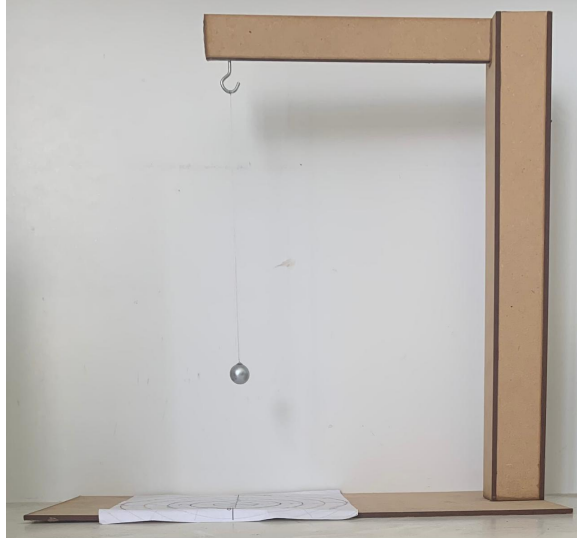


Figura 14.2: Vista lateral del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera

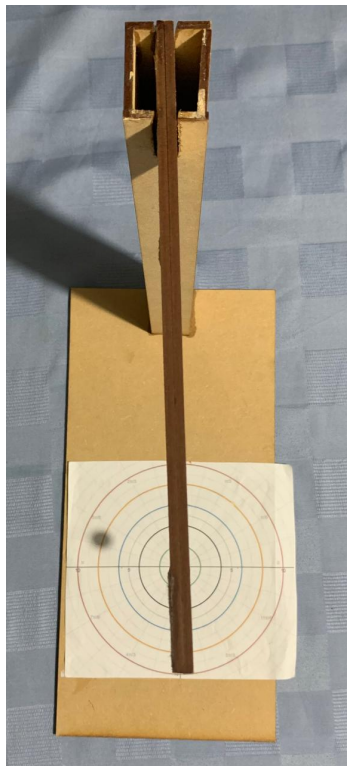


Figura 14.3: Vista superior del péndulo esférico construido, con el conjunto 1 cuerda-esfera



Figura 14.4: Esferas utilizadas como masas m_1 , m_2 y m_3 (en orden de izquierda a derecha) en los experimentos realizados con el péndulo esférico construido, con las especificaciones descritas en la Sección 7.1.2



Figura 14.5: Regla de 30 cm y marcador utilizados como mecanismo de lanzamiento en los experimentos para generar las condiciones iniciales establecidas para este estudio