



**UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**LA TEORÍA DE SINGULARIDADES Y  
CATÁSTROFES Y SU APLICACIÓN EN  
ARQUEOLOGÍA Y ANTROPOLOGÍA:  
UN MODELO DEL COLAPSO MAYA  
DEL PERÍODO CLÁSICO**

Trabajo de investigación presentado  
para optar al grado académico de  
Licenciado en Matemática

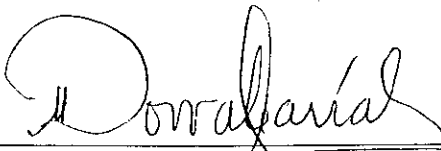
**ALAN GERARDO REYES FIGUEROA**

Guatemala

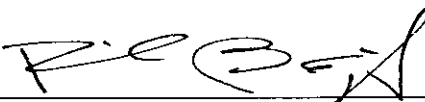
2004

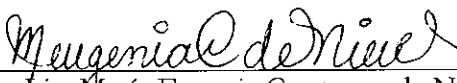
**BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

Vo.Bo.:

(f)   
Lic. Dorval Casas Samayoa

Tribunal:

(f)   
Dr. Raúl González de Paz

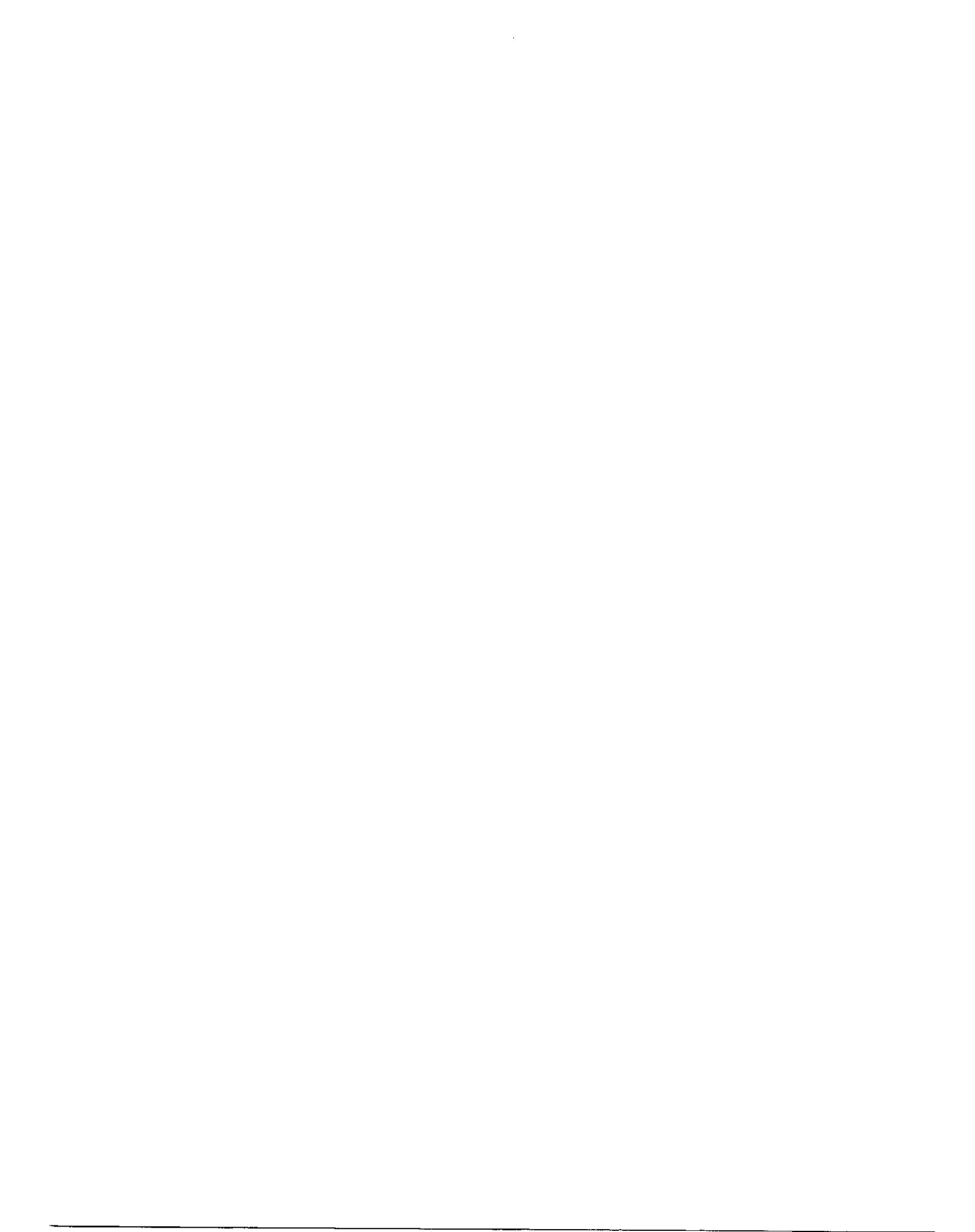
(f)   
Lic. María Eugenia Contreras de Nieves

(f)   
Lic. Dorval Casas Samayoa

Fecha de aprobación: 13 de enero de 2005

*Para Karla,  
mi punto de inestabilidad  
y de equilibrio,  
mi singularidad,  
mi conjunto catástrofe.*





## PRÓLOGO

La idea preliminar de este trabajo surgió en la segunda mitad de 2003, tras la búsqueda de los temas que posibilitaran estudiar las aplicaciones de las matemáticas en el campo de la arqueología. Después de invertir infructuosamente algunas semanas en los estantes de la biblioteca de la Universidad al rastrear fuentes recomendadas sobre sistemas de ecuaciones diferenciales aplicadas en antropología, encontré un ejemplar del libro *The Dynamics of Apocalypse* de J. W. G. Lowe. A primera vista, el libro parecía versar sobre una simulación por computadora, del colapso de la civilización Maya. Fue mayúscula sorpresa el revisar con detalle el contenido y encontrar en uno de los capítulos, toda una colección de modelos sobre el colapso, basados en herramientas matemáticas variadas: teoría de grafos, control óptimo, cadenas de Markov, sistemas de ecuaciones diferenciales, entre otros.

Todos los modelos allí expuestos tenían en común, que los resultados de los cuales hacían uso pertenecían a disciplinas aplicadas de las matemáticas. La idea surgió de inmediato: crear un modelo sustentado en áreas de la matemática “pura”. Por ejemplo, un modelo algebraico, que usase teoría de grupos o anillos; uno topológico; o aún más exigente todavía, un modelo deductivo formal, basado en algún sistema de lógica proposicional.

Las dificultades de elaborar tal modelo aparecieron pronto, y el objetivo del trabajo tuvo que cambiar. Con el tiempo, surgieron otras sugerencias de aplicaciones de las matemáticas en las ciencias sociales; sin embargo, mantuve la idea inicial del proyecto. Después de compartir algunos cursos con mis compañeros de arqueología y antropología, decidí que el trabajo consistiría en elaborar una monografía sobre los diversos modelos matemáticos que explicaban el fenómeno del colapso maya, y, en general, de los sistemas culturales. Esto, debido a que encontré en el Tomo I de la *Historia General de Guatemala*, específicamente al

final del capítulo titulado “El Colapso Maya al Final del Período Clásico”, el siguiente comentario:

«Hasta el momento existen pocos libros dedicados por completo al problema del colapso maya, y lamentablemente, casi todos están en inglés... Otra obra más reciente, cuyo autor aplica sistemas de análisis y simulación, por computadora, para derivar un patrón del colapso de la civilización maya, es la de J. W. G. Lowe, *The Dynamics of Apocalypse...*»

el cual evidenció que era necesario hacer una presentación de estos modelos, así como de la teoría que utilizan, en castellano. El objetivo principal era el de hacer una presentación accesible y útil para los antropólogos y arqueólogos. Por razones de tiempo y espacio, el proyecto resultó en la presentación actual, en la cual se trabaja en forma exhaustiva únicamente uno de los modelos, original de C. Renfrew, que hace uso de la Teoría de Catástrofes, de René Thom.

Desafortunadamente, esta tesis requiere conocimientos avanzados de matemática, y está lejos de ser una presentación accesible. La inquietud original de crear un modelo deductivo formal mediante el uso de algún sistema lógico, para describir el colapso de los sistemas sociales, aún persiste, pero se realizará en un proyecto posterior. Quedo en deuda con mis compañeros arqueólogos y antropólogos. Espero, a corto plazo, preparar una versión comprensible, atractiva, y sobretodo útil, de estas notas.

Para facilitar la referencia y el manejo de los resultados, todos los teoremas, corolarios, notas, figuras y cuadros están señalados por dos números separados por un punto. El primer número indica la sección a la cual pertenece. El segundo se refiere a un orden correlativo respectivo en cada sección. En el caso de los anexos, una letra correspondiente al apéndice respectivo sustituye al primero de los números. Además, para evitar confusiones con algún exponente numérico, las notas al pie de página están señaladas cada una por una sucesión de puntos \*, \*\*, \*\*\*, ..., respecto de un orden correlativo para cada sección.

Expreso mis agradecimientos a quienes, de una u otra forma, colaboraron en la preparación de este documento. En particular, debo agradecer a la doctora Marion Popenoe de Hatch, por sus incontables sugerencias sobre las aplicaciones de las matemáticas en la arqueología y sus recomendaciones de bibliografía sobre colapso; al doctor Didier

Boremanse, por sus muchas indicaciones de libros sobre temas de aplicaciones matemáticas en antropología; y al doctor Raúl González, a quien le debo la idea de aplicar la teoría de catástrofes, y muchas de las referencias utilizadas en el área de matemática. Quiero agradecer también a Luisa Escobar y Matilde Ivic, por el préstamo de algunos libros, y por sus importantes contribuciones a resolver muchas de mis dudas en arqueología. Agradezco también a algunos compañeros quienes me proporcionaron sus libros, ensayos o referencias para este trabajo: Carlos Chiriboga, Andrés Cifuentes, Marcela Gereda, Mayra Méndez, Lorena Paiz, Engelbert Tally y Claudia Vela. Manifiesto mi gratitud a Marielos Corado y Jenny Guerra por su ayuda en la impresión de las versiones previas del documento. Agradezco a José Manuel Morales por su apoyo en la digitalización de imágenes.

Por último quiero dar las gracias a Dorval Carías, por sus juiciosos consejos, y por tomarse con tanta paciencia la revisión del trabajo final; y a Ricardo Barrientos, por su valiosa colaboración en la revisión de la redacción del texto. Dejo claro que todos los errores son de mi exclusiva responsabilidad.



## CONTENIDO

		Página
PRÓLOGO		xi
LISTA DE CUADROS		xvii
LISTA DE ILUSTRACIONES		xix
NOTACIÓN Y LISTA DE SÍMBOLOS		xxiii
RESUMEN		xxix
Capítulo I.	INTRODUCCIÓN	1
Capítulo II.	ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES Y LA TEORÍA DE CATÁSTROFES	9
1.	Gérmenes con rango constante	9
2.	Valores regulares	16
3.	Construcción de mapeos diferenciables	25
4.	Gérmenes y jets	29
5.	El Teorema de la División	39
6.	El Teorema de Preparación	48
7.	Gérmenes simétricos	57
8.	Mapeos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$	58
9.	Singularidades de Boardman-Thom	69
10.	La diferencial cuadrática	73
11.	Gérmenes finitamente generados	80
12.	Elementos de geometría algebraica	90
13.	Teoría de Tougeron	100

	Página
14. El desdoble universal de una singularidad	103
15. Las siete catástrofes elementales	109
16. Prueba del Teorema Principal sobre Desdobles Universales	116
17. Geometría de las siete catástrofes elementales	123
Capítulo III. APLICACIÓN A LA ANTROPOLOGÍA Y ARQUEOLOGÍA: UN MODELO DIALÉCTICO DEL COLAPSO MAYA	131
18. La naturaleza de los sistemas culturales	131
19. El estudio del colapso de los sistemas culturales	134
20. La productividad marginal del cambio sociocultural	138
21. La Teoría de Catástrofes y los sistemas sociales	143
22. Un modelo del colapso maya	155
Capítulo IV. CONCLUSIONES	163
Capítulo V. RECOMENDACIONES	165
BIBLIOGRAFÍA	167
BIBLIOGRAFÍA POR CAPÍTULOS	183
APÉNDICES	
Apéndice A. Estabilidad estructural	185
Apéndice B. Gráficas de las siete catástrofes elementales	189
Apéndice C. Catástrofes elementales de codimensión 5	209
Apéndice D. El sistema de lógica dialéctica LD	211

## LISTA DE CUADROS

Cuadro	Página
Cuadro 15.1: Las siete catástrofes elementales.	110
Cuadro 21.1: Interpretación de las siete catástrofes elementales.	145
Cuadro 21.2: Dependencia del número de catástrofes elementales respecto del número de variables control.	149



## LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración	Página
Figura 1.1: Inmersión lineal entre dos variedades diferenciables.	13
Figura 1.2: Cubierta $\{U_\lambda: \lambda \in A\}$ en la definición de variedad diferenciable.	15
Figura 2.1: Detalle en la demostración del Lema 2.1.	16
Figura 2.2: Elementos de la cubierta $\{I_i\}$ en la demostración del Lema 2.8.	19
Figura 2.3: La función $ x_n - t $ sobre el conjunto $C_t \times \{t\}$ en el Teorema 2.9.	20
Figura 3.1: Gráfica de la función $\lambda(t) = 0, t \leq 0; \lambda(t) = e^{-1/t}, t > 0$ .	25
Figura 3.2: Gráfica de las funciones $\lambda(t), \lambda(\varepsilon - t)$ , y $\phi_\varepsilon(t)$ .	26
Figura 3.3: Gráfica de la función $\psi(y)$ .	26
Figura 5.1: El conjunto $\{p_\sigma(z) = 0\}$ en el caso $n = 2$ .	42
Figura 8.1: Mapeo de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuando $x$ es un punto regular.	60
Figura 8.2: Mapeo de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuando $x$ está dentro de un doblez.	61
Figura 8.3: Mapeo de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ cuando $x$ está en el límite de un doblez.	61
Figura 8.4: Mecanismo del mapeo $A$ en el Lema 8.6.	64
Figura 9.1: Caso en que el conjunto $f^{-1}(U)$ no es una subvariedad.	69
Figura 9.2: Transversalidad y no-transversalidad de $f$ con respecto a $U$ .	70
Figura 10.1: El conjunto $\{\det(A) = 0\}$ es un cono en $F$ .	76
Figura 14.1: Germen cercano a $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ .	103
Figura 15.1: Función de potencial $V_u$ .	113
Figura 15.2: Cinco funciones de potencial en el caso de la catástrofe cúspide.	115
Figura 15.3: El conjunto de puntos de equilibrio en la catástrofe cúspide.	115
Figura 16.1: Detalle en la prueba del Lema Principal.	119
Figura 16.2: Detalle en la prueba del Lema Principal.	119
Figura 18.1: Evolución de la complejidad de los sistemas sociales.	132

Ilustración	Página
Figura 20.1: Relación entre el retorno marginal y el retorno promedio.	139
Figura 20.2: El retorno marginal del incremento en la complejidad.	141
Figura 20.3: La productividad marginal de la complejidad con innovación tecnológica o adquisición de fuentes de energía.	143
Figura 21.1: La catástrofe cúspide.	146
Figura 21.2: La regla del retardo.	148
Figura 21.3: Estados de equilibrio de un sistema social.	151
Figura 21.4: Distribución de la utilidad para una estrategia de comportamiento $x$ .	154
Figura 22.1: El colapso de entidades políticas centralizadas visto como una catástrofe cúspide.	161
Figura B.1: La catástrofe doblez.	189
Figura B.2: El conjunto $\Sigma_f$ en el plano $(x, u)$ para la catástrofe doblez.	190
Figura B.3: El conjunto $\Sigma_f$ para la catástrofe cúspide.	191
Figura B.4: Funciones de potencial en el plano $(u, v)$ de la catástrofe cúspide.	192
Figura B.5: Convención de Maxwell para la catástrofe cúspide.	193
Figura B.6: Convención del retardo perfecto para la catástrofe cúspide.	194
Figura B.7: Dos modelos posibles cuando el proceso se interpreta como una asignación de una sección.	195
Figura B.8: El conjunto $D_f$ para la cola de golondrina.	195
Figura B.9: Distribución de regímenes para la cola de golondrina, cuando $u > 0$ .	196
Figura B.10: Distribución de regímenes para la cola de golondrina, cuando $u < 0$ .	197
Figura B.11: El conjunto $\Sigma_f$ para la cola de golondrina, cuando $u < 0$ .	198
Figura B.12: Conjunto catástrofe con la convención del retardo perfecto, si el tiempo fluye paralelamente al eje $w$ .	199
Figura B.13: Mapeo determinado por $\Sigma_p$ cuando $w = 0$ .	199
Figura B.14: Mapeo determinado por $\Sigma_f$ cuando $w \neq 0$ .	200
Figura B.15: La mitad del conjunto $D_f$ para la umbílica hiperbólica.	200
Figura B.16: Gráfica de $f$ para $u, v > 0$ ó $u, v < 0$ , cuando $w = 0$ .	201
Figura B.17: Curva $2e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}$ .	202

Ilustración	Página
Figura B.18: El Conjunto $D_f$ para la umbilica elíptica, cuando $w = 1$ .	202
Figura B.19: Desdoble de la “silla de montar trilobular”.	203
Figura B.20: Diagrama reloj del conjunto $D_f$ para la catástrofe mariposa.	204
Figura B.21: Superficie de $D_f$ generada a lo largo de la recta L.	205
Figura B.22: Distribución de regímenes locales del subdiagrama A.	205
Figura B.23: Distribución de regímenes locales del subdiagrama B.	205
Figura B.24: Diagrama reloj para la umbilica parabólica.	206
Figura B.25: Número de regímenes locales para la umbilica parabólica.	207
Figura B.26: El conjunto $D_f$ del desdoble universal $x^4 - (u - w^\lambda)x^2 - vx$ .	208
Figura B.27: El conjunto $D_f$ del desdoble universal $x^4 + ux^2 + tx + ux + v^2x$ .	208



## NOTACIÓN Y LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Significado
$\bar{A}$	Germen del conjunto $A$
$\overline{A}$	Cerradura del conjunto $A$
$\mathcal{A}(n)$	Anillo de gérmenes reales analíticos $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathfrak{a}$	Ideal contenido en el anillo $\mathcal{R}$
$\alpha!$	$\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$ , donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$ \alpha $	$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ , donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
$B_r(x)$	Esfera abierta de radio $r$ centrada en $x$
$B_r[x]$	Esfera cerrada de radio $r$ centrada en $x$
$\mathfrak{B}(n)$	Conjunto de gérmenes invertibles en $\mathcal{E}(n, n)$
$\hat{\mathfrak{B}}_k(n)$	Grupo de $k$ -jets de los gérmenes en $\mathfrak{B}(n)$
$\mathbb{C}$	Campo de los números complejos
$\mathbb{C}^n$	Espacio vectorial de $n$ -tuplas complejas
$\text{codim}(V)$	Codimensión de $V$
$\text{coKer}(f)$	Conúcleo de $f$
$\text{coRg}(f)$	Corrango de $f$
$C_n^k$	Combinaciones de $k$ en $n$
$C^\infty(M, N)$	Conjunto de mapeos diferenciables $M \rightarrow N$ entre variedades
$C^\infty(n)$	Anillo de mapeos diferenciables $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$C_A$	Mapeo característico del conjunto $A$
$\det(M)$	Determinante de la matriz $M$
$\dim(V)$	Dimensión del espacio vectorial $V$
$\dim_K(V)$	Dimensión de $V$ sobre el campo $K$
$d^2f_x$	Diferencial cuadrática de $f$ en $x$
$D_f$	$\pi(\Delta_f)$ , proyección de $\Delta_f$ en el espacio de control
$Df(x)$	Matriz de Jacobi del germen $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^k$
$D^\alpha f$	$\frac{\partial^{ \alpha }}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$ , con $ \alpha  = \text{orden de } D^\alpha$

Símbolo	Significado
$D^{\alpha, \beta} f$	$\frac{\partial^{ \alpha + \beta }}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_n^{\beta_n}} f$ , con $ \alpha  = \text{orden de } D^\alpha$
$\mathcal{A}_f$	Conjunto de puntos catástrofe degenerados de $f$
$\partial f / \partial x_i$	Derivada parcial de $f$ respecto de $x_i$
$\langle \partial f / \partial x_i \rangle$	$\langle \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n \rangle_{\mathfrak{G}(n)}$
$\langle \partial \eta \rangle$	$\langle \partial \eta / \partial x_i \rangle$
$\mathfrak{G}(n)$	Anillo de gérmenes diferenciables $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$
$\mathfrak{G}(n)[y_1, \dots, y_n]$	Anillo de polinomios en $y_1, \dots, y_n$ con coeficientes en $\mathfrak{G}(n)$
$\mathfrak{G}(n)[[y_1, \dots, y_n]]$	Anillo de series de potencias en $y_1, \dots, y_n$ sobre $\mathfrak{G}(n)$
$\hat{\mathfrak{G}}(n)$	Anillo de series de potencias $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$
$\hat{\mathfrak{G}}_k(n)$	$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1}$
$\mathfrak{G}(n, m)$	Espacio vectorial de gérmenes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$
$\mathfrak{G}(n, p)$	$\mathfrak{G}(n) \times \dots \times \mathfrak{G}(n)$ ( $p$ factores)
$\hat{\mathfrak{G}}(n, p)$	$\hat{\mathfrak{G}}(n) \times \dots \times \hat{\mathfrak{G}}(n)$ ( $p$ factores)
$\hat{\mathfrak{G}}_k(n, p)$	$(\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1})^p$
$\eta$	Singularidad en $m(n)^k$
$f _A$	Restricción del mapeo $f$ al conjunto $A$
$\tilde{f}$	Germen de $f$
$\hat{f}$	Jet o $\infty$ -jet de $f$ en el origen
$f^*$	Homomorfismo inducido por el germen $f$
$\text{Fr}(A)$	Frontera del conjunto $A$
$\text{gr}(p)$	Grado del polinomio $p$
$\text{GL}(c, \mathbb{R})$	Grupo de transformaciones de coordenadas en $\mathbb{R}^c$
$H(c, k)$	Espacio vectorial de haces $c$ -dimensionales en $\mathbb{R}^k$
$\text{Hom}(A, B)$	Conjunto de homomorfismos
$\text{Id}$	Mapeo identidad
$\text{Im}(z)$	Parte imaginaria de $z$
$\text{Int}(A)$	Interior del conjunto $A$
$j^k f$	Polinomio de Taylor de orden $k$ para $f$ , evaluado en $0$
$j_1^k f$	Elemento de $J_0^k(n, 1)$
$J_0^k(n, 1)$	Espacio de $k$ -jets con $0$ -ésimo término no nulo

Símbolo	Significado
$\text{Ker}(f)$	Núcleo de $f$
$K(V)$	Campo cociente $Q(K[x]/\mathfrak{n}(V))$
$K[x]$	Anillo de polinomios en $x_1, \dots, x_n$ sobre $K$
$\text{LA}(V, W)$	Espacio de transformaciones lineales $V \rightarrow W$
$L_f$	Haz de formas cuadráticas para $d^2f_0$
$\lim_{x \rightarrow y} f(x)$	Límite inferior de $f$ en $y$
$\overline{\lim}_{x \rightarrow y} f(x)$	Límite superior de $f$ en $y$
$\mathfrak{m}(\mathfrak{n})$	Ideal contenido en $\mathfrak{O}(\mathfrak{n})$
$\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})$	Ideal maximal de $\hat{\mathfrak{O}}(\mathfrak{n})$
$\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k$	$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n)^k$
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales: $0, 1, 2, \dots$
$\mathfrak{n}(A)$	Ideal de polinomios en $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ que se anulan en $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$o(k)$	Operador de Landau para un germen que se anula de orden $k$
$\mathfrak{O}(\mathfrak{n})$	Anillo de gérmenes complejos analíticos $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$
$\mathbb{Q}$	Campo de los números racionales
$\mathbb{R}$	Campo de los número reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial real $n$ -dimensional
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Espacio vectorial de $(m \times n)$ -matrices
$\mathbb{R}^{m \times n}(r)$	Espacio vectorial de $(m \times n)$ -matrices de rango $r$
$\text{Re}(z)$	Parte real de $z$
$(r, \tilde{f})$	Desdoble $\tilde{f}$ $r$ -paramétrico
$\text{Rg}(f)$	Rango de $f$
$\text{Rg}_x(f)$	Rango de $f$ en $x$
$\mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$	Anillo de polinomios en $x_1, \dots, x_n$ con coeficientes en el anillo $\mathfrak{R}$
$\rho(\mathfrak{a})$	Rango del ideal $\mathfrak{a}$
$S^n$	Esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$
$S_n$	Grupo simétrico de grado $n$
$\text{Sop}(f)$	Soporte o portador de $f$
$\Sigma A$	Lugar singular del conjunto algebraico $A$
$\Sigma_f$	Conjunto catástrofe de $f$
$\Sigma^i(f)$	$\{x \in M : \dim(M) - \text{Rg}_x(f) = i\}$

Símbolo	Significado
$\Sigma^{i,j}(f)$	$\Sigma^j(f _{\Sigma^i(f)})$
$\Sigma^{i_1, \dots, i_n}(f)$	Conjunto de singularidades de Boardman-Thom para $f$
$V$	Función de valuación
$V(\mathfrak{a})$	Conjunto de ceros del ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$
$V_u$	Función de potencial en $u \in U$
$\ x\ $	Norma del vector $x$
$(x, y)^{\alpha, \beta}$	$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}$
$\langle x_i \rangle_{\mathbb{R}}$	Ideal generado sobre por $\{x_i : i = 1, \dots, n\}$ sobre el anillo $\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números enteros
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto de los números enteros positivos: 1, 2, 3, ...
$ z $	Módulo o valor absoluto de $z$ (según sea el caso)
$\bar{z}$	Conjugado de $z$
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\in$	Pertenencia
$\subseteq$	Inclusión
$\subset$	Inclusión propia
$1_A$	Mapeo identidad del conjunto $A$
$\circ$	Composición de mapeos
$\times$	Producto cartesiano
$\oplus$	Suma directa
$\otimes$	Producto directo
$\sim$	Equivalencia correcta
$\cong$	Isomorfismo
$\equiv$	Congruencia
$\{\dots\}^{\sim}$	Germen del conjunto $\{\dots\}$
$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\ni$	Tal que
$\vdash$	Deducción
$\models$	Consecuencia lógica
$\wedge$	Conjunción
$\vee$	Disyunción
$\Rightarrow$	Implicación estricta
$\Leftrightarrow$	Bicondicional
$\neg$	Negación clásica

Símbolo	Significado
$\sim$	Negación concreta o débil
$\circ$	Estabilizador
$(\Rightarrow)$	Implicación de suficiencia
$(\Leftarrow)$	Implicación de necesidad
$(\rightarrow\leftarrow)$	Contradicción
$\blacklozenge$	Fin de una demostración

Abreviatura	Significado
DN	Deducción Natural
ECQ	<i>Ex contradictione quodlibet</i>
EFSQ	<i>Ex falsum sequitur quodlibet</i>
$H_+$	Cálculo positivo de Hilbert
LC	Lógica clásica
LD	Lógica dialéctica de N. C. Da Costa
MP	<i>Modus Ponens</i>
PNC	Principio de No Contradicción
PTE	Principio del Tercio Excluido
PUO	Principio de la Unidad de los Opuestos
Q	Base deductiva / Conjunto de inferencias
ssi	Si y sólo si
TD	Teorema de la Deducción
Triv	Propiedad de trivialización de un sistema lógico



## RESUMEN

En el Capítulo II se expone, por medio de una presentación matemática formal, un desarrollo de la teoría de mapeos diferenciables. El Teorema de Sard, y los Teoremas de Preparación de Malgrange y Mather son las herramientas básicas que se presentan inicialmente. Se discute luego el Teorema de Whitney sobre mapeos del plano en sí mismo, las diferenciales cuadráticas, el Teorema de Inestabilidad de Thom, el Teorema de Mather sobre determinación finita, y un esbozo de la Teoría de Tougeron. Por último, se desarrolla la teoría de Mather sobre desdobles y singularidades. Se explica su aplicación a la Teoría de Catástrofes, y se presentan gráficamente las Catástrofes Elementales.

En el Capítulo III, se discute el problema de la discontinuidad en la dinámica de los sistemas culturales. Mediante el uso de la Teoría de Catástrofes, se presenta un modelo que describe los cambios abruptos en el comportamiento de los sistemas sociales, en términos de cambios suaves en los factores causales subyacentes. La teoría sugiere enfoques sobre el estudio de las discontinuidades temporales (cambios repentinos), y sobre la diferenciación de formas como resultado de bifurcaciones (morfogénesis). Este es un ejemplo de la aplicación de la Teoría de Catástrofes en las ciencias sociales. Aunque su enfoque no es cuantitativo, la Teoría de Catástrofes ofrece una evaluación más profunda de los mecanismos cruciales de evolución social, y sugiere una solución al problema de la discontinuidad en arqueología.



# I. INTRODUCCIÓN

«Dialéctica es la ciencia de las leyes generales del cambio y desarrollo de la naturaleza, de la sociedad humana y del pensamiento» (Frederick Engels).

## A. LA LÓGICA EN EL PROCESO DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y LOS ARGUMENTOS A FAVOR DE LA ADMISIBILIDAD DE CONTRADICCIONES

Desde una tradición que se inició posiblemente con Heráclito, y que pasó por Hegel, Engels y Marx, se ha hecho referencia a las “contradicciones” en el devenir del mundo real, de las cuales, tanto la lógica como las ciencias deben dar cuenta, sin por ello aminorar la racionalidad de la “razón” y de las teorías científicas. Sin embargo, se sabe que desde Aristóteles, tales contradicciones no tienen lugar en la lógica clásica, ya que si se les admite, la lógica se torna trivialmente inconsistente (*i. e.*, todo enunciado del sistema es válido). Duns Escoto fue el primero en expresar esta idea mediante el principio conocido como *Ex contradictione quodlibet*, ECQ (de contradicción, cualquier cosa), o, *Ex falsum sequitur quodlibet*, EFSQ (de falso se sigue cualquier cosa).

El método científico tradicional, fiel a la práctica aristotélica, ha seguido la **lógica lineal unidireccional**, ya sea en una forma deductiva, o bien en una inductiva. El enfoque deductivo se evidencia principalmente en las ciencias formales (lógica y matemática), así como en el campo de las ciencias naturales, especialmente la física y la química (Martínez, 2000). La lógica lineal inductiva, por su parte, sigue el camino inverso: de constataciones particulares, generaliza hacia una conclusión “universal”. Pero la constatación de muchos casos en una muestra (por muy numerosos y relevantes que sean), nunca proporciona la certeza de su posible aplicación a todos los casos que constituyen el universo del cual se extrajo la muestra. De aquí una posible desventaja de la lógica inductiva. Por ello, la lógica inductiva siempre concluye con resultados sujetos a un nivel de probabilidad de error aceptable.

Por tales razones, muchas veces se necesita una lógica más completa, una lógica de la transformación y de la interdependencia, una lógica que sea sensible a esa complicada malla

dinámica de sucesos que constituye la realidad. En este sentido, la lógica clásica aristotélica puede resultar insuficiente, ya que sus palabras y conceptos son estáticos y reductivos, y obligan a lo conocido a ser estable. Esta lógica analítica y el modo tradicional de hacer ciencia se basan en principios aristotélicos, unidos a una visión determinista de la causalidad, la cual en algunos casos no ha permitido comprender a cabalidad los complejos problemas de la mayoría de las ciencias, ya que sus sistemas no funcionan con la secuencia de esta lógica ordinaria ni con la causalidad de un solo sentido, sino que son sistemas con interacción recíproca e influencia circular. En efecto, todo esto no es posible lograrlo con una lógica simple, puramente deductiva o inductiva; requiere una lógica “contradictoria”, en la cual las partes son comprendidas desde el punto de vista del todo y de forma conversa.

## B. LA LÓGICA DIALÉCTICA COMO RESPUESTA A LA EXISTENCIA DE CONTRADICCIONES

La Dialéctica es la ciencia de las leyes generales del cambio y desarrollo: de la naturaleza, de la sociedad humana y del pensamiento. La esencia de la Dialéctica es el cambio continuo y permanente de los fenómenos y las cosas. Como motor del cambio y desarrollo está la **contradicción** (Spirkin, 1969). En la naturaleza, en el universo, se encuentran continuamente aspectos o tendencias de los objetos y los fenómenos que se llaman “contrarios”, es decir, las cualidades, aspectos o tendencias de los objetos o de los fenómenos que se excluyen mutuamente.

Por otra parte, la experiencia enseña que los contrarios surgen siempre unidos, puesto que un contrario no puede existir sin su opuesto; el mismo nombre lo indica: carece de sentido hablar de un contrario, sin enunciar “contrario a qué o a quién”. Esta unión de contrarios no puede ser pacífica ni estática. La contradicción nace de la lucha entre dos contrarios que se hallan ligados entre sí y forman un proceso contradictorio determinado.

La evolución (Hegel, 1878) se expresa en tres momentos inseparables de lógica dialéctica:

- **Tesis:** enunciación de las relaciones o características internas del fenómeno.
- **Antítesis:** supera la determinación aislada del proceso, afirmando la contradicción con la tesis.

- **Síntesis:** solución de la contradicción, de la lucha de contrarios, obtenida en un nivel superior.

En la síntesis se logra el movimiento dialéctico afirmativo y se alcanza, al mismo tiempo, un nivel más elevado. Sin embargo, toda síntesis acaba por mostrar su carácter limitado y se constituye en una nueva tesis, que engendra a su vez, otra contradicción original, la cual se lanza, de suyo, a obtener la siguiente solución.

La lógica dialéctica supera la causación lineal, unidireccional, y explica los sistemas autocorrectivos, de retroalimentación y proalimentación, los circuitos recurrentes y aun ciertas argumentaciones que parecieran ser recursivas. Por otra parte, la lógica dialéctica goza de un sólido respaldo filosófico, pues se apoya en el pensamiento socrático-platónico-aristotélico, como también en toda la filosofía dialéctica de Hegel. De esta manera, la intuición científica, emergente, se podría explicar como el resultado de un conocimiento tácito que emerge naturalmente cuando se adopta una lógica dialéctica o un enfoque interdisciplinario o, dentro de una sola disciplina, una perspectiva más amplia y rica en información (Martínez, 2000).

Según Aristóteles (*Metafísica* libro IV), la Dialéctica es la capacidad de investigar lo contrario. De este modo, la dialéctica, más que tratar de buscar el punto débil de lo dicho por el otro y aplastar esa opinión contraria con argumentos, trata de sopesar su verdadero valor y fuerza, y, para ello, se sirve del arte de preguntar, de entablar un verdadero diálogo, lo cual implica una gran apertura y poner en suspenso el asunto con todas sus posibilidades; de esta forma, la dialéctica se convierte en el arte de llevar una auténtica conversación. Esta orientación pone de manifiesto cómo el método científico moderno puede haberse convertido, frecuentemente, como afirma Gadamer (1984), en un gran monólogo.

#### C. EL PROBLEMA DEL COLASPO DE LOS SISTEMAS CULTURALES Y LA UTILIZACIÓN DE LA MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS SOCIALES EN GENERAL

La desintegración del orden social ha sido un fenómeno recurrente en la historia. Así como el ocaso de Roma abarca una página importante en la historia contemporánea, muchas otras son las civilizaciones que han sucumbido: el Imperio Chou en la antigua China, la

región de Mesopotamia, los Hititas, el Antiguo Egipto, la civilización Minoica, la civilización Micénica, los Olmecas, Teotihuacán, Monte Albán, entre otras. En particular, la civilización de los Mayas en las Tierras Bajas de Mesoamérica durante el Período Clásico es uno de los casos más famosos de colapso.

Si bien el colapso ha sido de interés desde que las sociedades han demostrado ser vulnerables, también ha sido un reto para los historiadores y científicos sociales. La historia humana en su totalidad ha estado caracterizada por una inexorable tendencia a incrementar sus niveles de complejidad, especialización y control sociopolítico, procesamiento de grandes cantidades de energía e información, creación de asentamientos cada vez mayores, y desarrollo de tecnologías más complejas y capaces. Este aspecto persistente de la historia humana ha recibido una cantidad importante de investigación. La mayoría de explicaciones de colapso han tendido a ser *ad hoc* (Tainter, 1988), particularizadas a unas pocas sociedades, y un entendimiento general parece aún remoto. A la fecha, se carece de una explicación universal de colapso, y aún no se ha propuesto teoría alguna que ayude a entender la mayoría de sus ocurrencias, aplicable en una variedad de contextos, y más importante, con implicaciones en las condiciones actuales.

Cualquier explicación del colapso que pretenda tener el suficiente potencial de generalidad debería ayudar a entender todo el espectro de sus manifestaciones, desde la más simple hasta la más compleja. Las ciencias formales: la lógica y las matemáticas, son los candidatos por excelencia para atacar el problema de la teoría social bajo un método riguroso y suficientemente general. Pero se ha demostrado históricamente que el rigor matemático y la lógica clásica pueden resultar insuficientes para modelar el desorden y la impredecibilidad del comportamiento humano, no sólo individual, sino a nivel de grupo. De hecho, es por esta razón que las ciencias sociales utilizan sus propios métodos.

Pese a ello, no se debe ignorar la propuesta que hicieron Rodney Needham en *Rethinking Kinship and Marriage* (1971) y Edmund Leach en *Rethinking Anthropology* (1961) ante la misma problemática. Como dice Leach: «¿Cómo puede un antropólogo social de tiempos modernos, con la ventaja de todo el trabajo de Malinowski y Radcliffe-Brown y sus sucesores, elaborar generalizaciones de tal magnitud con la esperanza de llegar a

conclusiones satisfactorias? Mi respuesta es tan simple; ésta es: Pensar en que las ideas organizativas presentes en toda sociedad constituyen un patrón matemático» (Leach 1961:2). Más todavía, Lévi-Strauss propone a través de su vasta obra, que a pesar de que la sociología ha tenido una época en la que el escrúpulo científico y la exactitud de la observación no parecen incompatibles: «la sociología no progresará de modo semejante a sus predecesoras, y no conviene olvidarlo justamente en el momento en que comenzamos a entrever ‘como a través de una nube el terreno donde se efectuará el encuentro’. Alguien dijo una vez que: ‘la matemática alcanza su esplendor en las aplicaciones de la física’. Después de citar a Eddington: ‘la física se transforma en el estudio de las organizaciones’, Köhler escribía: ‘En este camino... reencontrará a la biología y a la psicología’». Lévi-Strauss añade: «este trabajo habrá cumplido su objetivo si, después de terminarlo, el lector se siente inclinado a agregar: y a la antropología» (1981:15).

Leach propone un aspecto interesante: «no se trata de convertir la antropología en una rama de las matemáticas, pero creo que se puede aprender mucho si se empieza a pensar en la sociedad desde una perspectiva matemática. ... Considerada matemáticamente, la sociedad no es un ensamble de cosas sino de relaciones. Una buena analogía se puede encontrar en la rama de la topología» (1961:7).

#### D. LA TEORÍA DE CATÁSTROFES COMO PROPUESTA AL ESTUDIO DEL PROBLEMA DEL COLAPSO Y UNA OPCIÓN AL MODELADO DE FENÓMENOS CONTRADICTORIOS

En su mayoría, los modelos de los fenómenos naturales hacen uso de funciones elementales del análisis matemático como  $e^x$ ,  $\text{sen}(x)$ ,  $x^k$ ; a partir de las cuales se construyen las ecuaciones de estado del sistema descrito. Dichas funciones constituyen las más simples de los llamados mapeos suaves (diferenciables, analíticos, ...), y en consecuencia, estos no pueden presentar discontinuidades de ningún tipo: lo que ocurre en el punto  $x + dx$  es muy similar a lo que sucede en el punto  $x$ , siempre que  $dx$  sea suficientemente pequeño. A pesar de esto, muchos procesos físicos, químicos o biológicos, y con mayor frecuencia los fenómenos sociales, presentan discontinuidades. Turbulencia en fluidos, diferenciación celular, quiebra de mercados o colapso estelar son algunos ejemplos de tales situaciones. Entonces, ¿de qué forma efectiva se puede representar tal comportamiento discontinuo a

través de modelos matemáticos que únicamente utilizan componentes suaves? Actualmente este problema se aborda en la Teoría de la Bifurcación, y en disciplinas cercanas, como la Teoría de Singularidades y la Teoría de Catástrofes, desarrollada por el matemático francés René Thom, en las décadas de 1950 y 1960.

La clave en hacer emerger discontinuidades a partir de elementos continuos, radica en observar que todo el comportamiento de un sistema estático o dinámico está gobernado por el comportamiento del sistema cerca de sus puntos críticos (o singulares), entendidos como aquellos en los que la primera derivada de la ecuación del sistema es nula o no existe. Fuera de los puntos críticos, el Teorema de la Función Implícita asegura que el comportamiento es predecible —de hecho es lineal—; y sólo en los puntos críticos el sistema tiene la posibilidad de salir de su “molde” y establecer nuevos modos de operación. Es en estos puntos críticos en donde se puede afectar de forma importante el comportamiento futuro del sistema, mediante pequeñas alteraciones en la dinámica del mismo. Como resultado, es posible encontrar ciclos límites, equilibrios estables, o movimientos de una región atractora a otra. Es en estas alteraciones de las ecuaciones del sistema donde las ideas de discontinuidad de brotes suaves, catástrofes, y comportamiento discontinuo, aparecen de las descripciones continuas. En otras palabras, la continuidad implica discontinuidad. La Teoría de Catástrofes es, de esta forma, un ejemplo de cómo modelar sistemas que presentan comportamientos contradictorios.

Los fenómenos sociales no están exentos de presentar comportamientos discontinuos. En el registro arqueológico, los cambios abruptos y las discontinuidades han sido tomados tradicionalmente como reflejo de cambios drásticos en los factores causales subyacentes. El objetivo de este trabajo es presentar un modelo, para describir el colapso de los sistemas sociales recurriendo a la Teoría de Catástrofes, manifestado en términos de cambios drásticos o discontinuos, que surgen a partir de cambios graduales en las variables inherentes al propio sistema. Este modelo es una respuesta a la sugerencia de Leach, pues destacan en él las ideas topológicas y geométricas, más que las analíticas. El atractivo de este modelo es que hace uso de relaciones atributivas entre las variables, y los resultados son puramente cualitativos, ideal en el caso de los parámetros que describen los fenómenos sociales, cuya medición puede causar dificultad.

La Teoría de Catástrofes requiere un conocimiento previo de matemática avanzada. En el Capítulo II se hace un tratamiento formal de sus herramientas y resultados más importantes. El Capítulo III se exponen las ideas más relevantes sobre la dinámica de los sistemas sociales, en particular de la civilización Maya durante el Período Clásico, y se presenta el modelo. La presentación de dicho capítulo es informal, en comparación con el capítulo que le precede, y se ha hecho de esta manera con la finalidad que el lector poco habituado a la literatura matemática pueda comprender con facilidad el funcionamiento del modelo.



## II. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE SINGULARIDADES Y LA TEORÍA DE CATÁSTROFES

«Para demostrar un teorema (para elaborar un modelo) no es necesario, ni siquiera conveniente, saber lo que quiere decir. El matemático no necesita saber qué hace más que un autómatá» (Henri Poincaré).

### 1. GÉRMENES CON RANGO CONSTANTE

**1.1 Definición:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto arbitrario. Un mapeo  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  se llama **diferenciable** si existe un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  y un mapeo  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , tales que  $A \subseteq U$  y  $F|_A = f$ , y las derivadas parciales de  $F$  de cualquier orden existen y son continuas.

**1.2 Definición:** Sean  $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V$  un conjunto, y  $\mathcal{F}$  la familia de parejas  $(U, f)$ , donde  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \in U$ , y  $f : A \cap U \rightarrow V$  es un mapeo arbitrario. Considérese la siguiente relación de equivalencia en  $\mathcal{F}$ : para  $(U_1, f_1)$  y  $(U_2, f_2)$  en  $\mathcal{F}$ ,  $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$  si, y sólo si, existe un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $x \in U$  y  $U \subseteq U_1 \cap U_2$ , tal que  $f_1|_U = f_2|_U$ . Una relación de equivalencia de este tipo se llama un **germen**  $\tilde{f} : (A, x) \rightarrow V$  en  $x$  (con frecuencia se omitirá el uso del afijo  $\sim$ ). Si el mapeo  $f$  es continuo, entonces la relación  $\sim$  se llama **germen continuo**. Si  $f$  es diferenciable, entonces  $\sim$  es un **germen diferenciable**. Si  $f$  es analítico, entonces  $\sim$  se llama **germen analítico**.

Como todo subconjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  está definido por un mapeo  $C_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  (el mapeo característico), se pueden considerar gérmenes de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Los gérmenes se comportan de forma similar a las funciones. En particular, la composición  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  de los gérmenes  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  está definida por:

$$(\mathbb{R}^n, x) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbb{R}^m, y) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{R}^k, y = f(x), \text{ implica } \tilde{g} \circ \tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  son representantes de  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$ , respectivamente, entonces el mapeo  $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un representante de  $\tilde{f}$ . La composición usual de las

funciones  $g \circ f$  está definida para  $f^{-1}(V) \subseteq U$  y es un representante para  $\mathfrak{g} \circ \tilde{f}$ .

Todo germe diferenciable  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^k$  tiene una matriz de Jacobi  $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  (un mapeo lineal). El germe  $\tilde{f}$  tiene un germe inverso respecto de la composición  $\circ$  si, y sólo si, algún representante  $f$  de  $\tilde{f}$  tiene un mapeo inverso local en una vecindad suficientemente pequeña de  $x$ . Este es el caso si, y sólo si,  $Df(x)$  es no singular:

**1.3 Teorema: (Teorema de la Función Inversa).** Un germe  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$  posee un germe inverso  $\tilde{f}^{-1} : (\mathbb{R}^n, y) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x)$  si, y sólo si,  $Df(x)$  es no singular\*. ♦

**1.4 Definición:** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es diferenciable,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces el mapeo  $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{k \times n} \ni x \mapsto Df(x)$ , es diferenciable. El **rango** de  $f$  en  $x$  se define como el rango de  $Df(x)$  y se denota por  $\text{Rg}_x(f)$ .

**1.5 Definición:** Una función  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  valuada en los reales extendidos se dice que es **inferiormente semicontinua** en  $y$  si  $f(y) \neq -\infty$  y  $f(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ . Similarmente,  $f$  se dice que es **superiormente semicontinua** en  $y$  si  $f(y) \neq +\infty$  y  $f(y) \geq \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ . La función  $f$  es inferiormente (superiormente) semicontinua en un intervalo si  $f$  es inferiormente (superiormente) semicontinua en cada punto de dicho intervalo.

Si  $\text{Rg}_x(f) \geq s$  entonces ciertamente alguna  $(s \times s)$ -submatriz de  $Df(x)$  tiene determinante no nulo. Este determinante será no nulo en una vecindad de  $x$  ya que  $Df$  y el determinante son mapeos continuos. Así, el rango de  $f$  nunca es menor que  $s$  en cualquier vecindad de  $x$ , es decir, el rango de  $f$  nunca puede disminuir localmente, por lo que el mapeo  $U \rightarrow \mathbb{Z} \ni x \mapsto \text{Rg}_x(f)$  es inferiormente semicontinuo. Entonces, para cualquier germe  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^k$  se corresponde un germe inferiormente semicontinuo  $\text{Rg}(f) : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{Z} \ni y \mapsto \text{Rg}_y(f)$ .

---

\* Para una demostración, véase Dieudonné (1969).

**1.6 Definición:** Un germen  $\tilde{f}$  se dice que tiene **rango constante** si  $\text{Rg}(f)$  es el germen de un mapeo constante.

**1.7 Teorema: (Teorema del Rango).** Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y)$  un germen con rango constante. Entonces existen gérmenes invertibles  $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  y  $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}^m, y) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  para los cuales el germen  $\tilde{\psi} \circ \tilde{f} \circ \tilde{\phi}^{-1} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  está representado por el mapeo  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ , donde  $k = \text{Rg}_x(f)$ .

**Demostración:** Sin pérdida de generalidad sean  $x = y = 0$ . Supóngase que  $f$  es un representante de  $\tilde{f}$ , con rango constante  $k$ . Entonces existe una  $(k \times k)$ -submatriz de  $Df$  que es invertible en el origen. Al efectuar un cambio de coordenadas, esto es, al aplicar un difeomorfismo local, la submatriz

$$[\partial f_i / \partial x_j]; \quad 1 \leq i, j \leq k$$

puede asumirse regular en  $0 \in \mathbb{R}^n$ , y, por consiguiente, regular en una vecindad del origen.

Defínase el germen  $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$ , donde  $f$  tiene componentes  $(f_1, \dots, f_m)$ . Entonces la matriz

$$D\phi = \left[ \begin{array}{c|ccc} \partial f_i / \partial x_j & & & 0 \\ \hline & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} \partial f_i / \partial x_j & & & 0 \\ \hline & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}} \right\} k \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} \partial f_i / \partial x_j & & & 0 \\ \hline & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}} \right\} n-k \end{array} \right\}$$

tiene determinante  $\det(D\phi) = \det[\partial f_i / \partial x_j] \neq 0$ . Por consiguiente,  $\tilde{\phi}$  es un germen invertible y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^m, 0) \\ \phi \searrow & & \nearrow g = f \circ \phi^{-1} \\ & & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (x_1, \dots, x_n) & \xrightarrow{f} & (f_1, \dots, f_m) \\ \searrow & & \nearrow \\ (f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n) & = & (z_1, \dots, z_n) \end{array}$$

muestra que el germen  $\mathfrak{g} = \tilde{f} \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  está representado por

$$z = (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, g_{k+1}(z), \dots, g_m(z)).$$

La matriz jacobiana de  $g$  tiene la forma

$$Dg = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & * & & A(z) \end{array} \right], \text{ donde } A(z) = [\partial g_i / \partial z_j], \quad k+1 \leq j \leq m, \quad k+1 \leq i \leq n$$

y como  $\text{Rg}(g) = \text{Rg}(Dg) = k$  es una vecindad del origen, la matriz  $A(z)$  debe anularse en esta vecindad. Así, sin pérdida de generalidad,

$$(*) \quad \partial g_i / \partial z_j = 0 \text{ para } k+1 \leq j \leq m, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Aplicando ahora una transformación en el rango  $\mathbb{R}^m$ , definase el germen  $\varphi: (\mathbb{R}^m, y) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} - g_{k+1}(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ y_m - g_m(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) \end{bmatrix}.$$

La matriz jacobiana de  $\varphi$  tiene la forma

$$D\varphi = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & * & & \\ & & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m-k}$

ya que los  $g_p(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$ ,  $k+1 \leq p \leq m$ , no dependen de  $y_{k+1}, \dots, y_m$ .

Entonces  $\varphi$  es un germen invertible, y  $\varphi \circ \mathfrak{g}$  está representado por la composición

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ z_{k+1} \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ g_{k+1}(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ g_{k+1}(z) - g_{k+1}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ g_m(z) - g_m(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \end{bmatrix}.$$

En (\*), las últimas  $m - k$  componentes  $g_{k+j}(z_1, \dots, z_n) - g_{k+j}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$  de esta composición se anulan en un  $n$ -cubo  $|z_j| < \varepsilon$ , y, por lo tanto,  $\tilde{\varphi} \circ \tilde{g}$  tiene como representación  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ .  $\blacklozenge$

**1.8 Definición:** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. La función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  es llamada una **sumersión** si  $\text{Rg}_x(f) = k$ , o bien, una **inmersión** si  $\text{Rg}_x(f) = n$ , para todo  $x \in U$ . Por el Teorema del Rango, una sumersión tiene la forma  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$ , mientras que una inmersión es de la forma  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  con respecto a las coordenadas en cuestión. Por eso, el rango de estas no puede hacerse tan grande como se desee, y, por lo tanto, es constante.

**1.9 Definición:** Un subconjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  es una **subvariedad diferenciable** de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $m \leq n$ , si para cada  $x \in M$  existe un germen invertible  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tal que  $\tilde{\varphi}(M, x) = (\mathbb{R}^m, x) \subseteq (\mathbb{R}^n, x)$  (es decir,  $\mathbb{R}^m$  es inmerso linealmente en  $\mathbb{R}^n$ , para  $m \leq n$ ).

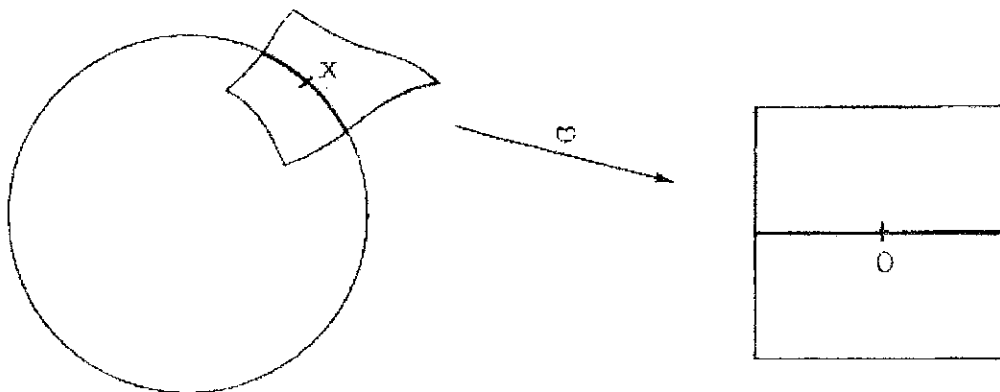


Figura 1.1: Inmersión lineal entre variedades diferenciables.

**1.10 Ejemplo:** (1) La  $n$ -esfera  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El conjunto  $R^{m \times n}(k) \subseteq R^{m \times n}$  de todas las  $(m \times n)$ -matrices con rango  $k$  es una subvariedad diferenciable del espacio de todas las  $(m \times n)$ -matrices.

**1.11 Definición:** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapeo diferenciable. Un punto  $y \in \mathbb{R}^m$  se dice que es un **valor regular** de  $f$  si en cada  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisface  $f(x) = y$ , el rango de  $f$  es  $m$ , esto es,  $\text{Rg}_x(f) = m$ . Cualquier valor de  $f$  que no es regular se llama un **valor crítico** de  $f$ . Si  $y \notin f(\mathbb{R}^n)$ , esta definición hace a  $y$  (por un argumento de vacuidad) un valor regular de  $f$ .

**1.12 Teorema:** Si  $y$  es un valor regular de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces  $f^{-1}\{y\} \subseteq \mathbb{R}^n$  es una subvariedad diferenciable de dimensión  $m - n$  (o en su defecto, vacía).

**Demostración:** Sea  $x \in f^{-1}\{y\}$ , lo cual implica que  $f(x) = y$ , con  $\text{Rg}_x(f) = m$ . Esto significa que el rango de  $f$  es localmente constante en  $x$ . Por el Teorema del Rango, existen transformaciones diferenciables  $\phi : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  y  $\psi : (\mathbb{R}^m, y) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  tales que el germen  $\psi \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1} = \tilde{f}_1$  tiene la forma  $f_1(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ . Así, el germen  $\tilde{f}_1^{-1}\{0\} = \psi \circ \tilde{f} \circ \phi^{-1}\{0\} = \psi \circ \tilde{f}\{y\}$  es el germen del conjunto  $\{(0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n)\}$  en el origen.  $\blacklozenge$

**1.13 Definición:** Una **variedad diferenciable** es un espacio topológico  $M$ , junto con una cubierta abierta  $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ,  $\Lambda$  un conjunto de índices; y homeomorfismos  $U_\lambda \rightarrow U'_\lambda \subseteq \mathbb{R}^m$  ( $U'_\lambda$  abierto), que satisface las siguientes propiedades:

- (i) Si  $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ , existe un mapeo diferenciable  $\phi_{\lambda\mu} : U'_{\lambda\mu} \rightarrow U'_{\mu\lambda}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & U_\lambda \cap U_\mu & \\
 \phi_\lambda \swarrow & & \searrow \phi_\mu \\
 \mathbb{R}^m \supseteq U'_{\lambda\mu} & \xrightarrow{\phi_{\lambda\mu}} & U'_{\mu\lambda} \subseteq \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

conmuta.

(ii)  $M$  es un espacio de Hausdorff y tiene una base contable.

Como  $\phi_{\lambda\mu} \circ \phi_{\mu\lambda} = 1_{U'_{\lambda\mu}}$ , el mapeo  $\phi_{\lambda\mu}$  es un difeomorfismo. Además, nótese que  $U'_{\lambda\mu} = \phi_{\lambda}(U_{\lambda} \cap U_{\mu})$  y  $U'_{\mu\lambda} = \phi_{\mu}(U_{\lambda} \cap U_{\mu})$ :

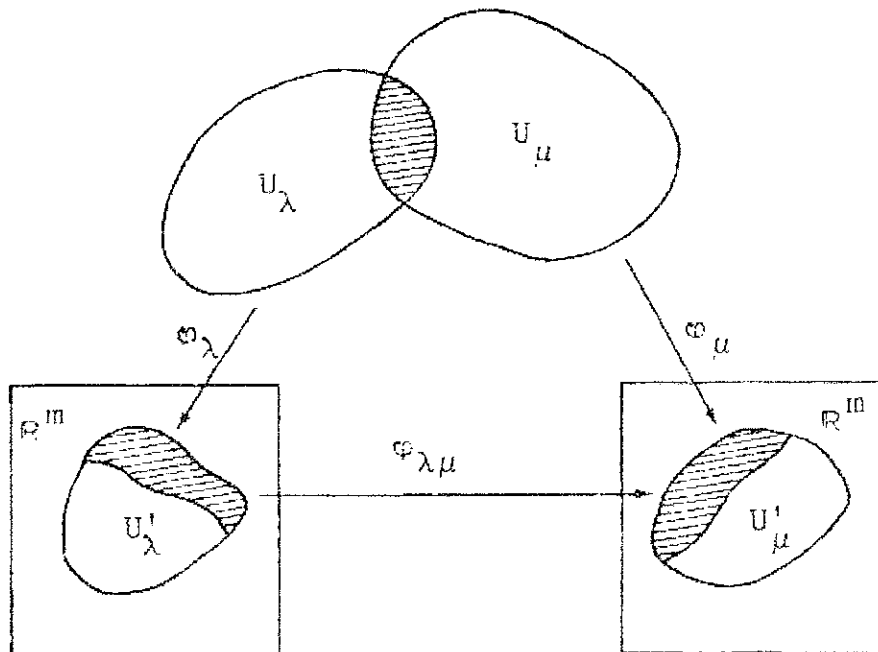


Figura 1.2: Condición de la cubierta  $\{U_{\lambda}; \lambda \in \Lambda\}$  en la definición de variedad diferenciable.

Muchos conceptos y propiedades de los espacios euclídeos pueden ser generalizados a las subvariedades (y variedades) de  $\mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, si  $x \in M^m \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$  entonces una función  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  es **diferenciable** en  $x$  si existe un germen invertible  $\varphi: (\mathbb{R}^{m+k}, x) \rightarrow (\mathbb{R}^{m+k}, 0)$  tal que

$$\varphi: (M^m, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$$

y de forma que el germen  $\tilde{f} \circ \varphi^{-1}$  sea diferenciable en  $0 \in \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{m+k}$ . En otras palabras:  $M$  está cubierto por conjuntos abiertos  $U_{\lambda}$ , los cuales pueden ser identificados con subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$  por medio de transformaciones de coordenadas. Un mapeo definido en  $M$  se llama diferenciable (con rango  $r$ , respectivamente) si restringido a estos subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$  (vía alguna transformación) es diferenciable (con rango  $r$ , respectivamente).

## 2. VALORES REGULARES

Considérese el mapeo diferenciable  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Entonces, para casi todo punto  $b \in \mathbb{R}^m$  (i. e. siempre, excepto para un conjunto con medida de Lebesgue igual a cero) se cumple que  $f^{-1}(\{b\}) \subseteq \mathbb{R}^n$  es una subvariedad diferenciable de dimensión  $n - m$ . En otras palabras, dado  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , para casi toda elección de  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , el sistema de ecuaciones no lineales  $f_i(x) = b_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq m$ , tiene por conjunto solución a una variedad  $(n - m)$ -dimensional.

**2.1 Teorema:** Sea  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  el conjunto de todas las esferas en  $\mathbb{R}^m$  con radio racional y cuyos centros están situados en coordenadas racionales (nótese que hay un número contable de estas esferas). Si  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  es abierto, entonces  $U = \bigcup_{i \in T} K_i$  para algún conjunto de índices  $T \subseteq \mathbb{Z}^+$ .

**Demostración:** Sea  $x \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ , y sea  $\varepsilon > 0$  tal que la  $\varepsilon$ -esfera alrededor de  $x$  esté contenida en  $U$ . Elíjase  $K_i$  con centro en  $y$ , para  $|x - y| < \varepsilon/3$ ; y de radio  $r$ ,  $|x - y| < r < 2\varepsilon/3$ . ♦

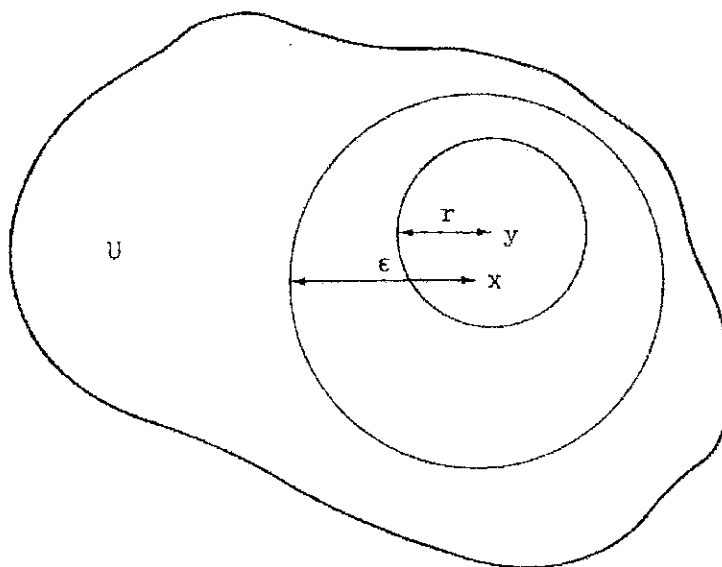


Figura 2.1: Ilustración de la demostración del Teorema 2.1.

**2.2 Corolario:** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto arbitrario, y sea  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in A}$  una familia de conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda$ . Entonces existe un conjunto contable  $\Gamma \subseteq A$  tal que  $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Gamma} U_\lambda$ .

**Demostración:**  $X$  está en la unión de aquellos  $K_n$ , que están contenidos en al menos un  $U_\lambda$ , y sólo existe un número contable de tales  $K_n$ . Para cada uno de esos  $K_n$ , elíjase un abierto correspondiente  $U_{\lambda(n)}$  tal que  $K_n \subseteq U_{\lambda(n)}$ . El conjunto  $X$  está contenido en la unión de los  $U_{\lambda(n)}$ . ♦

**2.3 Definición:** Un subconjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene **medida cero** si para cada  $\varepsilon > 0$  existe una sucesión de cubos  $W_i \subseteq \mathbb{R}^n$  tales que  $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon$ . Aquí  $|W_i|$  es el volumen de  $W_i$ , es decir,  $|W_i| = a^n$  donde  $a$  es la longitud del lado de  $W_i$ .

**2.4 Nota:** Si  $C \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} C_\nu$ , y cada  $C_\nu$  tiene medida cero, entonces  $C$  también tiene medida cero. En efecto, si  $C_\nu \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^\nu$  donde  $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i^\nu| < \varepsilon/2^\nu$ , entonces  $C \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^\nu$  donde  $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |W_i^\nu| < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^\nu} = \varepsilon$ .

**2.5 Definición:** Una propiedad que se preserva bajo la aplicación de difeomorfismos se dice que es una propiedad **topológica-diferencial**.

**2.6 Lema:** Si  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene medida cero y  $f: C \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable, entonces  $f(C)$  tiene medida cero.

**Demostración:** Elíjase un subconjunto abierto  $U$  con  $C \subseteq U$  y tal que la extensión  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F|_C = f$  es diferenciable. Como  $U$  es la unión de una sucesión de esferas cerradas, sin pérdida de generalidad puede suponerse que  $C$  está contenido en una esfera

compacta y que la cubierta de  $C$  en cubos también está contenida en una esfera compacta (más grande)  $K$ , que a su vez está contenida en  $U$ .

Sea ahora  $b = \max_{x \in K} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right|$ ; si el cubo  $W$  tiene lados de longitud  $a$ , entonces  $|x_i - x_i^0| \leq a$

para  $x \in W$  implica que  $|F_i(x) - F_i(x^0)| \leq abn$ , y entonces  $F(W)$  está contenido en un cubo de lado  $a \cdot b \cdot n$ . Por lo tanto,  $|W| = a^n$  implica que  $F(W)$  está dentro de un cubo

con volumen  $(bn)^n a^n = (bn)^n |W|$ , y  $(bn)^n$  es independiente de  $W$ . Si  $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon / (bn)^n$ ,

entonces la unión de todos los  $F(W_i)$  está contenida en una unión de cubos con un volumen total menor a  $\varepsilon$ . ♦

**2.7 Corolario:** La propiedad que un conjunto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  tenga medida cero es una propiedad topológica-diferencial local. Aquí, local significa que  $C$  tiene medida cero si, y sólo si, cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$  posee una vecindad  $U$  tal que el conjunto  $C \cap U$  tiene medida cero.

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $U = \mathbb{R}^n$  es una vecindad tal que  $C = C \cap \mathbb{R}^n$  tiene medida cero.

( $\Leftarrow$ ) Cúbrase todo  $\mathbb{R}^n$  con un número contable de tales vecindades  $U_k$ . Entonces el conjunto  $C = C \cap \mathbb{R}^n = C \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} U_k = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} (C \cap U_k)$  tiene medida cero. ♦

**Nota:** La propiedad de tener medida cero no es una propiedad topológica. Existen homomorfismos del plano en sí mismo, que mapean el intervalo unitario sobre un conjunto con medida positiva\*.

**2.8 Lema:** Toda cubierta abierta para el intervalo unitario  $[0, 1]$  formada por subintervalos contiene una subcubierta finita  $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j$ , con  $\sum_{j=1}^k |I_j| \leq 2$ .

---

\* Para una demostración véase Mayrhofer (1952), y aplíquese el Teorema de la Curva de Jordan.

**Demostración:** Elíjase una subcubierta finita minimal de los intervalos abiertos dados, es decir, una subcubierta en la cual ningún intervalo pueda ser omitido. Supóngase que esta cubierta es  $\{I_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , donde  $I_j = (a_j, b_j)$ . Reordénense los elementos de la cubierta de acuerdo al orden del extremo izquierdo  $a_j$  del intervalo. Este orden está determinado de forma única ya que si  $a_i = a_j$ , entonces  $b_i \leq b_j$  implica que  $(a_i, b_i)$  es redundante, o bien,  $b_j < b_i$  implica que  $(a_j, b_j)$  es redundante (i. e., en cualquier caso puede omitirse uno de estos intervalos y la cubierta no sería minimal). Además,  $a_i < a_{i+1} < b_i \leq a_{i+2}$ , ya que si la segunda desigualdad no se satisface existiría un agujero en la cubierta. Para la tercera desigualdad, nótese que  $b_i \leq b_{i+1}$ , o de otro modo  $(a_{i+1}, b_{i+1}) \subseteq (a_i, b_i)$ . Sin esta desigualdad se tendría que  $(a_{i+1}, b_{i+1}) \subseteq (a_i, b_i) \cup (a_{i+2}, b_{i+2})$ .

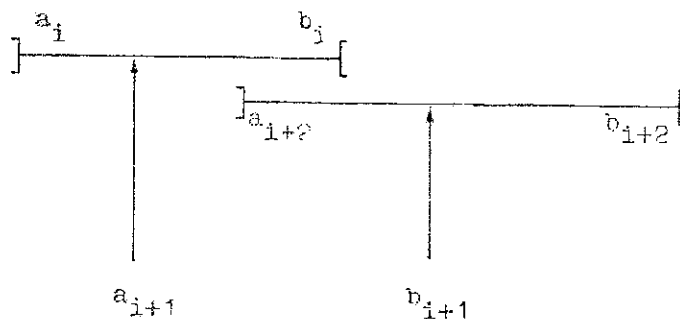


Figura 2.2: Disposición de los elementos de la cubierta  $\{I_j\}$ .

Se sigue ahora que

$$\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^k (a_{i+1} - a_i) + \sum_{i=1}^k (b_i - a_{i+1}) < \sum_{i=1}^k (a_{i+1} - a_i) + \sum_{i=1}^k (a_{i+2} - a_{i+1}) < 2, \text{ y el lema}$$

queda demostrado. ♦

**2.9 Teorema: (Teorema de Fubini).** Sea  $R_t^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , sea  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto y supóngase que  $C \cap R_t^{n-1}$  es nunca denso en  $R_t^{n-1}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces  $C$  es nunca denso en  $\mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** Defínase  $C_t$  como  $C_t \times \{t\} = C \cap (R^{n-1} \times \{t\})$ . Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que  $C \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1]$ , y que  $C_t$  es nunca denso para todo

$t \in [0, 1]$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , encuéntrase una cubierta para  $C_t$  formada por cubos abiertos  $\{W_t^i\}_{i \in \mathbb{Z}^+}$  y tal que su volumen total es menor que  $\varepsilon$ . Sea  $W_t = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} W_t^i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ .

Si  $x_n$  es la última componente, entonces para un  $t$  fijo, la función  $|x_n - t|$  es continua en  $C$  y se anula exactamente en el conjunto  $C_t \times \{t\}$ . Como  $C - (W_t \times [0, 1])$  es compacto, la función  $|x_n - t|$ , restringida a  $C$ , alcanza un valor mínimo  $\alpha$ .

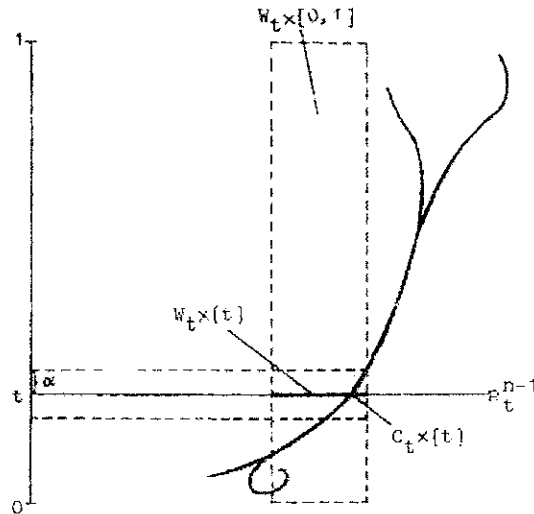


Figura 2.3: Comportamiento de la función  $|x_n - t|$  sobre el conjunto  $C_t \times \{t\}$ .

Entonces,  $C \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x_n - t| < \alpha\} \subseteq W_t \times I_t^\alpha$ , donde  $I_t^\alpha = (t - \alpha, t + \alpha)$ . La colección de intervalos  $I_t^\alpha$  cubre a todo  $[0, 1]$ . Por el Lema 2.8, existe una subcubierta finita en  $I_t^\alpha$ , digamos,  $\{I_j\}_{j=1}^k$ , con  $I_j = I_{t_j}^\alpha$ , tal que  $\sum_{j=1}^k |I_j| \leq 2$ . Los cuboides  $\{W_{t_j}^i \times I_j : i \in \mathbb{Z}^+\}_{j=1}^k$  forman una cubierta para  $C$ , la cual tiene un volumen total menor que  $2\varepsilon$ . ♦

**2.10 Extensión del Teorema de Fubini:** El Teorema de Fubini puede extenderse de la siguiente manera: En lugar de considerar  $C$  compacto, es suficiente asumir que  $C$  es la unión contable de conjuntos compactos. Algunos ejemplos de tales conjuntos son:

(1) los conjuntos cerrados:  $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} C \cap \{|x| \leq n\}$

(2) los conjuntos abiertos: unión contable de esferas cerradas

- (3) las imágenes de estos conjuntos bajos mapeos continuos  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
- (4) uniones contables de intersecciones finitas de los anteriores tipos de conjuntos.

**2.11 Teorema: (Teorema de Sard).** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  un mapeo diferenciable, y sea  $D = \{x \in U : \text{Rg}_x(f) < p\}$  el conjunto de puntos críticos de  $f$ . Entonces  $f(D)$  es nunca denso en  $\mathbb{R}^p$ .

**Demostración:** Por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 0$ ,  $\mathbb{R}^n = \{0\}$  y  $f(U)$  es a lo sumo un punto, por lo que el teorema es verdadero. Para el paso inductivo sea  $D_i \subseteq U$  el conjunto de los  $x \in U$ , donde todas las derivadas parciales de orden menor o igual que  $i$  se anulan. Los  $D_i$  forman una sucesión anidada decreciente de conjuntos cerrados,

$$D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$$

La demostración consiste en establecer las siguientes tres propiedades:

- (a)  $f(D - D_1)$  es nunca denso,
- (b)  $f(D_i - D_{i+1})$  es nunca denso,
- (c)  $f(D_k)$  es nunca denso para  $k$  suficientemente grande.

Nótese que todos los conjuntos considerados anteriormente son casos especiales de las categorías (1)-(4) de la Extensión del Teorema de Fubini. Además, para el caso (a), es suficiente probar que cada punto  $x \in D - D_1$  posee una vecindad  $V$  tal que  $f(V \cap (D - D_1))$  es de medida cero, ya que  $D - D_1$  está cubierto por un número contable de dichos  $V$ . Similarmente ocurre en los casos (b) y (c).

**Demostración de (a):** Supóngase  $p \geq 2$ , ya que para  $p = 1$  se tiene que  $D = D_1$ . Sea  $d \in D - D_1$ . Como  $d \notin D_1$ , existe alguna derivada parcial (sin pérdida de generalidad puede

suponerse que es  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ ) tal que  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(d) \neq 0$ . Entonces el mapeo

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f(x_1), x_2, \dots, x_n)$$

tiene como Jacobiano

$$Dh = \left[ \begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y  $Dh(d)$  es no singular.

Se sigue que en una vecindad  $V$  de  $d$ , el mapeo  $h$  es una transformación de coordenadas.

Considérese el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D \cap V & \xrightarrow{\cong} & D' \\ \subseteq \downarrow & & \downarrow \subseteq \\ V & \xrightarrow{h} & V' \\ & \searrow f & \swarrow g = fh^{-1} \\ & & \mathbb{R}^p \end{array}$$

donde  $g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, g_2(x), \dots, g_p(x))$ . Nótese que  $g$  mapea el hiperplano  $\{x_1 = t\}$  en el hiperplano  $\{y_1 = t\}$ . Sea  $g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$  la restricción de  $g$ . Un punto en  $(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'$  es un punto crítico para  $g$  exactamente cuando es un punto crítico para  $g^t$ , ya que la matriz Jacobiana de  $g$  es

$$Dg = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline * & \partial g_i^t / \partial x_j & & \end{array} \right]$$

Por inducción, el conjunto de valores críticos de  $g^t$  es nunca denso en  $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , por lo que  $g(D')$  tiene una intersección nunca densa con el hiperplano  $\{x : x_1 = t\} \subset \mathbb{R}^p$ . Por el Teorema de Fubini,  $g(D')$  es nunca denso.

Demostración de (b): Al igual que en (a), si  $d \in D_k - D_{k+1}$ , debe de existir alguna derivada parcial de orden  $k + 1$  que no se anula en  $d$ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que

$\frac{\partial^{k+1}f_1}{\partial x_1 \partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(d) \neq 0$ . Si  $w: U \rightarrow \mathbb{R}$  es la función  $w(x) = \frac{\partial^k f_1}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{k+1}}}(x)$ , entonces

$w(d) = 0$  y  $\frac{\partial w}{\partial x_1}(d) \neq 0$ , ya que  $d \in D_k$  y  $d \notin D_{k+1}$ . De la misma forma que en (a), el

mapeo

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^n \ni h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_n)$$

es entonces una transformación de coordenadas en una vecindad  $V$  de  $d$ , y

$h(D_k \cap V) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . Una vez más, definanse  $g = f \circ h^{-1}: V' = h(V) \rightarrow \mathbb{R}^p$ , y

$$g^0 = g|_{(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'}: (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Por inducción, el conjunto de los puntos críticos de  $g^0$  es nunca denso. Pero todo punto en

$h(D_k \cap V)$  es crítico para  $g^0$  ya que todas las derivadas parciales de  $g$  (y por lo tanto de  $g^0$ )

de orden menor o igual a  $k$  se anulan. Entonces  $f(D_k \cap V) = (g \circ h)(D_k \cap V)$  es nunca denso.

Demostración de (c): Sea  $W \subseteq U$  un cubo de lado  $a$ , y sea  $k > n/p - 1$ . Como  $U$  es unión contable de cubos, es suficiente mostrar que  $f(W \cap D_k)$  es nunca denso. El Teorema de Taylor asegura que

$$(*) \quad \left. \begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + R(x, h) \\ |R(x, h)| \leq c|h|^{k+1} \end{array} \right\} \text{ para } x \in D_k \cap W, x+h \in W,$$

donde  $c$  depende de  $W$  y  $f$ .

Divídase  $W$  en  $r^n$  cubos de lado  $a/r$ . Si  $W_1$  es un cubo en esta descomposición, y  $W_1$  contiene a  $x \in D_k$ , entonces cada punto en  $W_1$  puede ser escrito como  $x+h$ , con  $|h| \leq a\sqrt{n}/r$ . Usando la ecuación (\*), el conjunto  $f(W_1)$  está contenido en un cubo de lado  $2c(a\sqrt{n})^{k+1}/r^{k+1} = b/r^{k+1}$ , para una constante  $b = b(f, W)$ .

En conjunto, estos cubos tiene un volumen total  $s \leq r^n \cdot b^p / r^{p(k+1)}$ , y para  $p(k+1) > n$  esta expresión converge a cero al incrementar  $r$ . El volumen total puede, por lo tanto, hacerse arbitrariamente pequeño eligiendo adecuadamente una descomposición fina. ♦

**2.12 Teorema:** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  un mapeo diferenciable con  $p \geq 2n$ . Entonces existe un mapeo lineal  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  con norma arbitrariamente pequeña, tal que  $f + A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una inmersión.

**Demostración:**  $f$  es una inmersión si los vectores  $(\partial f / \partial x_1(x), \dots, \partial f / \partial x_n(x))$  son linealmente independientes en cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $s \leq n$  tal que los  $(\partial f / \partial x_1(x), \dots, \partial f / \partial x_s(x))$  son linealmente independientes en todo punto. Considérese el mapeo

$$\phi: \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \ni \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_s, x) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}(x).$$

Como  $s+n < p$ ,  $\phi(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n)$  es nunca denso. Sea  $a \in \mathbb{R}^p$ , tal que  $a$  es pequeño y  $a \notin \phi(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n)$ . Defínase  $g(x) = f(x) + ax_{s+1}$ . Entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ para } i \leq s,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_{s+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}} + a,$$

y para ningún  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $\sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_{s+1}}(x)$ .

Entonces los vectores  $(\partial g / \partial x_i)$  son linealmente independientes en todos los puntos para  $i \leq s+1$ . El teorema se sigue por inducción.  $\blacklozenge$

Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K \subseteq U$ ,  $K$  compacto. Sea  $C_K^k(U)$  el conjunto de los mapeos diferenciables  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  con la seminorma  $|f|_K^k =$  el máximo valor sobre  $K$  de cualquiera de las derivadas de  $f$ , de orden menor o igual que  $k$ . Una  $\varepsilon$ -vecindad de  $f$  consiste de todos los  $g \in C_K^k(U)$  con  $|g-f|_K^k < \varepsilon$ . Estas  $\varepsilon$ -vecindades dotan a  $C_K^k(U)$  de una topología, por lo que tiene sentido hablar de conjuntos abiertos, cerrados, densos. Sea

$$C_K^k(U, \mathbb{R}^p) = \underbrace{C_K^k(U) \times \dots \times C_K^k(U)}_{p \text{ factores}}$$

con la norma del máximo de los módulos de sus componentes.

**2.13 Teorema:** Sea  $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compacto,  $U$  abierto,  $p \geq 2n$ . El conjunto  $\mathcal{S}$  de los mapeos diferenciables  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ , tales que  $\text{Rg}_x(f) = n$  para  $x \in K$ , es abierto y denso en  $C_k^k(U, \mathbb{R}^p)$  para cada  $k$ .

**Demostración:** Si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  es una inmersión,  $K \subseteq U$ , entonces considérese el mapeo

$$U \xrightarrow{Df} \mathbb{R}^{np} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R},$$

donde  $\phi(A) =$  la suma de los cuadrados de los  $(n \times n)$ -menores de la matriz  $A$ . La composición  $\phi \circ Df$  no anula en  $K$  por hipótesis. Si  $f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  es diferenciable y está suficientemente cerca de  $Df$  en  $K$ , entonces  $\phi \circ Df_1 \neq 0$  para todo punto de  $K$ . Así, el conjunto  $\mathcal{S}$  es abierto. El carácter denso de  $\mathcal{S}$  se establece ya que se puede encontrar un mapeo lineal  $A$ , que es arbitrariamente pequeño en  $K$ , y tal que  $f + A$  es una inmersión (Teorema 2.12). ♦

**Nota:** En topología, este resultado se establece diciendo que un mapeo  $U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 2n$ , es **casi siempre** una inmersión.

### 3. CONSTRUCCIÓN DE MAPEOS DIFERENCIABLES

**3.1 Lema:** Sea  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $\lambda(t) = \begin{cases} 0; & \text{para } t \leq 0 \\ e^{1/t}; & \text{para } t > 0 \end{cases}$ . Entonces  $0 \leq \lambda(t) \leq 1$ , y  $\lambda$  es diferenciable (un número arbitrario de veces) en todo punto.

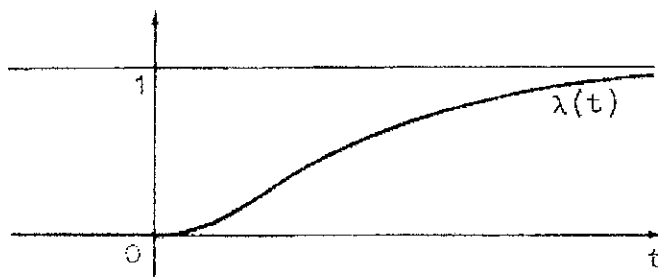


Figura 3.1: Gráfica de la función  $\lambda(t) = 0, t \leq 0; \lambda(t) = e^{1/t}, t > 0$ .

**Demostración:** La  $n$ -ésima derivada de  $\lambda$  para  $t > 0$  tiene la forma  $q(1/t) \cdot e^{-1/t}$ , donde  $q$  es un polinomio de grado  $2n$ . Todas las derivadas convergen a cero cuando  $t$  se aproxima a 0. Entonces,  $\lambda$  es diferenciable en el origen y la Serie de Taylor de  $\lambda$  vale cero en ese punto.  $\blacklozenge$

Ahora, sean  $\varepsilon > 0$ , y  $\phi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\phi_\varepsilon(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \lambda(\varepsilon - t)}$ . Nótese que  $\phi_\varepsilon$  es diferenciable,  $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ ,  $\phi_\varepsilon(t) = 0$  si y sólo si  $t \leq 0$ , y  $\phi_\varepsilon(t) = 1$  para  $t \geq \varepsilon$ .

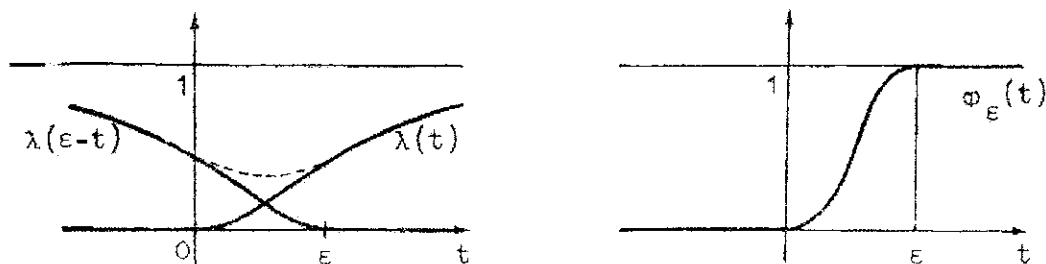


Figura 3.2: Gráfica de las funciones  $\lambda(t)$ ,  $\lambda(\varepsilon - t)$ , y  $\phi_\varepsilon(t)$ .

Si  $B_r[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\}$  es la esfera cerrada centrada en  $x$  con radio  $r$ , y  $\varepsilon > 0$ , entonces la función  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ni y \mapsto 1 - \phi_\varepsilon(|y - x| - r)$  para  $x, r, \varepsilon$  fijos, tiene las siguientes propiedades:  $0 \leq \psi(y) \leq 1$ ,  $\psi(y) = 1$  para  $y \in B_r[x]$ , y  $\psi$  es diferenciable ya que en los puntos en los cuales  $|y - x|$  no es diferenciable,  $\psi$  es localmente constante. Además,  $\psi(y) = 0$  si y sólo si  $y \notin B_{r+\varepsilon}(x)$ .

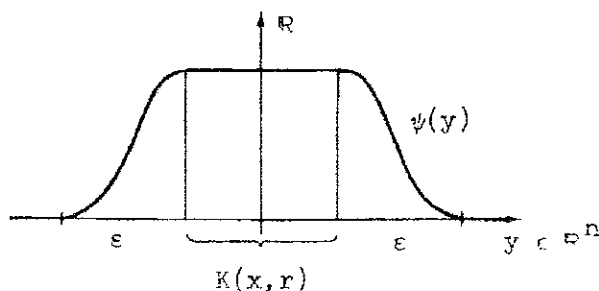


Figura 3.3: Gráfica de la función  $\psi(y)$ .

**3.2 Teorema:** Sean  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  el conjunto de las funciones diferenciables  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{G}_n(x)$  el conjunto de gérmenes  $(\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $p_x : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathfrak{G}_n(x)$  el mapeo que asigna a cada función  $f$  su germen en  $x$ . Entonces  $p_x$  es sobreyectivo.

**Demostración:** Sea  $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}$  un germen representado por  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Elíjanse  $r, \varepsilon > 0$  tales que  $B_{r+\varepsilon}[x] \subseteq U$ , y sea  $\psi$  como en el párrafo anterior. Entonces  $\tilde{\phi} = p_x(\phi \cdot \psi)$  y  $(\phi \cdot \psi)(y) = 0$  fuera de  $B_{r+\varepsilon}[x]$ , de forma que  $\phi \cdot \psi$  puede extenderse a todo  $\mathbb{R}^n$  usando la función cero.  $\blacklozenge$

**Nota:** El teorema correspondiente para variedades diferenciables  $M^n$ , en lugar de  $\mathbb{R}^n$ , también se cumple.

**3.3 Teorema: (Teorema de Whitney).** Cualquier subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  (o de una variedad diferenciable) es el conjunto de ceros de un mapeo diferenciable.

**Demostración:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  cerrado, y sea  $U = \mathbb{R}^n - A$  su complemento abierto. Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que  $U \neq \emptyset$ , así que  $U = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} B_{r_m}(x_m)$ . Sea  $\psi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo diferenciable con  $\psi_m \geq 0$  y tal que  $\psi_m(y) \neq 0$  si, y sólo si,  $y \in B_{r_m}(x_m)$ .

Sea  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\psi(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(y) \cdot \varepsilon_m$ , donde  $\{\varepsilon_m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$  es una sucesión en  $\mathbb{R}$ , y cada  $\varepsilon_m > 0$  se escoge de manera que cada derivada de  $\varepsilon_m \psi_m$  de orden menor o igual a  $m$  (nótese que sólo existe un número finito de estas derivadas para cada  $m$ ) está acotada por  $1/2^m$ . Como  $\psi_m$  y sus derivadas son no nulas únicamente en un conjunto compacto  $B_{r_m}[x_m]$ , es posible encontrar dicha sucesión. La serie para  $\psi$  es entonces uniformemente convergente en todo  $\mathbb{R}^n$ , y esto también es válido para cada una de las derivadas término a término de esta serie, ya que en cada punto de  $\mathbb{R}^n$  cualquiera de estas series está dominada

por  $\sum_m 1/2^m$ . Luego, se tiene que  $\psi$  es diferenciable y  $\psi(x) = 0$  para  $x \in A$ , ya que cada  $\psi_m(x) = 0$  para  $x \in A$ . Además,  $\psi(x) \neq 0$  fuera de  $A$  ya que al menos una  $\psi_m(x) \neq 0$ . ♦

**3.4 Definición:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , y sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ . El **soprote** (o **portador**) de  $f$  es el conjunto  $\text{Sop}(f) = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$ . Es decir,  $x \notin \text{Sop}(f)$  si y sólo si el germen  $\tilde{f} : (A, x) \rightarrow \mathbb{R}^k$  se anula.

**3.5 Definición:** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  una sucesión de conjuntos en  $M$ .  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  se dice que es **localmente finita** si para cada punto  $x \in M$  existe una vecindad  $V$ , tal que  $V \cap A_n = \emptyset$  para todos, excepto un número finito de  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**3.6 Teorema: (Teorema de la Partición de la Unidad).** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una cubierta abierta para  $M$ . Entonces existe una sucesión de funciones diferenciables  $\{\phi_n : M \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  tales que  $0 \leq \phi_n(x) \leq 1$ ,  $\text{Sop}(\phi_n) \subseteq U_{\lambda(n)}$  para algún  $\lambda(n) \in \Lambda$ ,  $\{\text{Sop}(\phi_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es localmente finita, y  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \phi_n(x) = 1$ , para todo  $x \in M$ .

**Demostración:**  $M$  es localmente compacto con una base contable, entonces puede encontrarse una cubierta abierta  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  tal que  $\bar{V}_n \subseteq U_{\lambda(n)}$ , de forma que  $\{\bar{V}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  sea localmente finita\*\*. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que cada  $\bar{V}_n$  está contenido en una vecindad coordinada. Por el Teorema de Whitney, se obtiene una función positiva y diferenciable  $\tau_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\tau_n(x) = 0$  si y sólo si  $x \notin V_n$ . Luego,  $\text{Sop}(\tau_n) = \bar{V}_n$ . Defínase  $\tau(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \tau_n(x)$ . Como  $\tau(x) > 0$  y  $\tau$  es diferenciable ya que la suma es localmente finita, entonces puede definirse  $\phi_n = \tau_n / \tau$ . ♦

\* Este resultado está relacionado con el Teorema de Sard: un conjunto definido por ecuaciones continuas es cerrado y cualquier conjunto cerrado puede ser descrito por ecuaciones diferenciables. Ahora el Teorema de Sard afirma que no es probable que el conjunto solución de  $f(x) = b$  sea "problemático", para  $f$  diferenciable.

\*\* Para una demostración véase Schubert (1964).

**Nota:** Al conjunto  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  se le llama una **partición de la unidad** asociada a la cubierta  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ . La suma  $\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \phi_n$  está bien definida ya que cerca de cualquier punto solamente un número finito de las  $\phi_n$  son no nulas.

#### 4. GÉRMINES Y JETS

Sea  $\mathcal{O}(n)$  el anillo de todos los gérmenes diferenciables  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $C^\infty(n)$  denota al anillo de los mapeos diferenciables  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces existe un mapeo sobreyectivo  $C^\infty(n) \rightarrow \mathcal{O}(n) \ni f \mapsto \tilde{f}$ . Considérese en  $C^\infty(n)$  el ideal  $\mathfrak{a}$  definido de la forma siguiente:

$$\mathfrak{a} = \{f \in C^\infty(n) : f \text{ se anula en alguna vecindad de } 0\}.$$

Como anillos,  $\mathcal{O}(n) = C^\infty(n) / \mathfrak{a}$ , y esto puede utilizarse para definir la estructura anular de  $\mathcal{O}(n)$ .

Sea  $\mathfrak{m}(n) = \{f \in \mathcal{O}(n) : f(0) = 0\}$ . Entonces  $\mathfrak{m}(n) \subseteq \mathcal{O}(n)$  es un ideal maximal y  $\mathcal{O}(n) / \mathfrak{m}(n) = \mathbb{R}$ , definido por  $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(0)$ . En realidad,  $\mathfrak{m}(n)$  es el único ideal maximal en  $\mathcal{O}(n)$ . Para ver esto, supóngase  $\tilde{f} \notin \mathfrak{m}(n)$ , entonces  $\tilde{f}(0) \neq 0$  y en alguna vecindad del origen,  $f(x) \neq 0$  para cualquier representante de  $\tilde{f}$ . Se sigue que  $1/f$  está definida, lo cual significa que  $\tilde{f}$  es una unidad y no está contenida en ideal propio alguno. Sea  $C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \ni f \text{ es diferenciable}\}$ .

**4.1 Teorema:** Sea  $\mathfrak{m}(k) \subseteq \mathcal{O}(n+k)$  el ideal de los gérmenes  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  (en el origen), para los cuales  $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$ , y sean  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  coordenadas en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ , así que  $\mathfrak{m}(k)$  es generado por los gérmenes  $\tilde{y}_i$  (i. e., los gérmenes de  $(x, y) \mapsto y_i$ ). Entonces,  $\tilde{f} \in \mathfrak{m}(k)$  si, y sólo si  $\tilde{f} = \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i \tilde{f}_i$ , con  $\tilde{f}_i \in \mathcal{O}(n+k)$ .

**Demostración:** Elíjase un representante  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Entonces } f(x, y) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, ty) dt = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) \cdot y_i \right) dt = \sum_{i=1}^k y_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) dt = \\ &= \sum_{i=1}^k y_i \cdot f_i(x, y), \text{ con } f_i(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, ty) dt \text{ diferenciable. } \blacklozenge \end{aligned}$$

Una consecuencia importante de este teorema la constituye la propiedad que indica que  $\mathfrak{E}(n)$  es un  $\mathbb{R}$ -álgebra.

**4.2 Definición:** Una **derivación** de  $\mathfrak{E}(n)$  es un mapeo lineal  $X: \mathfrak{E}(n) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $X(f \cdot g) = X(f) \cdot g(0) + f(0) \cdot X(g)$ . En particular,  $X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) + X(1)$  implica que  $X(1) = 0$  y  $X(c) = 0$  para funciones constantes.

Es importante indicar que la colección de todas las derivaciones de  $\mathfrak{E}(n)$  es un espacio vectorial.

**4.3 Teorema:** Los mapeos  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0: \mathfrak{E}(n) \rightarrow \mathbb{R} \ni \tilde{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$  forman una base para el

espacio vectorial de derivaciones de  $\mathfrak{E}(n)$ .

**Demostración:** Supóngase que  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ; y que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 = 0$ .

Entonces  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \right|_0 = \lambda_i = 0$  y los  $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0$  son linealmente independientes.

Por otra parte, sea  $X$  una derivación de  $\mathfrak{E}(n)$  tal que  $X(x_i) = \lambda_i$ . Entonces

$Y = X - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0$  es también una derivación y  $Y(x_i) = 0$ . Si  $\tilde{f} \in \mathfrak{E}(n)$  se escribe como

$\tilde{f} = f(0) + \sum_i x_i \tilde{f}_i$ , se tiene que  $Y(\tilde{f}) = Y(f(0)) + \sum_i Y(x_i \cdot \tilde{f}_i) = 0 + \sum_i Y(x_i) \cdot \tilde{f}_i(0) +$

$+ \sum_i x_i(0) \cdot Y(\tilde{f}_i) = 0$ . Por lo tanto,  $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0$ .  $\blacklozenge$

**4.4 Notación:** Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , y sea  $(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k)$  respectivamente, con  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ . Entonces se usarán las siguientes notaciones:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad 0! = 1 \text{ por definición,}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f, \text{ con } |\alpha| = \text{orden de } D^\alpha,$$

$$D^{\alpha, \beta} f = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_k^{\beta_k}} f, \text{ con } |\alpha| = \text{orden de } D^\alpha,$$

$$(x, y)^{\alpha, \beta} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_k^{\beta_k}.$$

**4.5 Teorema:** Sea  $\mathfrak{m}(k) \subseteq \mathfrak{O}(n+k)$  el ideal de los gérmenes  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  (en el origen), para los cuales  $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$ . Entonces  $\mathfrak{m}(k)^s = \{\tilde{f} \in \mathfrak{O}(n+k) : D^{\alpha, \beta} \tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0 \text{ para todo } \alpha \text{ y para todo } \beta \text{ con } |\beta| < s\}$ , y éste es un ideal generado por los monomios  $y_1^{\beta_1} \dots y_k^{\beta_k}$ ,  $|\beta| = s$ .

**Demostración:**  $\mathfrak{m}(k)^s = \{\tilde{f} \in \mathfrak{O}(n+k) : f = \sum_{\lambda} f_{\lambda_1} \dots f_{\lambda_s}, \text{ con } f_{\lambda_i} \in \mathfrak{m}(k)\}$ , y el segundo enunciado se deduce de inmediato. De la regla del producto,  $f \in \mathfrak{m}(k)^s \Rightarrow D^{\alpha, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$  para  $|\beta| < s$ .

Si, por otra parte,  $D^{\alpha, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$  para todo  $|\beta| < s$ , entonces  $f \in \mathfrak{m}(k)^{s-1}$  (por inducción)

y  $f = \sum_{|\beta|=s-1} f_{\beta} y^{\beta}$ . Es suficiente mostrar que  $f_{\beta} \in \mathfrak{m}(k)$ , i. e.,  $f_{\beta}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$  para todo  $\beta$ ,

$|\beta| = s-1$ . Si algún  $f_{\beta_0}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \neq 0$ , entonces  $D^{0, \beta_0} f = \sum_{\beta} D^{0, \beta_0} f_{\beta} y^{\beta} = \beta_0! \cdot f_{\beta_0} \neq 0$  en

$\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . ♦

**4.6 Definición:** Considérese el siguiente diagrama (nótese que  $\mathfrak{m}^k \subseteq \mathfrak{m}^l$  para  $k \geq l$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{j^{k-1}} & \mathfrak{O}(\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^k \\
 \mathfrak{O}(\mathfrak{n}) & \searrow & \downarrow \pi^k \\
 & \xrightarrow{j^{k-1}} & \mathfrak{O}(\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^1 \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \mathfrak{O}(\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(\mathfrak{n}) = \mathbb{R}
 \end{array}$$

La imagen  $j^{k-1}(f)$  de  $\tilde{f} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{n})$  es llamada el **(k-1)-jet** de  $\tilde{f}$ , denotado usualmente por  $\hat{f}$ . El cociente  $\mathfrak{O}(\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^k$  es llamado el **R-álgebra de (k-1)-jets**.

Dos gérmenes definen (o tienen) el mismo k-jet en el origen de  $\mathbb{R}^n$ , si sus derivadas de orden mayor que k son idénticas. Nótese que,  $j^k(f) = j^k\left(\sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha\right)$  (el polinomio de Taylor de orden k), y dos polinomios de grado menor o igual que k tienen el mismo k-jet si y sólo si son iguales.

**4.7 Definición:** Un germen  $\tilde{f} \in \mathfrak{m}(\mathfrak{n})^k$  se dice que **se anula de orden k** (es decir, posee un (k-1)-jet nulo). El símbolo  $\mathfrak{o}(k)$  se usará en ocasiones para denotar a un germen que se anula de orden k.

Se mostrará que cualquier k-jet se representa por un polinomio de grado menor o igual que k. Estos polinomios se suman y multiplican en el sentido usual, excepto que los términos de orden mayor que k son omitidos en el producto. En particular:

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{n})/\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^{k+1} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]/\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1}$$

Donde  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  es el anillo de polinomios en  $x_1, \dots, x_n$  y  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1}$  es el ideal generado por  $\{x_1, \dots, x_n\}$  elevado a la potencia k+1. Además,  $j^k(f)$  es el polinomio de Taylor de orden k para f, evaluado en  $0 \in \mathbb{R}^n$ . De forma general se tiene que:

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{n}+k)/\mathfrak{m}(\mathfrak{k})^{s+1} = \mathfrak{O}(\mathfrak{n})[y_1, \dots, y_n]/\langle y_1, \dots, y_n \rangle^{s+1},$$

$$\tilde{f} \mapsto \sum_{|\beta| \leq s} D^{0, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \cdot y^\beta / \beta!,$$

donde  $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$  es el ideal en el  $\mathfrak{E}(n)$ -álgebra  $\mathfrak{E}(n)[y_1, \dots, y_n]$  generado por  $\{y_1, \dots, y_n\}$ .

Defínase  $\mathfrak{m}(k)^\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{m}(k)^s \subseteq \mathfrak{E}(n+k)$ . Usando el teorema anterior, un germen  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  pertenece a  $\mathfrak{m}(k)^\infty$  si y sólo si, para un  $s \in \mathbb{Z}^+$  arbitrariamente grande,  $\tilde{f}$  posee una representación  $f = \sum_{|\beta|=s} f_\beta y^\beta$ . Es decir, si y sólo si todos los gérmenes  $D^{\alpha, \beta} f$  se anulan en  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

**4.8 Definición:** El anillo  $\mathfrak{E}(n)[[y_1, \dots, y_n]]$  se llama el **anillo de series de potencias** en las variables  $y_1, \dots, y_n$  sobre el anillo  $\mathfrak{E}(n)$ . Para  $n=0$  esto es  $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ , es decir, para cualquier serie de potencias dada (no necesariamente convergente) existe una función cuya serie de Taylor desarrollada alrededor del origen es exactamente esta serie de potencias.

**4.9 Teorema: (Teorema de Borel).** Sea  $\mathfrak{m}(k)^\infty \subseteq \mathfrak{E}(n+k)$  definido como en el párrafo anterior. Entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(n+k) / \mathfrak{m}(k)^\infty &= \mathfrak{E}(n)[[y_1, \dots, y_n]], \\ f &\mapsto \sum_{\beta} D^{0, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \cdot y^\beta / \beta!. \end{aligned}$$

**Demostración:** El mapeo  $\mathfrak{E}(n+k) / \mathfrak{m}(k)^\infty \rightarrow \mathfrak{E}(n)[[y_1, \dots, y_n]]$  es inyectivo, ya que si  $f \in \mathfrak{E}(n+k)$  y  $D^{0, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 0$  para todo  $\beta$ , entonces el teorema anterior asegura que  $f \in \mathfrak{m}(k)^s$  para todo  $s$ . Sólo resta demostrar que para cada  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ , dado el germen  $\tilde{f}_\beta : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , existe otro germen  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D^{0, \beta} \tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \tilde{f}_\beta$ .

En efecto, se seleccionan representantes  $f_\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  para  $\tilde{f}_\beta$  con soportes compactos en  $K(0, 1)$ . Considérese una función  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi(y) = 1$  para  $|y| \leq 1/2$ ,  $\phi(y) = 0$  para  $|y| \geq 1$ . Sea  $y = (y_1, \dots, y_k)$  y

$$(*) \quad f(x, y) = \sum_{\beta} \frac{f_{\beta}(x)}{\beta!} \cdot y^{\beta} \cdot \phi(t_{\beta} \cdot y), \text{ para } 1 < t_{\beta} \in \mathbb{R}$$

Asúmase que la sucesión  $t_{\beta} = t_{|\beta|}$  puede ser definida de forma que la serie

$$(**) \quad \sum_{\beta} D^{\alpha} \left( \frac{f_{\beta}(x)}{\beta!} \cdot y^{\beta} \cdot \phi(t_{\beta} \cdot y) \right)$$

sea uniformemente convergente para cada  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+k})$ . Entonces  $f$  estaría bien definida y sería diferenciable, y la ecuación (\*) podría derivarse término a término. Como el germen de  $\phi(t_{\beta} \cdot y)$  es igual a 1, esto implica  $D^{0, \beta} f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = \tilde{f}_{\beta}$ , como se requería.

Se ha probado que una sucesión  $\{t_{|\beta|}\}$  que crece suficientemente rápido, hace que la serie (\*\*) sea uniformemente convergente para todo  $\alpha$ .

Para esto, escríbase el  $\beta$ -ésimo término de (\*),  $t_{|\beta|} > 1$ , en la forma

$$(1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot \frac{f_{\beta}(x)}{\beta!} \cdot (t_{|\beta|} \cdot y)^{\beta} \cdot \phi(t_{|\beta|} \cdot y) = (1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot f_{\beta}(x) \cdot \psi_{\beta}(t_{|\beta|} \cdot y)$$

Las funciones  $\psi_{\beta}$  se anulan fuera del conjunto  $\{|t_{|\beta|} \cdot y| \leq 1\}$ . Ahora sea  $M_{\beta} = \max\{|D^{\alpha}(f_{\beta}(x) \cdot \psi_{\beta}(y))|, |\alpha| < |\beta|\}$ . Nótese que  $\text{Sop}(f_{\beta} \psi_{\beta}) \subseteq \{(x, y) : |x|, |y| < 1\}$ , y que existe sólo un número finito de  $\alpha$  con  $|\alpha| < |\beta|$ . Entonces  $M_{\beta}$  existe.

Como  $t_{|\beta|} > 1$ , se sigue que para  $|\alpha| < |\beta|$ , el  $\beta$ -ésimo término de (\*\*) es menor, en valor absoluto, que  $(t_{|\beta|})^{|\alpha|} \cdot (1/t_{|\beta|})^{|\beta|} \cdot M_{\beta} < M_{\beta} / t_{|\beta|}$  (recuérdese que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+k})$ ).

Elíjase una sucesión  $\varepsilon_{\beta} > 0$ , tal que  $\sum_{\beta} \varepsilon_{\beta}$  converge y selecciónese  $t_{|\beta|} > M_{\beta} / \varepsilon_{\beta}$ .

Finalmente, para  $|\alpha| < |\beta|$  el  $\beta$ -ésimo término de (\*\*) está dominado por  $\varepsilon_{\beta}$ . ♦

Las series de potencias forman un anillo  $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ . Este anillo se denotará por  $\hat{\mathfrak{G}}(n)$ , con elementos  $\hat{f}, \hat{g}, \dots$ . El mapeo en el Teorema de Borel

$$\mathfrak{G}(n) \xrightarrow{\hat{f}} \mathfrak{G}(n) / \mathfrak{m}(k)^{\infty} = \hat{\mathfrak{G}}(n)$$

será indicado también por  $\tilde{f} \mapsto \hat{f}$ .

**4.10 Definición:** Si  $\hat{f} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} x^{\alpha}$ ,  $\hat{g} = \sum_{\alpha} g_{\alpha} x^{\alpha}$  con  $f_{\alpha}, g_{\alpha} \in \mathbb{R}$ , entonces la suma y el producto de  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  se definen, respectivamente, por  $\hat{f} + \hat{g} = \sum_{\alpha} (f_{\alpha} + g_{\alpha}) x^{\alpha}$ ,  $\hat{f} \cdot \hat{g} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} (f_{\beta} + g_{\gamma}) x^{\alpha}$ .

**4.11 Definición:** Si  $\tilde{f} \in \mathfrak{E}(n)$ , entonces  $j(f) = j^{\infty}(f) = \hat{f}$  es llamado el **jet** (o  $\infty$ -**jet**) de  $\tilde{f}$  en el origen.

**4.12 Propiedad:** El mapeo  $\mathfrak{E}(n) \rightarrow \hat{\mathfrak{E}}(n)$  es un homomorfismo entre álgebras.

**Demostración:** Sean  $\hat{f} = p + m$ ,  $\hat{g} = q + r$ , con  $p, q$  polinomios;  $m, r \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Entonces  $\hat{f} + \hat{g} = p + q + m_1$ , con  $m_1 \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , por lo que  $(f + g)^{\hat{}} = (p + q)^{\hat{}} = p + q \pmod{\mathfrak{m}(n)^{k+1}}$ , ya que la expansión de Taylor deja invariantes a los polinomios. Similarmente,  $\hat{f}\hat{g} = pq + m_2$ , con  $m_2 \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Entonces, bajo el mismo argumento,  $(fg)^{\hat{}} = (pq)^{\hat{}} = pq \pmod{\mathfrak{m}(n)^{k+1}}$ .  $\blacklozenge$

**4.13 Propiedad:**  $\hat{\mathfrak{E}}(n)$  posee un único ideal maximal  $\hat{\mathfrak{m}}(n) = \{\hat{f} \in \hat{\mathfrak{E}}(n) : \hat{f}(0) = 0\}$ .

**Demostración:** Si  $\hat{f} \notin \hat{\mathfrak{m}}(n)$ , entonces  $\hat{f} = f_0 \cdot (1 - f_1)$ , con  $f_1 \in \hat{\mathfrak{m}}(n)$ ,  $0 \neq f_0 \in \mathbb{R}$ , y esto produce la serie de potencias  $1/\hat{f} = 1/f_0 \cdot (1 + f_1 + f_1^2 + \dots)$  (con los monomios escritos en orden creciente). Por lo tanto,  $\hat{f} \notin \hat{\mathfrak{m}}(n) \Rightarrow \hat{f}$  es una unidad  $\Rightarrow \tilde{f}$  es una unidad.  $\blacklozenge$

**4.14 Propiedad:** El ideal  $\hat{\mathfrak{m}}(n)$  está generado por  $x_1, \dots, x_n$  (cada monomio es divisible por algún  $x_i$ ). Además,  $\hat{\mathfrak{m}}(k)^{\infty} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \hat{\mathfrak{m}}(k)^s = \{0\}$ , ya que toda serie de potencias tiene grado igual al menor  $k \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $\hat{f} = \sum_{\beta} f_{\beta} x^{\beta}$  y  $f_{\beta} \neq 0$  para  $|\beta| = k$ .

**Demostración:** Nótese que  $\text{gr}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \text{gr}(\hat{f}) + \text{gr}(\hat{g})$  (por definición,  $\text{gr}(0) = \infty$ ). Toda serie de potencias  $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k$  tiene grado mayor o igual a  $k$ , de forma que  $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty$  implica que  $\text{gr}(\hat{f}) \geq k$ , para todo  $k$ , *i. e.*,  $\hat{f} = 0$ . ♦

**4.15 Definición:** Un  $\mathcal{R}$ -módulo  $M$  se dice que es **noetheriano** si para cada cadena ascendente de  $\mathcal{R}$ -submódulos de  $M$ ,  $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ , existe un entero positivo  $k$  tal que  $M_k = M_{k+1} = M_{k+2} = \dots$ . Un anillo  $\mathcal{R}$  es **noetheriano** si, entendido como  $\mathcal{R}$  módulo, es un  $\mathcal{R}$ -módulo noetheriano.

**4.16 Propiedad:**  $\hat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$  es un anillo noetheriano. Más aún,  $\hat{\mathcal{E}}(\mathfrak{n})$  es un dominio de factorización única\*. ♦

Estas dos últimas propiedades son falsas para  $\mathcal{E}(\mathfrak{n})$ . En realidad, el ideal  $\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^\infty \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{n})$  no está finitamente generado.

**4.17 Teorema: (Lema de Nakayama).** Sea  $\mathcal{R}$  un anillo conmutativo con elemento identidad 1, tal que  $\mathcal{R}$  posee un único ideal maximal  $\mathfrak{m}$ . Supóngase que  $A$  es un  $\mathcal{R}$ -módulo finitamente generado. Entonces,  $\mathfrak{m} \cdot A = A \Rightarrow A = 0$ .

**Demostración:** Si  $z \in \mathfrak{m}$ , entonces  $1+z$  es una unidad. De otro modo,  $1+z \in \mathfrak{m}$  significa que  $1+z$  debe estar en un ideal maximal, lo que implica que  $1 \in \mathfrak{m}$ . Si  $a_1, \dots, a_n$

son generadores para  $A$ , entonces por hipótesis, existen  $z_{ij} \in \mathfrak{m}$  tales que  $a_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} a_j$ , que,

escrito en forma matricial es  $a = Za$ , *i. e.*,  $(Z-I)a = 0$ , donde  $I$  es la matriz identidad, y

$$Z = [z_{ij}].$$

Ahora,  $\det(Z-I)$  es el polinomio característico de  $Z$  evaluado en el punto 1, y es igual a  $(\pm 1 + \text{suma de productos de elementos de } Z) = \pm 1 + \bar{z}$ ,  $\bar{z} \in \mathfrak{m}$ .

Entonces  $\det(Z-I) \neq 0$ , así que  $Z-I$  es invertible, y por lo tanto  $a = (a_1, \dots, a_n) = 0$ , es decir,  $A = 0$ . ♦

---

\* Para una demostración véase Bourbaki (1970).

**Nota:** Si  $\mathcal{R} = \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n})$ , entonces se puede tomar para  $A$  cualquier ideal, ya que el anillo es noetheriano. Sin embargo, no todo ideal en  $\mathcal{O}(\mathfrak{n})$  está finitamente generado.

**4.18 Corolario:** Bajo las mismas hipótesis del teorema 4.16, sean  $B, C$   $\mathcal{R}$ -módulos tales que  $A, B \subseteq C$ . Entonces,  $A \subseteq B + \mathfrak{m} \cdot A \Rightarrow A \subseteq B$ .

**Demostración:**  $A \subseteq B + \mathfrak{m} \cdot A$  implica  $A/A \cap B \subseteq (B + \mathfrak{m} \cdot A)/B = \mathfrak{m} \cdot (A/A \cap B)$ . Por el Lema de Nakayama,  $A/A \cap B = 0$  y entonces  $A = A \cap B$ , es decir,  $A \subseteq B$ . ♦

Retornando a los anillos en estudio, sea  $\mathcal{O}(\mathfrak{n}, p)$  el anillo de los gérmenes  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ , i. e.,  $\mathcal{O}(\mathfrak{n}, p) = \mathcal{O}(\mathfrak{n}) \times \mathcal{O}(\mathfrak{n}) \times \dots \times \mathcal{O}(\mathfrak{n})$  (el producto consta de  $p$  factores), y sea  $\hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, p) = \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}) \times \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}) \times \dots \times \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n})$ . Así, se tiene el mapeo  $j: \mathcal{O}(\mathfrak{n}, p) \rightarrow \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, p) \ni (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p) \mapsto (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p)$ . Dados los gérmenes  $(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{\tilde{g}} \mathbb{R}^q$ , entonces  $\tilde{g} \circ \tilde{f}: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^q$  es un germen, y, correspondientemente, para las series de potencias  $\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p)$ ,  $\hat{f}_i \in \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})$ , y  $\hat{g} = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_q)$ ,  $\hat{g}_j \in \hat{\mathcal{O}}(p)$ , existe la composición  $\hat{g} \circ \hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, q): (\hat{g} \circ \hat{f})_i = \hat{g}_i(\hat{f}_1(x), \dots, \hat{f}_p(x))$ . La igualdad  $(\tilde{g} \circ \tilde{f}) = \hat{g} \circ \hat{f}$  usualmente se conoce como la **regla de la cadena generalizada** (la demostración es semejante a la del producto de jets).

Un elemento  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, p)$  puede derivarse término por término con respecto a todas las variables. El jacobiano  $D\hat{f}(0)$  está dado por la parte linealizada de  $\hat{f}$ . He aquí un teorema de función inversa.

**4.19 Teorema:**  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, p)$ ,  $\hat{f}(0) = 0$ , es invertible con respecto a  $\circ$  si, y sólo si,  $D\hat{f}(0)$  es invertible (por lo que  $n = p$ ). El elemento identidad de  $\hat{\mathcal{O}}(\mathfrak{n}, n)$  bajo  $\circ$  es la  $n$ -tupla de series de potencias  $(x_1, \dots, x_n)$ .

**Demostración:**  $(\Rightarrow)$  Si  $(\hat{f} \circ \hat{g})(x) = x$ , entonces  $D\hat{f}(0) \cdot D\hat{g}(0) = 1$ , por lo que  $\hat{f}$  invertible implica  $D\hat{f}(0)$  invertible.

( $\Leftarrow$ ) Si  $D\hat{f}(0)$  es invertible, eljase  $\tilde{f} \in \mathfrak{E}(n, p)$ , con  $j(\tilde{f}) = \hat{f}$ , de forma que  $(\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f})(x) = x$ ,  $(\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1})(y) = y$ , entonces  $(\hat{f}^{-1} \circ \hat{f})(x) = x$ ,  $(\hat{f} \circ \hat{f}^{-1})(y) = y$ .  $\blacklozenge$

El teorema anterior es válido sobre un campo arbitrario, y su demostración es mucho más simple que la correspondiente al Teorema de la Función Inversa\*\*.

Un germen diferenciable  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \mapsto (\mathbb{R}^p, 0)$  define un homomorfismo entre álgebras  $f^* : \mathfrak{E}(p) \rightarrow \mathfrak{E}(n) \ni \tilde{\phi} \mapsto \tilde{\phi} \circ \tilde{f}$ ; y un jet  $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{E}}(n, p)$ ,  $\hat{f}(0) = 0$ , define un homomorfismo correspondiente  $\hat{f}^* : \hat{\mathfrak{E}}(p) \rightarrow \hat{\mathfrak{E}}(n) \ni \hat{\phi}(y_1, \dots, y_p) \mapsto \hat{\phi}(\hat{f}_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \hat{f}_p(x_1, \dots, x_n))$ . El homomorfismo de anillos  $f^*$  transforma  $\mathfrak{E}(p)$  en un módulo sobre  $\mathfrak{E}(n)$  de tal manera que si  $\tilde{\phi} \in \mathfrak{E}(p)$ ,  $\tilde{\psi} \in \mathfrak{E}(n)$ , entonces  $\tilde{\phi} \cdot \tilde{\psi} = f^*(\tilde{\phi}) \cdot \tilde{\psi} = (\tilde{\phi} \circ \tilde{f}) \cdot \tilde{\psi} \in \mathfrak{E}(n)$ . Similarmente para el homomorfismo  $\hat{f}^*$ .

**4.20 Teorema:** Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  un germen diferenciable. Entonces los siguientes son equivalentes:

- (i)  $\tilde{f}$  es invertible.
- (ii)  $f^*$  es un isomorfismo.
- (iii)  $\hat{f}^*$  es un isomorfismo.

**Demostración:** ((i)  $\Rightarrow$  (ii),(iii)) Nótese que  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$  y  $1^* = 1$ , de forma que  $*$  es un functor, el cual transforma isomorfismos en isomorfismos, y la implicación es una consecuencia inmediata.

((ii)  $\Rightarrow$  (i)) Conversamente, el homomorfismo entre álgebras  $f^* : \mathfrak{E}(p) \rightarrow \mathfrak{E}(n)$  define un homomorfismo  $d(f)$  del espacio vectorial de derivadas en  $\mathfrak{E}(n)$  al espacio vectorial de derivadas en  $\mathfrak{E}(p)$ , dado por  $d(f)(X) = X \circ f^* : \mathfrak{E}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ . O bien, con respecto a la base canónica en este espacio vectorial

$$d(f) = \left. \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} \right|_0 = \left. \frac{\partial (f^* \tilde{\phi})}{\partial x_i} \right|_0 = \left. \frac{\partial (\tilde{\phi} \circ \tilde{f})}{\partial x_i} \right|_0 = \sum_i \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y_j} \cdot \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_0, \text{ i. e., } d(f) : \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 \mapsto \sum_i \left. \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_0.$$

\*\* Véase Bourbaki (1970).

Por lo tanto, la matriz de  $d(f)$  con respecto a las bases canónicas para los espacios vectoriales es la matriz jacobiana  $\left[ \partial f_i / \partial x_j \right]_0$ . Así, si  $f^*$  es un isomorfismo entonces  $d(f)$  es un isomorfismo y  $D\tilde{f}$  es invertible, por lo tanto  $\tilde{f}$  es invertible.

Similarmente se prueba ((iii)  $\Rightarrow$  (i)).  $\blacklozenge$

## 5. EL TEOREMA DE LA DIVISIÓN

**5.1 Definición:** Sea  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  un conjunto de variables indeterminadas, y sea  $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$  otro conjunto de variables definidas por

$$\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = \sum_{i=0}^n \sigma_i x^{n-i}, \text{ con } \sigma_0 = 1.$$

La expresión  $(-1)^i \sigma_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es llamada la  **$i$ -ésima función simétrica elemental**.

Considérese el mapeo  $\sigma : C^n \rightarrow C^n \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

**5.2 Lema:** Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que  $|\sigma_i| < \delta$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$   
 $\Rightarrow |x| < \varepsilon$  para  $x$  que satisface  $\sum_{i=0}^n \sigma_i x^{n-i} = 0$ . Es decir, si los coeficientes de algún polinomio convergen a cero, entonces todas las raíces del polinomio convergen a cero.

**Demostración:** Sea  $p(x) = \sum_{i=0}^n \sigma_i x^{n-i} = x^n \left( 1 + \frac{\sigma_1}{x} + \frac{\sigma_2}{x^2} + \dots + \frac{\sigma_n}{x^n} \right)$ , para  $x \neq 0$ . Si  $|x| \geq \varepsilon$  y los  $\sigma_i$  son suficientemente pequeños (menores que  $\delta(\varepsilon)$ ), entonces la suma  $\frac{\sigma_1}{x} + \frac{\sigma_2}{x^2} + \dots + \frac{\sigma_n}{x^n}$  es pequeña y  $(1 + \dots) \neq 0$ . Por lo tanto,  $p(x) \neq 0$ . Así, si  $p(x) = 0$  y los  $\sigma_i$  son suficientemente pequeños, entonces  $|x| < \varepsilon$ .  $\blacklozenge$

**Nota:** Este resultado indica que si se asigna una raíz a cada polinomio, entonces el mapeo que envía los coeficientes del polinomio en la raíz, es continuo en el origen, sin importar la regla de asignación utilizada. La relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces puede describirse como sigue:

**5.3 Definición:** Para cualquier espacio topológico  $X$ , definase el  $n$ -ésimo producto simétrico por:

$$SP^n(X) = \underbrace{(X \times X \times \dots \times X)}_{n \text{ factores}} / \sim$$

donde  $(x_1, \dots, x_n) \sim (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$  para cualquier permutación  $\pi$  de los números  $1, 2, \dots, n$ . Una clase de equivalencia en  $SP^n(X)$  se denotará por  $\prod_{i=1}^n x_i$ .

**5.4 Teorema: (Teorema Fundamental de Álgebra).** Sea  $SP^n$  el producto simétrico y sea  $S^2 = CP^1 = \{[a_i, b_i]\}$  en coordenadas complejas homogéneas. El mapeo  $SP^n(S^2) \rightarrow CP^n \ni \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \mapsto [c_0, \dots, c_n]$ , donde  $\prod_{i=1}^n (xa_i - yb_i) = \sum_{i=0}^n c_i y^i x^{n-i}$ , es un homeomorfismo.

**Demostración:** La continuidad del mapeo es trivial. Los  $c_i$  son polinomios en los  $a_j$  y los  $b_k$ . El mapeo también puede escribirse como  $\prod_{i=1}^n (xa_i - b_i) = \sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$ . Como  $S^2 \times \dots \times S^2$  es compacto y  $CP^n$  es un espacio de Hausdorff, el mapeo del cociente  $SP^n(S^2)$  a  $CP^n$  es un homeomorfismo: es continuo y biyectivo\*. ♦

**5.5 Definición:** El conjunto de todos los  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in C^n$  tales que el polinomio  $\sum_{i=0}^n \sigma_i x^{n-i}$ ,  $\sigma_0 = 1$ , tiene menos de  $n$  raíces complejas distintas, es llamado el **conjunto discriminante** de  $C^n$ .

---

\* La inyectividad significa que los coeficientes de un polinomio determinan las raíces, mientras que la sobreyectividad significa que cada polinomio sobre  $C$  se descompone en factores lineales.

**5.6 Nota:** El conjunto discriminante es cerrado y nunca denso. Si  $\sigma \in \mathbb{C}^n$  no está en el conjunto discriminante y  $\alpha$  es una raíz de  $p_\sigma(x) = \sum_{i=0}^n \sigma_i x^{n-i}$ , entonces  $p_\sigma(x) = (x - \alpha)g(x)$  y  $\frac{\partial p_\sigma}{\partial x}(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$ . Entonces la ecuación  $\sum_{i=0}^n s_i x^{n-i} = 0$  puede resolverse en alguna vecindad de  $s = \sigma$ ,  $x = \alpha$ , para  $x$  por una función analítica. Así  $\tau : (s_1, \dots, s_n, x) \mapsto (s_1, \dots, s_n, p_s(x))$  es una transformación local de coordenadas alrededor de  $s = \sigma$ ,  $x = \alpha$  y define la función  $(s_1, \dots, s_n) \mapsto (\tau^{-1}(s_1, \dots, s_n, 0))_{n+1}$ , la cual expresa una raíz de  $p_s$  como función de los coeficientes  $s$  (aquí se utiliza el Teorema de la Función Inversa para funciones complejas).

**5.7 Nota:** El conjunto  $\{(\sigma, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : p_\sigma(z) = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  es siempre una subvariedad de codimensión compleja 1, y codimensión real 2 (el resultado correspondiente para el caso real también es válido). Esto se debe a que dicho conjunto es también el grafo de la función  $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\sigma_n(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, z) = -\sum_{i=0}^n \sigma_i z^{n-i}$ .

**5.8 Ejemplo:** Sea  $n = 2$ , y sea por conveniencia  $p_\sigma(z) = z^2 + 2\sigma_1 z + \sigma_2$ . El conjunto discriminante y el conjunto  $\{p_\sigma(z) = 0\}$  contienen ambos al origen de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  (Figura 5.1).

Como espacio vectorial real,  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ . Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciable (como mapeo real), y tómesese las coordenadas usuales  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  (o, equivalentemente:  $x = 1/2(z + \bar{z})$ ,  $y = -i/2(z - \bar{z})$ ).

La diferencial de  $f$  puede ser escrita como  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ , donde, por

definición,  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ;  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ . En particular,  $df$  es proporcional a  $dz$

$\Leftrightarrow \partial f / \partial \bar{z} = 0 \Leftrightarrow$  las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen  $\Leftrightarrow f$  es holomórfica (analítica).

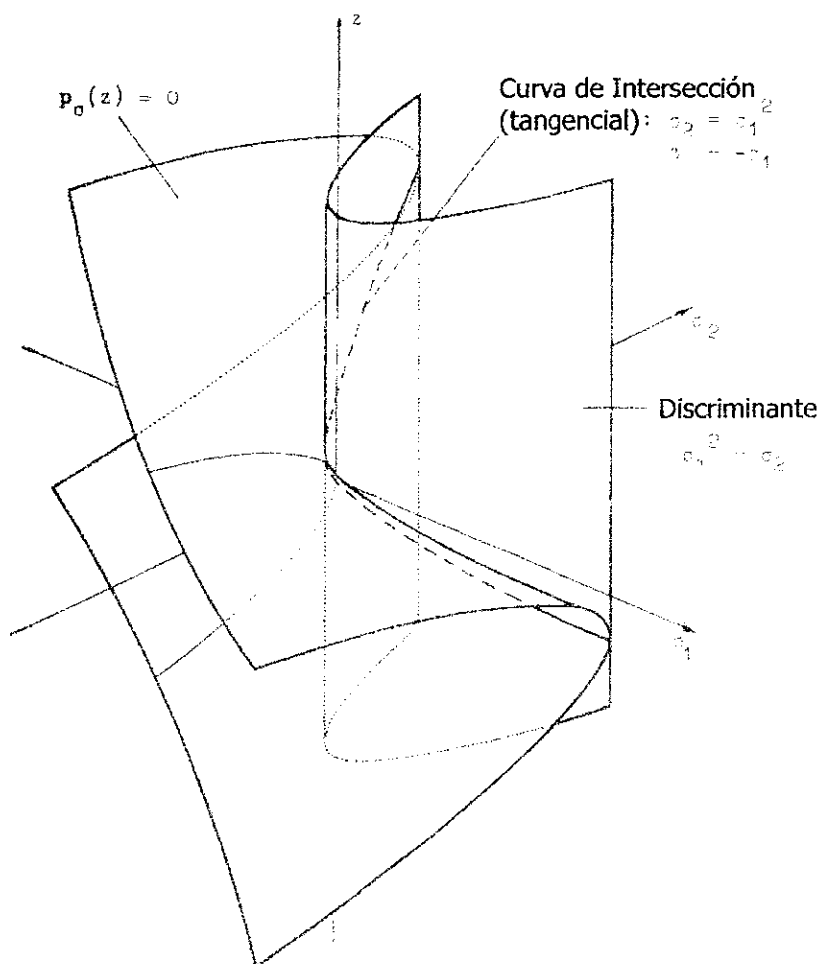


Figura 5.1: El conjunto  $\{p_0(z)=0\}$  para el caso  $n = 2$ .

**5.9 Teorema: (Fórmula Integral de Cauchy).** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  un mapeo diferenciable, sea  $D$  el círculo cerrado unitario, y  $\zeta \in \text{Int}(D)$ . Entonces

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}^{**}. \blacklozenge$$

**5.10 Definición:** Un polinomio normalizado  $P \in \mathcal{S}(n)[t]$  cuyos coeficientes  $\lambda_j$  están en  $\mathfrak{m}(n)$  se dice que es un **polinomio distinguido**.

\*\* Para una demostración véase Conway (1973) o Marsden (1973).

El párrafo anterior implica que si un germen en  $\mathfrak{E}(n+1)$  tiene una serie de Taylor no nula entonces, en coordenadas apropiadas, este puede escribirse como el producto de un polinomio sobre  $\mathfrak{E}(n)$  y una unidad. Para el caso analítico, este hecho puede utilizarse para deducir propiedades para  $\mathfrak{E}(n)$  en forma inductiva, a partir de propiedades de los polinomios.

**5.11 Lema:** Sea  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  la inmersión estándar, y  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciable con soporte contenido en la esfera unitaria. Entonces existe una función diferenciable  $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  con  $F|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n} = f$ , y tal que  $\partial F / \partial \bar{z}: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  se anula de orden infinito en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** Sea  $z = x + iy$ , y defínase

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right)^j f(x) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi(t_j \cdot y),$$

donde  $\phi(y) = 1$  para  $|y| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\phi(y) = 0$  para  $|y| \geq 1$  y la sucesión  $\{t_j\}$  se incrementa de forma tan rápida que la serie es diferenciable término a término, y entonces  $F(x) = f(x)$  para cada  $x$  real. Como

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = i \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

entonces

$$\frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial z} F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{j+1} f(x) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot [\phi(t_{j+1} \cdot y) - \phi(t_j \cdot y)] + \sum_{j=0}^{\infty} \left( i \frac{\partial}{\partial x} \right)^j f(x) \cdot \frac{y^j}{j!} \cdot \phi'(t_j \cdot y)$$

y en ambas series cada término se anula en alguna vecindad de  $y = 0$ , ya que  $\phi(t_j \cdot y)$  tiene valor constante igual a 1. ♦

**5.12 Lema:** Sean  $u, v: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$  funciones diferenciables con soportes contenidos en la esfera unitaria, y tales que  $(u-v)$  se anula de orden infinito en  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ . Entonces existe una función  $F: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $(F-u)$  y  $(F-v)$  se anulan de orden infinito en  $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  y  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ , respectivamente.

**Demostración:** Sea  $D^{\alpha,0,0}(u-v)(0,y,z) = f_{\alpha}(y,z)$  y sea  $F(x,y,z) = v(x,y,z) + \sum_{(\alpha,0,0)} f_{\alpha}(y,z) \cdot \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \cdot \phi(t_{|\alpha|} \cdot x)$ , donde  $t_{|\alpha|}$  se incrementa rápidamente y  $\phi = 1$  para  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\phi = 0$  para  $|x| \geq 1$ . La serie puede ser diferenciada término a término. Todas las derivadas de  $f_{\alpha}$  se anulan en  $y = 0$ , y  $D^{\beta}F(x,0,z) = D^{\beta}v(x,0,z)$ . En  $x = 0$ , se tiene que  $D^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}F(0,y,z) = D^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}v(0,y,z) + D^{\alpha_2, \alpha_3}f_{\alpha_1}(y,z) = D^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}v(0,y,z) + D^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(u-v)(0,y,z) = D^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}u(0,y,z)$ . ♦

**5.13 Teorema: (Lema de Extensión).** Sea  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  un mapeo diferenciable con soporte contenido en la esfera unitaria. Entonces existe un mapeo diferenciable  $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$  tal que:

- (i)  $F(t, x, \lambda) = f(t, x)$ , para  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n$
- (ii)  $\partial F / \partial \bar{z}$  se anula de orden infinito en los conjuntos  $\{(z, x, \lambda) : \text{Im}(z) = 0\}$  y  $\{(z, x, \lambda) : P(z, \lambda) = 0\}$ .

**Demostración:** Sea  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  una función diferenciable dada (con soporte compacto) y sea  $P: \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio dado de la forma

$$P(z, \lambda) = z^p + \sum_j \lambda_j z^{p-j}.$$

Se desea extender  $f$  a  $F: \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$  de tal manera que  $\partial F / \partial \bar{z}$  se anule de orden infinito en  $\{\text{Im}(z) = 0\}$  y  $\{P = 0\}$ . La demostración se hará por inducción sobre  $p = \text{gr}(P)$ : Para  $p = 0$ ,  $f$  debe extenderse de tal forma que  $F_z = \partial F / \partial z$  se anule de orden infinito en todo el eje real. Esto es posible gracias al Lema 5.11. Seguidamente, asúmase que el Lema de Extensión es válido para  $p-1$ . Hágase un cambio de coordenadas de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$  en el origen por medio de la transformación

$$(z, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto (z, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, P(z, \lambda)) = (z, \lambda', \mu).$$

En las nuevas coordenadas, el operador  $\partial / \partial \bar{z}$  se vuelve

$$L = \frac{\partial}{\partial z} + P'(z, \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu}$$

donde  $P'$  es la derivada de  $P$  (nótese que  $P'$  es independiente de  $\lambda_p$ ). Ahora, constrúyase dos funciones diferenciables con valores complejos

$$v(z, x, \lambda') = u(z, x, \lambda', \mu), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda' \in \mathbb{C}^{p-1}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

con las siguientes propiedades:

- (I)  $v(t, x, \lambda') = f(t, x)$ , para  $t \in \mathbb{R}$ .
- (II)  $\partial v / \partial \bar{z}$  se anula de orden infinito en  $\{\text{Im}(z) = 0\}$ .
- (III)  $u = v$  para  $\mu = 0$ .
- (IV)  $L(u)$  se anula de orden infinito para  $\mu = 0$ .
- (V)  $(u - v)$  se anula de orden infinito para  $\text{Im}(z) = \text{Re}(\mu) = \text{Im}(\mu) = 0$ .

Con esta construcción completa, el Lema 5.12 proporciona una función diferenciable  $F(z, x, \lambda', \mu)$  la cual satisface que  $(F - v)$  se anula de orden infinito en  $\text{Im}(z) = 0$ , en particular,  $L(F)$  se anula de orden infinito y  $F = v = f$  en  $\text{Im}(z) = 0$  (Aquí se usó (II) y el hecho que  $\partial v / \partial \bar{\mu} \equiv 0$ ). Además,  $(F - u)$  se anula de orden infinito donde  $\mu = 0$ . En particular, por (IV),  $L(F)$  se anula de orden infinito en  $\mu = 0$ .

A continuación se procede a la construcción de las funciones  $v(z, x, \lambda')$  y  $u(z, x, \lambda', \mu)$ : Elíjase  $v = v(z, x, \lambda')$  usando la hipótesis inductiva, de forma que (I) y (II) se satisfagan y  $v_z$  se anule de orden infinito cuando  $P'(z, \lambda') = 0$  ó  $\text{Im}(z) = 0$ . Luego, defínase

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{P'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^j v(z, \lambda') \cdot \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \cdot \phi(t_j, \mu)$$

donde, por convención, el primer término de la suma es cero cuando  $P' = 0$  y  $j \geq 1$ . En esta definición,  $\phi$  es la función definida en 5.11 y  $\{t_j\}$  se incrementa suficientemente rápido para que los sumandos sean diferenciables. Se sigue que  $u$  es diferenciable y que (III) se satisface. Calculada término a término  $L(u)$  es:

$$\begin{aligned} L(u) &= \bar{P}' \left( -\frac{1}{P'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \right) u = -\bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{P'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^{j+1} v(z, \lambda') \cdot \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \cdot [\phi(t_j, \mu) - \phi(t_{j+1}, \mu)] + \\ &\quad + \bar{P}' \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{P'} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)^j v(z, \lambda') \cdot \frac{\bar{\mu}^j}{j!} \cdot t_j \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mu}}(t_j, \mu) \end{aligned}$$

Nótese ahora que  $\phi$  es localmente constante alrededor de  $\mu = 0$ , y que todos los sumandos se anulan localmente. Esto demuestra (IV). Para probar (V), debe tenerse en cuenta que, como  $v$  satisface (II),  $u(z, x, \lambda', \mu) - v(z, x, \lambda') \cdot \phi_0(t_0 \cdot \mu)$  se anula de orden infinito en  $\text{Im}(z) = 0$ . En cualquier punto donde  $\mu = 0$ , evidentemente  $v - v \cdot \phi(t_0 \cdot \mu)$  se anula de orden infinito.  $\blacklozenge$

**Nota:** La condición (ii) anterior establece que la expansión de Taylor del mapeo  $\partial F / \partial \bar{z}$  se anula en esos puntos. Ahora se prueba el resultado principal de la sección:

**5.14 Teorema: (Lema Especial de la División).** Sea  $\tilde{f}: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  un germen diferenciable, y sea  $\tilde{P}: (\mathbb{R} \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  el germen asociado al polinomio

$P(t, \lambda) = t^p + \sum_{j=1}^p \lambda_j t^{p-j}$ . Entonces existen gérmenes  $\tilde{Q}, \tilde{R}: (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ , ambos

diferenciables, con  $\tilde{R}(t, x, \lambda) = \sum_{i=1}^p \tilde{h}_i(x, \lambda) t^{p-i}$ , tales que se cumple la siguiente división con residuo:

$$\tilde{f}(t, x) = \tilde{Q}(t, x, \lambda) \cdot \tilde{P}(t, \lambda) + \tilde{R}(t, x, \lambda).$$

Si  $\tilde{f}, \lambda$  son reales, entonces  $\tilde{Q}, \tilde{R}$  pueden ser elegidos reales.

**Demostración:** Considérese primero el caso clásico: para un  $x$  fijo, la función  $f(t, x)$  es analítica en  $t \in \mathbb{C}$  (como es usual, aquí  $f$  es un representante de  $\tilde{f}$ ). De la Fórmula Integral de Cauchy se obtiene

$$(*) \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{f(z, x)}{z - t} dz$$

Aquí, y en lo que sigue,  $D$  denota un disco circular que contiene a todo  $t$  pequeño y a todas las raíces de  $P(t, \lambda)$ , para  $\lambda$  pequeño. Este disco existe por el Lema 5.2.

El polinomio (en las variables  $z, t$ )  $\frac{P(z, \lambda) - P(t, \lambda)}{z - t} = r(z, t, \lambda)$  es analítico y, como polinomio de  $t$ , tiene grado menor que  $p$ .

Esta ecuación establece la siguiente identidad entre funciones racionales:

$$(**) \quad \frac{1}{z-t} = \frac{P(t, \lambda)}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} + \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)}.$$

Sustituyendo (\*\*) en (\*) (el denominador no se anula en  $\text{Fr}(D)$  si  $t$  y  $\lambda$  son suficientemente pequeños). Esto implica el Lema de la División Holomorfa (Analítica):

$$f(t, x) = P(t, \lambda) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{f(z, x)}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} dz}_{Q(t, x, \lambda)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{f(z, x)}{P(z, \lambda)} r(t, z, \lambda) dz}_{R(t, x, \lambda)}.$$

$R$  es un polinomio en  $t$  con grado menor que  $p$  (el integrando es un polinomio en  $t$  y los coeficientes están integrados respecto a  $z$ ). Esto completa el Lema de la División Holomorfa.

Para probar el resultado correspondiente al caso diferenciable, se usará la versión de la Fórmula Integral de Cauchy dada anteriormente y el Lema de Extensión. De la Fórmula Integral de Cauchy:

$$f(t, x) = F(t, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{F(z, x, \lambda)}{z-t} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{F_z(z, x, \lambda)}{z-t} dz \wedge d\bar{z}$$

donde  $F_z = \partial F / \partial z$ , y  $D$  es como antes. Al hacer la sustitución de  $1/(z-t)$  dada en (\*\*) para obtener  $\tilde{f} = \tilde{Q} \cdot \tilde{P} + \tilde{R}$ , donde

$$Q(t, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} \frac{F(z, x, \lambda)}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{F_z(z, x, \lambda)}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} dz \wedge d\bar{z},$$

$$R(t, x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Fr}(D)} F(z, x, \lambda) \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_D F_z(z, x, \lambda) \frac{r(t, z, \lambda)}{P(z, \lambda)} dz \wedge d\bar{z}.$$

Los denominadores no se anulan en  $\text{Fr}(D)$ , por lo que las segundas integrales definen mapeos diferenciables. Es suficiente mostrar que la función

$$g(z, t, x, \lambda) = \frac{F_z(z, x, \lambda)}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)}, \quad g = 0 \text{ para } z = t, \text{ ó } P(z, \lambda) = 0,$$

es diferenciable. Cada derivada parcial de  $g$  es, en cualquier punto donde el denominador no se anula, una suma de funciones de la forma  $F_0(z, x, \lambda) / [(z-t)P(z, \lambda)]^k$ , donde  $F_0$  se anula para todo orden en  $\{\text{Im}(z) = 0\}$  y  $\{P(z, \lambda) = 0\}$ . Aquí se usó el hecho que el denominador es analítico en todas las variables, así que

$$\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}(z)} \left( \frac{1}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{(z-t) \cdot P(z, \lambda)} \right),$$

y similarmente para las otras variables (se puede aplicar la regla del cociente formalmente).

Ya que  $F_0$  se anula para órdenes arbitrariamente grandes en  $\{\operatorname{Im}(z) = 0\}$ , se tiene que

$F_0(z, x, \lambda) = (\operatorname{Im}(z))^l F_1(z, x, \lambda)$ , con  $l$  arbitrariamente grande.  $F_1$  se anula de orden infinito en  $\{\operatorname{Re}(P(z, \lambda)) = \operatorname{Im}(P(z, \lambda)) = 0\}$  y puede escribirse como:

$$F_1 = \operatorname{Re}(P(z, \lambda))^l F_2(z, x, \lambda) + \operatorname{Im}(P(z, \lambda))^l F_3(z, x, \lambda),$$

con  $l$  arbitrariamente grande (nótese que  $(\operatorname{Re}(P), \operatorname{Im}(P))$  pueden introducirse como

coordenadas locales). Ahora, cuando  $(z, t, x, \lambda)$  se aproxima a un punto en el cual

$(z-t)P(z, \lambda) = 0$  se deduce que

$$\frac{F_2 \cdot \operatorname{Re}(P)^l \cdot \operatorname{Im}(z)^l}{((z-t) \cdot P)^k} \rightarrow 0, \text{ para } l > k.$$

Lo mismo ocurre para el segundo sumando

$$\frac{F_3 \cdot \operatorname{Im}(P)^l \cdot \operatorname{Im}(z)^l}{((z-t) \cdot P)^k}.$$

Así, todas las derivadas de  $g$  convergen a cero cuando el denominador tiende a cero, y

entonces  $g$  debe ser diferenciable, con derivada 0 cuando el denominador se anula. Esto

establece que  $Q$  y  $R$  son ambos diferenciables. Si  $\lambda$  es real y  $f$  toma valores reales, entonces

se puede tomar la parte real de la ecuación

$$f(t, x) = Q(t, x, \lambda) \cdot P(t, \lambda) + R(t, x, \lambda).$$

para obtener la división (real)

$$f = \frac{1}{2}(Q + \bar{Q})P + \frac{1}{2}(R + \bar{R}). \spadesuit$$

## 6. EL TEOREMA DE PREPARACIÓN

**6.1 Definición:** Un germen diferenciable se dice que es **p-regular** (con respecto de  $t$ ) si

$\tilde{f}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} \in \mathfrak{m}(l)^p$  y  $\tilde{f}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} \notin \mathfrak{m}(l)^{p+1}$ . En otras palabras,

$$\tilde{f}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(0, 0) = \dots = \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} \tilde{f}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^p}{\partial t^p} \tilde{f}(0, 0) \neq 0.$$

Para el jet de  $\tilde{f}$ , esto significa que  $\hat{f}(t, 0) = at^p + \text{términos de orden superior}$ ,  $a \neq 0$ .

**6.2 Teorema:** Si  $\tilde{f} \in \mathfrak{S}(n+1)$  y  $\hat{f} = j(f) \neq 0$ , entonces existe un isomorfismo lineal  $h$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y un entero  $p$  tales que  $\tilde{f} \circ \tilde{h}$  es  $p$ -regular. Además,  $p$  se puede elegir como el menor número que satisface  $\tilde{f} \in \mathfrak{m}(n+1)^p$  y  $\tilde{f} \notin \mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$ .

**Demostración:**  $\hat{f} = \phi(x_1, \dots, x_{n+1}) + \psi(x_1, \dots, x_{n+1})$ , donde  $\phi \neq 0$  es un polinomio homogéneo de grado  $p$  y  $\psi \in \mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$ . Elijase  $a = (a_1, \dots, a_{n+1}) \neq 0$  tal que  $\phi(a) \neq 0$ , y elijase un isomorfismo lineal  $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $h(1, 0, \dots, 0) = a$ . Entonces  $\tilde{f} \circ \tilde{h}(t, 0, \dots, 0) = \hat{f}(ta_1, \dots, ta_{n+1}) = t^p \cdot \underbrace{\phi(a_1, \dots, a_{n+1})}_{\neq 0} + \psi(ta)$ , con  $\psi(ta) \in \mathfrak{m}(n+1)^{p+1}$ . ♦

**6.3 Teorema: (Teorema de la División de Malgrange).** Sea  $\tilde{f}: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  un germen  $p$ -regular con respecto a la primera variable. Entonces existen gérmenes  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p \in \mathfrak{m}(n)$ , y existe una unidad  $\tilde{Q} \in \mathfrak{S}(n+1)$  tales que  $\tilde{f} = \tilde{Q} \cdot \tilde{P}_u$ ,

$$\tilde{P}_u(t, x) = t^p + \sum_{j=1}^p \tilde{u}_j(x) t^{p-j}.$$

**Demostración:** Háganse los coeficientes  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$  del polinomio general un nuevo conjunto de variables. Por el Lema Especial de la División (división con residuo), se tiene:

$$(1) \quad \tilde{f}(t, x) = \tilde{Q}_1(t, x, \lambda) \cdot \tilde{P}(t, \lambda) + \tilde{R}(t, x, \lambda),$$

con  $\tilde{P}(t, \lambda) = \sum_{j=0}^p \lambda_j t^{p-j}$ ,  $\lambda_0 = 1$ , y  $\tilde{R}(t, x, \lambda) = \sum_{j=1}^p \tilde{h}_j(x, \lambda) t^{p-j}$ . El problema es sustituir los

gérmenes  $\tilde{u}_j(x)$  por los  $\lambda_j$  de tal manera que  $\tilde{h}_j(x, \tilde{u}_j(x)) \in \mathfrak{S}(n)$  se anule. Ahora, asumiendo  $f$   $p$ -regular con respecto a  $t$ , se debe obtener:

$$(2) \quad \tilde{Q}_1(0, 0, 0) \neq 0, \quad \tilde{h}_j(0, 0) = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial h_i}{\partial \lambda_i}(0, 0) = 0 \text{ para } i < j;$$

$$(4) \quad \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_j}(0, 0) \neq 0.$$

Demostración de (2): De (1), se tiene que  $\tilde{f}(t, 0) = \tilde{Q}(t, 0, 0) \cdot t^p + \sum_{j=1}^p \tilde{h}_j(0, 0) \cdot t^{p-j}$ , para

$x = \lambda = 0$ . Como esta función se anula exactamente de orden  $p$ , se obtiene (2).

Demostración de (3) y (4): Diferenciando (1) en el punto  $x = \lambda = 0$  con respecto a  $\lambda_i$ , se

obtiene  $0 = t^{p-i} \cdot \tilde{Q}_i(t, 0, 0) + t^p \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \lambda_i}(t, 0, 0) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial \tilde{h}_j}{\partial \lambda_i}(0, 0) \cdot t^{p-j}$ . Módulo  $t^p$  esta

ecuación tiene la forma

$$(5) \quad 0 = t^{p-i} q(t) + \sum_{j=1}^p h_{ji} t^{p-j}, \text{ con } q(0) \neq 0.$$

Esta es una ecuación de gérmenes en una variable,  $t$ , considerada en  $\mathfrak{E}(1)/\mathfrak{m}(1)^p \cong \mathbb{R}[t]/(t^p)$ . Para  $i < j$ , considérese la ecuación (5) módulo  $t^{p-i}$  para  $i$  fijo.

Entonces  $0 = \sum_{j=i+1}^p h_{ji} t^{p-j}$ , i. e.,  $h_{ji} = \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0, 0) = 0$ . Para  $i = j$ , la ecuación (5) módulo  $t^{p-i+1}$

resulta  $0 = t^{p-i} q(0) + h_{ii} t^{p-i}$ , de forma que  $h_{ii} \neq 0$ .

Ahora bien, la ecuación (2) muestra que  $\tilde{Q}_1 \in \mathfrak{E}(n+1)$  es una unidad. Más aún, la matriz

$\left[ h_{ji} \right] = \left[ \frac{\partial h_j}{\partial \lambda_i}(0, 0) \right]$  es triangular, con elementos no nulos en la diagonal principal. Entonces

si  $\tilde{h} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p \ni (x, \lambda) \mapsto (\tilde{h}_1(x, \lambda), \dots, \tilde{h}_p(x, \lambda))$  la ecuación  $\tilde{h}(x, \lambda) = 0$  puede resolverse para  $\lambda_j$ . Esto significa que existe un germen  $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$

tal que  $\tilde{h}(x, \tilde{\alpha}(x)) = 0$  (esta es una aplicación del Teorema de la Función Inversa (Teorema

1.3)). Nótese que el germen  $\phi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \ni (x, \lambda) \mapsto (x, h(x, \lambda))$  es

invertible ya que su matriz jacobiana en el origen tiene la forma:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & * & & h_p \end{array} \right],$$

y  $u$  es la composición

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) = (\mathbb{R}^n \times \{0\}, 0) \subseteq (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & & \\ \searrow u & & \downarrow \phi^{-1} \\ (\mathbb{R}^p, 0) & \xleftarrow{\text{proy}_2} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \end{array}$$

Si el germen  $\tilde{u}$  se sustituye por  $\lambda$  en (1), entonces la ecuación (2) y  $\tilde{h}(x, \tilde{u}(x)) = 0$  completan la demostración del teorema.  $\blacklozenge$

Debido al teorema previo, el Teorema de la División implica que todo germen en  $\mathfrak{E}(n+1)$  con jet no nulo puede, en una estructura apropiada de coordenadas, escribirse como una unidad. Aquí  $\mathfrak{E}(n) \subset \mathfrak{E}(n+1)$  es el anillo de todos los gérmenes que no dependen de la primera variable.

**6.4 Corolario: (Lema Generalizado de la División).** Sean  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathfrak{E}(n+1)$  gérmenes, con  $\tilde{f}$   $p$ -regular. Entonces existe  $\tilde{Q} \in \mathfrak{E}(n+1)$ , y existen gérmenes  $\tilde{u}_j \in \mathfrak{E}(n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ; tales que  $\tilde{g} = \tilde{Q} \cdot \tilde{f} + \tilde{R}_h$ , con  $\tilde{R}_h(t, x) = \sum_{j=1}^p \tilde{h}_j(x) t^{p-j}$ .

**Demostración:** Por el Teorema de la División de Malgrange,  $\tilde{f} = \tilde{Q}_1 \cdot \tilde{P}_u$  para una unidad  $\tilde{Q}_1 \in \mathfrak{E}(n+1)$  y un polinomio distinguido  $\tilde{P}_u \in \mathfrak{E}(n)[t]$ . Por el Lema Especial de la División,  $\tilde{g} = \tilde{Q}_2 \cdot \tilde{P}_u + \tilde{R}_h$ , con  $\tilde{R}_h(t, x) = \sum_{j=1}^p \tilde{h}_j(x) t^{p-j}$  (aquí se ha sustituido  $\lambda_j = \tilde{u}_j(x)$ ).

Por lo tanto,  $\tilde{g} = (\tilde{Q}_2 / \tilde{Q}_1) \cdot \tilde{f} + \tilde{R}_h$ .  $\blacklozenge$

**Nota:** El corolario precedente significa que en lugar de dividir por un polinomio, se puede dividir por un germen  $p$ -regular arbitrario en una forma tal que el residuo es un polinomio de grado menor que  $p$ , con coeficientes en  $\mathcal{O}(n)$ .

**6.5 Teorema: (Teorema de Preparación de Malgrange (en la forma de J. Mather)).** Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  un germen diferenciable, y  $f^* : \mathcal{O}(p) \rightarrow \mathcal{O}(n)$  su homomorfismo de anillos inducido. Sea  $A$  un  $\mathcal{O}(n)$ -módulo finitamente generado. Entonces,  $A$  está finitamente generado sobre  $\mathcal{O}(p)$  (operado en  $A$  vía  $f^*$ ) si, y sólo si, el espacio vectorial real  $A / f^* \mathfrak{m}(p) \cdot A$  es de dimensión finita.

**Demostración:** Nótese que  $f^* \mathfrak{m}(p) \cdot A$  es lo mismo que  $\mathfrak{m}(p) \cdot A$  cuando se opera vía  $f^*$ .

( $\Rightarrow$ ) Si  $A$  está finitamente generado sobre  $\mathcal{O}(p)$ , entonces se tiene un epimorfismo entre  $\mathcal{O}(p)$ -módulos

$$\bigoplus_{j=1}^k \mathcal{O}(p) = \underbrace{\mathcal{O}(p) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(p)}_{k \text{ sumandos}} \rightarrow A$$

y, por consiguiente, un epimorfismo (entre múltiplos modulares de  $\mathfrak{m}(p)$ )

$$\mathbb{R}^k = \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{O}(p) / \mathfrak{m}(p) \rightarrow A / f^* \mathfrak{m}(p) \cdot A.$$

En otras palabras, los generadores de  $A$  sobre  $\mathcal{O}(p)$  son también generadores de  $A / f^* \mathfrak{m}(p) \cdot A$  sobre  $\mathcal{O}(p) / \mathfrak{m}(p) = \mathbb{R}$ .

( $\Leftarrow$ ) El resto de la prueba se hará en tres pasos:

- (1) Se mostrará que  $A$  es un  $\mathcal{O}(p)$ -módulo finitamente generado.
- (2) Se probará que los generadores de  $A$  como  $\mathcal{O}(n)$ -módulo también son generadores de  $A$  como  $\mathcal{O}(p)$ -módulo.
- (3) Por último, se demostrará que la propiedad  $A / f^* \mathfrak{m}(p) \cdot A \Rightarrow A$  está finitamente generado sobre  $\mathcal{O}(p)$ , se preserva bajo la composición de gérmenes.

**Paso (1):** Sea  $n = p + 1$  y sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \ni (t, x) \mapsto x$  la proyección sobre el segundo factor. En este caso, elíjanse  $a_1, \dots, a_k \in A$ , un número finito de elementos que

generen a  $A$  como un  $\mathfrak{O}(p)$ -módulo y a  $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$  como un espacio vectorial real.

Entonces cualquier  $a \in A$  puede escribirse como  $a = \sum_{j=1}^k c_j a_j = \sum_{j=1}^k z_j a_j$ , con  $c_j \in \mathbb{R}$ ,

$z_j \in f^*\mathfrak{m}(p) \cdot \mathfrak{O}(p+1)$ , de la siguiente forma:  $a = \sum c_j a_j + b$ ,  $b \in f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$ , por lo que

$b = \sum y_i b_i$ ,  $y_i \in f^*\mathfrak{m}(p)$ . Luego,  $b_i = \sum r_{ij} a_j$ ,  $r_{ij} \in \mathfrak{O}(p+1)$ , así que  $z_i = \sum y_j r_{ij}$ . En

particular, para  $a = ta_i$ , esto es  $ta_i = \sum_{j=1}^k (c_{ij} + z_{ij})a_j$ , con  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $z_{ij} \in f^*\mathfrak{m}(p) \cdot \mathfrak{O}(p+1)$ .

Si  $[\delta_{ij}]$  es la matriz identidad, entonces esta ecuación puede escribirse como

$$(t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}) \cdot a = 0, \text{ donde } a = (a_1, \dots, a_k).$$

Sea  $b_{ij} = t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij}$ . La matriz  $[B_{ij}]$  (la transpuesta de la matriz de cofactores de los  $b_{ij}$ )

es tal que  $[B_{ij}] \cdot [b_{ij}] = \det(b_{ij}) \cdot [\delta_{ij}]$ . Defínase  $\Delta(t, x) = \det(t\delta_{ij} - c_{ij} - z_{ij})$ . Entonces se

tiene que  $\Delta \cdot a = 0$ . Este determinante es una función de  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  y, cuando  $x = 0$ ,

es un polinomio normado en  $t$  (con  $z_{ij}(t, 0) = 0$ , de tal forma que  $\Delta$  es el polinomio

característico de  $[c_{ij}]$  en  $x = 0$ ). Se deduce que  $\Delta$  es  $q$ -regular respecto de  $t$  en  $(t, 0)$  para

algún  $q \leq k$ .

Como  $\Delta \cdot a = 0$ , se sigue que  $\Delta \cdot A = 0$ , por lo que  $A$  es un módulo sobre

$\mathfrak{O}(p+1)/\Delta \cdot \mathfrak{O}(p+1)$ . Y como  $\Delta$  es  $q$ -regular, el Lema Generalizado de la División implica

que el  $\mathfrak{O}(p)$ -módulo  $\mathfrak{O}(p+1)/\Delta \cdot \mathfrak{O}(p+1)$  está generado por un número finito de elementos,

denotados  $1, t, \dots, t^{q-1}$ . Ahora, dado que  $A$  está finitamente generado sobre

$\mathfrak{O}(p+1)/\Delta \cdot \mathfrak{O}(p+1)$ , que a su vez está finitamente generado sobre  $\mathfrak{O}(p)$ , entonces  $A$  es un

$\mathfrak{O}(p)$ -módulo finitamente generado.

Paso (2): Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  un germen de rango  $n$ . Por el Teorema del Rango,

existen coordenadas para las cuales  $\tilde{f}$  toma la forma  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ .

Para una inmersión canónica  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^p$ , cualquier germen diferenciable  $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$

puede ser extendido a  $(\mathbb{R}^p, 0)$ , de forma que el mapeo  $f^* : \mathfrak{O}(p) \rightarrow \mathfrak{O}(n)$  sea sobreyectivo

en este caso. Esto significa que un número finito de generadores de  $A$  como  $\mathcal{E}(n)$ -módulo son también generadores de  $A$  como  $\mathcal{E}(p)$ -módulo.

Escribese un germen arbitrario  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  como la composición

$$(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{(\text{Id}, \tilde{f})} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{p_2} (\mathbb{R}^p, 0).$$

El primer germen es una inmersión, y el segundo es una sucesión de  $n$  proyecciones del tipo de las usadas en el paso 1. Denótese por  $M(\tilde{f})$  la propiedad:  $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$  de dimensión finita  $\Rightarrow A$  está finitamente generado sobre  $\mathcal{E}(p)$ . Entonces, lo que se debe demostrar es:

Paso (3): Si  $(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\tilde{f}} (\mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^q, 0)$  son gérmenes diferenciables, entonces  $M(\tilde{f})$  y  $M(g)$  implican  $M(g \circ \tilde{f})$ . Así, debe suponerse que  $A$  es un  $\mathcal{E}(p)$ -módulo finitamente generado y que  $A/(g \circ \tilde{f})^*\mathfrak{m}(q) \cdot A = A/f^*(g^*\mathfrak{m}(q)) \cdot A$  es de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ .

Ya que  $g^*\mathfrak{m}(q) \subseteq \mathfrak{m}(p)$ , se tiene que  $f^*(g^*\mathfrak{m}(q)) \subseteq f^*\mathfrak{m}(p)$ , por lo que  $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$  es finito-dimensional. Por  $M(\tilde{f})$ , se deduce que  $A$  está finitamente generado como  $\mathcal{E}(p)$ -módulo vía  $f^*$ .

Ahora, por definición,  $A/g^*\mathfrak{m}(q) \cdot A = A/f^*(g^*\mathfrak{m}(q)) \cdot A$  tiene dimensión finita. Por  $M(g)$ , se sigue que el  $\mathcal{E}(p)$ -módulo  $A$  está finitamente generado como un  $\mathcal{E}(q)$ -módulo vía  $g^*$ , es decir, el  $\mathcal{E}(n)$ -módulo  $A$  está finitamente generado como un  $\mathcal{E}(q)$ -módulo vía  $(g \circ \tilde{f})^*$ .  $\blacklozenge$

**6.6 Corolario:** Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Preparación, los elementos  $\{a_1, \dots, a_k\}$  generan  $A$  como  $\mathcal{E}(p)$ -módulo si, y sólo si, éstos representan generadores del espacio vectorial real  $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$ .

**Demostración:**  $(\Rightarrow)$  Véase la implicación de suficiencia en el Teorema 6.5.

$(\Leftarrow)$  Sea  $\{a_1, \dots, a_k\}$  un sistema de generadores de  $A/f^*\mathfrak{m}(p) \cdot A$ , así que por el Teorema de Preparación,  $A$  está finitamente generado sobre  $\mathcal{E}(p)$ . Así:

$$A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathcal{E}(p)} + \mathfrak{m}(p) \cdot A,$$

donde el primer término de la derecha es el módulo generado sobre  $\mathfrak{S}(\mathfrak{p})$  vía  $f^*$ , y el segundo término está definido vía  $f^*$ . Luego, por el Lema de Nakayama (Teorema 4.17) se tiene que  $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathfrak{S}(\mathfrak{p})}$ . ♦

El caso especial  $A = \mathfrak{S}(\mathfrak{n})$  es de especial importancia:

**6.7 Teorema:** (Teorema de Preparación (en la forma de Malgrange)). Sea  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  un germen diferenciable,  $f^* : \mathfrak{S}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{n})$  su homomorfismo inducido entre anillos, y  $\hat{f}^* : \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p}) \rightarrow \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$  su homomorfismo entre series de potencias. Los siguientes son equivalentes:

- (i)  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathfrak{S}(\mathfrak{n})$  generan  $\mathfrak{S}(\mathfrak{n})$  como  $\mathfrak{S}(\mathfrak{p})$ -módulo vía  $f^*$ .
- (ii)  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_k \in \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$  generan  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$  como  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{p})$ -módulo vía  $\hat{f}^*$ .
- (iii)  $\phi_1, \dots, \phi_k$  representan generadores del espacio vectorial real  $\mathfrak{S}(\mathfrak{n}) / f^* \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{S}(\mathfrak{n})$ .
- (iv)  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_k$  representan generadores del espacio vectorial real  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) / \hat{f}^* \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$ .

**Demostración:** ((i)  $\Leftrightarrow$  (iii)) La equivalencia entre (i) y (iii) es el Teorema de Preparación en forma extendida, con  $\mathfrak{S}(\mathfrak{n}) = A$ .

((iii)  $\Rightarrow$  (iv)) De  $\phi_1 \cdot \mathbb{R} + \dots + \phi_k \cdot \mathbb{R} + f^* \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{S}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{n})$ , se deduce, utilizando el mapeo  $j : \mathfrak{S}(\mathfrak{n}) \rightarrow \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$ , que  $\hat{\phi}_1 \cdot \mathbb{R} + \dots + \hat{\phi}_k \cdot \mathbb{R} + \hat{f}^* \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) = \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$ .

((iv)  $\Rightarrow$  (iii)) De (iv),  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty)$  es de dimensión finita. Por el Lema de Nakayama, se sabe que  $\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^{k+1} / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty) \subset \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty)$  a menos que  $\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty) = 0$ , así que, para algún  $k$ ,  $\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty) = 0$ . Esto significa que  $\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k \subseteq (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty) \subseteq (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^{k+1})$ .

Por el Lema de Nakayama,  $\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$ , por lo que  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) / \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n})$  es igual a  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^k)$ . Este último es la imagen de  $\hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) / (\hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{p}) \cdot \hat{\mathfrak{S}}(\mathfrak{n}) + \hat{\mathfrak{m}}(\mathfrak{n})^\infty)$  bajo la proyección y es generado sobre  $\mathbb{R}$  por  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_k$ .

((i)  $\Rightarrow$  (ii)) Se deduce inmediatamente trabajando sobre los jets correspondientes.

((ii)  $\Rightarrow$  (iv)) Se procede como en la parte correspondiente del Teorema de Preparación Diferenciable.  $\blacklozenge$

La equivalencia de las cláusulas (ii) y (iv) es conocida como el Teorema de Preparación Formal, y es una extensión “por producto” de la prueba del caso real. Sin embargo, como en el caso del Teorema de la Función Inversa Formal,  $D\hat{f}(0)$  invertible  $\Leftrightarrow \hat{f}$  invertible (Sección 4), este resultado puede demostrarse en forma más sencilla, por medio de un enunciado más general.

El ideal  $\mathfrak{m}(\mathfrak{p})$  está generado por los gérmenes coordinados  $(\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_p)$  en  $\mathbb{R}^p$ . Así, si  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)$ , se tiene que  $f^* \mathfrak{y}_i = \mathfrak{y}_i \circ \tilde{f} = \tilde{f}_i$ , y por lo tanto

$$\mathfrak{S}(n) \cdot \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p \rangle_{\mathfrak{S}(n)}$$

es el ideal en el anillo  $\mathfrak{S}(n)$ , que está generado por las funciones componentes de  $\tilde{f}$ .

**6.8 Definición:** Un germen diferenciable  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$  es llamado **finito** si  $\mathfrak{S}(n) / \tilde{f}^* \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{S}(n)$  tiene dimensión finita.

**Nota:** Del Teorema de Preparación en la forma de Malgrange puede deducirse el Lema Generalizado de la División. Sea  $F(t, x_1, \dots, x_n)$   $p$ -regular respecto de  $t$ . Considérese el germen  $\tilde{f}(t, x_1, \dots, x_n) = (\tilde{F}(t, x), x_1, \dots, x_n)$ . Por la  $p$ -regularidad de  $F$  se deduce que

$$\langle F, x_1, \dots, x_n \rangle_{\mathfrak{S}(n+1)} = \langle t^p, x_1, \dots, x_n \rangle_{\mathfrak{S}(n+1)}.$$

Luego, por el Teorema de Preparación,  $\mathfrak{S}(n+1)$  será finitamente generado como un  $\mathfrak{S}(n+1)$ -módulo vía  $f^*$  por el conjunto  $\{1, t, t^2, \dots, t^{p-1}\}$ . Es decir, para cada  $g \in \mathfrak{S}(n+1)$  se tiene

$$\mathfrak{g}(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \mathfrak{g}_i(F(t, x), x_1, \dots, x_n) t^{p-i}$$

para ciertos  $\mathfrak{g}_i \in \mathfrak{S}(n+1)$ . Al hacer  $\tilde{h}_i(x) = \mathfrak{g}_i(0, x)$ , se tiene  $\mathfrak{g}_i(\tau, x) - \tilde{h}_i(x) = \tau \cdot \tilde{k}_i(\tau, x)$ , y, sustituyendo  $F$  por  $\tau$ :

$$\mathfrak{g}(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \tilde{h}_i(x) t^{p-i} + \tilde{F}(t, x) \cdot \tilde{Q}(t, x)$$

donde  $\tilde{Q}(t, x) = \sum_{i=1}^p \tilde{k}_i(F(t, x), x) t^{p-i}$ .

## 7. GÉRMINES SIMÉTRICOS

El objetivo de esta sección es mostrar cómo actúa el Teorema de Preparación en un caso simple. Recuérdese que anteriormente (Sección 5) se definieron las funciones simétricas elementales  $(-1)^i \sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , por

$$\prod_{i=1}^n (t - x_i) = \sum_{i=0}^n t^i \sigma_{n-i}(x), \text{ con } \sigma_0 = 1.$$

En particular,  $\sum_{i=0}^n x_j^i \sigma_{n-i}(x) = 0$ , o bien  $x_j^n = -\sum_{i=1}^n x_j^i \sigma_{n-i}(x)$ .

Denótese por  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el mapeo cuyas componentes son los  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . La ecuación anterior implica que  $x_j^n \in \sigma^* \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{G}(n)$ . Así, cualquier monomio en los  $x_j$ , que contenga exponentes mayores o iguales a  $n$ , está en  $\sigma^* \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{G}(n)$ . Se sigue entonces que

$$\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \sigma^* \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{G}(n), \text{ para } k > n^n.$$

**7.1 Lema:** Los monomios de grado menor que  $n^n$  generan a  $\mathfrak{G}(n)$  como módulo sobre el anillo de gérmenes  $\tilde{f}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

**Demostración:** Como los monomios de grado menor que  $k$  generan al espacio vectorial  $\mathfrak{G}(n)/\mathfrak{m}(n)^k$ , el lema se deduce como consecuencia inmediata del Teorema de Preparación. ♦

**7.2 Definición:** Un germen  $\tilde{f} \in \mathcal{G}(n)$  se llama **simétrico**, si para cualquier permutación  $\pi$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  se satisface  $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ .

**7.3 Teorema: (Teorema de Glaeser).** Todo germen simétrico diferenciable puede escribirse como un germen diferenciable de funciones simétricas elementales. (Por lo que  $\tilde{f}$  es simétrico si, y sólo si, existe un germen diferenciable  $\tilde{g} \in \mathcal{G}(n)$  para el cual  $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \sigma$ ).

**Demostración:** Sean  $\phi_1, \dots, \phi_r$  los monomios de grado menor que  $n^n$  en las funciones coordenadas  $x_i$ . Sea  $f$  simétrico. Por el lema anterior,  $f(x) = \sum_{j=1}^r \phi_j(x) \cdot g_j(\sigma(x))$ .

Sea  $S_n$  el grupo de las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces, como  $f$  y los  $\sigma_i$  son simétricos,

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^r \left( \sum_{\pi \in S_n} \phi_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \right) \cdot g_j(\sigma(x))$$

y los polinomios  $p_j(x) = \sum_{\pi \in S_n} \phi_j(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$  son claramente simétricos. Por el Teorema Principal sobre Polinomios Simétricos\*, se sigue que  $p_j(x) = q_j(\sigma(x))$  para un polinomio

(único)  $q_j$ . Entonces  $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^r q_j(\sigma(x)) \cdot g_j(\sigma(x))$ . ♦

## 8. MAPEOS DE $\mathbb{R}^2$ EN $\mathbb{R}^2$

El conjunto  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  de los mapeos diferenciables  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  forma un espacio topológico si se le dota de una base de vecindades  $\{U(\varepsilon, k)\}$  de la función cero. Para cada  $k \in \mathbb{Z}^+$ , y cada función continua y estrictamente positiva  $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , defínase  $U(\varepsilon, k)$  por:

---

\* Véase Lang (1965:133).

$$f \in U(\varepsilon, k) \Leftrightarrow |D^\alpha f_j(x)| < \varepsilon(x) \text{ para } j = 1, 2, \dots, p; \forall |\alpha| < k, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Esta topología también puede agregarse al conjunto  $C^\infty(M, N)$ , donde  $M, N$  son variedades diferenciables, sumergiéndolo  $M$  y  $N$  dentro de un espacio euclideo\*.

En lo que resta de la sección, si se dice “ $f$  está cerca de  $g$ ” o “ $f$  es suficientemente pequeño”, se estará refiriendo a esta topología. Si  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacto, entonces el conjunto  $C^\infty(K, \mathbb{R}^p)$  tiene la topología cociente inducida a partir de  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  por el mapeo restricción:  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow C^\infty(K, \mathbb{R}^p)$ . Esto también define la expresión “ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  es pequeño en  $K$ ”.

**8.1 Definición:** Sean  $M, N$  variedades diferenciables. Dos mapeos diferenciables  $f_0, f_1: M \rightarrow N$  se dice que son  **$C^\infty$ -equivalentes** (respectivamente **topológicamente equivalentes**) si existen difeomorfismos (respectivamente homomorfismos)  $h: M \rightarrow M$ ;  $k: N \rightarrow N$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_0} & N \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{f_1} & N \end{array}$$

conmuta.

**8.2 Definición:** Un mapeo diferenciable  $f: M \rightarrow N$  se dice que es  **$C^\infty$ -estable** (respectivamente **topológicamente estable**) si existe una vecindad  $U$  de  $f$  en  $C^\infty(M, N)$  tal que cada mapeo  $f_1 \in U$  es  $C^\infty$ -equivalente (respectivamente topológicamente equivalente) a  $f$ .

**Nota:** Si se asume que las formas geométricas naturales están descritas por mapeos estables (invariantes bajo pequeñas perturbaciones), entonces una clasificación de los gérmenes de mapeos estables es, al mismo tiempo, una clasificación local de dichas formas.

---

\* Véase Narasimhan (1968).

El primer resultado en esta dirección está dado por la teoría de Morse. Casi toda función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es estable, y cada germen de una función estable es equivalente a uno de los siguientes tipos:

(A)  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$  (punto regular).

(B)  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 + \dots + x_k^2 - (x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2)$  (un punto crítico de índice  $n - k$ ).

Este resultado se deduce de su propia representación\*\*.

**8.3 Nota:** El siguiente resultado es original de Whitney y describe los mapeos diferenciables  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . En particular, sólo se pueden encontrar tres clases de equivalencia de los gérmenes surgidos a partir de estos mapeos. Como ilustración, imagínese una hoja flexible de papel siendo arrugada. Se puede hacer una analogía de esta situación con la imagen usual de un mapeo estable del plano al plano. ¿Cómo se ve este mapeo localmente (en un conjunto apropiado de coordenadas)? Existen únicamente tres posibilidades:

- (I) Una vecindad de  $x \in \mathbb{R}^2$  se mapea de forma regular.
- (II) El punto  $x$  está dentro de un dobléz.
- (III) El punto  $x$  está en el límite inicial o final de un dobléz.

Para cada una de estos casos se puede proporcionar un ejemplo analítico:

(I)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x, z) \mapsto (x, z)$ , punto regular.

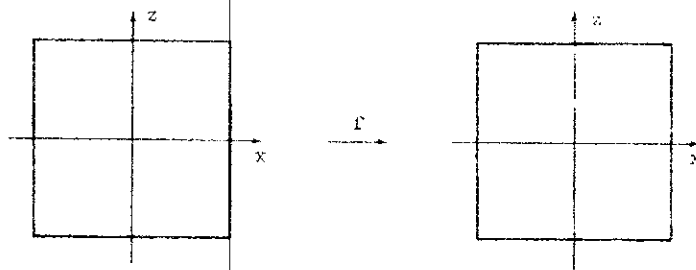


Figura 8.1: Mapeo de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  cuando  $x$  es un punto regular.

(II)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x, z) \mapsto (x, z^2) = (x, y)$ , dobléz.

\*\* Véase Milnor (1963).

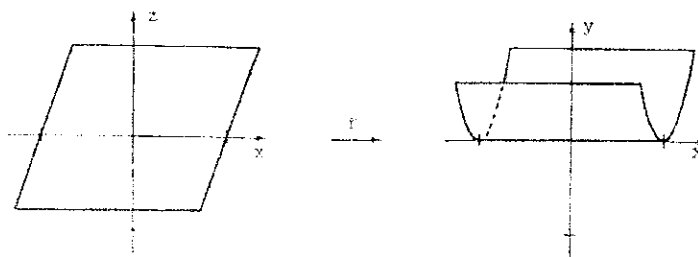


Figura 8.2: Mapeo de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  cuando  $x$  está dentro de un doblez.

(III)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \ni (x, z) \mapsto (x, z^3 - xz) = (x, y)$ , cúspide.

La segunda coordenada  $y = z^3 - xz$ , para un  $x$  fijo, es una cúbica con derivada  $\partial y / \partial z = 3z^2 - x$ . El extremo está dado por  $x = 3z^2$  y sus valores son  $y = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{3/2}$ . Esto produce la siguiente imagen.

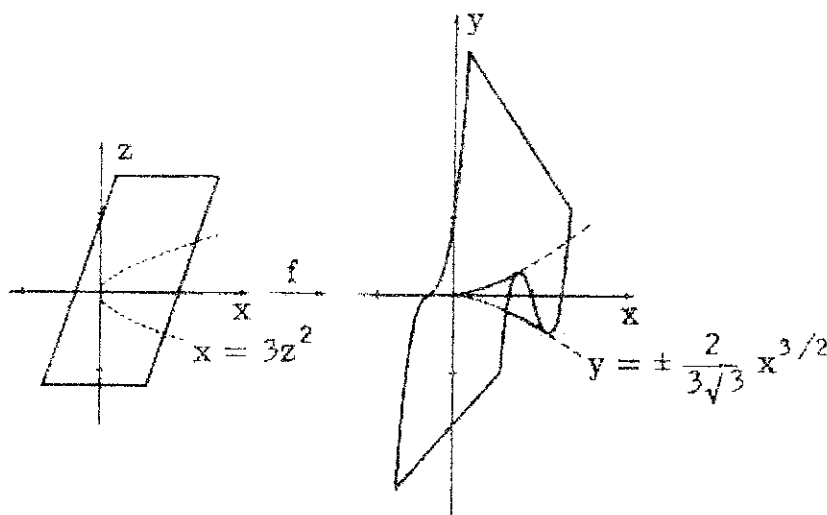


Figura 8.3: Mapeo de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  cuando  $x$  está en el límite de un doblez.

**8.4 Lema:** Sean  $X = Y = \mathbb{R}^2$ ;  $X = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}\}$ ;  $Y = \{(y_1, y_2) : y_i \in \mathbb{R}\}$ , y sea  $f = (f_1, f_2) : X \rightarrow Y$  un mapeo diferenciable. Entonces, en cada vecindad de  $f$  existe un mapeo diferenciable  $g = (g_1, g_2)$  tal que  $\text{Rg}_x(g) = \text{Rg}[\partial g_i / \partial x_j(x)] \neq 0$ .

**Demostración:** Fíjese una vecindad de  $f$ . Considérese el mapeo  $[\partial f_i / \partial x_j]_{i,j=1,2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Este mapeo es diferenciable, y, por el Teorema de Sard (caso trivial), la imagen es nunca densa. Arbitrariamente cerca de  $0 \in \mathbb{R}^4$ , existe una matriz

$\lambda = [\lambda_{ij}]$  que no está en la imagen de dicho mapeo. Nótese que el mapeo  $\bar{g}_i(x_1, x_2) = f_i(x_1, x_2) - \lambda_{i1}x_1 - \lambda_{i2}x_2$  tiene derivada no nula.

Ahora, elíjase una función diferenciable  $\phi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi_n|_{K(0, n)} = 1$ , donde  $K(0, n)$  es la esfera abierta de radio  $n$  y centro en  $0$ , y  $\phi_n|_{\mathbb{R}^2 - K(0, n+1)} = 0$ . Hágase  $g^1 = \phi_1 \bar{g} + (1 - \phi_1)f$ .  $g^1$  está cercana a  $f$  para  $\lambda$  pequeño y satisface  $[\partial g_i^1 / \partial x_j] \neq 0$  en  $K(0, 1)$  para casi todo  $\lambda$ . Constrúyase  $g^n$  inductivamente haciendo

$$g^n = (\phi_n - \phi_{n-2})\bar{g} + (1 - (\phi_n - \phi_{n-2}))g^{n-1}, \text{ donde } \phi_{-1} = 0.$$

$g^n$  y  $g^{n-1}$  difieren únicamente en  $K(0, n+1) - K(0, n-2)$ ;  $\bar{g}$  está elegido como antes con  $\lambda$  tan pequeño que  $g^n$  está tan cerca de  $g^{n-1}$ , de forma que se satisfacen las condiciones:

- (1)  $g^n$  está en la vecindad prescrita de  $f$ .
- (2)  $g^n$  tiene derivada no nula en  $K(0, n-1)$ ,

( $g^{n-1}$  tiene derivada no nula en  $K(0, n-1)$  y por lo tanto ambos son mapeos cercanos, nótese que  $g^n = \bar{g}$  en  $K(0, n) - K(0, n-1)$ ).

Sea  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n$ . Cerca de un punto arbitrario,  $g$  y  $g^n$  son localmente idénticas para  $n$  suficientemente grande. Entonces,  $g$  es diferenciable y  $[\partial g_i / \partial x_j] \neq 0$  en todo punto. Además,  $g$  está en la vecindad dada de  $f$ . ♦

**8.5 Nota:** Los rasgos esenciales de esta construcción, que es usual en topología diferencial, son:

- (1) la propiedad que se desea obtener (aquí,  $\text{Rg}_x(g) \neq 0$  en todo punto) define un subconjunto abierto de mapeos,
- (2) cada mapeo puede aproximarse localmente por mapeos con esta propiedad.

Un germen  $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  con derivada no nula satisface, sin pérdida de generalidad,  $\partial g_1 / \partial x_1(0) \neq 0$ . La transformación  $(x_1, x_2) \mapsto (g_1(x), x_2)$  en el dominio produce en el germen  $g$  la forma  $(x, z) \mapsto (x, \phi(x, z))$ . El lema precedente muestra que casi todo mapeo tiene la forma aquí descrita, respecto de un conjunto adecuado de coordenadas.

Además, si un mapeo tiene esta forma en una vecindad compacta, entonces cualquier mapeo cercano puede expresarse en esta forma dentro de la vecindad considerada.

**8.6. Lema:** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$  un abierto. Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo diferenciable y  $K \subseteq U$  un compacto. Entonces, existen mapeos  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  arbitrariamente cercanos a  $f$  en  $K$ , tales que

- (I)  $\partial g / \partial z(a) \neq 0$ , o bien
- (II)  $\partial^2 g / \partial z^2(a) \neq 0$ , o bien
- (III)  $\partial^2 g / \partial x \partial z(a) \neq 0$  y  $\partial^3 g / \partial z^3(a) \neq 0$ , para todo  $a \in U$ .

**Demostración:** Hágase  $g(x, z) = f(x, z) + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 xz + \lambda_4 z^3$ . Se debe demostrar que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$  puede elegirse tan pequeño como se desee, de forma que (I) ó (II) ó (III) sean satisfechas en todo punto. Como

$$\partial g / \partial z = (\partial f / \partial z) + \lambda_1 + 2\lambda_2 z + \lambda_3 x + 3\lambda_4 z^2$$

$$\partial^2 g / \partial z^2 = (\partial^2 f / \partial z^2) + 2\lambda_2 + 6\lambda_4 z$$

$$\partial^2 g / \partial x \partial z = (\partial^2 f / \partial x \partial z) + \lambda_3$$

$$\partial^3 g / \partial z^3 = (\partial^3 f / \partial z^3) + 6\lambda_4$$

se sigue que si  $\partial g / \partial z(a) = \partial^2 g / \partial z^2(a) = 0$ , entonces  $\partial^2 g / \partial x \partial z(a) = 0 \Leftrightarrow A(a) \cdot \lambda = b(a)$ , donde

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2z & x & 3z^2 \\ 0 & 2 & 0 & 6z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(a) = - \left( \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right).$$

Existe una condición correspondiente para  $\partial^3 g / \partial z^3(a) = 0$ , que difiere únicamente en la forma de la matriz. En este caso es

$$\bar{A}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2z & x & 3z^2 \\ 0 & 2 & 0 & 6z \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Las matrices  $A$  y  $\bar{A}$  tienen rango igual a 3 en todo punto, y es suficiente mostrar que aquellos  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$  para los cuales  $A(a) \cdot \lambda = b(a)$  para algún  $a$ , forman un conjunto de medida cero. Lo mismo es cierto en el caso de  $\bar{A}$ .

Ahora,  $A$  define un mapeo  $U \times \mathbb{R}^4 \rightarrow U \times \mathbb{R}^3 \ni (a, \lambda) \mapsto (a, A(a) \cdot \lambda)$ . Como el rango de  $A$  es 3, este mapeo es una sumersión de rango 5 en todo punto.

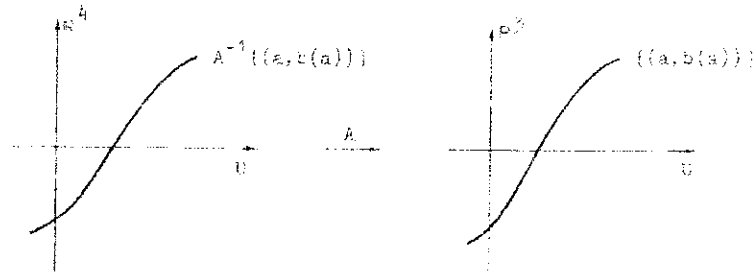


Figura 8.4: Mecanismo del mapeo  $A$ .

Los puntos  $\{(a, b(a)) : a \in U\}$  forman una subvariedad de codimensión 3 en  $U \times \mathbb{R}^3$ . Por lo tanto, su imagen inversa en  $U \times \mathbb{R}^4$ , es también una subvariedad de codimensión (y por consiguiente de dimensión) 3. Si se proyecta esta variedad sobre  $\mathbb{R}^4$ , se obtiene un conjunto de medida cero, el cual está constituido por todos aquellos  $\lambda \in \mathbb{R}^4$  para los cuales  $A(a) \cdot \lambda = b(a)$  para algún  $a \in U$ . ♦

**8.7 Teorema:** (Teorema de Whitney). Existe un subconjunto denso y abierto  $T \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que, para  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $f \in T$ , el germen  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2, x) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(x))$  es diferenciablemente equivalente a alguno de los gérmenes (I), (II) ó (III).

**Demostración:** Con el auxilio de una cubierta localmente finita, el procedimiento estándar produce un subconjunto denso y abierto  $T \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que cada mapeo en  $T$  tiene, en cada punto, una representación local de coordenadas

$$(x, z) \mapsto (x, f(x, z))$$

donde  $f$  satisface una de las condiciones (I), (II) ó (III) del Lema 8.6.

Se mostrará cómo es que esto funciona: Por el Lema 8.4, existe un conjunto denso y abierto de mapeos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con la propiedad de que, para cada una de tales  $F$  se puede elegir

una familia contable de conjuntos compactos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ , y vecindades  $U_n$  de  $K_n$  para cada  $n$ , con las siguientes propiedades:

- (1) los interiores de los  $K_n$  forman una cubierta abierta de  $\mathbb{R}^2$ ,
- (2) los  $U_n$  tiene cerradura compacta,
- (3)  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es localmente finita, y
- (4) si  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\}$ , para cada  $n$  existe un par  $(i, j); i, j \in \{1, 2\}$ , con  $\partial F_i / \partial x_j(a) \neq 0$  para cada  $a \in K_n$ .

Es posible elegir un mapeo fijo  $(x_1, x_2) \mapsto (x_k, F_i)$  en todo  $K_n$ , el cual es una transformación de coordenadas local en cualquier punto de  $K_n$ . Este mapeo transforma el germen original en la forma  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, f(x_1, x_2))$ . Nótese que la última condición (D) de  $K_n$  implica que  $\partial G_i / \partial x_j(a) \neq 0$  para todo  $a \in K_n$ , cuando  $G$  está suficientemente cerca de  $F$ . Para tales  $G$ , existe una transformación de coordenadas, correspondiente a la de  $F$ , la cual proporciona a  $G$  la forma  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, g(x_1, x_2))$ . Así, si  $G$  está cerca de  $F$ ,  $g$  debe estar cerca de  $f$ .

Altérese el mapeo original de forma inductiva sobre los  $U_n$  en forma tal que, después del  $n$ -ésimo paso, las condiciones del Lema 8.6 sean satisfechas en  $\bigcup_{i=1}^n K_i$ ; luego altérese un poco el mapeo  $F$  de forma que  $\partial F_i / \partial x_j(a)$  siga siendo no nulo para todo  $a \in K_m$  y para todo  $m$  (donde, para cada  $m$  se ha considerado el par  $(i, j)$  respectivo). Ahora, cámbiese  $F$  en  $U_{n+1}$  de forma que las condiciones del Lema 8.6 se satisfagan para  $K_{n+1}$ , y además

- (1) el mapeo permanece en una vecindad prescrita del mapeo original,
- (2) las condiciones del lema 8.6 se mantienen en  $\bigcup_{i=1}^n K_i \cap U_{n+1}$ , y
- (3)  $\partial F_i / \partial x_j(a) \neq 0$  para todo  $a \in K_m$ , para todo  $m$  y su respectivo  $(i, j)$ .

Debido a que la familia  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es localmente finita, solamente ocurren localmente un número finito de cambios en  $F$ . El límite del procedimiento anterior es entonces un mapeo diferenciable que puede transformarse localmente en la forma  $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ , donde  $f$  satisface las condiciones del Lema 8.6.

El segundo paso en la prueba será demostrar que todo mapeo en  $T$  puede transformarse localmente en una de las tres formas consideradas antes: un punto regular, un doblez o una cúspide. Considérese un germen  $\tilde{F}: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \ni (x, z) \mapsto (x, \tilde{f}(x, z))$ , donde

$$(I) \quad \partial f / \partial z(0) \neq 0, \text{ ó}$$

$$(II) \quad \partial f / \partial z(0) = 0 \text{ y } \partial^2 f / \partial z^2(0) \neq 0, \text{ ó}$$

$$(III) \quad \partial f / \partial z(0) = \partial^2 f / \partial z^2(0) = 0 \text{ y } \partial^2 f / \partial x \partial z(0) \neq 0, \partial^3 f / \partial z^3(0) \neq 0$$

**8.8 Caso (I):**  $\tilde{F}$  es regular. Al transformar localmente el espacio imagen usando  $F^{-1}$ ,  $F$  se deforma en la identidad.

**8.9 Caso (II):**  $f(0, z) = z^2 q(z)$ , con  $q(0) \neq 0$ . Entonces los ideales  $(x, z)_{\mathfrak{E}(2)}$  y  $(x, z^2)_{\mathfrak{E}(2)}$  son iguales, y, por el Teorema de Preparación, las funciones  $1, z$  son generadores de  $\mathfrak{E}(2)$  como un  $\mathfrak{E}(2)$ -módulo vía  $F^*$ . En particular, el germen  $z^2$  puede escribirse como

$$z^2 = \varphi(x, \tilde{f}(x, z)) + 2\psi(x, \tilde{f}(x, z)) \cdot z$$

para algunos gérmenes  $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ . La expansión de Taylor de segundo orden de esta ecuación es una identidad entre polinomios de segundo orden, cuyos coeficientes son idénticos:

$$\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0; \quad \partial \varphi / \partial y(0) \neq 0;$$

$$\partial \varphi(x, \tilde{f}(x, z)) / \partial z(0) = \partial \varphi / \partial y(0) \cdot \partial \tilde{f} / \partial z(0) = 0.$$

Esto significa que  $h(x, z) = (x, z - \psi(x, \tilde{f}(x, z)))$  y  $k(x, y) = (x, \varphi(x, y) + \psi^2(x, y))$  son transformaciones de coordenadas. Así, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (x, z) & \xrightarrow{h} & (x, z - \psi(x, \tilde{f}(x, z))) \\ \downarrow F & & \downarrow (\text{id}, \text{id}^2) \\ (x, \tilde{f}(x, z)) & \xrightarrow{k} & (x, \varphi(x, \tilde{f}(x, z)) + \psi^2(x, \tilde{f}(x, z))) \end{array}$$

es conmutativo, ya que  $z^2 + \psi^2 - 2\psi z = \varphi + 2\psi z + \psi^2 - 2\psi z = \varphi + \psi^2$ . Por lo tanto,  $F$  es equivalente a  $(x, z) \mapsto (x, z^2)$ .

**8.10 Caso (III):** Aquí  $\partial f / \partial z(0) = \partial^2 f / \partial z^2(0) = 0$ , y  $\partial^2 f / \partial x \partial z(0)$ ,  $\partial^3 f / \partial z^3(0)$  son ambas no nulas. Al igual que antes, se deduce del Teorema de Preparación que existen gérmenes  $\varphi, \psi, \theta$  tales que

$$z^3 = \varphi(x, \tilde{f}(x, z)) + \psi(x, \tilde{f}(x, z)) \cdot z + 3\theta(x, \tilde{f}(x, z)) \cdot z^2.$$

Esta ecuación induce una identidad entre los respectivos jets en el origen. Comparando los coeficientes de  $1, z, z^2$ ; se encuentra que  $\varphi(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0$ , y  $\theta(0, \tilde{f}(0, z))$  se anula al menos de orden tres en  $z$  (lo cual significa que  $\theta$  está en  $\mathfrak{m}(1)^3$ ). Por lo tanto,

$$(x, z) \mapsto (x, z - \theta(x, \tilde{f}(x, z)))$$

es una transformación de coordenadas admisible. Con este cambio de coordenadas,  $f$  se transforma en una función  $f_T$  dada por el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} (x, z) & \longrightarrow & (x, z - \theta(x, \tilde{f}(x, z))) = (x, \bar{z}) \\ \searrow f & & \swarrow f_T \\ & & f(x, z) = f_T(x, \bar{z}) \end{array}$$

La función  $f_T$  también satisface la condición para  $f$  en el caso (III): la función  $f_T(0, \bar{z}) = f(0, z - \theta(0, f(0, z)))$  se anula exactamente de orden tres, mientras que  $\partial f_T / \partial x(0, \bar{z})$  se anula exactamente de orden uno. Esto se nota al comparar los coeficientes de los 2-jets:

$$\hat{f}(x, z) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x z \quad \text{mód } \mathfrak{m}(2)^3,$$

$$\hat{\bar{z}}(x, z) = z + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x z \quad \text{mód } \mathfrak{m}(2)^3,$$

por lo que  $\hat{z}(x, \bar{z}) = \bar{z} - c_1 x - (c_2 - c_1 c_3) x^2 - c_3 x \bar{z} \quad \text{mód } \mathfrak{m}(2)^3$ , que a su vez implica que  $\hat{f}_T(x, \bar{z}) = \hat{f}(x, \hat{z}(x, \bar{z})) = f_1 x + (f_2 - f_3 c_1) x^2 + f_3 x \bar{z} \quad \text{mód } \mathfrak{m}(2)^3$ , donde, por hipótesis,  $f_3$  es no nulo.

Ahora, en el nuevo conjunto de coordenadas,  $\bar{z}^3 = (z - \theta)^3 = z^3 - 3z^2\theta + 3z\theta^2 - \theta^3 = \varphi + \psi z + 3\theta z^2 - 3z^2\theta + 3z\theta^2 - \theta^3 = (\psi + 3\theta^2)(z - \theta) + (\varphi + 2\theta^3 + \psi\theta) = \psi_1 \bar{z} + \varphi_1$ , lo cual demuestra que, sin pérdida de generalidad, se puede asumir  $\theta = 0$  desde el inicio. Entonces:

$$z^3 = \varphi(x, f) + \varphi(x, f)z; \text{ con } \varphi(0, 0) = \varphi(0, 0) = 0.$$

Hágase el cambio de coordenadas en el dominio  $\{(x_1, x_2)\}$ , y en el rango  $\{(y_1, y_2)\}$ , dado por:

$$(A) \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \psi(x_1, f(x_1, x_2)) \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$(B) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \psi(y_1, y_2) \\ \varphi(y_1, y_2) \end{bmatrix}.$$

Se debe mostrar primero que (A) y (B) son transformaciones válidas de coordenadas. Esto es un cómputo de 3-jets:

$$\hat{f}(x_1, x_2) = f_1 x_1 + f_2 x_1^2 + f_3 x_1 x_2 + f_4 x_2^3 + x_1 \cdot o(2) \text{ mód } \mathfrak{m}^4,$$

donde  $f_3, f_4 \neq 0$  (recuérdese la notación  $o(\ )$  introducida en 4.7). Luego

$$\hat{\phi}(x_1, y) = b_1 x_1 + b_2 y \text{ mód } \mathfrak{m}^2, \quad \hat{\psi}(x_1, y) = c_1 x_1 + c_2 y \text{ mód } \mathfrak{m}^2, \text{ y}$$

$$(C) \quad x_2^3 = \hat{\phi}(x_1, \hat{f}(x_1, x_2)) = \hat{\psi}(x_1, \hat{f}(x_1, x_2)) \cdot x_2.$$

Para (A) se debe demostrar que  $c_1 + c_2 f_1 \neq 0$ , y para (B) debe probarse que  $b_1 c_2 + b_2 c_1 \neq 0$ . Se sigue de (C), la cual es una identidad entre series de potencias, que  $b_2 \neq 0$  ya que  $b_2 f_4$  es el coeficiente de  $x_2^3$  en el lado derecho. Por otra parte, el coeficiente de  $x_1 x_2$ , denotado  $(c_1 + c_2 f_1) + b_2 f_3$ , es cero; y como  $f_3 \neq 0, b_2 \neq 0$ , se debe tener que  $c_1 + c_2 f_1 \neq 0$ . El coeficiente de  $x_1$ ,  $b_1 + b_2 f_1$ , es cero, y entonces  $b_1 c_2 + b_2 c_1 = -b_2(f_1 c_2 + c_1) \neq 0$ , como se requería.

Para completar la prueba del Teorema de Whitney, nótese que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (x_1, x_2) & \xrightarrow{(A)} & (\psi(x_1, f(x_1, x_2)), x_2) = (\bar{x}, \bar{y}) \\ \downarrow F & & \downarrow \\ (x_1, f(x_1, x_2)) & \xrightarrow{(B)} & (\psi(x_1, f(x_1, x_2)), \Phi(x_1, f(x_1, x_2))) = (\bar{x}, \bar{y}^3 - \bar{x}\bar{y}) \end{array}$$

es conmutativo, lo que equivale a la ecuación  $x_2^3 - \psi(x_1, f(x_1, x_2))x_2 = \varphi(x_1, f(x_1, x_2))$ , y

entonces  $(x, z) \mapsto (x, z^3 - xz)$ .  $\blacklozenge$

## 9. SINGULARIDADES DE BOARDMAN-THOM

Sea  $f : M \rightarrow N$  un mapeo diferenciable. Como ya se ha demostrado, el conjunto  $\Sigma^i(f) = \{x \in M : \dim(M) - \text{Rg}_x(f) = i\} \subseteq M$  puede ser no trivial, en algunos casos este puede ser cualquier subconjunto cerrado de  $M$ . Por otra parte, para mapeos entre superficies, el conjunto  $\Sigma^i(f)$  es una variedad para casi todo  $f$ . Para el caso de mapeos de Whitney, solamente aparecen los conjuntos  $\Sigma^0(f)$  y  $\Sigma^1(f)$ ; el primero de estos es abierto, mientras que el segundo consiste de curvas diferenciables.

Si  $\Sigma^i(f)$  es una variedad, entonces puede definirse el conjunto  $\Sigma^{i,i}(f) = \Sigma^i(f|_{\Sigma^i(f)})$ . En el caso de mapeos de Whitney, el único conjunto de interés es  $\Sigma^{1,1}(f)$ , el cual está formado por los puntos cúspide de  $f$ . Siempre que se obtengan variedades, esta construcción puede iterarse en forma inductiva, y se puede definir el conjunto  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_n}(f)$ . La cuestión, que fue propuesta inicialmente por Thom y que fue confirmada por Boardman, es: ¿existe algún subconjunto denso y abierto  $T \subseteq C^\infty(M, N)$  tal que para todo  $f \in T$ , todos los subconjuntos  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_n}(f)$  definidos anteriormente son variedades? En realidad, Boardman definió un subconjunto residual  $T$  (residual significa que es intersección contable de conjuntos densos y abiertos).

Sea  $f : M^m \rightarrow N^n$  diferenciable, y sea  $U^{n-k} \subseteq N^n$  una subvariedad de codimensión  $k$ :

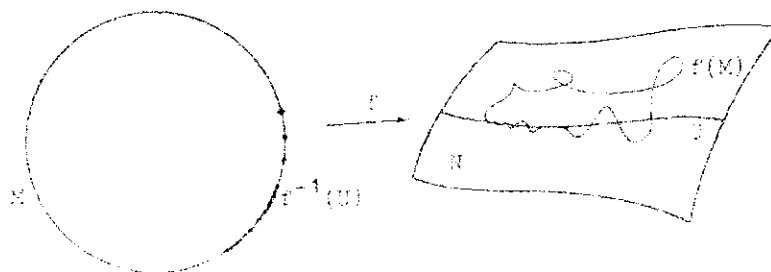


Figura 9.1: El mapeo  $f^{-1}(U)$  no es necesariamente una subvariedad.

No es necesariamente cierto que  $f^{-1}(U) \subseteq M$  es una subvariedad. Se sabe que si  $U = \{0\} \subset \mathbb{R}$ , entonces  $f^{-1}(U)$  puede ser un subconjunto cerrado arbitrario. Se puede verificar que este resultado es válido en forma más general.

**9.1 Definición:** El mapeo  $f : M^m \rightarrow N^n$  se dice que es **transversal** a la subvariedad  $U^{n-k} \subseteq N^n$ , si se satisface la siguiente condición para cada  $x \in M$  tal que  $f(x) \in U$ : Sea  $(y_1, \dots, y_n)$  un conjunto de coordenadas locales en  $f(x)$ , tales que cerca de  $f(x)$  la subvariedad  $U$  está definida por  $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$  (véase la definición 1.9). Entonces, dicha condición es que la matriz

$$[\partial f_i / \partial x_j], \quad 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq m$$

tenga rango  $k$  en el punto  $x$ , donde  $(x_1, \dots, x_m)$  es un sistema coordenado en  $x \in M$ .

Nótese que esta condición es sólo una restricción en aquellos  $x \in M$  para los cuales  $f(x) \in U$ . Así, si  $m < k$ , la transversalidad significa que  $f(M) \cap U = \emptyset$ . Usando los espacios tangentes, y el mapeo tangente, la condición puede describirse en la siguiente forma: Si  $x \in M$  y  $f(x) \in U$ , entonces el mapeo

$$T_x M \xrightarrow{T_x f} T_{f(x)} N \longrightarrow T_{f(x)} N / T_{f(x)} U$$

es sobreyectivo. Alternativamente,  $T_x f(T_x M) + T_{f(x)} U = T_{f(x)} N$ .

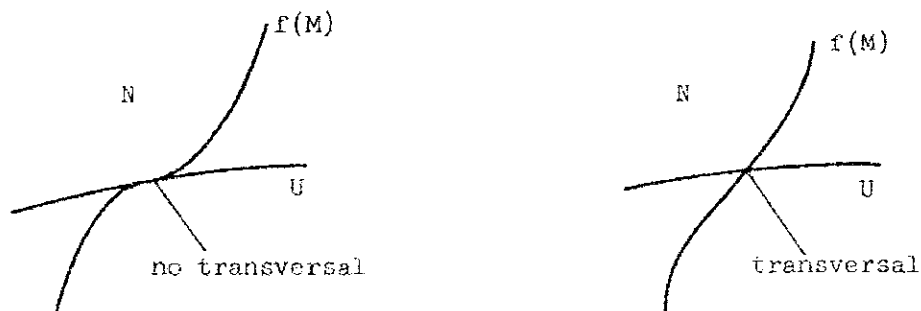


Figura 9.2: Transversalidad y no-transversalidad de  $f$  con respecto a  $U$ .

**9.2 Teorema:** Si  $f : M^m \rightarrow N^n$  es transversal a la subvariedad  $U^{n-k} \subseteq N^n$ , entonces  $f^{-1}(U) \subseteq M$  es una subvariedad de codimensión  $k$ .

**Demostración:** Elijanse sistemas de coordenadas  $(x_1, \dots, x_m)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  como en la definición de transversalidad. Cerca de  $x \in f^{-1}(U)$ , el conjunto  $f^{-1}(U)$  es localmente la imagen inversa de cero bajo la composición de mapeos

$$(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{f} (y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\text{proy}} (y_1, \dots, y_k).$$

Este mapeo tiene rango  $k$ , por definición de transversalidad. ♦

Si  $U \subseteq N$  es cerrado, entonces el conjunto de los mapeos que son transversales a  $U$  es un subconjunto abierto de  $C^\infty(M, N)$ . Esto se debe a que la transversalidad está expresada, localmente, por la no nulidad de un mapeo continuo  $\phi_f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , el cual asigna la suma de los cuadrados de la distancia  $(f(x), U)$  y los determinantes  $\det(\partial f_i / \partial x_j)$ ,  $i < k$ . Si  $f$  cambia abruptamente, también lo hace  $\phi_f$ .

Por otra parte, el Lema de Transversalidad de Thom\* establece que el conjunto de mapeos transversales a  $U$  es denso en  $C^\infty(M, N)$ . La parte local de este teorema es una consecuencia directa del Teorema de Sard. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  es diferenciable, sea  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  un valor regular de la composición

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{p} \mathbb{R}^k,$$

donde  $p(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k)$ . Entonces el mapeo  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por  $x \mapsto f(x) - (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0)$  está cerca de  $f$  para  $\lambda$  pequeño, y es transversal a  $\mathbb{R}^{n-k} = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 = \dots = y_k = 0\}$ .

**9.3 Lema:** Sea  $\mathbb{R}^{m \times n} = \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  el espacio vectorial de  $(m \times n)$ -matrices reales, y sea  $\mathbb{R}^{m \times n}(r) \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$  el subespacio de matrices con rango  $r$ . Entonces  $\mathbb{R}^{m \times n}(r)$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  con codimensión  $(n-r)(m-r)$ , para  $r \leq \min\{m, n\}$ .

**Demostración:** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$  el subconjunto abierto de todas las matrices de la forma

---

\* Véase Milnor (1958).

$$\begin{bmatrix} A & * \\ D & * \end{bmatrix}, \quad \det(A) \neq 0,$$

donde  $A$  es un punto en  $\mathbb{R}^{m \times n}(r)$  que, sin pérdida de generalidad, puede asumirse que está en  $U$  (de otra manera, pueden reordenarse las filas y columnas). En este caso,  $U \cap \mathbb{R}^{m \times n}(r)$  consiste en aquellas matrices cuyas últimas  $n-r$  columnas dependen de las primeras  $r$ . Ahora, tómense matrices  $A, B, C$  y  $D$  como sigue:

$A$ :  $(r \times r)$ -matriz, con  $\det(A) \neq 0$ ,

$B$ :  $(r \times (n-r))$ -matriz,

$C$ :  $((m-r) \times (n-r))$ -matriz

$D$ :  $((m-r) \times r)$ -matriz;

y considérese el mapeo

$$(A, B, C, D) \mapsto \left[ \begin{array}{c|cc} A & 0 & \\ \hline & 1 & 0 \\ & & \ddots \\ D & & 1 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline & B \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & C \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A & AB \\ D & DB+C \end{bmatrix}.$$

La imagen está en  $U$ , y la primera matriz en el producto es invertible ya que  $\det(A) \neq 0$ . Este mapeo es invertible, ya que  $A^{-1}$  existe. La imagen de  $(A, B, C, D)$  está en  $\mathbb{R}^{m \times n}(r)$  si y sólo si  $C=0$ . Esta parte de  $U$  es una subvariedad de codimensión  $(n-r)(m-r)$  en la variedad de todas las matrices  $(A, B, C, D)$  anteriores. ♦

**9.4 Lema:** Sea  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  un mapeo diferenciable, y sea  $U \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$  una subvariedad diferenciable. Entonces, para casi todo mapeo lineal  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (i. e., para casi toda matriz), el mapeo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \ni x \mapsto D(f+A)(x) = Df(x) + A$  es transversal en  $U$ .

**Demostración:** Considérese el mapeo  $\phi: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \ni (x, u) \mapsto u - Df(x)$ . Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  un valor regular de  $\phi$ . Si  $u$  es un punto de  $U$  y  $u = Df(x) + A$ , entonces  $u - Df(x) = A$  es un valor regular de  $\phi$  (y un valor de  $\phi$ ) tal que cerca de  $(x, u)$ ,  $\phi$  es una sumersión (con rango  $nm$ , y cuyo mapeo tangente  $T\phi$  es un epimorfismo). Esto significa que la imagen del mapeo tangente a  $Df$  y el espacio tangente a  $U$  en  $u$ , generan al espacio tangente a  $\mathbb{R}^{m \times n}$  en  $A$ . Nótese que la diferencial del mapeo  $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  es la misma

que la diferencial del mapeo  $Df + A$ , ya que  $A$  es una constante en el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Entonces, el mapeo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \ni x \mapsto Df(x) + A$  es transversal a  $U$ . ♦

**9.5 Teorema: (Teorema de Thom).** Para un mapeo diferenciable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , sea  $\Sigma^r(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{Rg}_x(f) = n - r\}$ . Entonces, para casi todo mapeo lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  el conjunto  $\Sigma^r(f + A)$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbb{R}^n$  con codimensión  $(m - n + r) \cdot r$ , para todo  $r$ .

**Demostración:**  $\Sigma^r(f) = Df^{-1}(\mathbb{R}^{m \times n}(n - r))$ , y  $\mathbb{R}^{m \times n}(n - r)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  con codimensión  $(m - (n - r))(n - (n - r)) = (m - n + r) \cdot r$  (Lema 9.3). Por el Lema 9.4,  $f$  puede deformarse mediante la adición de casi todo mapeo lineal  $A$ , en forma tal que  $D(f + A)$  sea transversal a todo  $\mathbb{R}^{m \times n}(n - r)$ . Por el Teorema 9.2,  $\Sigma^r(f + A)$  es una subvariedad con la misma codimensión que  $\mathbb{R}^{m \times n}(n - r)$ . ♦

Boardman asegura que el caso general  $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_r}(f)$  estriba en definir ciertas variedades algebraicas regulares  $\Sigma(i_1, \dots, i_r)$  en el espacio de jets  $\hat{\mathcal{E}}(n, m)$  (en lugar del espacio  $\mathbb{R}^{m \times n}$  de 1-jets). Luego, se hace una deformación abrupta del mapeo dado  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , de forma que el mapeo

$$jf : \mathbb{R}^n \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(n, m) \ni x \mapsto (\text{el jet del germen } f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ en } x)$$

sea transversal a todas las subvariedades  $\Sigma(i_1, \dots, i_r)$ . Para tales mapeos, él demuestra que

$$\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_r}(f) = jf^{-1}(\Sigma(i_1, \dots, i_r))$$

y que cada uno es una subvariedad.

## 10. LA DIFERENCIAL CUADRÁTICA

En el caso de mapeos entre superficies, los mapeos diferencialmente estables forman un subconjunto denso y abierto del conjunto de todos los mapeos. No existe aún un resultado correspondiente para variedades diferenciables de dimensión suficientemente grande. Los

mapeos estables -en el sentido de equivalencia diferenciable- no son densos. Para probar esto, deben definirse invariantes que ayuden a decidir cuándo los gérmenes no son equivalentes.

Estos invariantes (introducidos por Porteous) están dados por la parte cuadrática de la expansión de Taylor cuando la parte lineal se anula. Esta parte cuadrática de la expansión de Taylor para gérmenes define ciertamente familias lineales de formas cuadrática. En términos algebraicos, estas formas pueden ser divididas en clases de equivalencia. Así, se obtienen invariantes para las familias lineales y, en consecuencia, para los gérmenes.

Se iniciará la sección con algunos detalles de la diferencial cuadrática. Sea  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  un germen diferenciable. La diferencial de  $f$  es un mapeo lineal  $Df(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  están canónicamente identificados con sus espacios tangentes en el origen.

**10.1 Definición:** Sea  $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  un germen diferenciable. La **diferencial cuadrática** es un mapeo cuadrático  $d^2f_0 : \text{Ker}(Df(0)) \rightarrow \text{coKer}(Df(0))$  definido por:

$$d^2f_0(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cdot v)}{t^2} \text{ módulo } Df(0)(\mathbb{R}^n),$$

para  $v \in \text{Ker}(Df(0))$ .

Se debe mostrar que este límite existe y que el mapeo  $d^2f_0$  está bien definido como mapeo cuadrático  $\text{Ker}(Df(0)) \rightarrow \text{coKer}(Df(0))$ , en donde estos espacios vectoriales están considerados como subespacios de los espacios tangentes en el origen de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente. Para ello, se debe probar que  $d^2f_0$  es independiente de cambios diferenciables de coordenadas. Considérese la serie de Taylor

$$(1) \quad f(tv) = t \cdot Df(0) \cdot v + \frac{1}{2} t^2 \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_i \partial v_k} \cdot v_i v_k + o(3).$$

Sea  $v \in \text{Ker}(Df(0))$ . El primer término de la derecha se anula por lo que el límite existe y es igual a

$$(2) \quad \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k}.$$

Si  $\phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$  es un difeomorfismo, entonces

$$d^2(\phi \circ f)_0(v) = D\phi(0) \cdot \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k} \cdot v_j v_k$$

en vista de la serie de Taylor (1). Entonces  $d^2f_0$  es transformado por la matriz jacobiana exactamente en la misma forma que es espacio tangente en el origen de  $\mathbb{R}^m$ . Así, el mapeo es independiente de los cambios de coordenadas en  $\mathbb{R}^m$ .

Ahora, si  $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  es una transformación de coordenadas en el origen, con  $D\psi(0) = 1_{(\mathbb{R}^n, 0)}$ , la identidad, entonces  $\psi(tv) = tv + t^2 w(t)$  y

$$f(\psi(tv)) = t^2 Df(0) \cdot w(t) + \frac{1}{2} t^2 \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v_j \partial v_k} \cdot v_j v_k + o(3),$$

por lo que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \cdot \psi(tv)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv)}{t^2} + Df(0) \cdot w(0)$ . Este último término está en  $Df(0)(\mathbb{R}^n)$ .

Se ha demostrado que el mapeo  $d^2f_0$  está definido en forma única por la ecuación (2), toda vez se haya asignado una base al subespacio  $\text{Ker}(Df(0))$  del espacio tangente a  $\mathbb{R}^n$  en el origen.

La diferencial cuadrática puede tener cualquier forma dada haciendo una elección adecuada de  $m$ ,  $n$ ,  $\dim(\text{Ker}(Df(0)))$ , y un mapeo polinomial  $f$ . Un haz de formas cuadráticas puede ser asignado a la diferencial cuadrática en forma invariante. Defínase:

$F$  = el espacio vectorial de formas cuadráticas en  $\text{Ker}(Df(0))$ ,

$C$  = el espacio dual de  $\text{coKer}(Df(0))$ ,

$L_f : C \rightarrow F \ni L_f(\alpha) = \alpha \circ d^2f_0$ .

**10.2 Definición:** El mapeo  $L_f : C \rightarrow F$  se llama **haz de formas cuadráticas** para  $d^2f_0$ .

**10.3 Nota:** Supóngase que  $\text{Ker}(Df(0))$  y  $\text{coKer}(Df(0))$  tienen ambos dimensión dos. La dimensión de  $F$  es entonces tres, y una base es  $\{x^2, 2xy, y^2\}$ , donde  $x, y$  son coordenadas para  $\text{Ker}(Df(0))$ . La forma  $ax^2 + 2bxy + cy^2$  corresponde a un punto  $(a, b, c) \in F$ , que tiene la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

como un mapeo de  $\text{Ker}(Df(0))$  a su espacio dual. La matriz  $A = 0$  corresponde a la forma cuadrática nula. Si  $A \neq 0$ , las matrices con  $\det(A) = ac - b^2 = 0$  corresponden a las formas cuadráticas de rango 1. La forma normal de estas es  $\pm x^2$ . Cuando  $\det(A) \neq 0$ , las formas normales son  $x^2 \pm y^2$  y  $-(x^2 + y^2)$ .

El conjunto  $\{\det(A) = 0\}$  es un cono en  $F$ :

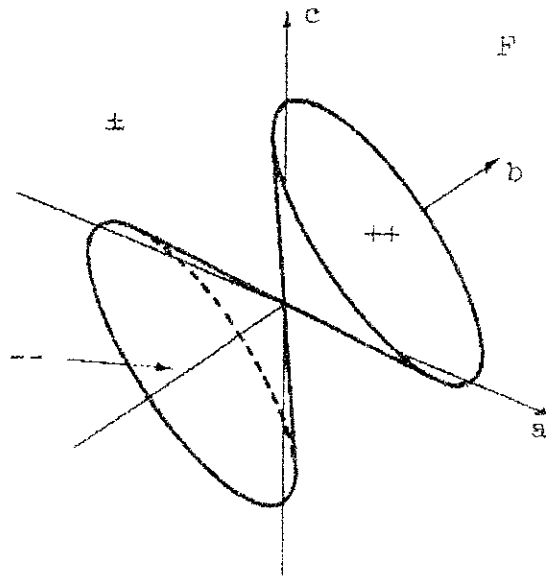


Figura 10.1: El conjunto  $\{\det(A) = 0\}$  es un cono en  $F$ .

- El vértice del cono es la forma cuadrática nula.

- Los puntos del cono son las formas parabólicas.
- Las regiones  $++$ ,  $--$  son formas elípticas.
- La región  $\pm$  es hiperbólica.
- El tipo isomorfo de una forma cuadrática está determinado por su posición en relación a este cono.

Si  $L_f : C \rightarrow F$  es un haz de formas cuadráticas, entonces  $L_f(C) \subseteq F$  puede tomar únicamente siete formas diferentes:

1. un plano afuera del cono,
2. un plano secante al cono,
3. un plano tangente al cono,
4. una recta dentro del cono,
5. una recta fuera del cono,
6. una recta tangente al cono,
7. el vértice.

Supóngase que dos gérmenes diferenciables tienen haces de formas cuadráticas correspondientes, tales que las posiciones para  $L_f(C)$  son diferentes de acuerdo a la clasificación anterior. Dichos gérmenes no pueden ser equivalentes ya que cualquier transformación de coordenadas de dominio y rango produce un cambio de coordenadas para el haz  $L_f$ , y este no puede cambiar la posición de  $L_f(C)$  en relación al cono  $\{\det(A) = 0\}$ . Es en esta forma que el haz de formas cuadráticas proporciona un invariante algebraico para la clase de equivalencia de un germen.

**10.4 Nota:** De forma más general, sea  $F(k)$  el espacio vectorial de formas cuadráticas en  $R^k$ , y sea  $H(c, k) = LA(R^c, F(k))$  el espacio vectorial de haces  $c$ -dimensionales de formas cuadráticas en  $R^k$ . Se debe examinar la operación de los grupos lineales generales (transformaciones lineales de coordenadas en  $R^c$  y  $R^k$ ) sobre tales haces de formas, con el objetivo de encontrar los invariantes para los elementos de  $H(c, k)$ . El grupo

$GL(c, \mathbb{R}) \times GL(k, \mathbb{R})$  de transformaciones de coordenadas en  $\mathbb{R}^c$  y  $\mathbb{R}^k$ , opera sobre  $H(c, k)$  por medio de la fórmula

$$g_c \times g_k(L_c(v_c)(v_k)) = L(g_c^{-1}v_c)(g_k^{-1}v_k).$$

Por ejemplo, se ha visto que  $H(2, 2)$  tiene dimensión 6 ya que  $\dim(F(2)) = 3$ , y que este espacio posee 7 órbitas bajo la acción de  $GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$ . Aquí, una órbita es una clase de equivalencia de la operación del grupo. En suma, se tiene que  $\dim(GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})) = 8$ .

En la definición de haz (Definición 10.2), se asignó un haz de formas cuadráticas  $L \in LA(C, F)$  a cada germen  $f : (M^m, x) \rightarrow (N^n, y)$  haciendo uso de  $d^2f_0$ . Al elegir coordenadas en  $C$  y  $F$  se obtiene un único elemento en  $H(c, k)$ . Cuando se seleccionan nuevas coordenadas para  $C$  y  $F$ , este elemento en  $H(c, k)$  es transformado, haciendo uso de un elemento de  $GL(c, \mathbb{R}) \times GL(k, \mathbb{R})$ . Así, la órbita del haz  $L$  en  $H(c, k)$  es un invariante bien definido para el germen  $f$  salvo equivalencia diferencial. Esto implica el siguiente resultado:

**10.5 Teorema: (Teorema de Thom).** El conjunto de mapeos diferenciables estables  $M^{n^2} \rightarrow N^{n^2}$  es nunca denso en el conjunto de todos los mapeos diferenciables, para  $n \geq 3$ .

**Demostración:** La dimensión de  $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$  es  $2n^2$ . Por otra parte, la dimensión de  $F(n)$  es la misma que la de las  $(n \times n)$ -matrices simétricas, dígase  $\frac{1}{2}n(n+1)$ . Entonces  $\dim(H(n, n)) = \frac{1}{2}n(n+1)$ . Para  $n \geq 3$ , se tiene que  $\frac{1}{2}(n+1) \geq 2$ , por lo que  $\dim(GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})) \leq \dim(H(n, n))$ . Esta igualdad se mantiene en el caso  $n = 3$ , y nótese que para este caso, existe un subgrupo 1-dimensional de parejas  $(\alpha, \alpha^{-1})$  de escalares, el cual opera como la identidad sobre el haz. Se deduce que, para  $n \geq 3$ , las órbitas de la operación de  $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$  tienen dimensión menor que la de  $H(n, n)$ , es decir, tienen codimensión mayor o igual a 1.

Considérese ahora un mapeo  $f : M^{n^2} \rightarrow N^{n^2}$  con singularidad tipo  $\Sigma^n$  en el punto  $0 \in M$  (esto significa que  $0 \in \Sigma^n(f)$ ). Supóngase además que la diferencial de  $f$  define un mapeo transversal a  $LA(n^2, n^2, n^2 - n)$  en una vecindad de  $0$ , cuando se introducen coordenadas euclidianas locales. Estas dos condiciones impuestas para  $f$  son condiciones sobre su primera y segunda derivada. Entonces los requerimientos pueden ser satisfechos por un polinomio de segundo grado. Al igual que en la prueba del Teorema de Thom de la sección 9, se sabe que localmente, en un sistema coordenado,  $\Sigma^n(f) = Df^{-1}(LA(n^2, n^2, n^2 - n))$ . Por el Lema 9.3,  $\text{codim}(LA(n^2, n^2, n^2 - n)) = n^2$  y así la condición de transversalidad en  $f$  implica que  $\dim(\Sigma^n(f)) = 0$ .

Elíjanse coordenadas  $(y_1, \dots, y_{n^2})$  alrededor de  $Df(0)$  en la variedad  $LA(n^2, n^2)$  en forma tal que la subvariedad  $LA(n^2, n^2, n^2 - n)$  esté definida por  $y_1 = \dots = y_{n^2} = 0$ . Por transversalidad, la derivada de la siguientes composición, evaluada en  $0$ , es un isomorfismo:

$$U \xrightarrow{Df} \{(y_1, \dots, y_{n^2})\} \xrightarrow{\text{proy}} \{(y_1, \dots, y_{n^2})\},$$

donde  $U$  es una vecindad coordenada de  $0$ . Así, si  $U$  es suficientemente pequeña, esta composición será un difeomorfismo y  $0 = \Sigma^n(f) \cap U = (\text{proy} \circ Df)^{-1}(0) \cap U$ . Si  $h$  es una aproximación a  $f$  que difiere únicamente por un polinomio homogéneo de grado dos, entonces  $0 \in \Sigma^n(h)$ . En cualquier caso,  $\Sigma^n(h)$  será un único punto en  $U$  que está cerca de  $0$ . Así, si los mapeos estables fueran densos, se estaría en capacidad de encontrar un mapeo estable  $f$  con las propiedades antes descritas. Ahora bien,  $0$  es un punto aislado de  $\Sigma^n(f)$  y se puede encontrar un mapeo  $h$  arbitrariamente cercano a  $f$  usando un cambio en el término de segundo orden, el cual hace que  $d^2h_0$  y  $d^2f_0$  estén en diferentes órbitas de  $H(n, n)$  bajo la acción de  $GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R})$ . Esto se debe a que dichas órbitas son todas de medida cero en  $H(n, n)$ . Por lo tanto,  $f|_U$  no es estable.

Para completar el argumento global, primero elíjase un mapeo  $f$  tal que su diferencial sea transversal en todo punto a  $LA(n^2, n^2, n^2 - n)$ , y que localmente, alrededor de  $0 \in M$ , se vea como el mapeo  $f|_U$  anterior. Escójase la aproximación  $h$  de forma que  $h$  y  $f$  difieran únicamente en  $U$  y de manera que la órbita de  $d^2h_0$  sea distinta de todas aquellas órbitas que

contengan a la diferencial cuadrática de  $f$  en cualquiera de los puntos de  $\Sigma^n(f)$ . Como  $\Sigma^n(f)$  es una variedad de dimensión cero, existe un número contable de tales órbitas. ♦

## 11. GÉRMINES FINITAMENTE DETERMINADOS

Sea  $\mathfrak{G}(n, m)$  el espacio vectorial de todos los gérmenes  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , y sea  $\mathfrak{B}(n) \subseteq \mathfrak{G}(n, n)$  el subconjunto de gérmenes invertibles (respecto de la composición) con  $f(0) = 0$ . El par  $(\mathfrak{B}(n), \circ)$  es entonces un grupo, y  $\tilde{f} \in \mathfrak{G}(n, n)$  con  $f(0) = 0$  es un elemento de  $\mathfrak{B}(n)$  si y sólo si  $Df(0)$  es no singular. El grupo  $\mathfrak{B}(n)$  actúa sobre  $\mathfrak{G}(n, m)$  vía composición: si  $\tilde{f} \in \mathfrak{G}(n, m)$  y  $\tilde{h} \in \mathfrak{B}(n)$ , entonces  $\tilde{f} \circ \tilde{h} \in \mathfrak{G}(n, m)$ .

**11.1 Definición:** Dados los gérmenes  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 \in \mathfrak{G}(n, m)$ , considérese la relación binaria en  $\mathfrak{G}(n, m) \times \mathfrak{G}(n, m)$  definida por:  $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$  si, y sólo si, existe  $\tilde{h} \in \mathfrak{B}(n)$  tal que  $\tilde{f}_0 \circ \tilde{h} = \tilde{f}_1$ . A esta relación de equivalencia  $\sim$  se le llama **equivalencia correcta**. Si  $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$  entonces se dice que los gérmenes  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$  son **correctamente equivalentes**.

Sea  $j^k : \mathfrak{G}(n) \rightarrow \mathfrak{G}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1} = \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1}$  el mapeo jet, y, por conveniencia, denótese  $\mathfrak{G}(n)/\mathfrak{m}(n)^{k+1}$  por  $\hat{\mathfrak{G}}_k(n)$ . Para cada germen  $\tilde{f}$ , el mapeo  $j^k$  asigna el correspondiente k-jet (el k-ésimo polinomio de Taylor de  $\tilde{f}$  en el origen).

**11.2 Definición:** Un germen  $\tilde{f} \in \mathfrak{G}(n)$  es llamado **k-determinado** (o **k-suficiente**) si todo germen  $\tilde{g} \in \mathfrak{G}(n)$  con el mismo k-jet que  $\tilde{f}$ , es correctamente equivalente a  $\tilde{f}$ . Esto puede ser enunciado de otra forma: si  $j^k \tilde{f} = j^k \tilde{g}$ , entonces existe  $\tilde{h} \in \mathfrak{B}(n)$  tal que  $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \tilde{h}$ .

Decir que  $\tilde{f}$  es  $k$ -determinado es más bien un enunciado sobre el polinomio  $j^k f$  que sobre  $\tilde{f}$ . Cada germen que tiene este polinomio como su  $k$ -jet es idéntico a dicho polinomio si se elige un conjunto apropiado de coordenadas. Es decir, el  $k$ -jet determina el correspondiente germen. Nótese que:

1. Ningún 0-jet determina a su germen.
2.  $\mathcal{E}_1(n) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , ya que  $j^1(\tilde{f}) = f_0 + \sum_i f_1^i x_i$ , y  $\tilde{f}$  es 1-determinado si y sólo si algún  $f_1^i \neq 0$  (equivalentemente  $Df(0) \neq 0$ ). Esto se debe a que  $f$  puede transformarse en  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1$ .
3. El Lema de Morse establece que si  $\tilde{f} \in \mathcal{E}(n)$  y  $Df(0) = 0$ , entonces  $\tilde{f}$  es 2-determinado si, y sólo si,  $\det[\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j(0)] \neq 0$ .

Estos resultados muestran que los jets no determinados se vuelven menos frecuentes al incrementar el grado del polinomio. Los 1-jets no determinados forman la recta  $\mathbb{R} \times \{0\}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sobre cada punto en el espacio de 1-jets está el espacio de las matrices simétricas las cuales, evaluadas sobre 2-jets, representan todos los coeficientes posibles de monomios de grados dos. Sobre un punto en la recta de 1-jets no determinados, los 2-jets no determinados también forman un conjunto de medida cero dado por  $\{\det(a_{ij}) = 0\}$  en el espacio de matrices simétricas  $\{(a_{ij})\}$ .

**11.3 Teorema:** Sean  $\tilde{f} \in \mathcal{E}(n)$  y  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ .

Entonces  $\tilde{f}$  es  $k$ -determinado.

**Nota:** La hipótesis del teorema puede ser reformulada como  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$  módulo  $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , (donde  $\langle \partial f / \partial x_i \rangle$  es la abreviatura de  $\langle \partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n \rangle_{\mathcal{E}(n)}$ ). Si se escribe

$$\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle + \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{m}(n)^k,$$

entonces el Lema de Nakayama (Teorema 4.17) implica

$$\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)}.$$

Esta condición es entonces equivalente a la hipótesis del teorema. Sin embargo, la formulación original tiene la ventaja que únicamente espacios vectoriales de dimensión finita están involucrados, y para cada germen dado, estos espacios se pueden determinar.

La última formulación de la condición muestra que

$$\mathfrak{E}(n)/(\mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle)$$

es de dimensión finita y está generado por los monomios de grado menor que  $k$ . En forma converso, sea  $A = \mathfrak{E}(n)/(\mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle)$  de dimensión  $k$ . Por el Lema de Nakayama, se debe tener que  $0 = \mathfrak{m}(n)^j A \subset \mathfrak{m}(n)^{j-1} A \subset \dots \subset \mathfrak{m}(n)A \subset A$ ,  $j \leq k$ , ya que  $\dim(A) = k$ . Así,  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n)^j \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$ . Además,  $\mathfrak{E}(n) = \mathfrak{m}(n) \oplus \mathbb{R}$ , donde  $f$  se corresponde con  $(f - f(0)) \oplus f(0)$ . Así,  $\mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle + \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n)}$ , y la condición de que  $\mathfrak{E}(n)/(\mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle)$  tenga dimensión finita es equivalente a que  $\mathfrak{E}(n)/\langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n)}$  tenga dimensión finita. Entonces considérese el siguiente

**11.4 Lema:** Si el germen  $D\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es finito (Definición 6.8), entonces  $\tilde{f}$  es  $k$ -determinado para algún  $k$  (i. e.,  $\tilde{f}$  está finitamente determinado).

**Demostración:** Usando el argumento del Lema de Nakayama dado anteriormente, y haciendo  $A = \mathfrak{E}(n)/\langle \partial f / \partial x_i \rangle$ , se tiene entonces que  $\dim[\mathfrak{E}(n)/(Df)^* \mathfrak{m}(n)\mathfrak{E}(n)] = k$ , por lo que  $\tilde{f}$  es  $(k+1)$ -determinado.  $\blacklozenge$

Ahora la prueba del teorema (11.3):

Sean  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathfrak{E}(n)$  dos gérmenes con el mismo  $k$ -jet. Se debe probar entonces que existe un germen  $\tilde{h} \in \mathfrak{B}(n)$  con  $\tilde{f} \circ \tilde{h} = \tilde{g}$ . Para hacer esto, conéctese a  $\tilde{f}$  y  $\tilde{g}$  por medio de la familia 1-paramétrica de gérmenes  $\tilde{F}$ :

$$F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea  $\tilde{F}_t \in \mathfrak{E}(n)$  dado por  $F_t(x) = F(x, t)$ . Se desea demostrar que para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\tilde{F}_t$  es correctamente equivalente a  $\tilde{F}_{t_0}$ , siempre que  $|t - t_0| < \varepsilon$ . Esto prueba el teorema ya que  $\mathbb{R}$  es conexo. Para demostrar este resultado acerca de  $\tilde{F}$  se debe buscar

un germen  $\tilde{H} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que si  $\tilde{H}(x, t)$  se denota por  $\tilde{H}_t(x)$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- (I)  $\tilde{H}_{t_0} = \text{Id} \in \mathfrak{B}(n)$ ,
- (II)  $\tilde{H}_t(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ ,
- (III)  $\tilde{F}_t \circ \tilde{H}_t = \tilde{F}_{t_0}$ , eso es,  $F(H(x, t), t) = F(x, t_0)$ .

Para  $t$  cerca de  $t_0$  el germen  $\tilde{H}_t$  es invertible ya que  $\tilde{H}_{t_0}$  es invertible y  $\det(DH_t(0))$  depende en forma continua de  $t$ . La condición (III) se cumple completamente en  $t = t_0$  y entonces es suficiente reemplazar (III) por la ecuación diferencial que establece que  $F_t \circ H_t$  es independiente de  $t$ , es decir,

$$(III') \quad \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \cdot \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0.$$

Se desea resolver (I), (II), y (III') para  $H$ . Para hacer esto, se afirma el siguiente:

**11.5 Lema:** Si existe un germen  $\xi : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  con las propiedades

- (a)  $\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \cdot \xi_i(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0$ ,
- (b)  $\xi_i(0, t) = 0$ , para todo  $i$ ,

entonces también existe un germen  $\tilde{H}$ , que satisface (I), (II) y (III').

**Demostración:** Para probar esto, se debe resolver la ecuación diferencial  $\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t)$  para  $H$ , con condición inicial  $\tilde{H}_{t_0} = \text{Id}$ . La existencia de tal  $H$  se sigue de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Al sustituir  $H$  por  $x$  en (a), se obtiene (III'), y, usando (b), la ecuación  $\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \xi(H(0, t), t)$  tiene como solución única a  $H(0, t) = 0$ . Esto implica (II), y la condición (I) resulta ser la condición inicial anterior. ♦

Ahora se deben encontrar gérmenes  $\xi_i$  que satisfagan las condiciones (a) y (b) del lema anterior. Denótese el anillo de gérmenes  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (0, t_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  con el que se está trabajando por  $\mathfrak{E}(n+1)$ . Sea  $\mathfrak{E}(n) \subseteq \mathfrak{E}(n+1)$  el anillo de aquellos gérmenes que no

dependen de  $t$  y denótese el ideal maximal en  $\mathfrak{O}(n)$  por  $\mathfrak{m}(n)$ . Entonces, se está buscando ciertos elementos  $\xi_i$  en  $\mathfrak{O}(n+1)$ . La condición (b) significa que

$$\xi_i \in \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{O}(n+1), \text{ para cada } i.$$

Esto implica, por el teorema 4.1, que para cada  $i$  existen  $\gamma_j \in \mathfrak{O}(n+1)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ; tales que  $\xi_i(x, t) = \sum_j x_j \gamma_j(x, t)$ . Así, la existencia de  $\xi_i$  que satisface (a) y (b) es equivalente a la aserción sobre gérmenes en  $\mathfrak{O}(n+1)$  que

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{O}(n+1)}.$$

Sin embargo,  $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}((1-t)f + tg) = g - f \in \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , bajo la suposición de que  $f$  y  $g$  poseen el mismo  $k$ -jet. Es suficiente entonces mostrar que

$$(a, b) \quad \mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{O}(n+1)}.$$

De la hipótesis del teorema se obtiene

$$(*) \quad \mathfrak{m}(n)^k \cdot \mathfrak{O}(n+1) \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathfrak{O}(n+1)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \cdot \mathfrak{O}(n+1) \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathfrak{O}(n+1)} + \mathfrak{m}(n+1) \cdot \mathfrak{m}(n)^k \cdot \mathfrak{O}(n+1).$$

Para la segunda inclusión, nótese que  $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(g - f) \in \mathfrak{m}(n)^k$ ,  $\mathfrak{m}(n) \subseteq \mathfrak{m}(n+1)$ .

Ahora,  $\mathfrak{m}(n)^k \cdot \mathfrak{O}(n+1)$  es un  $\mathfrak{O}(n+1)$ -módulo finitamente generado (está generado por los monomios de grado  $k$  en la variable  $x_i$ ). Cuando se aplica el Lema de Nakayama en la forma  $A \subseteq B + \mathfrak{m} \cdot A \Rightarrow A \subseteq B$  a la inclusión (\*), se obtiene (a, b):

$$\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n)^k \cdot \mathfrak{O}(n+1) \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{O}(n+1)} \quad \blacklozenge$$

**11.6 Nota:** La transformación correcta, y la equivalencia correcta también pueden ser definidas para jets, es decir, para series de potencias, o bien, para series de potencias módulo  $\hat{\mathfrak{m}}(n)^k$  (i. e., elementos en  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^k$ ).

Sea  $\hat{\mathfrak{B}}_k(n) =$  el grupo de  $k$ -jets de los gérmenes en  $\mathfrak{B}(n) =$  el grupo de las  $n$ -tuplas de polinomios de grado  $k$ ,  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ , para los cuales  $Df(0) = [\partial f_i / \partial x_j(0)]$  es invertible, y  $f(0) = 0$ . La operación del grupo es la inducida por la composición de mapeos.

Sea  $\hat{\mathcal{E}}_k(n, n) = (\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] / \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1})^n$ . Este es un espacio euclideo de dimensión  $nC_{n+k}^k$ . Como  $\hat{\mathfrak{B}}_k(n)$  es el subconjunto de  $\hat{\mathcal{E}}_k(n, n)$  definido por  $\det(\partial f_i / \partial x_j(0)) \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , este es un mapeo diferenciable. La estructura de grupo:

$$\hat{\mathfrak{B}}_k(n) \times \hat{\mathfrak{B}}_k(n) \rightarrow \hat{\mathfrak{B}}_k(n) \ni (f(x), g(x)) \mapsto f(g(x)) \text{ módulo } \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1},$$

es un mapeo diferenciable. Los coeficientes de  $\hat{f} \circ \hat{g}$  se calculan a partir de los coeficientes de  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  por medio de la aplicación de polinomios canónicos. El mapeo

$$\hat{\mathfrak{B}}_k(n) \rightarrow \hat{\mathfrak{B}}_k(n) \ni \hat{f}(x) \mapsto \hat{f}^{-1}(x) \text{ módulo } \langle x_1, \dots, x_n \rangle^{k+1},$$

también es diferenciable.

**11.7 Definición:** Una variedad diferenciable con una estructura de grupo diferenciable se llama un **grupo de Lie**.

En otras palabras, el párrafo anterior indica que  $\hat{\mathfrak{B}}_k(n)$  es un grupo de Lie. Nótese que  $\hat{\mathfrak{B}}_k(n)$  actúa sobre  $\hat{\mathcal{E}}_k(n, m)$  mediante la composición

$$\hat{\mathcal{E}}_k(n, m) \times \hat{\mathfrak{B}}_k(n) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_k(n, m) : (\hat{f}, \hat{g}) \mapsto \hat{f} \circ \hat{g}.$$

Esta acción es compatible con tomar primero  $\mathfrak{B}(n)$  operando sobre  $\mathcal{E}(n, m)$ , y luego obtener los respectivos  $k$ -jets. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(n, m) \times \mathfrak{B}(n) & \longrightarrow & \mathcal{E}(n, m) \\ \downarrow j^k \times j^k & & \downarrow j^k \\ \hat{\mathcal{E}}_k(n, m) \times \hat{\mathfrak{B}}_k(n) & \longrightarrow & \hat{\mathcal{E}}_k(n, m) \end{array}$$

Las clases de equivalencia correcta en  $\mathcal{E}(n, m)$  son las órbitas de acción de  $\mathcal{B}(n)$ . Las clases de equivalencia de sus  $k$ -jets son las órbitas de acción de  $\hat{\mathcal{B}}_k(n)$  sobre  $\hat{\mathcal{E}}_k(n, m)$ . Así, si  $f, g \in \mathcal{E}(n)$  son correctamente equivalentes, entonces  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$  están en la misma órbita de acción de  $\hat{\mathcal{B}}_k(n)$  en  $\hat{\mathcal{E}}_k(n)$ . Al considerar estas órbitas finitodimensionales en un espacio euclideo de dimensión finita, se obtienen condiciones necesarias para la equivalencia correcta.

**11.8 Lema:** Sea  $f \in \mathcal{E}(n)$  un germen con  $k$ -jet  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{E}}_k(n)$ . Denótese la órbita de  $\hat{f}$  bajo la acción  $\hat{\mathcal{E}}_k(n) \times \hat{\mathcal{B}}_k(n) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_k(n)$  por  $\hat{f}\hat{\mathcal{B}}_k(n)$ . Sea  $T_{\hat{f}}\hat{f}\hat{\mathcal{B}}_k(n)$  el espacio tangente a esta órbita en  $\hat{f}$ , considerado como un subespacio del espacio euclideo  $\hat{\mathcal{E}}_k(n)$ . Entonces,

$$T_{\hat{f}}\hat{f}\hat{\mathcal{B}}_k(n) = \mathfrak{m}(n) \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \text{ módulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

**Demostración:** Considérese un germen  $\tilde{\mathcal{E}} : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \ni (x, t) \mapsto \delta_t(x)$ , con  $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \text{Id} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ . Este es el germen de una familia 1-paramétrica de transformaciones en  $\mathcal{B}(n)$ , que incluye con la identidad. Tal germen induce una trayectoria  $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\hat{\mathcal{E}}_k(n), \hat{f}) \ni t \mapsto \hat{f} \circ \delta_t$ . El vector velocidad de dicha trayectoria en el tiempo cero forma el espacio tangente  $T_{\hat{f}}\hat{f}\hat{\mathcal{B}}_k(n)$ . Si  $\delta(x, t)$  se escribe en la forma  $x + \varepsilon(x, t)$ , entonces el germen  $\tilde{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}(n+1, n)$  está restringido únicamente por las condiciones  $\varepsilon(x, 0) = 0$ ,  $\varepsilon(0, t) = 0$ . Los siguientes vectores, cuando se reducen módulo  $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , proporcionan entonces todos los vectores tangentes

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (f(x + \varepsilon(x, t))) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \left. \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Dado que  $\varepsilon$  solamente debe cumplir las condiciones antes descritas, la derivada  $\partial \varepsilon_i / \partial t|_{t=0}$  puede ser cualquier elemento en  $\mathfrak{m}(n)$ . Esto significa que el espacio tangente es exactamente  $\mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$  módulo  $\mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . ♦

**11.9 Definición:** Un  $r$ -jet  $\hat{f} \in \hat{\mathcal{E}}_r(n)$  se dice es  **$k$ -determinado** (para algún  $k \leq r$ ) si para todo  $\hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}_r(n)$  con  $\pi_k^r \hat{f} = \pi_k^r \hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}_k(n)$ , existe  $\hat{h} \in \hat{\mathcal{B}}_r(n)$  tal que  $\hat{f} = \hat{g} \circ \hat{h}$ .

**11.10 Corolario:** (Corolario al Teorema de Mather). Si  $f \in \mathcal{E}(n)$  y  $j^{k+1}(f)$  es  $k$ -determinado, entonces  $f$  es  $k$ -determinado.

**Demostración:** Sea  $U = \{\hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}_{k+1}(n) : \pi_k^{k+1} \hat{g} = j^k \hat{f}\}$ , y sea  $V = j^{k+1}(f) \hat{\mathcal{B}}_{k+1}(n)$ , la órbita de  $j^{k+1}(f)$  bajo la transformación correcta. Si  $j^{k+1}(f)$  es  $k$ -determinado, entonces el conjunto de los  $(k+1)$ -jets que poseen igual  $k$ -jet que  $f$ , está contenido en la órbita de  $j^{k+1}(f)$ , es decir,  $U \subseteq V$ , y así,  $T_f U \subseteq T_f V$ . Pero,  $T_f U = \mathfrak{m}(n)^{k+1}$  módulo  $\mathfrak{m}(n)^{k+2}$  ya que  $g \in U$  difiere de  $f$  solamente en un término de grado  $k+1$ . Por el Lema 11.8,  $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$  módulo  $\mathfrak{m}(n)^{k+2}$ , de forma que  $f$  es un germen  $(k+1)$ -determinado (Teorema de Mather). Como  $j^{k+1}(f)$  es un jet  $k$ -determinado, entonces  $f$  también es  $k$ -determinado.  $\blacklozenge$

**11.11 Corolario:**  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle \Rightarrow \tilde{f}$  es  $k$ -determinado  $\Rightarrow \mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$ . En particular,  $\tilde{f} \in \mathcal{E}(n)$  está finitamente determinado si, y sólo si, el germen  $D\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  es finito.

**Demostración:** La primera serie de implicaciones se siguen del Teorema de Mather. Si  $\tilde{f}$  es  $k$ -determinado, entonces  $j^{k+1}(f)$  es  $k$ -determinado, y de la prueba del corolario anterior se deduce que  $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+2}$ . Por el Lema de Nakayama, se tiene que  $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$  (ver la nota posterior a 11.3). Finalmente, en el Lema 11.4 y notas adicionales, se expuso que  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \mathfrak{m}(n) \cdot \langle \partial f / \partial x_i \rangle$  es equivalente a que el germen  $D\tilde{f}$  sea finito.  $\blacklozenge$

El hecho que  $f$  sea finitamente generado si y sólo si  $Df$  es finito es un teorema que se debe a Tougeron. En realidad, se puede ser más preciso: Si  $\dim(\mathcal{E}(n) / \langle \partial f / \partial x_i \rangle) = k$  entonces  $f$  es  $(k+1)$ -determinado.

**11.12 Definición:** Un germen  $\tilde{f} \in \mathcal{E}(n)$  con  $\tilde{f}(0) = D\tilde{f}(0) = 0$  se dice es una **singularidad**. Una singularidad  $\tilde{f}$  es **aislada** si el conjunto  $\Sigma(\tilde{f}) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = Df(x) = 0\}^\sim$  es igual a  $\{0\}^\sim$ . Una singularidad  $\tilde{f}$  es llamada **algebraicamente aislada** si  $D\tilde{f}$  es finito (i. e.,  $\tilde{f}$  es finitamente determinado).

**11.13 Teorema:** Toda singularidad algebraicamente aislada es aislada, pero existen singularidades aisladas que no son algebraicamente aisladas.

**Demostración:** Si  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)}$ , y, en particular  $x_j^k \in \langle \partial f / \partial x_i \rangle$ , para todo  $j$ , entonces  $Df(x) = 0$  implica  $x_j^k = 0$ , lo cual implica  $x_j = 0$ . Por lo tanto, toda singularidad algebraicamente aislada es aislada.

Por otra parte,  $e^{-1/x^2}$  es un ejemplo de una singularidad con jet nulo. Esta es una singularidad aislada que no es algebraicamente aislada.  $\blacklozenge$

Sean  $\mathcal{A}(n) =$  el anillo de gérmenes analíticos reales  $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ , y

$\mathcal{O}(n) =$  el anillo de gérmenes complejos analíticos  $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ .

Nótese que existen inclusiones canónicas  $\mathcal{A}(n) \subseteq \mathcal{O}(n)$  y  $\mathcal{A}(n) \subseteq \mathcal{E}(n)$ .

**11.14 Lema:** Si  $\tilde{f} \in \mathcal{A}(n)$ , entonces  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}(n) / \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)}) < \infty$  si y sólo si  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(n) / \langle \partial f / \partial z_i \rangle_{\mathcal{O}(n)}) < \infty$ .

**Demostración:** Denótese los ideales maximales en  $\mathcal{A}(n)$  y  $\mathcal{O}(n)$  por  $\mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(n)$  y  $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}(n)$ , respectivamente.

$(\Rightarrow)$   $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)}$  implica  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{E}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Además, se deduce que

$$(*) \quad \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(n)^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathcal{A}(n)} + \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(n)^{k+1},$$

ya que un monomio de grado  $k$ ,  $\phi \in \mathfrak{m}_{\mathcal{A}}(n)^k$ , primero puede escribirse en la forma

$$\phi(x) = \sum_i \lambda_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \text{ módulo } \mathfrak{m}(n)^{k+1},$$

y luego cada  $\lambda_i$  puede reemplazarse por su  $k$ -ésimo polinomio de Taylor. El residuo deberá estar en  $\mathfrak{m}(\mathfrak{n})^{k+1}$  y además debe ser analítico, y por lo tanto se obtiene (\*). Del Lema de Nakayama, se obtiene  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})} + \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^{k+1}$ .

En particular, cada monomio  $\phi$  de grado  $k$  pertenece a  $\langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$  que está contenido en  $\langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$ . Sin embargo, tales monomios generan a  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^{k+1}$ , de tal forma que  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$ .

( $\Leftarrow$ ) Las derivadas  $\partial f / \partial z_i(z)$  son todas reales cuando  $z$  toma un valor real. Esto significa que cuando se toma la parte real en  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial z_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$  se obtiene  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial z_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$ , y así  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{g}(\mathfrak{n})}$ .  $\blacklozenge$

**Nota:** Este lema muestra que si  $\tilde{f}$  es un germen analítico real, y el germen complejo  $\tilde{f} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{n})$  es algebraicamente aislado, entonces  $\tilde{f}$  es algebraicamente aislado como germen real.

**11.15 Teorema:** Una singularidad analítica compleja es algebraicamente aislada si, y sólo si, es aislada.

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Sea  $\tilde{f} \in \mathfrak{O}(\mathfrak{n})$  una singularidad algebraicamente aislada. Entonces  $\mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial z_i \rangle$ . En particular,  $z_i^k$  es un elemento de  $\langle \partial f / \partial z_i \rangle$ , de forma que  $\Sigma(\tilde{f}) \subseteq \{z : Df(z) = 0\}^{\sim} \subseteq \{z : z_i^k = 0\}^{\sim} = \{0\}^{\sim}$ .

( $\Leftarrow$ ) Para el converso, supóngase que  $\{0\}^{\sim} = (\Sigma(\tilde{f}))^{\sim}$ . Esto implica que  $\{0\}^{\sim} = \{z : Df(z) = 0\}^{\sim}$ , ya que de otra forma, existiría una curva analítica real  $\phi(t)$  con  $\phi(0) = 0$ , contenida en  $\{z : Df(z) = 0\}$  (Lema de Selección de Curvas\*). A lo largo de esta curva,  $Df$  se anularía, por lo que  $f$  también se haría nulo, ya que  $f(0) = 0$ . Pero entonces, la curva estaría en  $\Sigma(f)$ , y el origen no sería una singularidad aislada ( $\rightarrow \leftarrow$ ).

El germen del conjunto de ceros del ideal  $\langle \partial f / \partial z_i \rangle$  consiste, justamente, del origen. El ideal de todos los gérmenes que se anulan en  $\{0\}$  es  $\langle z_i \rangle$ . El Teorema de Posición de Ceros

\* Véase Milnor (1968).

para gérmenes holomórficos\*\* establece, para este caso, que el ideal  $\langle z_i \rangle$  es el radical de  $\langle \partial f / \partial z_i \rangle$  (el radical es el conjunto de aquellos gérmenes  $\tilde{g}$  tales que alguna de sus potencias está en  $\langle \partial f / \partial z_i \rangle$ ). Entonces,  $(z_i)^{k_i} \in \langle \partial f / \partial z_i \rangle$ , y por lo tanto  $\mathfrak{m}_0(\mathfrak{n})^k \subseteq \langle \partial f / \partial z_i \rangle$  para  $k$  suficientemente grande.  $\blacklozenge$

Una deducción particular que se puede hacer a partir de los teoremas precedentes es, que un germen holomórfico con singularidad aislada en el origen siempre puede transformarse en un polinomio, por medio de transformaciones holomórficas de coordenadas. Para gérmenes analíticos, tales transformaciones se pueden elegir de forma que sean analíticas.

## 12. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Sea  $K$  un campo –usualmente  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ – y sea  $K^n$  el espacio vectorial de  $n$ -tuplas de elementos de  $K$ .

**12.1 Definición:** Un subconjunto  $A \subseteq K^n$  se dice que es **algebraico** si existen polinomios  $f_1, \dots, f_r \in K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$  tales que  $A = \{x \in K^n : f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Si  $A \subseteq K^n$  es un subconjunto arbitrario, entonces el ideal de todos los polinomios que se anulan en  $A$  se denotará por  $\mathfrak{n}(A)$ . Así

$$\mathfrak{n}(A) = \{f \in K[x] : f(a) = 0, \forall a \in A\}.$$

Conversamente, un ideal  $\mathfrak{a} \subseteq K[x]$  define un subconjunto  $V(\mathfrak{a}) \subseteq K^n$ . Este es el conjunto de ceros de  $\mathfrak{a}$ :

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in K^n : f(x) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

El subconjunto  $V(\mathfrak{a})$  es algebraico en vista del siguiente resultado:

---

\*\* Véase Gunning y Rossi (1965).

**12.2 Teorema:** (Teorema de la Base de Hilbert). El anillo de polinomios  $K[x]$  es noetheriano, es decir, todo ideal está finitamente generado\* . ♦

Entonces,  $V(\mathfrak{a})$  es el conjunto de ceros de los generadores  $\{f_1, \dots, f_r\}$  de  $\mathfrak{a}$ . Por definición, un conjunto  $A$  es algebraico si  $V(\mathfrak{n}(A)) = A$ . Claramente, para cualquier subconjunto, se cumple  $A \subseteq V(\mathfrak{n}(A))$ . En general,  $V(\mathfrak{n}(A))$  es el menor subconjunto algebraico que contiene a  $A$ .

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos algebraicos,  $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathfrak{n}(B) \subseteq \mathfrak{n}(A)$ . Similarmente, para ideales  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[x]$ ,  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a})$ . Además, para cualquier sucesión decreciente de conjuntos algebraicos  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ , se corresponde una sucesión creciente de ideales  $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \dots$ , con  $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{n}(A_i)$ , que se anulan en dichos conjuntos.

**12.3 Corolario:** Toda sucesión estrictamente decreciente de conjuntos algebraicos es finita.

**Demostración:** Debido a que  $K[x]$  es noetheriano, existe  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que todos los generadores del ideal  $\mathfrak{a} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}_i$  están contenidos en  $\mathfrak{a}_n$ , por lo que  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_n$ . La sucesión de ideales cesa de crecer a partir de  $n$  y por lo tanto la sucesión de conjuntos algebraicos también se detiene después de dicho  $n$ . ♦

La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico, ya que  $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ . Cualquier intersección de conjuntos algebraicos es finita, y el conjunto de los polinomios que definen  $A \cap B$  es la unión los conjuntos de aquellos polinomios que definen a  $A$  y a  $B$ . Así, se puede dotar a  $K^n$  de una topología en la cual los conjuntos algebraicos son los conjuntos cerrados:

**12.4 Definición:** La topología de Zariski es la topología de  $K^n$  en la cual los conjuntos algebraicos son los conjuntos cerrados.

---

\* Para una demostración véase Bhattacharya, Jain y Nagpaul (1986).

**Nota:** La topología de Zariski es más débil que la topología usual de  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ .

Cualquier subconjunto algebraico tiene una topología, inducida a partir de la topología de Zariski para  $K^n$ , y para cualquier subconjunto  $A \subseteq K^n$ , el conjunto  $V(\mathfrak{n}(A))$  es la cerradura, en la topología de Zariski, del conjunto  $A$ . De las definiciones anteriores,  $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$  siempre contiene a  $\mathfrak{a}$ , pero la igualdad no siempre se cumple.

**12.5 Teorema:** (Teorema de Posición de Ceros\*\* de Hilbert). Sea  $K$  un conjunto algebraicamente cerrado. Entonces  $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$  es el radical de  $\mathfrak{a}$ , es decir,  $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a})) = \{f \in K[x] : f^r \in \mathfrak{a} \text{ para algún } r\}$ .

**Demostración:** ( $\supseteq$ ) Esta implicación es trivial. El radical de  $\mathfrak{a}$  está contenido en  $\mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$ , ya que  $f^r \in \mathfrak{a} \Rightarrow f^r|_{V(\mathfrak{a})} = 0 \Rightarrow f|_{V(\mathfrak{a})} = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{n}(V(\mathfrak{a}))$ .

( $\subseteq$ )\*\*\*.  $\blacklozenge$

**12.6 Definición:** Un conjunto algebraico  $A$  se dice que es **irreducible** (o una **variante**), si siempre que  $A_1$  y  $A_2$  sean algebraicos y  $A = A_1 \cup A_2$ , entonces  $A = A_1$  ó  $A = A_2$ .

Así, una variante no puede descomponerse en subconjuntos algebraicos más pequeños. Al tomar los complementos en la topología de Zariski, la definición anterior puede enunciarse de la siguiente forma: un subconjunto algebraico  $A$  es una variante si la intersección de subconjuntos abiertos no vacíos de  $A$  es no vacía.

Un conjunto algebraico arbitrario  $A$ , que es no irreducible, puede descomponerse en conjuntos algebraicos  $A = A_1 \cup A_2$ . Si este proceso se repite en forma iterativa se obtiene una descomposición  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r$  en conjuntos irreducibles (Teorema de la Base). Dicha descomposición es única –salvo el orden de los factores– y es tal que no existen inclusiones  $A_i \subseteq A_j$  para  $i \neq j$ . Si  $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_s$  es una segunda

\*\* Usualmente este resultado se conoce como *Nullstellensatz* de Hilbert.

\*\*\* Véase Lang (1965).

descomposición sin tales inclusiones, entonces para cada  $i$  deben existir  $j$  y  $k$  tales que  $A_i \subseteq B_j \subseteq A_k$ , debido a la irreducibilidad de  $A_i, B_j$ . Como no existen inclusiones,  $i = k$ , y por lo tanto,  $A_i = B_j$ .

**12.7 Definición:** Los conjuntos irreducibles en la descomposición anterior de  $A$  se llaman las **componentes irreducibles** de  $A$ .

**12.8 Teorema:** Un conjunto algebraico  $V$  es irreducible si, y sólo si, el ideal  $\mathfrak{n}(V)$  es primo.

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Si  $V$  es irreducible y  $fg \in \mathfrak{n}(V)$ , entonces  $V \subseteq V(\langle f \rangle) \cup V(\langle g \rangle)$  y luego, sin pérdida de generalidad,  $V \subseteq V(\langle f \rangle)$ . Por lo tanto,  $f \in \mathfrak{n}(V)$ .

( $\Leftarrow$ ) Para el converso, supóngase que  $V$  es reducible,  $V \subseteq A \cup B$ ,  $V \not\subseteq A$ , y  $V \not\subseteq B$ . Elijanse  $f \in \mathfrak{n}(A)$ ,  $f \notin \mathfrak{n}(B)$ , y  $g \in \mathfrak{n}(B)$ ,  $g \notin \mathfrak{n}(A)$ . Entonces,  $fg \in \mathfrak{n}(A \cup B) \subseteq \mathfrak{n}(V)$ , pero  $f \notin \mathfrak{n}(V)$  y  $g \notin \mathfrak{n}(V)$ .  $\blacklozenge$

**12.9 Definición:** Si  $\mathfrak{a} \subseteq K[x]$  es un ideal, el **rango** de  $\mathfrak{a}$ , denotado  $\rho(\mathfrak{a})$ , se define como  $\rho(\mathfrak{a}) = \max_{x \in V(\mathfrak{a})} \text{Rg}_x(f_1, \dots, f_k)$ , donde  $f_1, \dots, f_k$  es cualquier sistema de generadores de  $\mathfrak{a}$ , y  $\text{Rg}_x(f_1, \dots, f_k) = \text{Rg}[\partial f_i / \partial x_j(x)]$ .

El rango  $\rho$  no depende de la elección de los generadores, ya que si  $g_1, \dots, g_m$  es otro sistema de generadores, entonces  $g_i = \sum_j a_{ij} f_j$  para  $a_{ij} \in K[x]$ . Como  $f_i(x) = 0$  para  $x \in V$ , se obtiene  $[\partial g_i / \partial x_r] = [a_{ij}] \cdot [\partial f_j / \partial x_r]$  en  $V$ . Así,  $\text{Rg}_x(g_1, \dots, g_m) \leq \text{Rg}_x(f_1, \dots, f_k)$  para  $x \in V$ , y el resultado correspondiente en la otra dirección conduce a la igualdad.

Ahora, sea  $V \neq \emptyset$  una variante (irreducible). Por simplicidad, tómesese  $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$  a partir de ahora. Como  $\mathfrak{n}(V)$  es un ideal primo,  $K[x]/\mathfrak{n}(V)$  es un dominio entero. Considérese entonces el campo de cocientes  $K(V) = Q(K[x]/\mathfrak{n}(V))$ .

**12.10 Definición:** Considérese el espacio vectorial  $(K(V))^n$  de n-tuplas sobre el campo  $K(V)$ , el cual contiene al punto  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , cuyas coordenadas son las indeterminadas  $x_i$  módulo  $\mathfrak{n}(V)$ . Este punto es llamado el **punto genérico** de  $V$ . Existe una inclusión canónica  $K \subseteq K(V)$ , por lo que se puede sustituir los puntos de  $(K(V))^n$  en cualquier polinomio  $f \in K[x]$ .

Por la definición anterior, se obtiene que un polinomio  $f \in K[x]$  se anula en  $V$  si, y sólo si,  $f$  se anula en el punto genérico, es decir,  $f \in \mathfrak{n}(V) \Leftrightarrow f(x) = 0$  en  $K(V)$ . En particular, el rango de  $\mathfrak{n}(V)$  es igual al rango de algún sistema de generadores  $(f_1, \dots, f_k)$  para  $\mathfrak{n}(V)$  en el punto genérico. Esto se debe a que cualquier menor  $\Phi$  en la matriz  $[\partial f_i / \partial x_j]$  satisface  $\Phi(V) = 0$  si, y sólo si,  $\Phi(x) = 0$  para el punto genérico  $x \in K(V)$ .

**12.11 Definición:** La **dimensión** de una variante  $V$  es el grado de trascendencia de  $K(V)$  sobre  $K$ .

**12.12 Teorema:** La dimensión de una variante  $V \subseteq K^n$  es igual al corrancho de  $\mathfrak{n}(V)$ , esto es,  $\dim(V) = n - \rho(\mathfrak{n}(V))$ .

**Demostración:** Sea  $d = \dim(V) =$  grado de trascendencia de  $K(V)$  sobre  $K$ . Con un número adecuado de coordenadas, los elementos  $x_{d+i} \in K(V)$  son algebraicos sobre el campo  $K(x_1, \dots, x_d)$ . Entonces, existe un polinomio irreducible  $g_i$  (un polinomio de grado mínimo) tal que  $g_i(x_1, \dots, x_d, x_{d+i}) = 0$  en  $K(V)$  o, equivalentemente,  $g_i \in \mathfrak{n}(V)$ . En particular,  $\partial g_i / \partial x_{d+i} \neq 0$  en  $K(V)$ , ya que si  $\partial g_i / \partial x_{d+i} = 0$   $g_i$  sería un polinomio constante en la indeterminada  $x_{d+i}$ , y entonces  $(x_1, \dots, x_d)$  sería algebraicamente independiente ( $\rightarrow \leftarrow$ ). Como  $\partial g_i / \partial x_{d+i} \neq 0$ , entonces  $\partial g_i / \partial x_{d+i} = 0$  es una relación algebraica para  $x_d$  de grado menor que  $g_i(x) = 0$ .

Se sigue que la matriz  $[\partial g_i / \partial x_j(x)]$  tiene rango  $n - d$  en el punto genérico, y  $g_i \in \mathfrak{n}(V)$ , para todo  $i$ . Entonces  $\rho(\mathfrak{n}(V)) \geq n - d$ .

Ahora se demostrará que  $\rho \leq n - d$ . Para el efecto, se utilizarán dos hechos. Primero, las derivaciones  $D_i$  de  $K(x_1, \dots, x_n)$  con la propiedad  $D_i|_K = 0$  están únicamente definidas por la ecuación  $D_i x_j = \delta_{ij}$ . Segundo, cualquier derivación en un campo (en este caso  $K(x_1, \dots, x_d)$ ) puede extenderse en forma única a una extensión algebraica del campo (aquí  $K(V)$ ).

La definición de  $D_i$  sobre las funciones racionales en  $K(x)$  utiliza las reglas usuales del cálculo diferencial. La extensión de  $D$  desde  $K$  hacia  $K(y)$  para un elemento algebraico  $y$ , está determinada por el polinomio mínimo para  $y$ . Si  $p(y) = \sum p_i y^i$  es el polinomio mínimo y  $p^D(y)$  es definido como  $\sum D(p_i) y^i$ , entonces

$$D(p(y)) = 0 = p^D(y) + p'(y)D(y) \text{ ****.}$$

Como  $p$  es minimal,  $p'(y) \neq 0$  y se tiene una definición para  $D(y)$ . Esto define una derivación en  $K(y)$ .

El espacio vectorial de las derivaciones en  $K(y)$  que se anulan en  $K$  tiene, en este caso, dimensión  $d$ . Una base para este espacio es  $\{D_i : i = 1, \dots, d\}$ , donde  $D_i(x_j) = \delta_{ij}$ , para  $j \leq d$ . Si  $\{f_1, \dots, f_k\}$  es un sistema de generadores para  $\mathfrak{n}(V)$ , entonces en el punto genérico  $x$  se tiene que  $f_i(x) = 0$ . Así

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \sum_{\nu=1}^{n-d} \frac{\partial f_i}{\partial x_{d+\nu}} \cdot D_i(x_{d+\nu}) = 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

Además, para los polinomios mínimos  $g_\nu$  de  $x_{d+\nu}$ , se tiene

$$\frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial g_\nu}{\partial x_{d+\nu}} \cdot D_i(x_{d+\nu}) = 0 \quad \nu = 1, \dots, n - d.$$

Al sustituir estas últimas ecuaciones en las que las preceden, se encuentra que en el punto genérico se satisface

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{n-d} \frac{\partial f_i}{\partial x_{d+\nu}} \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial x_i} \cdot \left( \frac{\partial g_\nu}{\partial x_{d+\nu}} \right)^{-1}, \quad \text{para } i = 1, \dots, d.$$

---

\*\*\*\* Véase Lang (1965).

Sin embargo, esto muestra que en la matriz  $Df(x)$ ,  $x \in K(V)^n$ , las primeras  $d$  columnas son combinaciones lineales de las últimas  $n - d$ . Por lo tanto,  $\rho \leq n - d$ .  $\blacklozenge$

**12.13 Teorema:** Sean  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  ideales primos en  $K[x]$  y sea  $d(\mathfrak{a})$  el grado de trascendencia de  $K(\mathfrak{a})$  sobre  $K$ , donde  $K(\mathfrak{a}) = Q(K[x]/\mathfrak{a})$ . Defínase  $d(\mathfrak{b})$  de forma similar. Entonces,  $d(\mathfrak{a}) \geq d(\mathfrak{b})$ , y si  $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ , entonces  $d(\mathfrak{a}) > d(\mathfrak{b})$ .

**Demostración:** Supóngase que  $x_1, \dots, x_d$  son algebraicamente independientes en  $K(\mathfrak{b})$ , con una relación algebraica  $f(x_1, \dots, x_d) = 0$  en  $K(\mathfrak{a})$ . Esto significa que  $f(x_1, \dots, x_d)$  pertenece a  $\mathfrak{a}$  pero no pertenece a  $\mathfrak{b}$ , lo que contradice la hipótesis ( $\rightarrow \leftarrow$ ). Entonces  $d(\mathfrak{a}) \geq d(\mathfrak{b})$ .

Asúmase ahora que  $d(\mathfrak{a}) = d(\mathfrak{b})$ , y que  $\{x_1, \dots, x_d\}$  es una base trascendente para  $K(\mathfrak{b})$ . Suponiendo que  $f \in \mathfrak{b}$ , entonces se debe demostrar que  $f \in \mathfrak{a}$ . Ahora  $f$  representa un elemento en  $K(\mathfrak{a})$  que es algebraico sobre  $K(x_1, \dots, x_d)$ . Entonces, existe un polinomio  $g$  en  $K(x_1, \dots, x_d)[t]$  tal que  $g(x_1, \dots, x_d, f) = 0$  en  $K(\mathfrak{a})$ .

Al multiplicar esto por el producto  $q(x_1, \dots, x_d) \neq 0$  de los denominadores de los coeficientes de  $g$  en  $K(x_1, \dots, x_d)$ , se obtiene

$$h(x, t) = q(x) \cdot g(x, t) \in K[x_1, \dots, x_d, t].$$

Esto satisface  $h(x_1, \dots, x_d, f) = 0$  en  $K(\mathfrak{a})$ , por lo que  $h(x_1, \dots, x_d, f) \in \mathfrak{a}$ . Se puede asumir que  $h(x_1, \dots, x_d, 0) \neq 0$  en  $K(\mathfrak{a})$  si se elige  $g$  en forma minimal con respecto a  $t$ , a menos que  $f = 0$  en  $K(\mathfrak{a})$ , es decir,  $f \in \mathfrak{a}$ .

Considérese ahora la proyección  $\phi: K[x]/\mathfrak{a} \rightarrow K[x]/\mathfrak{b}$ . Nótese que  $\phi(h(x_1, \dots, x_d, f))$  es igual a  $h(x_1, \dots, x_d, 0)$ , ya que  $\phi(f) = 0$ , donde estos polinomios se entienden como módulo  $\mathfrak{a}$  o módulo  $\mathfrak{b}$  según sea el caso. De tal construcción,  $h(x_1, \dots, x_d, f) = 0$  en  $K[x]/\mathfrak{a}$  y  $h(x_1, \dots, x_d, 0) = 0$  en  $K(\mathfrak{b})$ . Se sigue que  $h(x_1, \dots, x_d, 0)$  es el polinomio cero ya que los  $x_1, \dots, x_d$  son algebraicamente independientes, lo cual contradice las suposiciones iniciales ( $\rightarrow \leftarrow$ ), por lo que  $f \in \mathfrak{a}$ , como se requería.  $\blacklozenge$

**12.14 Corolario:** Si  $V \subseteq W$  son variantes, entonces  $\dim(V) \leq \dim(W)$ . Además,  $\dim(V) = \dim(W)$  si y sólo si  $V = W$ .

**Demostración:** Hágase  $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}(W)$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}(V)$ , y aplíquese el teorema anterior. ♦

**12.15 Definición:** Para un conjunto algebraico arbitrario  $A$ , la **dimensión** de  $A$ ,  $\dim(A)$ , se define como la mayor de las dimensiones de sus componentes irreducibles. La **codimensión** de  $A$ ,  $\text{codim}(A)$ , es  $n - \dim(A)$ .

En general,  $A \subseteq B$  implica  $\dim(A) \leq \dim(B)$ . Si  $B$  es irreducible, entonces  $A \subseteq B$  y  $\dim(A) = \dim(B)$  implican  $A = B$ .

**12.16 Definición:** Si  $A$  es un conjunto algebraico, definido por los polinomios  $\{f_1, \dots, f_k\}$ , el **lugar singular** de  $A$  está dado por  $\Sigma A = \{x \in A : \text{Rg}_x(f_1, \dots, f_k) \text{ no es maximal en } A\}$ . El conjunto  $A - \Sigma A$  es llamado el **lugar regular** de  $A$ . Si  $x \in A - \Sigma A$  se dice que  $x$  es un **punto regular** de  $A$ .

Los puntos regulares de  $A$  son aquellos  $x \in A$ , para los cuales  $\text{Rg}_x(f_1, \dots, f_k) = \rho(\mathfrak{n}(A)) = n - \dim(A)$ . Por definición del rango de un ideal, el lugar regular de  $A$  es un conjunto no vacío. Entonces,  $\Sigma A$  está contenido estrictamente en  $A$ . Más aún,  $\Sigma A$  es un conjunto algebraico como subconjunto de  $A$ , debido a la anulación de todos los  $(\rho \times \rho)$ -menores en la matriz  $[\partial f_i / \partial x_j]$ .

**12.17 Teorema:** Si  $V \subseteq K^n$  es una variante, entonces el lugar regular  $V - \Sigma V$  es una variedad analítica (real o compleja de acuerdo al contexto) de dimensión  $\dim(V)$ .

**Demostración:** Sea  $x \in V - \Sigma V$  y sean  $f_1, \dots, f_\rho \in \mathfrak{n}(V)$  polinomios tales que  $\text{Rg}_x(f_1, \dots, f_\rho) = \rho = n - \dim(V)$ . Sea  $W$  el conjunto  $\{x : f_1(x) = \dots = f_\rho(x) = 0\}$ , así que  $V \subseteq W$ . Como  $V$  es irreducible,  $V$  está contenido en una componente irreducible  $W_0$  de  $W$ , y se tiene que  $\rho = \text{Rg}(\mathfrak{n}(V)) \geq \text{Rg}(\mathfrak{n}(W_0)) \geq \rho$ . La primera desigualdad es una consecuencia del Teorema 12.13, y la segunda se sigue del hecho que  $f_1, \dots, f_\rho \in \mathfrak{n}(W_0)$  y

$x \in V \subseteq W_0$ . Entonces,  $\text{Rg}(\mathfrak{n}(V)) = \text{Rg}(\mathfrak{n}(W_0))$ , y por el Teorema 12.13,  $V = W_0$ . Así,  $V$  es una componente irreducible de  $W$ , y se debe demostrar ahora que el germen de  $W$  en  $x$  es irreducible (i. e.,  $W = W_0$  localmente). Esto completa la prueba ya que el germen de  $W$  en  $x$  es la solución de una sistema regular de  $\rho$  ecuaciones polinomiales, y en consecuencia, es una variedad analítica.

Para ver que siempre existe una vecindad de  $x$  en  $W$ , contenida en una componente irreducible, nótese que el germen de  $W$  en  $x$  puede transformarse analíticamente en el germen  $\{x_1 = \dots = x_k = 0\}$  en el origen. Este germen, considerado como germen de un conjunto analítico, es irreducible ya que el ideal de todos los gérmenes analíticos que se anulan en dicho conjunto está generado por  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , y este es un ideal primo. ♦

**Nota:** Todo conjunto algebraicamente reducible es también analíticamente reducible. Nótese también que el resultado correspondiente a 12.8 es válido para conjuntos definidos por ecuaciones analíticas.

Dado el resultado anterior, descompongáse el conjunto algebraico  $A$  en subconjuntos irreducibles,  $A = V_1 \cup \dots \cup V_r$ . Así, el conjunto  $A - (\bigcup_{i \neq j} (V_i \cap V_j) \cup \bigcup_i \Sigma V_i)$  puede descomponerse en la unión de  $r$  variedades analíticas no vacías:

$$V_i - ((V_i \cap \bigcup_{j \neq i} V_j) \cup \Sigma V_i)$$

Los subconjuntos que han sido removidos son algebraicos, por lo que el procedimiento anterior puede iterarse. Usando la definición algebraica, la dimensión de  $(V_i \cap \bigcup_{j \neq i} V_j) \cup \Sigma V_i$  es menor que la de  $V_i$ , de forma que la iteración se detendrá después de  $\dim(A)$  pasos. Dicha construcción descompone al conjunto  $A$  en una unión disjunta de variedades analíticas con dimensiones menores o iguales que  $\dim(A)$  (al menos una de ellas igual a  $\dim(A)$ ).

**12.18 Lema:** La proyección  $\pi : K^{n+1} \rightarrow K^n \ni (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$  es abierta en la topología de Zariski.

**Demostración:** Sea  $U \subseteq K^{n+1}$  un abierto, de manera que  $A = K^{n+1} - U$  es algebraico. Supóngase que  $\mathfrak{n}(A)$  está generado por el conjunto  $\{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $f_i \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ , y por

$$f_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_j a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \cdot x_{n+1}^j, \quad a_{ij} \in K[x_1, \dots, x_n].$$

Se tiene luego que  $(x_1, \dots, x_n) \in V$  si y sólo si  $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$  para todo  $x_{n+1}$ , esto es, si y sólo si,  $a_{ij}(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Así,  $V = \{(x_1, \dots, x_n) : a_{ij}(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall (i, j)\}$ . ♦

**12.19 Teorema:** Sea  $U \subseteq K^{n+1}$  irreducible. Entonces  $\pi^{-1}(V) \subseteq K^{n+1}$  es también irreducible y  $\text{codim}(V) = \text{codim}(\pi^{-1}(V))$ .

**Demostración:** Si  $V = \{a\}$  es un punto, entonces  $\pi^{-1}\{a\}$  es irreducible. Esto se debe a que el ideal  $\langle (x_i - a_i) : i = 1, \dots, n \rangle$ , que se anula en  $\pi^{-1}\{a\}$ , es el núcleo del mapeo

$$K[x_1, \dots, x_{n+1}] \rightarrow K[x_{n+1}] \ni \begin{cases} x_i \mapsto a_i; & 1 \leq i \leq n \\ x_{n+1} \mapsto x_{n+1} \end{cases}.$$

Además,  $K[x_{n+1}]$  es un dominio entero, por lo que el núcleo de este mapeo es primo.

En general, se debe demostrar que si  $U_1, U_2 \subseteq \pi^{-1}(V)$  son abiertos no vacíos, entonces  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ . Pero, si  $U_i$  es abierto y no vacío, lo mismo ocurre para  $\pi(U_i)$ . Como  $V$  es irreducible, debe existir un elemento  $a \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$ . Esto implica que  $\pi^{-1}\{a\} \cap U_i \neq \emptyset$ . Ahora, como  $\pi^{-1}\{a\}$  es irreducible, los conjuntos  $\pi^{-1}\{a\} \cap U_1$  y  $\pi^{-1}\{a\} \cap U_2$  tienen algún punto en común, por lo que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

Nótese que  $\mathfrak{n}(V) \subseteq \mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))$ , de forma que  $\rho(\mathfrak{n}(V)) \leq \rho(\mathfrak{n}(\pi^{-1}(V)))$ . En forma conversas, si  $f_1, \dots, f_k \in \mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))$ , entonces  $f_i(x_1, \dots, x_n, a) \in \mathfrak{n}(V)$  para cualquier constante  $a \in K$ . Más aún,  $\partial f_i / \partial x_{n+1}(x_1, \dots, x_n, a) = 0$  para  $(x_1, \dots, x_n) \in V$ . Si se elige un punto  $(x_1, \dots, x_n, a) \in \pi^{-1}(V)$  entonces

$$\text{Rg}_{(x,a)}(f_1, \dots, f_k) = \text{Rg}_x(f_1(x, a), \dots, f_k(x, a))$$

y  $f_i(x, a) \in K[x_1, \dots, x_n]$ , así que  $\rho(\mathfrak{n}(\pi^{-1}(V))) \leq \rho(\mathfrak{n}(V))$ . ♦

### 13. TEORÍA DE TOUGERON

**13.1 Teorema:**  $\dim(\mathfrak{O}(n)/\langle f_1, \dots, f_p \rangle) < \infty$  si, y sólo si,  $\dim(\hat{\mathfrak{O}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle) \leq k$ , para algún  $k$ .

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Considérense las implicaciones:

$$(I) \quad \dim(\mathfrak{O}(n)/\langle f_1, \dots, f_p \rangle) = k \Rightarrow$$

$$(II) \quad \dim(\mathfrak{O}(n)/(\langle f_1, \dots, f_p \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1})) = \dim(\hat{\mathfrak{O}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle) \leq k \Rightarrow$$

$$\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\mathfrak{O}(n)} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\mathfrak{O}(n)}.$$

( $\Leftarrow$ ) En particular, la primera y la última condición de (II) implican juntas que  $\dim(\mathfrak{O}(n)/\langle f_1, \dots, f_p \rangle) \leq k$ .  $\blacklozenge$

Considérese la siguiente sucesión de espacios euclidianos y proyecciones:

$$\hat{\mathfrak{O}}(n, p) \xrightarrow{\pi^\infty} \dots \xrightarrow{\pi_{k+1}^{k+2}} \hat{\mathfrak{O}}_{k+1}(n, p) \xrightarrow{\pi_k^{k+1}} \hat{\mathfrak{O}}_k(n, p) \xrightarrow{\pi_{k-1}^k} \hat{\mathfrak{O}}_{k-1}(n, p) \rightarrow \dots$$

**13.2 Definición:** Un subconjunto  $A \subseteq \hat{\mathfrak{O}}(n, p)$  se dice que es **proalgebraico** si existen conjuntos algebraicos  $A_k \subseteq \hat{\mathfrak{O}}_k(n, p)$  tales que  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\pi_k^\infty)^{-1}(A_k)$ .

Esta definición no se altera si se obliga a que  $(\pi_k^{k+1})^{-1}(A_{k+1}) \subseteq A_k$ ; en este caso, la codimensión de  $A$  se define como el supremo de las codimensiones de los  $A_k$ . El mapeo  $\pi_k^\infty$  es la proyección canónica

$$\pi_k^\infty : \hat{\mathfrak{O}}(n, p) \rightarrow \hat{\mathfrak{O}}_k(n, p) = \mathfrak{O}(n, p) / \mathfrak{m}(n, p)^{k+1}.$$

Habiendo introducido estas nuevas ideas, ahora se retorna al estudio de los gérmenes no finitos. Defínase  $Y_k$  por

$$Y_k = \{\hat{f} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p) : \dim(\hat{\mathfrak{O}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle) > k\}.$$

El conjunto  $Y_k$  es un subconjunto de  $\hat{\mathcal{E}}_k(n, p)$  y el Teorema 13.1 asegura que  $f$  es no finito si, y sólo si,  $j^k(f) \in Y_k$  para todo  $k$ . Si se denota  $\bigcap_{k=1}^{\infty} (\pi_k^{\infty})^{-1}(Y_k)$  por  $Y$ , entonces la última condición es equivalente a  $j(f) \in Y$ . Nótese que  $Y_{k+1} \subseteq (\pi_k^{k+1})^{-1}(Y_k)$ , ya que si  $f \in (\pi_k^{k+1})^{-1}(Y_k)$  entonces  $\dim(\mathcal{O}(n)/\langle f_1, \dots, f_p \rangle) \leq k$  y, por lo tanto,  $f \notin Y_{k+1}$ .

**13.3 Lema:** Co  $\dim(Y) = \infty$  si, y sólo si, para cada  $k$ -jet  $\hat{f}_k$  existe un  $l$ -jet  $\hat{f}_l$ , para algún  $l > k$ , tal que  $\pi_k^l \hat{f}_l = \hat{f}_k$  y  $\hat{f}_l \notin Y_l$ . (La segunda condición afirma que sobre cada jet, existe uno que es finito).

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Asúmase que el supremo de las codimensiones de los  $Y_k$  es infinito, y que ningún jet finito está sobre  $\hat{f}_k \in \hat{\mathcal{E}}_k(n)$ . Entonces  $(\pi_k^l)^{-1} \hat{f}_k \subseteq Y_l$  para todos los  $l > k$ , y  $Y_l$  tiene a lo sumo la misma codimensión que  $(\pi_k^l)^{-1} \hat{f}_k$ . Dicha codimensión no puede exceder a  $\dim(\hat{\mathcal{E}}_k(n))$ , y esta cota no depende de  $l$ .

( $\Leftarrow$ ) Conversamente, supóngase que sobre cada  $k$ -jet existe un jet finito. Sea  $d_l = \text{Co dim}(Y_l)$ , entonces  $d_k \leq d_{k+1} \leq d_{k+2} \leq \dots$ . La prueba estaría concluida a menos que se tuviese  $d_k = d_{k+1} = d_{k+2} = \dots$ . En este caso, considérese una componente irreducible  $X_k$  ó  $Y_k$  con una dimensión mayor. Se sabe que  $(\pi_k^l)^{-1}(X_k)$  es irreducible para  $l > k$ , y por lo tanto, para todo  $l > k$  se tiene

$$(*) \quad Y_l \cap (\pi_k^l)^{-1}(X_k) = (\pi_k^l)^{-1}(X_k),$$

o bien, el lado derecho de (\*) tiene codimensión mayor (Corolario 12.14).

Denótese por  $b_k$  el número de componentes irreducibles de  $Y_k$  con dimensión mayor. Nótese que  $b_k \geq b_{k+1} \geq b_{k+2} \geq \dots$ , ya que cualquier componente irreducible de  $Y_{k+1}$  está contenida en la inclusión de  $Y_k$  bajo  $(\pi_k^{k+1})^{-1}$ , y por lo tanto en la inclusión de una componente irreducible de  $Y_k$ . Como  $d_k = d_{k+1}$ , una componente irreducible de  $Y_{k+1}$  con la mayor dimensión está contenida, y por lo tanto es igual a,  $(\pi_k^{k+1})^{-1}(X_k)$ , donde  $X_k$  es una componente similar de  $Y_k$ .

Ahora,  $b_k$  es finito, y eventualmente  $b_k = b_{k+1} = b_{k+2} = \dots$ . Esto significa que (\*) es válida siempre. Se sigue entonces que  $(\pi_k^l)^{-1}(X_k) \subseteq Y_l$  para todo  $l$ . De esta forma, si  $\hat{f} \in X_k$ , entonces para todo  $l$ , el  $l$ -jet  $\hat{f}_l \in (\pi_k^l)^{-1}\{\hat{f}\}$  está en  $Y_l$ . ♦

**13.4 Teorema: (Teorema de Tougeron).** Los conjuntos  $Y_k$  son algebraicos. Además,  $Y$  es un conjunto proalgebraico de codimensión infinita cuando  $n \leq p$ .

**Demostración:**  $\hat{f} \in Y_k \Leftrightarrow \dim(\hat{\mathcal{E}}_k(n)/\langle \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p \rangle) > k \Leftrightarrow \dim((\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p) \cdot \hat{\mathcal{E}}_k(n)) < \dim(\hat{\mathcal{E}}_k(n)) - k$ . Sea  $\{\phi_i\}$  el conjunto de todos los monomios de grado menor o igual a  $k$  en  $\mathcal{E}(n)$ , entonces  $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p) \in Y_k$  si y sólo si el mapeo lineal

$$\mathbb{R}^p \otimes \langle \phi_i \rangle_{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_k(n) \ni e_i \otimes \phi_i \mapsto j^k(\hat{f}_i \cdot \phi_i)$$

tiene rango menor que  $\dim(\hat{\mathcal{E}}_k(n)) - k$ . Esta condición está determinada por el carácter nulo de ciertos determinantes que son polinomios en los coeficientes de los  $k$ -jets de los  $f_i$ .

Para la segunda parte, es suficiente mostrar que si  $f$  es una  $p$ -tupla de polinomios de grado  $k$ , entonces existe una  $p$ -tupla,  $h$ , de polinomios homogéneos de grado  $k+1$ , de forma que  $(f+h) \notin Y_l$ , para algún  $l > k$ .

Elíjase  $g = (x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}, 0, \dots, 0)$  y hágase  $h_t = (1-t)f + tg$ . El conjunto  $A = \{t \in \mathbb{R} : \hat{h}_t \in Y_l\} \subseteq \mathbb{R}$  es algebraico ya que  $Y_l$  es algebraico y el mapeo  $t \mapsto (1-t)\hat{f} + t\hat{g}$  envía  $t$  linealmente a los coeficientes de  $h_t$  (los mapeo lineales son polinomiales). Entonces  $A$  es finito, o  $A$  es todo  $\mathbb{R}$ .

Ahora,  $1 \notin A$  para  $l$  suficientemente grande, ya que  $\hat{h}_1 = \hat{g}$  y  $\mathcal{E}(n)/\langle x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1} \rangle$  tiene dimensión finita; y así,  $A$  es un conjunto finito para  $l$  suficientemente grande. Elíjase una constante  $t \notin A$ ,  $t \neq 1$ , entonces  $\hat{h}_t = (1-t)\hat{f} + t\hat{g} \notin Y_l$  para algún  $l$ .

Como las componentes de  $h_t$  y  $h_t/(1-t)$  generan el mismo ideal, se debe tener que

$$\frac{1}{1-t} \cdot \hat{h}_t = \hat{f} + \frac{t}{1-t} \cdot \hat{g} \notin Y_l \text{ para algún } l, \text{ como se requería. } \blacklozenge$$

## 14. EL DESDOBLE UNIVERSAL DE UNA SINGULARIDAD

El estudio de una singularidad  $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$ , es decir, un germen  $\eta: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ,  $D\eta(0)=0$ , requiere de la inmersión de dicho germen en una familia  $r$ -paramétrica de gérmenes de la siguiente forma. Sea  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+r}$  el subespacio donde las últimas  $r$  coordenadas se anulan. Denótese un punto de  $\mathbb{R}^{n+r}$  por  $(x, u) = (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ .

**14.1 Definición:** Sea  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$  una singularidad. Un **desdoble**  $r$ -paramétrico (o **deformación**  $r$ -paramétrica) de  $\eta$  es un germen  $\tilde{f} \in \mathfrak{m}(n+r)$  tal que  $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n} = \eta$ . Este desdoble se denotará por  $(r, \tilde{f})$ .

Si  $f$  es un representante de  $\tilde{f}$  y  $(x_0, u_0)$  es un punto cerca del origen, entonces  $f|_{(\mathbb{R}^n \times \{u_0\}, (x_0, u_0))}$  define un germen cercano a  $\eta$ .

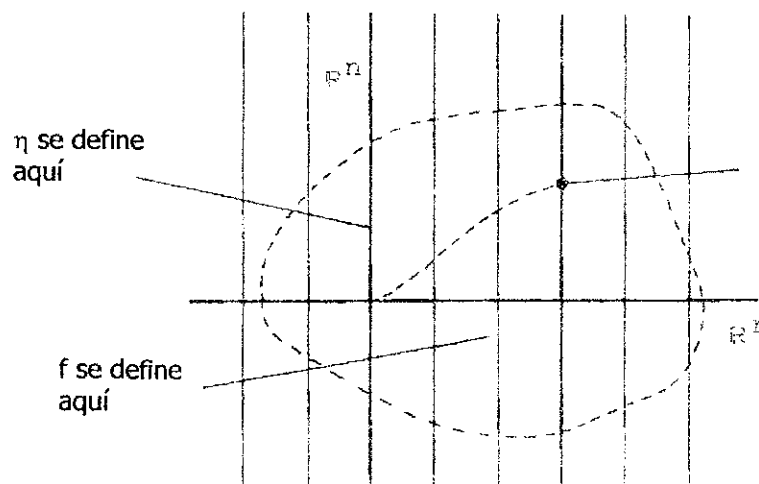


Figura 14.1:  $f$  define un germen cercano a  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$ .

Si se sigue una trayectoria desde el origen hacia el punto  $(x_0, u_0)$ , entonces a lo largo de dicha curva el germen  $\eta$  se deforma en un germen  $f$  justo como el descrito.

Dado que es posible definir mapeos entre ciertos desdobles, se puede construir una categoría de los desdobles de una singularidad. Los objetos de esta categoría son los desdobles. Para motivar la definición de morfismos nótese que  $\mathbb{R}^{n+r}$  está fibrado por la proyección  $\pi_r : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^r$ . Cualquier mapeo entre desdobles debería preservar este fibrado, ya que en estas fibras existen gérmenes “cercaos a  $\eta$ ” como los definidos en el párrafo anterior. Entre la familia de todos los gérmenes sobre fibras  $\pi_r^{-1}(u) = \mathbb{R}^n \times \{u\}$  cerca de  $\pi_r^{-1}(0) = \mathbb{R}^n \times \{0\} = \mathbb{R}^n$ , se encuentran al menos algunas de las singularidades que están implícitas en  $\eta$ , junto con sus desdobles. Esta estructura también se debe preservar.

Se le permite al morfismo transformar arbitrariamente el espacio parámetro  $\mathbb{R}^r$  y las fibras  $\mathbb{R}^r \times \{u_0\}$  para cada  $u_0$ , más que el origen. En el espacio contradominio  $\mathbb{R}$  también se deberían permitir transformaciones arbitrarias, pero esta presentación se restringe al caso más simple en el que sólo se permiten traslaciones.

**14.2 Definición:** Sean  $(r, f)$  y  $(s, g)$  desdobles de  $\eta$ . Un **morfismo**  $(\phi, a) : (r, f) \rightarrow (s, g)$  consiste en:

- (I) un germen  $\phi \in \mathcal{E}(n+r, n+s)$  con  $\phi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} = 1_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ ,
- (II) un germen  $\Phi \in \mathcal{E}(r, s)$  tal que  $\pi_s \phi = \Phi \pi_r$ , y
- (III) un germen  $\alpha \in \mathfrak{M}(r)$  tal que  $f = g \circ \phi + \alpha \circ \pi_r$ .

La condición (II) anterior indica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+r} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{n+s} \\ \pi_r \downarrow & & \downarrow \pi_s \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

Tomadas juntas, las condiciones (I) y (II) expresan que  $\phi$  se representa por un mapeo de tipo fibrado  $\mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^{n+s} : \phi(x, u) \mapsto (\phi_1(x, u), \Phi(u))$ . Dado un representante de  $\alpha$ , se puede asignar una traslación  $a_u$  a cada  $u \in \mathbb{R}^r$  cercano al origen. La traslación  $a_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

está dada por  $a_u(t) = t + \alpha(u)$ . La condición (III) en la definición establece que los gérmenes  $f$  y  $g$  están relacionados por  $f(x, u) = a_u \circ g \circ \phi(x, u)$ .

La composición de morfismos es en la forma usual  $(\phi, \alpha) \circ (\psi, \beta) = (\phi \circ \psi, \beta + \alpha \circ \Psi)$ . En un punto  $u \in \mathbb{R}^r$  del segundo espacio parámetro,  $\beta(u) + \alpha \Psi(u)$  describe la composición de traslaciones, denotada  $\alpha_{\psi(u)} \circ \beta_u$ . Un morfismo  $(\phi, \alpha)$  es invertible (como isomorfismo) siempre que  $\phi$  sea invertible. En particular,  $(1, \alpha) : (r, f) \cong (r, f + \alpha)$ . La función  $\alpha$  permite al germen en la fibra sobre  $u$  ser desplazado por una constante aditiva  $\alpha(u)$ .

La suma de desdobles está definida por  $(r, f) + (s, g) = (r + s, f + g - \eta)$ , donde el último término está dado por  $(f + g - \eta)(x, u, v) = f(x, u) + g(x, v) - \eta(x)$ . El desdoble constante  $(r, \eta)$  se define como  $\eta(x, u) = \eta(x)$ . Así,  $(r, f) + (s, \eta) = (r + s, f)$ . La cláusula (III) en la definición de morfismo muestra que el desdoble  $(r, f)$  está determinado por el morfismo  $(\phi, \alpha)$  y el desdoble  $(s, g)$ .

**14.3 Definición:** Sea  $(s, g)$  un desdoble de  $\eta$ , y supóngase que los gérmenes  $\phi \in \mathcal{G}(n+r, n+s)$  y  $\Psi \in \mathcal{G}(r, s)$  satisfacen (I) y (II) en 14.2. Entonces si  $\alpha \in \mathfrak{m}(r)$ , el desdoble  $(r, f)$  dado por la condición (III) es llamado el **desdoble de  $\eta$  inducido por  $(\phi, \alpha)$  desde  $(s, g)$** .

**14.4 Definición:** Un desdoble  $(r, f)$  de  $\eta$  se dice que es **versal** si cualquier desdoble de  $\eta$  es inducido de  $(r, f)$  por un morfismo apropiado.

**14.5 Nota:** Sea  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$  una singularidad, y sean  $b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{m}(r)$ , entonces

$$f(x, u) = \eta(x) + b_1(x)u_1 + \dots + b_r(x)u_r$$

es un desdoble de  $\eta$ . Este desdoble es la suma de los desdobles 1-paramétricos  $f(x, u_i) = \eta(x) + b_i(x)u_i$ .

**14.6 Definición:** Para una singularidad  $\eta$ , la **codimensión** de  $\eta$ ,  $\text{codim}(\eta)$ , se define por  $\text{codim}(\eta) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{S}(n)})$ .

**14.7 Definición:** Un desdoble  $(r, f)$  con  $r$  minimal se dice que es un desdoble **universal**.

**14.8 Teorema:** (**Teorema Principal sobre Desdobles Universales**). (I) Una singularidad  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$  tiene un desdoble versal si, y sólo si,  $\text{codim}(\eta)$  es finita. (II) Dos desdobles versales  $r$ -paramétricos cualesquiera son isomorfos. (III) Todo desdoble versal es isomorfo a  $(r, f) + \text{constante}$ , donde  $(r, f)$  es universal. (IV) Si  $\{b_1, \dots, b_r\} \subseteq \mathfrak{m}(n)$  es un sistema de representantes para una base de  $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{S}(n)}$ , entonces el desdoble  $f$  de  $\eta$  definido por

$$f(x, u) = \eta(x) + b_1(x)u_1 + \dots + b_r(x)u_r$$

es universal.

**Demostración:** La prueba se proporciona en la sección 16. ♦

**Notación:** De aquí en lo que resta, se denotará  $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{S}(n)}$  simplemente por  $\langle \partial\eta \rangle$ .

**14.9 Ejemplo:** Sea  $n = 1$  y  $\eta(x) = x^k$ . Entonces  $\langle \partial\eta \rangle = \langle x^{k-1} \rangle$ , y  $x, x^2, \dots, x^{k-2}$  es una base para  $\mathfrak{m}/\langle \partial\eta \rangle$ . Además,

$$f(x, u) = x^k + u_{k-2}x^{k-2} + u_{k-3}x^{k-3} + \dots + u_1x$$

es el desdoble universal de  $x^k$ . En forma más general, sea  $\eta(x) = x_1^k \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2$ .

Entonces  $\langle \partial\eta \rangle = \langle x_1^{k-1}, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ , de forma que el desdoble universal es

$$f(x, u) = \eta(x) + u_{k-2}x_1^{k-2} + u_{k-3}x_1^{k-3} + \dots + u_1x_1.$$

**14.10 Nota:** Esto último puede reformularse en forma general: Si  $\eta(x_1, \dots, x_p)$  tiene un desdoble universal  $\eta + f(x_1, \dots, x_p, u)$ , y si  $q(x_{p+1}, \dots, x_n)$  es una forma cuadrática no degenerada en las demás variables, entonces  $\eta + q$  tiene a  $\eta + q + f(x_{p+1}, \dots, x_n, u)$  como

desdoble universal. Esto se debe a que  $q$  puede expresarse en la forma  $\pm x_{p+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$  después de aplicar una transformación lineal apropiada, y así,  $\langle \partial(\eta + q) \rangle = \langle \partial\eta, x_{p+1}, \dots, x_n \rangle$ . Esto significa que  $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial(\eta + q) \rangle$  posee la misma base que  $\mathfrak{m}(k)/\langle \partial\eta \rangle$ .

Entonces, cuando se calcula un desdoble universal, es conveniente que primero se transforme la singularidad, de forma que tantas variables como sea posible sean separadas en una forma cuadrática.

**14.11 Definición:** El **corrango** de una singularidad  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$  es el corrango del hessiano  $[\partial^2 \eta / \partial x_i \partial x_j(0)]$ , es decir, la forma cuadrática dada por el 2-jet.

**14.12 Lema: (Lema de Escisión).** Si  $\eta \in \mathfrak{m}(n)$  es una singularidad cuyo corrango es  $n - r$ , entonces  $\eta$  es correctamente equivalente a un germen de la forma  $q(x_1, \dots, x_r) + \zeta(x_{r+1}, \dots, x_n)$ , donde  $j^2 \zeta = 0$ , y  $q$  es una forma cuadrática no degenerada.

**Demostración:** En cualquier caso, después de una transformación lineal, el 2-jet de  $\eta$  puede ser expresado en la forma  $q(x_1, \dots, x_r) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2$ . Defínase  $\theta = \eta|_{\mathbb{R}^r}$ , de forma que  $\theta$  tenga el 2-jet  $q$ . Luego,  $\theta$  es 2-determinado (Teorema 11.3) y es correctamente equivalente a  $q$ , y entonces puede asumirse que  $\eta|_{\mathbb{R}^r} = q$ .  $q$  tiene el desdoble universal  $(0, q)$ , ya que  $\langle \partial q \rangle = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$ . Así,  $\eta$  es un desdoble versal de  $q$ , ya que contiene al desdoble universal. Como los desdobles versales de dimensión fija son isomorfos (Teorema Principal),  $(n - r, q)$  es isomorfo a  $(n - r, \eta)$ , es decir, existe  $-\zeta \in \mathfrak{m}(n - r)$  y un germen invertible  $\phi$  tales que

$$q(x_1, \dots, x_r) = \eta\phi(x_1, \dots, x_n) - \zeta(x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Esto completa la prueba del lema.  $\blacklozenge$

Recuérdese que la codimensión del germen  $\eta$  es igual a  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle)$ . Los gérmenes de mayor interés en este estudio son aquellos cuyos desdobles universales contienen a lo sumo cuatro parámetros, esto es, aquellos  $\eta$  para los cuales  $\text{codim}(\eta) \leq 4$ .

**14.13 Teorema:** Si  $\text{coRg}(\eta) = r$ , entonces  $\text{codim}(\eta) \geq C_{r+1}^2$ . En particular,  $\text{coRg}(\eta) \geq 3 \Rightarrow \text{codim}(\eta) \geq 6$ .

**Demostración:** Si  $\text{coRg}(\eta) = r$ , entonces, por el Lema de Escisión, existe un conjunto de coordenadas apropiadas para las cuales  $\eta(x) = \zeta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) + q(x_{r+1}, \dots, x_n)$ , con  $j^2\zeta = 0$ .

Considérese el cociente del espacio vectorial  $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$  obtenido al restringir las primeras  $r$  coordenadas y tomando los 2-jets, *i. e.*, considérese  $j^2\mathfrak{m}(r)/j^2\langle \partial\zeta \rangle$ . Este tiene, entonces, dimensión menor que  $\text{codim}(\eta)$ . Ahora,  $\dim(j^2\mathfrak{m}(r)) = r + C_{r+1}^2$ , y  $\dim(j^2\langle \partial\zeta \rangle) \leq r$ . Esto se debe a que los  $\partial\zeta/\partial x_i$  general por sí solos al espacio vectorial real  $j^2\langle \partial\zeta \rangle$ , ya que cada  $\partial\zeta/\partial x_i$  pertenece a  $\mathfrak{m}(r)^2$ . Por lo tanto,  $\text{codim}(\eta) \geq \dim(j^2\mathfrak{m}(r)/j^2\langle \partial\zeta \rangle) \geq C_{r+1}^2$ . ♦

**Nota:** Si se tiene un interés en los desdobles universales con 5 parámetros a lo sumo, se debe restringir la atención a las singularidades  $\eta(x, y)$  en dos variables que tengan codimensión menor o igual a 5 (la forma cuadrática no degenerada  $q$  no afecta el desdoble). Tales singularidades están, en forma automática, finitamente determinadas; más aún, éstas son 6-determinadas. En coordenadas apropiadas estas singularidades pueden escribirse como polinomios en dos variables con grado a lo sumo 6.

En la sección correspondiente a los gérmenes finitamente determinados se utilizó la dimensión de  $\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle$ . En la sección 11 se observó que  $\mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle + \langle \partial\eta \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \partial\eta \rangle_{\mathfrak{S}(n)}$ , y por lo tanto,  $\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle) \leq \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle) + n$ , y la igualdad se cumple cuando los  $\partial\eta/\partial x_i$  módulo  $\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle$  son linealmente independientes. En particular,  $\eta$  está finitamente determinado, *i. e.*,  $\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle) \leq \infty$  si, y sólo si,  $\text{codim}(\eta) \leq \infty$  (corolario 11.11).

**14.14 Lema:** Si la codimensión de  $\eta$  es finita ( $\eta$  está finitamente determinado), entonces  $\dim(\mathfrak{m}(n)/\mathfrak{m}(n)\langle \partial\eta \rangle) = \text{codim}(\eta) + n$ .

**Demostración:** Se debe probar que los  $\partial\eta/\partial x_i$  son linealmente independientes módulo  $\mathfrak{m}(n)/\langle\partial\eta\rangle$ . Si esto no fuese cierto, existirían  $a_i \in \mathbb{R}$  y gérmenes  $u_i \in \mathfrak{m}(n)$  tales

que  $\sum a_i \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = \sum u_i \frac{\partial\eta}{\partial x_i}$ , es decir,  $\sum (a_i - u_i) \frac{\partial\eta}{\partial x_i} = 0$ , con  $a_i - u_i(0) \neq 0$  para algún  $i$ .

Intégrese el campo vectorial  $\sum (a_i - u_i) \partial/\partial x_i$ , y elíjanse coordenadas de forma que las curvas integrales estén dadas por  $x_i = c_i$ , para  $i > 1$  y constantes  $c_i$ . Esto es, que el campo vectorial sea igual a  $\partial/\partial x_1$ . Se sigue por lo tanto que  $\partial\eta/\partial x_1 \equiv 0$ . Esto hace a  $\eta$  independiente de  $x_1$  y así,  $x_1, x_1^2, x_1^3, \dots$  son independientes en  $\mathfrak{m}(n)/\langle\partial\eta\rangle$ . Pero entonces,  $\text{codim}(\eta)$  sería  $\infty$  ( $\rightarrow\leftarrow$ ).  $\blacklozenge$

Como se expuso en el Lema 11.8, el lado izquierdo de la ecuación en el enunciado describe la codimensión de la órbita de  $\eta$  bajo la transformación correcta en el espacio  $\mathfrak{m}(n)$ . En la sección 16 se verá que una familia  $r$ -paramétrica de funciones define un germen  $(\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow \mathfrak{m}(n)$ . Si una familia  $r$ -paramétrica general contiene a  $\eta$ , entonces este germen será transversal a la órbita de  $\eta$ . El lema anterior muestra que la codimensión de  $\eta$  no debería exceder  $r$  si  $\eta$  posee un desdoble genérico con  $r$  parámetros.

## 15. LAS SIETE CATÁSTROFES ELEMENTALES

Si  $\eta$  es una singularidad de codimensión menor o igual que 4, se sabe que  $\text{codim}(\eta) \leq 4$   
 $\Leftrightarrow \dim(\mathfrak{m}(n)/\langle\partial\eta\rangle) \leq 4 \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^5 \subseteq \langle\partial\eta/\partial x_i\rangle \Rightarrow \mathfrak{m}(n)^6 \subseteq \mathfrak{m}(n)\langle\partial\eta\rangle \Rightarrow \eta$  es 6-determinada.

Entonces,  $\eta$  es un polinomio en dos variables, de grado menor o igual a 6, más una forma cuadrática no degenerada en otras variables (Teorema 14.13).

**15.1 Teorema: (La Regla de las Siete de Thom).** Salvo la adición de una forma cuadrática no degenerada en otras variables, o la multiplicación por  $\pm 1$ , una singularidad  $\eta$  con  $1 \leq \text{codim}(\eta) \leq 4$  es correctamente equivalente a alguna de las siguientes:

Cuadro 15.1: Las Siete Catástrofes Elementales <sup>1</sup>			
Codim	$\eta$	Desdoble Universal	Nombre
1	$x^3$	$x^3 + ux$	Doblez
2	$x^4$	$x^4 - ux^2 + vx$	Cúspide (Riemann-Hugoniot)
3	$x^5$	$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$	Cola de Golondrina
3	$x^3 + y^3$	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	Umbílica Hiperbólica
3	$x^3 - xy^2$	$x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$	Umbílica Elíptica
4	$x^6$	$x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$	Mariposa
4	$x^2y + y^4$	$x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$	Umbílica Parabólica

<sup>1/</sup>  $x, y$  son variables.  $t, u, v, w$  son constantes.

**Demostración:** Los desdobles universales tienen estas formas como consecuencia del Teorema Principal sobre Desdobles Universales. Se debe probar entonces que esta lista contiene todos los gérmenes posibles.

(1)  $\text{coRg}(\eta) = 1$ :

Aquí  $\eta$  es correctamente equivalente a  $\pm x^n$  (salvo la adición de una forma cuadrática). Así, si la codimensión es  $\leq 4$ , únicamente  $x^3, x^4, x^5$  y  $x^6$  son posibles (salvo multiplicación por  $\pm 1$ ).

(2)  $\text{coRg}(\eta) = 2$ :

Esto implica que  $\text{codim}(\eta) \geq 3$  (teorema 14.11), por lo que  $\text{codim}(\eta)$  debe ser 3 ó 4. Sea  $P(x, y) = j^3(\eta)$ . Este es un polinomio homogéneo de grado 3 que se factoriza en tres polinomios lineales sobre  $\mathbb{C}$ :

$$P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(a_3x + b_3y).$$

Entonces se tienen cuatro posibilidades, las cuales se discuten por separado:

- (A) Los tres vectores  $(a_i, b_i) \in \mathbb{C}^2$  son linealmente independientes por pares sobre  $\mathbb{C}$ .
- (B) Sin pérdida de generalidad, los primeros dos vectores son linealmente independientes y el tercero es múltiplo del segundo. En este caso,  $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2$ , con  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$  linealmente independientes. Ya que la factorización es única salvo constantes, y como  $P$  es real, los factores, y en consecuencia, los  $(a_i, b_i)$  pueden elegirse reales (considerando la factorización conjugada).
- (C) Todos los  $(a_i, b_i)$  son dependientes, pero no nulos. Entonces  $P(x, y) = (ax + by)^3$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .
- (D)  $P(x, y) = 0$ .

Caso (A):

- (i) Supóngase que todos los  $(a_i, b_i)$  son reales, y elíjase  $(a_1x + b_1y)$ ,  $(a_2x + b_2y)$  como nuevas coordenadas. Denotando la equivalencia correcta por  $\sim$ , se tiene  $P(x, y) \sim xy(ax + by)$ , con  $a, b \neq 0$ . Ahora

$$\begin{aligned} xy(ax + by) &\sim (ab)^{-1}xy(x + y) && \text{usando } (x, y) \mapsto (ax, by) \\ &\sim xy(x + y) && \text{usando } (x, y) \mapsto (ab)^{-1/3}(x, y) \\ &\sim x(x^2 - y^2) && \text{usando } (x, y) \mapsto 2^{-2/3}(x + y, x - y) \\ &= x^3 - xy^2. \end{aligned}$$

Este polinomio es 3-determinado, de manera que  $\eta \sim x^3 - xy^2$  (umbílica elíptica).

- (ii) Supóngase que dos de los  $(a_i, b_i)$  son conjugados complejos. Entonces se tiene el caso  $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)(\overline{a_2x + b_2y})$ . El producto de los dos últimos factores es una forma cuadrática positiva definida en  $x, y$ . Después de un cambio de coordenadas ésta puede escribirse como  $x^2 + y^2$ , y así  $P(x, y) \sim (ax + by)(x^2 + y^2)$ . Aplicando una rotación de coordenadas,  $(ax + by)$  puede transformarse en  $cx$ ,  $c \neq 0$ . Entonces  $P(x, y) \sim cx(x^2 + y^2) \sim x(x^2 + y^2) \sim x^3 + xy^2 \sim x^3 + y^3$ . La última equivalencia se sigue

del hecho que  $(x+y)^3 + (x-y)^3 = 2x^3 + 6xy^2 \sim x^3 + xy^2$ . El polinomio  $x^3 + y^3$  es también 3-determinado. Entonces  $\eta \sim x^3 + y^3$  (umbílica hiperbólica).

Esto completa la prueba para el Caso (A).

Caso (B):  $P(x, y) = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y)^2 \sim x^2y$ . Nótese que  $x^2y$  no es finitamente determinado, ya que  $\partial/\partial x(x^2y) = 2xy$ ,  $\partial/\partial y(x^2y) = x^2$ , y el ideal  $\langle xy, x^2 \rangle$  no contiene potencias de  $y$ . Sin embargo,  $\eta$  es finitamente determinado por lo que este debe tener un jet que no es equivalente a  $x^2y$ . Supóngase que  $k$  es el mayor número para el cual  $j^k \eta \sim x^2y$ . Sin pérdida de generalidad, sean  $j^k \eta = x^2y$  y  $j^{k+1} \eta = x^2y + h(x, y)$ , donde  $h$  es un polinomio homogéneo de grado  $k+1$ ,  $k \geq 3$ . Al transformar  $\eta$  con un difeomorfismo de la forma  $\Phi: (x, y) \rightarrow (x + \phi, y + \psi)$ , con  $\phi, \psi$  polinomios homogéneos de grado  $k-1 \geq 2$ . El jacobiano de  $\Phi$  en el origen es la identidad, por lo que se obtiene

$$j^{k+1} \eta \circ \Phi = x^2y + x^2\psi + 2xy\phi + h(x, y).$$

Con un elección apropiada de  $\phi, \psi$  se pueden eliminar todos los términos en  $h$  que son divisibles por  $xy$  o  $x^2$ . Entonces,  $j^{k+1} \eta \circ \Phi = x^2y + ay^{k+1}$ ,  $a \neq 0$ .

Este último es un jet  $(k+1)$ -determinado y, por lo tanto,  $\eta \sim x^2y + ay^{k+1} \sim x^2y \pm y^{k+1}$ . Si  $k \geq 4$  entonces  $\text{codim}(\eta) \geq 5$ . Si  $k = 3$ , entonces se tiene  $\eta \sim x^2y \pm y^4$ . En particular  $\eta \sim x^2y + y^4$  (umbílica parabólica). Esto completa el Caso (B).

Caso (C):  $P(x, y) = (ax + by)^3 \sim x^3$  así que, sin pérdida de generalidad,  $j^3 \eta = x^3$ . Entonces  $j^4 \eta = x^3 + h$ , donde  $h$  es un polinomio de grado 4. Obsérvese que  $\dim(j^3 \mathfrak{m}(2)) = 9$  y  $\dim(j^3 \langle \partial \eta \rangle) = \dim(j^3 \langle x^2 + h_1, h_2 \rangle) \leq 4$ , con  $\text{gr}(h_1), \text{gr}(h_2) \geq 3$ , por lo que  $\dim(j^3 \mathfrak{m}(2) / \langle \partial \eta \rangle) \geq 5 > 4$ , y este caso no satisface la condición  $\text{codim}(\eta) \leq 4$ .

Caso (D):  $P = 0$  implica que  $\eta \in \mathfrak{m}(2)^4$ . En consecuencia  $\langle \partial \eta \rangle \subseteq \mathfrak{m}(2)^3$  y  $\dim(\mathfrak{m}(2) / \mathfrak{m}(2)^3) = 5$ . Este caso también se excluye, y la prueba del teorema está ahora completa. ♦

**Nota:** Supóngase que se tiene cierto tipo de sistema, el cual está descrito por  $n$  variables, es decir, por un punto  $x \in X = \mathbb{R}^n$ . El sistema está sujeto a un flujo dinámico, que se describe por una función de potencial  $V: X \rightarrow \mathbb{R}$  cuando las condiciones “externas” permanecen fijas. Supóngase que estas condiciones externas varían de acuerdo a un número  $k$  de parámetros. La alteración en dichas condiciones está acompañada por un cambio en la función de potencial. Para cada punto  $u$  de un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ , el **espacio control**, se tiene una función de potencial  $V_u: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces, existe un mapeo diferenciable  $V: X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , que describe una familia de funciones de potencial, parametrizadas por  $U$ . Cuando las condiciones externas están fijas, en un punto fijo  $u \in U$ , el sistema permanecerá en un mínimo de la función de potencial correspondiente  $V_u$ . Usualmente, esto ocurre en un punto singular no degenerado.

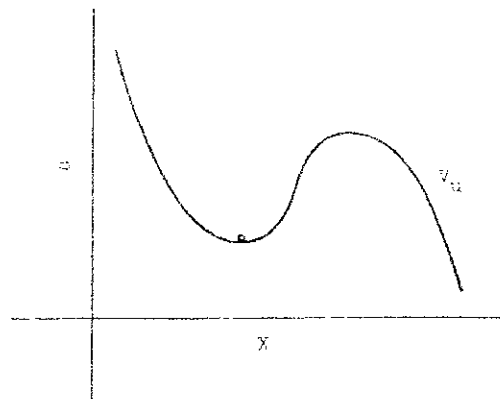


Figura 15.1: Función de potencial  $V_u$ .

Es claro que existen funciones de potencial con puntos singulares degenerados, pero esto es improbable. Las funciones de Morse forman un subconjunto denso y abierto en el conjunto de todas las funciones. Las funciones de Morse se caracterizan por:

- (i) En punto singular  $x_0$  de  $V$ , la forma cuadrática de las segundas derivadas  $(\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j(x_0))$  es no degenerada. En particular, esto implica que  $V$  es 2-determinado en  $x_0$ , y presenta la forma  $V(x) = V(0) + \sum \pm x_i^2$ , con respecto a coordenadas apropiadas. Además, las singularidades son aisladas.
- (ii) Si  $x \neq y$  son puntos singulares, entonces  $V(x) \neq V(y)$ .

Así, en general, una función de potencial  $V_u$  es una función de Morse. Sin embargo, cuando  $u$  varía, es posible preguntarse qué tipo de singularidades pueden ocurrir genéricamente en esta familia de funciones  $V_u$ .

El cambio local en  $V_u$  alrededor de un punto  $u_0 \in U$  y un punto singular  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , corresponde exactamente a un desdoble del germen  $V_{u_0}$  alrededor de  $x_0$ . Los desdobles versales proporcionan una descripción de todos los desdobles posibles. Más aún, si se define un concepto de desdoble estable en una forma intuitiva (aunque no sencilla), se sigue que las siete catástrofes elementales son también los únicos desdobles estables posibles, con codimensión  $\leq 4$  (Wasserman, 1974).

En vista de poder aplicar estos resultados es interesante describir la apariencia geométrica de las siete catástrofes universales con  $\text{codim} \leq 4$ , en forma más precisa. En particular, se debe buscar aquellos puntos en el espacio control —el espacio de parámetros  $U$ — que son más significativos para la catástrofe. Estos son los puntos donde  $V_u$  posee singularidades de orden mayor a dos. En otras palabras, el interés se centra en aquellos puntos donde los máximos o mínimos locales desaparecen. Para la catástrofe cúspide se obtienen un comportamiento como el de la Figura 15.2 y la Figura 15.3.

Si se grafica la  $x$ -coordenada en forma perpendicular al sistema  $(u, v)$ -coordenado, entonces los extremos locales se localizan en la superficie  $\{(x, u, v) : 4x^3 - 2ux + v = 0\}$ . La proyección de tal superficie sobre el  $(u, v)$ -plano muestra la cúspide usual, así como el conjunto de sus valores singulares. Cualquier estado, cuyos  $(u, v)$ -parámetros se mueven desde la rama superior de la cúspide hacia la inferior, saltan drásticamente fuera del mínimo de la superficie superior hacia el de la superficie inferior. Un proceso reverso ocurre al atravesar la rama inferior de la cúspide.

Este ejemplo, junto con todas las catástrofes elementales, se discute con más detalle en la sección 17.

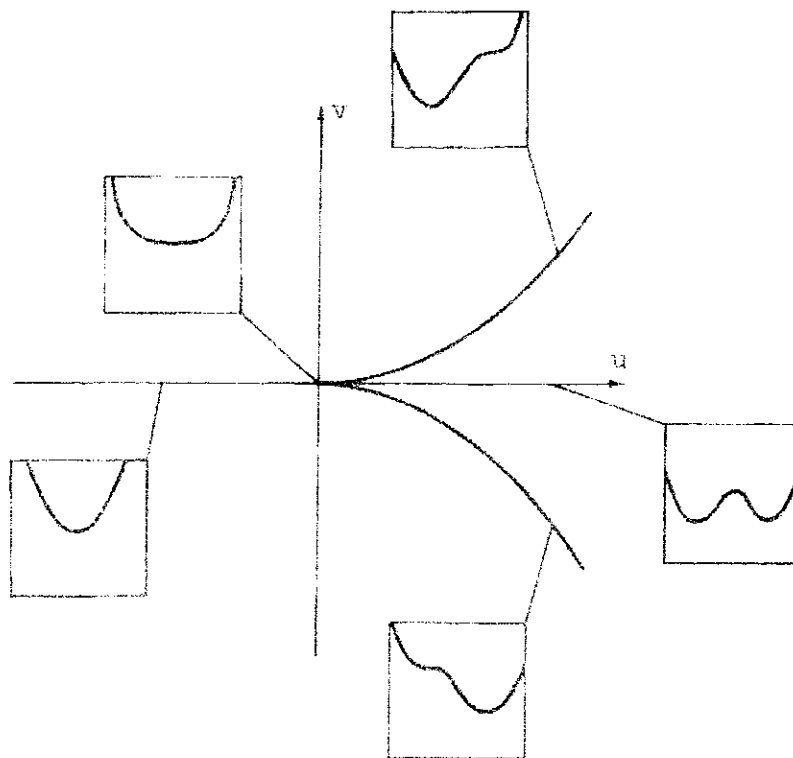


Figura 15.2: Cinco funciones de potencial en el caso de la catástrofe cúspide.

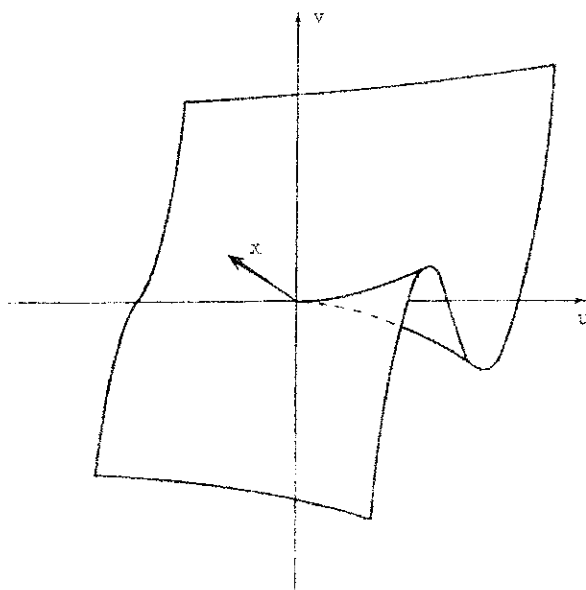


Figura 15.3: El conjunto de puntos de equilibrio en el caso de la catástrofe cúspide.

## 16. PRUEBA DEL TEOREMA PRINCIPAL SOBRE DESDOBLES UNIVERSALES

A lo largo del capítulo,  $\eta$  denotará una singularidad. El desdoble versal de  $\eta$  será caracterizado por una condición de transversalidad que se presenta a continuación.

Sea  $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$  un germen, y  $(r, \tilde{f})$  un desdoble  $r$ -paramétrico de  $\eta$ . Supóngase que  $f$  es un representante de  $\tilde{f}$ . Si  $J_0^k(n, 1)$  es el espacio de los  $k$ -jets con 0-ésimo término nulo, entonces se puede definir un germen

$$j_1^k : (\mathbb{R}^{n+r}, 0) \rightarrow J_0^k(n, 1)$$

de la siguiente forma: Un representante de  $j_1^k$  es el mapeo  $(x, u) \mapsto k$ -jet de  $y \mapsto f(x + y, u) - f(x, u)$ . Entonces,  $j_1^k f$  es una derivada parcial generalizada, la expansión de Taylor en el punto  $(x, u)$  con respecto a las primeras variables.

**16.1 Definición:**  $f$  es llamado  **$k$ -transversal** si  $j_1^k f$  es transversal, en el origen, a la órbita  $\hat{\eta} \in \hat{\mathcal{B}}_k(n)$  de  $\hat{\eta}$  (el  $k$ -jet de  $\eta$ ) bajo la transformación correcta.

**Nota:**  $j_1^k f(0) = j^k \eta(0) = \hat{\eta} \in \hat{\mathcal{B}}_k(n)$ .

**16.2 Lema: (Lema Principal).** Si  $\eta$  está  $k$ -determinado y  $(r, f), (r, g)$  son desdobles  $k$ -transversales, entonces  $(r, f) \cong (r, g)$ .

**16.3 Lema:**  $f$  es  $k$ -transversal si, y sólo si,  $\mathfrak{m}(n) = \langle \partial \eta / \partial x_i \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , donde  $V_f = \langle \partial f / \partial u_i \big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \partial f / \partial u_i(0) \rangle_{\mathbb{R}}$  es el espacio vectorial real generado por los elementos dados.

**Demostración:** Se sabe, a partir del Lema 11.8, que el espacio tangente a  $\hat{\eta} \in \hat{\mathcal{B}}_k$  es  $\mathfrak{m}(n) \langle \partial \eta / \partial x_i \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Se debe calcular entonces la imagen de  $Dj_1^k f(0)$ . El espacio tangente  $T_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$  está generado por  $\partial / \partial x_i, \partial / \partial u_i$ , así que la imagen está construida por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} j_1^k f(0) = j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) \text{ y } j_1^k \frac{\partial}{\partial u_j} f(0).$$

Como  $j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) = j_1^k \frac{\partial}{\partial x_i} \eta(0)$ , el lema es una consecuencia de las igualdades

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(n) \langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1} + \left\langle j_1^k \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} &= \langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}, \text{ y} \\ \left\langle j_1^k \frac{\partial}{\partial u_j} f(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1} &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_j} \Big|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \frac{\partial f}{\partial u_j}(0) \right\rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}. \blacklozenge \end{aligned}$$

**16.4 Corolario:** Si  $b_1, \dots, b_r$  es una base para  $\mathfrak{m}(n)/(\langle \partial \eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1})$ , entonces  $\eta + \sum u_j b_j$  es  $k$ -transversal.

**Demostración:** Se deduce directamente del Lema 16.3.  $\blacklozenge$

**16.5 Corolario:** Si  $(r, f)$  es un desdoble versal de  $\eta$ , entonces  $f$  es  $k$ -transversal para todo  $k$ .

**Demostración:** Elíjase un desdoble  $k$ -transversal  $(s, g)$  (este puede encontrarse aplicando el Corolario 16.4). Entonces, debe existir un morfismo  $(\phi, \alpha) : (s, g) \rightarrow (r, f)$ . Así,  $g = f \circ \phi + \alpha$ , y como  $\alpha$  es independiente de  $x$ , se sigue que  $V_g = V_{f \circ \phi}$ . Ahora,  $V_{f \circ \phi} \subseteq \langle \partial \eta \rangle + V_f$  ya que

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^r \frac{\partial f}{\partial v_\nu} \cdot \frac{\partial \phi_\nu}{\partial u_j},$$

que, restringido a  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  es:

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^r \frac{\partial f}{\partial v_\nu} \cdot \frac{\partial \phi_\nu}{\partial u_j}(0).$$

Por el Lema 16.3,  $f$  es  $k$ -transversal.  $\blacklozenge$

**16.6 Teorema: (Versal =  $k$ -transversal).** Sea  $\eta$   $k$ -determinado. Entonces todo desdoble de  $\eta$  es versal si, y sólo si, es  $k$ -transversal.

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Lema 16.5.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $\eta$   $k$ -determinado,  $(r, f)$   $k$ -transversal, y  $(s, g)$  un desdoble arbitrario. Para la prueba, se debe encontrar un morfismo  $(s, g) \rightarrow (r, f)$ . El mapeo  $(s, g) \rightarrow (s, g) + (r, f)$  es claramente  $k$ -transversal. Por el Lema Principal,  $(s, g) \rightarrow \text{constante} + (r, f)$  es  $k$ -transversal. En particular,  $(s, g) \rightarrow (r, f)$  es  $k$ -transversal.  $\blacklozenge$

**16.7 Corolario:** Si  $(r, f)$  es un desdoble versal de  $\eta$ , entonces  $\text{codim}(\eta) \leq r$ .

**Demostración:**  $(r, f)$  es  $k$ -transversal, por lo que  $\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Así,  $\dim(\mathfrak{m}(n)/(\langle \partial\eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}))$ . Esto se cumple para todo  $k$ , y entonces, por el Lema de Nakayama,  $\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle \partial\eta \rangle + \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , para  $k > r$ . Aplicando nuevamente el Lema de Nakayama, se obtiene  $\mathfrak{m}\mathfrak{m}(n)^k \subseteq \langle \partial\eta \rangle$ , y por lo tanto,  $\dim(\mathfrak{m}(n)/\langle \partial\eta \rangle) \leq r$ .  $\blacklozenge$

**Demostración del Lema Principal (16.2):** Sea  $\eta$  una singularidad  $k$ -determinada, y sean  $(r, f), (r, g)$  desdobles  $k$ -transversales de  $\eta$ . Para la prueba, se debe encontrar un isomorfismo  $(r, f) \cong (r, g)$ . Se sabe que  $(r, f)$  es  $k$ -transversal si

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta / \partial x_i \rangle + V_f + \mathfrak{m}(n)^{k+1},$$

donde  $V_f$  está generado sobre  $\mathbb{R}$  por los términos  $(\partial f / \partial u_i)|_{\mathbb{R}^r \times \{0\}} - \partial f / \partial u_i(0)$ .

Para ello, considérese el problema de encontrar una homotopía  $F_t$  entre desdobles transversales, que inicie en  $F_0 = f$ , y termine en  $F_1 = g$  (más adelante se mostrará que  $F_t$  es localmente constante como mapeo de  $[0, 1]$  en los tipos de isomorfismo entre desdobles).

La solución a este problema se basa en el hecho que los desdobles  $r$ -paramétricos de  $\eta$  son los gérmenes en  $\eta + \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{G}(n+r) \subseteq \mathfrak{m}(n+r)$ , donde  $\mathfrak{m}(r)$  está generado por  $u_1, \dots, u_r$ . Entonces, dichos desdobles pueden escribirse como  $\eta + \delta$ , con  $\delta \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{G}(n+r)$ . Luego, se tiene que  $V_{\eta+\delta} = V_\delta$ . En el espacio  $J_0^k(n)$  de  $k$ -jets con término constante nulo, está contenido el subespacio  $\langle \partial\eta / \partial x_i \rangle / \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ , y son de interés aquellos  $\delta$  para los cuales  $V_\delta$  es transversal a este subespacio.

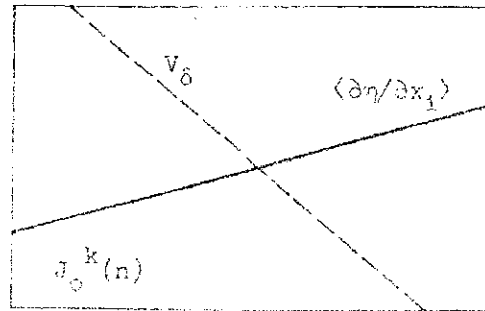


Figura 16.1: Detalle en la prueba del Lema Principal.

Se introduce ahora el mapeo

$$\mathbf{m}(r) \cdot \mathcal{E}(n+r) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^r, J_0^k(n)) \ni \delta \mapsto (e_i \mapsto j^k(\partial f / \partial u_i|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} - \partial f / \partial u_i(0))),$$

donde los  $e_i$  son los elementos de la base estándar de  $\mathbb{R}^r$ . Este mapeo es sobreyectivo, ya que pueden escogerse polinomios adecuados para  $\delta$ .

Considérese el conjunto  $A$  en  $\text{Hom}$  que consiste de aquellos homomorfismos para los cuales la imagen de  $\mathbb{R}^r$  no es transversal a  $\langle \partial \eta / \partial x_i \rangle \mathbf{m}(n)^{k+1}$ . Nótese que  $A$  es un conjunto algebraico.

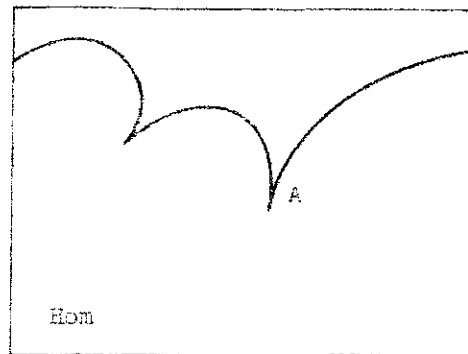


Figura 16.2: Detalle en la prueba del Lema Principal.

Si  $\text{codim}(\eta) = s = \text{codim}(\langle \partial \eta / \partial x_i \rangle)$  en  $J_0^k$ , entonces se tiene que  $s \leq r$  (Corolario 16.7), que ya se demostró para desdobles  $k$ -transversales. Se tienen los siguientes casos:

Caso 1: Sea  $r > s$ . En este caso,  $\text{codim}(A) > 1$  y entonces  $\text{Hom} - A$  es conexo (útese el Lema 9.3).

Caso 2: Si  $r=s$ , entonces  $\text{Hom} - A$  se parte en dos componentes de acuerdo a la orientación de la imagen de  $\mathbf{R}^r$  con respecto a  $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle \mathfrak{m}(n)^{k+1}$ . Sin embargo, si  $\phi \in \mathfrak{B}(r)$  es una transformación que revierte la orientación, entonces  $\eta + \delta$  y  $(\eta + \delta)\phi$  proporcionan puntos que están en componentes distintas de  $\text{Hom} - A$ . Entonces, se puede asumir que  $f$  y  $g$  se aplican a la misma componente de  $\text{Hom} - A$ .

En consecuencia, las imágenes de  $f$  y  $g$  pueden conectarse por una trayectoria poligonal en  $\text{Hom} - A$ . Nótese que una trayectoria lineal en  $\text{Hom} - A$  puede extenderse a una trayectoria lineal en  $\mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r)/\mathfrak{m}(n+r)^{k+1}$  (este se mapea sobreyectivamente sobre  $\text{Hom}$ ). Esta trayectoria induce a una trayectoria lineal en  $\eta + \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r)$ . Así,  $f$  y  $g$  pueden conectarse linealmente en cuanto a sus partes, por desdobles  $k$ -transversales y, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que

$$F_t = (1-t)f + tg \text{ es } k\text{-transversal para } 0 \leq t \leq 1.$$

Se debe mostrar ahora que el tipo de isomorfismo de  $F_t$  es localmente constante: Sin pérdida de generalidad,  $f|_{\{0\} \times \mathbf{R}^r} = g|_{\{0\} \times \mathbf{R}^r} = 0$  y  $\alpha_t(u) = (1-t)f(0, u) + tg(0, u)$ , generan un isomorfismo  $(\text{Id}, \alpha_t)$  entre  $F_t$  y  $(1-t)(f(x, u) - f(0, u)) + t(g(x, u) - f(0, u))$ . Esto significa que es posible encontrar gérmenes  $\Phi \in \mathfrak{S}(n+r+1, n+r)$  en el punto  $(0, 0, t_0)$ , y  $\alpha \in \mathfrak{S}(r+1)$  en el punto  $(0, t_0)$ , tales que  $\Phi(x, u, t) = \Phi_0(x, u)$  tiene la forma  $(\phi_t(x, u), \psi_t(u)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ , y además, si  $\alpha_t(u) = \alpha(u, t)$ , entonces

- (a)  $\Phi_{t_0} = \text{Id} \in \mathfrak{B}(n+r)$ ,  $\alpha_{t_0} = 0$ ,
- (b)  $\Phi_t|_{\mathbf{R}^n \times \{0\}} = \text{Id} \in \mathfrak{B}(n)$ ,  $\alpha_t(0) = 0$ ,
- (c)  $F_t \circ \Phi_t + \alpha_t = F_{t_0}$ .

Estas condiciones establecen que  $(\Phi_t, \alpha_t)$  es un morfismo entre  $(r, F_{t_0})$  y  $(r, F_t)$ , que, en virtud de (a), es un isomorfismo. Debido a esta condición (a), se puede reemplazar (c) por la condición diferencial  $\partial/\partial t(F_t \circ \Phi_t + \alpha_t) = 0$ , la cual puede expandirse a

$$(d) \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\Phi, t) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(x, u, t) + \sum_{j=1}^r \frac{\partial F}{\partial u_j}(\Phi, t) \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial t}(u, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\Phi, t) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(u, t) = 0.$$

Nótese que  $(\Phi, t)$  en realidad debe escribirse como  $(\Phi(x, u, t), t)$ . Ahora, habiendo reemplazado (c) por (d), se deben resolver las condiciones para  $\partial\phi/\partial t, \partial\psi/\partial t, \partial\alpha/\partial t$ . Se está buscando gérmenes

$$\xi_i \in \mathfrak{S}(n+r+1), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\zeta_j \in \mathfrak{S}(r+1), \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

que satisfagan

$$(e) \quad \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \xi_i + \sum_j \frac{\partial F}{\partial u_j} \zeta_j + \zeta_{r+1} = -\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathfrak{S}(n+r+1), \text{ con}$$

$$\xi_i|_{\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \mathbb{R}} = 0 \quad (i. e., \xi_i \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r+1)), \text{ y } \zeta_j|_{\{0\} \times \mathbb{R}} = 0 \quad (i. e., \zeta_j \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(r+1)).$$

Para ver que en efecto es esto lo que se requiere, supóngase que  $\xi_i$  y  $\zeta_j$  han sido hallados.

Entonces si  $\Phi$  y  $\alpha$  son soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$\partial\phi_i/\partial t = \xi_i(\phi, \psi, t),$$

$$\partial\psi_j/\partial t = \zeta_j(\psi, t), \quad j \leq r,$$

$$\partial\alpha/\partial t = \zeta_{r+1}(\psi, t),$$

con condiciones iniciales  $\Phi_{t_0} = \text{Id}, \alpha_{t_0} = 0$ ,  $\Phi$  y  $\alpha$  satisfacen (a), (b) y (d).

Ahora bien, como  $\partial F/\partial t = g - f \in \mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r+1)$ , es suficiente, para la prueba de (e), demostrar que

$$\mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r+1) \subseteq \langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(n+r+1)} + \langle \partial F/\partial u_j, 1 \rangle_{\mathfrak{m}(r) \cdot \mathfrak{S}(r+1)},$$

donde  $\langle b_1, \dots, b_k \rangle_A$  está definido por  $\left\{ \sum_i a_i b_i : a_i \in A \right\}$ , como es usual. Para esta

inclusión es suficiente mostrar que

$$(*) \quad \mathfrak{S}(n+r+1) = \langle \partial F/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{S}(n+r+1)} + \langle \partial F/\partial u_j \rangle_{\mathfrak{S}(r+1)} + \mathfrak{S}(r+1).$$

El hecho que se desea utilizar es que  $F_t$  es un desdoble  $k$ -transversal de  $\eta$ . Por el Lema 16.3, se tiene que

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathfrak{S}(n)} + \langle \partial F_t/\partial u_j|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \rangle_{\mathbb{R}} + \mathfrak{m}(n)^{k+1}.$$

El término del medio aparece simplificado ya que se ha asumido que  $F_t|_{\{0\} \times \mathbb{R}^r} = 0$ . Como  $\eta$  es  $k$ -determinado, es decir,  $\mathfrak{m}(n)^{k+1} \subseteq \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle$ , se puede omitir el último término.

Sustituyendo  $\partial\eta/\partial x_i = \partial F_t/\partial x_i|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ , se obtiene

$$\mathfrak{m}(n) = \langle \partial F_t / \partial x_i |_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \rangle_{\mathfrak{E}(n)} + \langle \partial F_t / \partial u_j |_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Para probar (\*), examínese la ecuación

$$\mathfrak{E}(n+r+1) = \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{E}(n+r+1) + \mathfrak{E}(r+1).$$

Si  $g \in \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{E}(n+r+1)$  entonces se ha probado justamente que existe un elemento en

$$\langle \partial F / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n+r+1)} + \langle \partial F / \partial u_j \rangle_{\mathfrak{E}(r+1)}$$

que coincide con  $g$ , al menos sobre el conjunto  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \{t_0\}$ . Los elementos de  $\mathfrak{E}(n+r+1)$  que se anulan en  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \{t_0\}$  están en  $\mathfrak{m}(r+1) \cdot \mathfrak{E}(n+r+1)$ . Todo esto junto, establece

$$(**) \quad \langle \partial F / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n+r+1)} + \langle \partial F / \partial u_j \rangle_{\mathfrak{E}(r+1)} + \mathfrak{E}(r+1) + \mathfrak{m}(n) \cdot \mathfrak{E}(n+r+1) = \mathfrak{E}(n+r+1).$$

Sea  $C = \mathfrak{E}(n+r+1)$ , considerado como un  $\mathfrak{E}(n+r+1)$ -módulo finitamente generado, sea  $A = \langle \partial F / \partial x_i \rangle_{\mathfrak{E}(n+r+1)}$ , que es un submódulo de  $C$ , y sea  $B = \langle \partial F / \partial u_j \rangle_{\mathfrak{E}(r+1)} + \mathfrak{E}(r+1)$ .

Como  $\mathfrak{E}(r+1)$ -módulos,  $B \subseteq C$ , donde  $C$  es un  $\mathfrak{E}(r+1)$ -módulo vía la inclusión  $\mathfrak{E}(r+1) \subseteq \mathfrak{E}(n+r+1)$ . Nótese que  $B$  es finitamente generado sobre  $\mathfrak{E}(r+1)$ . Se sabe entonces que

$$(**) \quad A + B + \mathfrak{m}(r+1)C = C, \text{ y}$$

$$(*) \quad A + B = C.$$

Para deducir esto a partir de la información dada sobre  $A$ ,  $B$  y  $C$ , antes debe hacerse  $A = 0$  (calculado módulo  $A$ ). Luego, se debe considerar el mapeo  $\mathfrak{E}(r+1) \rightarrow \mathfrak{E}(n+r+1)$  que es inducido por la proyección y que convierte cada  $\mathfrak{E}(r+1)$ -módulo en un  $\mathfrak{E}(n+r+1)$ -módulo. Para el caso de estos módulos, se tiene que

$B$  es finitamente generado sobre  $\mathfrak{E}(r+1)$ ,

$C$  es finitamente generado sobre  $\mathfrak{E}(n+r+1)$ ,

$$B + \mathfrak{m}(r+1)C = C.$$

Los generadores  $b_1, \dots, b_s$  de  $B$  generan también al espacio vectorial  $C / \mathfrak{m}(r+1)C$ . Por el corolario al Teorema de Preparación (Corolario 6.6), éstos también generan a  $C$  como un  $\mathfrak{E}(r+1)$ -módulo. Entonces  $B = C$ . ♦

**Demostración del Teorema Principal de Desdobles Universales (14.8).** Si  $\eta$  es  $k$ -determinado, entonces cualesquiera dos desdobles versales  $r$ -paramétricos de  $\eta$  son  $k$ -transversales. Así, dichos desdobles son isomorfos. Si  $(r, f)$  es un desdoble versal de la menor dimensión posible, entonces  $(r, f)$  y, por lo tanto,  $(r, f) + \text{constante}$  son ambos desdobles  $k$ -transversales. Se deduce entonces que todos los desdobles  $k$ -transversales pueden obtenerse a partir de  $(r, f)$ . El Corolario 16.7 muestra que el menor número posible de parámetros en un desdoble versal es  $\text{codim}(\eta)$ . Si la codimensión es finita (supóngase  $r$ ), entonces  $\eta$  está finitamente determinado (véase 11.4). El Corolario 16.4 proporciona un desdoble  $r$ -paramétrico,  $k$ -transversal, y por lo tanto universal, de  $\eta$  que satisface la forma requerida.  $\blacklozenge$

## 17. GEOMETRÍA DE LAS SIETE CATÁSTROFES ELEMENTALES

La teoría de las catástrofes elementales es de carácter local. Existe una familia de funciones de potencial  $V_u : X \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $X$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , la cual contiene una vecindad del origen, y los parámetros  $u$  están en un subconjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^r$ . Sin pérdida de generalidad, se supondrá que  $X = \mathbb{R}^n$ . Una catástrofe particular determina un germen  $\eta \in \mathfrak{m}(n)^2$  que es desdoblado en un germen  $(r, f)$ , con  $f \in \mathfrak{m}(n+r)$ . Las coordenadas en  $\mathbb{R}^r$  funcionan como parámetros de desdoble de  $\eta$ , y como parámetros externos para el modelo.

**17.1 Definiciones:** Un **régimen local** en  $u \in U$  es cualquier mínimo local de  $f|_{\mathbb{R}^n \times \{u\}}$ .

Un **proceso** para el germen  $\eta$  (o el germen  $f$ ) es una sección  $s$  del fibrado  $\mathbb{R}^n \times U \rightarrow U$ , tal que  $(s(u), u)$  es un régimen local, o es infinito. La sección debe estar definida en un subconjunto denso y abierto. Una **convención** asigna un proceso al desdoble  $f$ .

Un **punto regular** de un proceso es un punto del subconjunto  $U$  donde la sección  $s$  está definida y es localmente continua en una vecindad de dicho punto. Esto es equivalente a decir que sobre una vecindad del punto, existe un homeomorfismo del fibrado, el cual mapea la sección  $s$  en una sección constante. Un punto de  $U$  que no es regular se llama **punto catástrofe**.

La **morfología** de la catástrofe es el conjunto de todos los puntos catástrofe, aunque también se denomina **conjunto catástrofe**. Para estudiar la geometría de una singularidad  $\eta$  que es un desdoble de  $f$  el primer subconjunto importante es

$$\Sigma_f = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U : d_x f(x, u) = 0\},$$

donde  $d_x f(x, u) = D(f|_{\mathbb{R}^n \times \{u\}})$ .

Para cada  $u$  fijo, los puntos de  $\Sigma_f$  que están en  $\mathbb{R}^n \times \{u\}$  proporcionan los mínimos locales (regímenes locales) y los máximos locales de  $f$  en  $u$ . Considérese ahora

$$\Delta_f = \{(x, u) \in \Sigma_f : d_x^2 f(x, u) \text{ es degenerada}\},$$

y su proyección  $D_f = \pi(\Delta_f)$  bajo el mapeo proyección  $\pi : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow U$ . Los puntos de  $D_f$  son candidatos importantes para ser puntos catástrofe.

Respecto a convenciones, existen dos clases básicas a considerar. La **convención de Maxwell** establece que  $s(u)$  está en el punto donde  $f|_{\mathbb{R}^n \times \{u\}}$  tiene su mínimo absoluto. Como este punto puede ser  $-\infty$ , esta convención suele ser utilizada cuando  $f$  tiene únicamente mínimos finitos. Claramente, los puntos catástrofe ocurren cuando  $f|_{\mathbb{R}^n \times \{u\}}$  sostiene un mínimo absoluto en dos lugares.

Si  $U$  describe ahora un subconjunto del espacio-tiempo, la siguiente convención requiere que  $U$  sea foliada por hojas unidimensionales no singulares, cada una determinada por una posición fija en el espacio y parametrizada por el tiempo. Los ejes del modelo local no deben ser necesariamente las coordenadas cartesianas locales del espacio-tiempo.

La **convención de retardo perfecto** establece que la sección  $s$  permanecerá continua tanto como sea posible. Esto significa que a lo largo de las bandas de tiempo,  $s(u)$

encuentra una familia de mínimos, hasta que estos mínimos desaparezcan. Sólo entonces  $s$  saltará a otra familia de mínimos.

Existen conceptos más refinados para otros procesos. Es común encontrar en el trabajo de Zeeman procesos que asignan a cada trayectoria suave  $\tau$  en  $U$  una sección  $s_\tau$  del fibrado  $\mathbb{R}^n \times \tau \rightarrow \tau$  tal que  $(s_\tau(u), u)$  sea o un régimen local o bien infinito. En tal esquema cada trayectoria posee una dirección en la cual el parámetro se incrementa y la convención del retardo perfecto opera a lo largo de cada trayectoria:  $s_\tau$  permanece continuo tanto como es posible sobre la trayectoria.

### 17.2 El Doble:

Desdoble:  $f(x, u) = x^3 + ux$

$$\Sigma_f = \{(x, u) : 3x^2 + u = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(0, 0)\}$$

$$D_f = \{0\}$$

Aquí, se puede trazar la gráfica de  $f$ . Para valores negativos de  $u$ ,  $f$  tiene un mínimo local. Para valores positivos,  $f$  no lo tiene (Figura B.1). La gráfica de  $\Sigma_f$  en el plano  $x, u$  está dada en la Figura B.2.

Para valores positivos de  $u$ , el proceso  $s$  solamente puede estar en el infinito. Para  $u$  negativo,  $s(u) = -\sqrt{-u/3}$ , o bien, está en el infinito. Así, si  $u$  es una coordenada temporal, se puede imaginar un fenómeno, descrito por un parámetro  $x$ , que existe hasta el tiempo  $u = 0$  en un estado dado por  $x = -\sqrt{-u/3}$ . En el tiempo  $u = 0$  el sistema salta hacia otro estado que no es descrito en este modelo local (esto no implica que el fenómeno desaparece conjuntamente).

Una particularidad interesante del modelo es el rápido cambio del parámetro  $x$  justo antes de la desaparición del régimen local.

### 17.3 La Cúspide:

Desdoble:  $f(x, u, v) = x^4 - ux^2 + vx$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v) : 4x^3 - 2ux + v = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v) \in \Sigma_f : 12x^2 - 2u = 0\}$$

$$D_f = \{(u, v) : 27v^2 = 8u^3\} \text{ (Figura B.3).}$$

A cada punto del plano  $u, v$  se corresponde una gráfica de  $f$ , que depende únicamente de  $x$ . Las distintas posibilidades aparecen en la Figura B.4 (al reemplazar  $v$  por  $-v$  se reflejan las gráficas pequeñas en el eje vertical):

En la Figura B.4, el eje  $u$  positivo es el conjunto de Maxwell en donde existe un cambio en el cual el mínimo es el más pequeño. Los mínimos desaparecen entre las líneas de la cúspide. Con la convención de Maxwell el proceso tiene una gráfica como la mostrada en la Figura B.5.

Un posible proceso con la convención de retardo perfecto se muestra en la Figura B.6. El conjunto catástrofe sigue a la cúspide hasta que las bandas temporales sean tangentes a la curva. La Figura B.7 indica dos modelos posibles cuando el proceso se interpreta como una asignación de una sección a cada trayectoria (con retardo perfecto).

### 17.4 La Cola de Golondrina:

Desdoble:  $f(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v, w) : 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v, w) \in \Sigma_f : 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists x \ni 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0, 20x^3 + 6ux + 2v = 0\}$$

En este caso  $D_f$  tiene la forma dada en la Figura B.8. Para valores positivos y negativos de  $u$ , la distribución de los regímenes está dada en la Figura B.9 y la Figura B.10. Cuando  $u$

toma valores negativos, se puede tener una idea del comportamiento de  $\Sigma_f$  en la Figura B.11.

Si el tiempo fluye paralelamente al eje  $w$ , la convención de retardo perfecto produce un conjunto catástrofe como el de la Figura B.12. Se asume que el fenómeno empieza siendo gobernado por el régimen local y no por  $-\infty$ .

### 17.5 La Umbílica Hiperbólica:

Desdoble:  $f(x, y, u, v, w) = x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$

$$\Sigma_f = \{(x, y, u, v, w) : 3x^2 + wy - u = 3y^2 + wx - v = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(x, y, u, v, w) \in \Sigma_f : 36xy - w^2 = 0\}$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists(x, y) \ni u = 3x^2 + wy, v = 3y^2 + wx, w^2 = 36xy\}$$

Si  $w$  está fijo,  $\Sigma_f$  determina un mapeo  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (u, v) = (3x^2 + wy, 3y^2 + wx)$ , y la intersección de  $D_f$  con el plano  $\{w = \text{constante}\}$  es el conjunto de valores singulares de este mapeo. Para  $w = 0$ , es mapeo es un pañuelo doblado (Figura B.13), y para  $w \neq 0$  este se hace más general (Figura B.14).

En el espacio  $u, v, w$   $D_f$  es simétrico: por reflexión en el plano  $u, v$ . La mitad de  $D_f$  se muestra en la Figura B.15.

Para  $w = 0$ , la Figura B.16 indica la gráfica de  $f$  para  $u, v$  ambos positivos, o ambos negativos. Para  $w \neq 0$  las gráficas no varían considerablemente. Un estudio más detallado revelaría que siempre existe, a lo sumo, un número finito de regímenes locales. Esto ocurre en el lado de la superficie (Figura B.15) que contiene al cuadrante  $w = 0, u, v > 0$ .

### 17.6 La Umbílica Eliptica:

Desdoble:  $f(x, y, u, v, w) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux - vy$

$$\Sigma_f = \{(x, y, u, v, w) : x^2 - y^2 + 2wx - u = -2xy + wy - v = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(x, y, u, v, w) \in \Sigma_f : x^2 + 2xy + w^2 - y^2 = 0\}$$

$$D_f = \{(u, v, w) : \exists x, y \ni u = x^2 - y^2 + 2wx, v = -2xy + 2wy, x^2 + y^2 = w^2\}$$

El cambio de coordenadas en  $f$  simplifica la forma de  $D_f$ . Si se consideran las coordenadas  $z = x + iy$ ,  $u + iv$  en  $\mathbb{C}$ , se puede ver que para un  $w$  fijo,  $D_f \cap \{w = \text{constante}\}$  es la imagen de la circunferencia  $|z| = |w|$  bajo el mapeo

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (x^2 - y^2 + 2wx, 2wy + 2xy),$$

es decir,  $z \rightarrow z^2 + 2wz$ . Al hacer  $w = 1$  se obtiene la curva  $2e^{i\theta} + e^{-2i\theta}$  (Figura B.17). Así,  $D_f$  es el conjunto mostrado en la Figura B.18.

Se puede encontrar un único régimen local, el cual ocurre dentro de  $D_f$ , para  $w > 0$ . En el punto  $u = v = w = 0$ , la gráfica de  $f(x, y)$  es una “silla de montar trilobular”. Sobre una recta adecuada, cercana al eje  $w$  y dentro de  $D_f$ , esta silla de montar se desdobra según lo muestra la Figura B.19.

### 17.7 La Mariposa:

$$\text{Desdoble: } f(x, u, v, w, t) = x^6 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$$

$$\Sigma_f = \{(x, u, v, w, t) : 6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\}$$

$$\Delta_f = \{(x, u, v, w, t) \in \Sigma_f : 30x^4 + 12tx^2 + 6ux + 2v = 0\}$$

$$D_f = \{(u, v, w, t) : \exists x \ni D_x f = 0, D_x^2 f = 0\}$$

En este caso se trazará un “diagrama reloj” del conjunto  $D_f$ . Tomando  $(u, t)$  fijo, la intersección de  $D_f$  con el plano  $v, w$  es una curva. Al moverse alrededor de la circunferencia unitaria en el plano  $u, t$ , se obtiene la Figura B.20.

La curva cúspide es la recta cola de golondrina donde la formación de la catástrofe cola de golondrina ocurre. La superficie de  $D_f$  generada a lo largo de esta recta  $L$  se muestra en

la Figura B.21. Para el subdigrama A la distribución de los regímenes locales es como en la Figura B.22, B tiene la distribución que se muestra en el diagrama B.23.

### 17.8 La Umbílica Parabólica:

Desdoble:  $f(x, y, u, v, w, t) = x^2y + y^4 + wx^2 + ty^2 - ux - vy$

$$\Sigma_f = \{(x, y, u, v, w, t) : 2xy + 2wx - u = x^2 + 4y^3 + 2ty - v = 0\}$$

El “diagrama reloj” se muestra en la Figura B.24. Este modelo parece ser original de Chenciner. Un estudio detallado con información y figuras útiles se puede encontrar en el trabajo de Godwin. La explicación de las gráficas en el plano w-t es la siguiente:

Línea de puntos aislados: el lugar donde aparece un punto aislado

Línea de cruce: las partes distintas de  $D_f$  se intersecan

Línea hiperbólica: el centro de una umbílica hiperbólica

Línea elíptica: el centro de una umbílica elíptica

Línea *bec à bec*: el quiebre de las cúspides de dos colas de golondrina

Línea cola de golondrina: el centro de aparición de dos colas de golondrina.

El número de regímenes locales se indica en la Figura B.25.

### 17.9 Desdobles de dimensión mayor:

Anteriormente se ha discutido la geometría de los desdobles con dimensión mínima. Sin embargo  $f(x, u, v, w) = x^4 - ux^2 - vx$  es un desdoble versal y los conjuntos  $\Sigma$ ,  $\Delta$  y  $D$  son justamente suspensiones de los respectivos conjuntos para la catástrofe cúspide (tómense los productos con el eje w). En realidad, cualquier suspensión de un desdoble universal es versal. La cúspide anterior es, de hecho, equivalente a la siguiente:

$$f(x, u, v, w) = x^4 - (u - w^2)x^2 - vx,$$

y  $D_f$  toma la forma que se muestra en el diagrama B.26. Si u representa el tiempo entonces los planos de tiempo constante cortan a  $D_f$  como se indica. Probablemente existe una convención cuyo conjunto catástrofe es  $D_f$ .

### 17.10 Estabilidad temporal:

La teoría elemental que se presenta en esta sección depende de la clasificación de los gérmenes estables (salvo equivalencia). Dicha equivalencia se define en términos de cambios de coordenadas a la derecha o a la izquierda. Algunos detalles se proporcionan en el trabajo de Wassermann.

Una característica significativa es que se permite obtener gérmenes de difeomorfismos arbitrarios de  $U$ . Wassermann ha considerado otro problema cuando los difeomorfismos de  $U$  están restringidos. Uno puede suponer que  $U$  está foliado por subespacios de tiempo constante —existen coordenadas en  $U$  en donde uno de los ejes representa el tiempo—. Además, cualquier cambio de coordenadas en  $U$  mapea las hojas de tiempo constante en hojas de tiempo constante. Aquellos mapeos que son equivalentes en este sentido restrictivo son llamados tiempo-equivalentes o **t-equivalentes**, y los mapeos que son estables se llaman **t-estables**.

Es posible clasificar las funciones t-estables. La lista es mayor en comparación con la de las catástrofes elementales, aunque sigue siendo finita para dimensiones pequeñas. Un ejemplo de un desdoble t-estable para la catástrofe cúspide es:

$$f(x, u, v, w) = x^4 + ux^2 + tx + ux + v^2x.$$

El eje temporal posee coordenada  $t$ . Un desdoble como el de la Figura B.26, con el tiempo descrito por el eje  $u$ , tangente al punto cúspide, no es t-estable. Un diagrama de  $D_f$  se muestra en la Figura B.27. La intersección con los planos de tiempo constante también se proporciona.

### III. APLICACIÓN A LA ANTROPOLOGÍA Y ARQUEOLOGÍA: UN MODELO DIALÉCTICO DEL COLAPSO MAYA

«Que el sol vaya a salir mañana es una hipótesis;  
y esto quiere decir: no sabemos si saldrá » (Ludwig Wittgenstein).

#### 18. LA NATURALEZA DE LOS SISTEMAS CULTURALES

##### A. COMPLEJIDAD

La **complejidad** de una sociedad\* se entiende como la referencia a las cualidades como el tamaño del grupo social, el número de distintivos en sus elementos, la variedad de roles sociales especializados que incorpora, el número de personalidades sociales distintas presentes, o la variedad de mecanismos de organización. El aumento en cualquiera de éstos aspectos se considera como un aumento en la complejidad. Por ejemplo, las sociedades de cazadores y recolectores contienen, a lo sumo, unas pocas personalidades sociales reconocidas, mientras que los estados modernos reconocen alrededor de 10,000 ó 20,000 ocupaciones y roles sociales, y las sociedades industriales pueden contar con más de un millón de diferentes tipos (Tainter, 1988).

Dos conceptos son importantes para entender la naturaleza de la complejidad: **inequidad** y **heterogeneidad**. La inequidad se refiere a la diferenciación vertical, posición, o acceso desigual a los recursos materiales y sociales. La heterogeneidad es un concepto delicado, pues se refiere al número de componentes distintas dentro de un grupo social, y a la manera en que la población se distribuye dentro de estas componentes. Una población que se divide igualmente entre los roles y las ocupaciones de la sociedad está homogéneamente distribuida, de lo contrario, existe incremento en la heterogeneidad y la complejidad. Un grupo social con un alto grado de heterogeneidad posee, por lo tanto, un cierto nivel de complejidad. La inequidad y la heterogeneidad están relacionadas, pero en

---

\* En lo que sigue, los términos de **sociedad**, **grupo social**, **sistema social** y **sistema cultural** se utilizarán como sinónimos.

parte responden a diferentes procesos, por lo que no siempre existe una correlación positiva en la evolución sociopolítica. En las civilizaciones tempranas, por ejemplo, la inequidad tiende a ser inicialmente alta y la heterogeneidad baja. Con el tiempo la inequidad decrece, y la heterogeneidad aumenta al desarrollar niveles de jerarquía (Tainter, 1988).

Las sociedades complejas son sistemas altamente sensibles a descomposición, es decir, están contruidos sobre unidades sociales, cada una de las cuales es potencialmente estable e independiente. Así, un estado puede incluir varias aldeas o grupos étnicos antes autónomos, o un imperio puede incorporar varios estados previamente establecidos. Estos estados, aldeas o grupos étnicos retienen su potencial de estabilidad e independencia, y pueden revertir el proceso, es decir, la evolución del sistema social puede resultar en la descomposición de estos “bloques contruidos” de complejidad.

La complejidad de un sistema social es una característica que se mide en una escala continua (*i. e.*, un intervalo del conjunto de números reales,  $\mathbb{R}$ ). Sin embargo, para facilitar su comparación, los antropólogos que estudian la evolución de las organizaciones humanas han encontrado conveniente desarrollar tipologías del grado de complejidad. La distinción entre estado y no-estado es un ejemplo de tal clasificación. Algunos académicos han dividido a los estados en subcategorías (Steward 1955, Claessen y Skalník 1978). Por otra parte, es usual en antropología subdividir a las sociedades no-estado (sociedades simples) en niveles de complejidad:

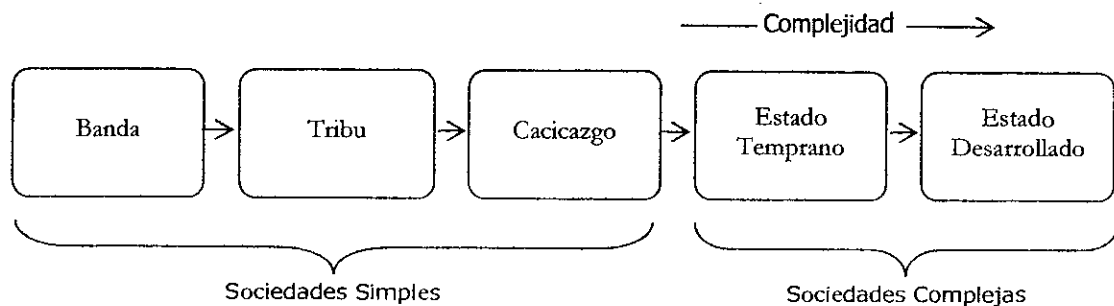


Figura 18.1: Evolución de la complejidad de los sistemas sociales.

En este trabajo, la distinción tipológica de mayor interés es la diferencia que existe entre los estados y el resto de los grupos sociales, pues la interconexión entre los factores que intervienen en las dinámicas del colapso se presentan más claramente en las sociedades con

mayor grado de complejidad. Los atributos que distinguen al estado del resto de sociedades son, en general, las siguientes: organización territorial, diferenciación de clases y ocupaciones, monopolio de la fuerza, ejercicio de la autoridad para movilizar recursos y personal, y jurisdicción legal. Skalník (1978) ha propuesto un modelo del funcionamiento de los estados incipientes, el cual se resume a continuación:

- El estado se define como la organización de las regulaciones de las relaciones sociales, en una sociedad que está dividida por dos clases emergentes: la clase gobernante (clase regidora) y la clase gobernada (clase plebeya o regida).
- La función del estado está directamente ligada al ejercicio del poder: el gobierno investido con el poder controla la división en estratos y clases sociales emergentes, y vela por el mantenimiento de la integridad del estado contra el separatismo interno y las agresiones externas.
- En general, y para propósitos analíticos, se distinguen cinco esferas funcionales: administrativa, económica, ideológica, militar y política. El poder político actúa en cooperación y está interconectado con las relaciones económicas, ideológicas y de parentesco: la forma de las relaciones de producción de bienes en una sociedad es crucial para entender el carácter de la evolución del proceso del colapso.
- Se puede definir un conjunto de principios funcionales, los cuales sirven como entes abstractos que dictan la dinámica de los procesos del estado.

## B. EVOLUCIÓN DE LA COMPLEJIDAD

Los factores que rigen la complejidad también son importantes para entender el colapso, ya que la aparición de instituciones sociales complejas, y sus fallas, están íntimamente ligadas. La dinámica subsecuente al desarrollo de una sociedad puede responder a una variedad de factores nuevos, incluyendo situaciones políticas internas y externas. Se han formulado diversas teorías sobre el origen de los estados y la evolución de los sistemas sociales hacia un grado de complejidad superior (Tainter, 1988). Las líneas de pensamiento suelen ser:

- Administrativa: Las sociedades entran en tensión, o la población se incrementa y los requerimientos integradores parece que pueden resolverse por la aparición de jerarquías administrativas. Entre estos se incluyen argumentos como la movilización de fuerza laboral, surgimiento a partir de mayor número de fuentes de información, diversificación

y especialización vertical y horizontal, centralización como resultado de la diferenciación económica, manejo jerarquizado de la producción y distribución de bienes y servicios, y aumento de complejidad como resultado del manejo de redes de intercambio.

- **Conflicto Interno:** Las teorías de esta escuela postulan que el conflicto de clase es el motor principal detrás de la complejidad. Los escritores marxistas mantienen que el estado recién aparecido solamente protege el privilegio de unos pocos con acceso preferencial a los recursos.
- **Conflicto Externo:** Carneiro (1970) ha argumentado que en el entorno circunscrito (ambiente acotado en el cual las migraciones no son posibles) la tensión produce conflicto, mientras que los sucesos bélicos generan la necesidad de desarrollar instituciones para administrar a los grupos conquistados.
- **Sintética:** Varios procesos interrelacionados generan la complejidad y las instituciones estatales.

El modelo que se presenta en la sección 22 puede clasificarse como mezcla entre la línea de pensamiento administrativa y la del conflicto, pues establece que tanto el incremento en complejidad como la marginalidad que surge de la inequidad social juegan un papel importante en la dinámica de los sistemas sociales.

## 19. EL ESTUDIO DEL COLAPSO DE LOS SISTEMAS CULTURALES

### A. ¿QUÉ ES COLAPSO?

El “colapso” es un término que cubre una variedad de tipos de procesos. Este fenómeno no es propio de grupos sociales organizados a los niveles más complejos, también se aplica a sociedades tribales y aldeas de horticultores. En esta tesis el colapso se entiende como un proceso político. En la mayoría de los casos, tiene consecuencias en áreas como la economía, el arte y la literatura, pero, fundamentalmente, es un fenómeno de la esfera sociopolítica. Para evitar posibles confusiones, en lo que sigue se utilizará la definición de colapso dada por Tainter (1988:4):

**Definición:** Una sociedad se dice que **ha colapsado** cuando despliega una rápida y significativa pérdida de un nivel establecido de complejidad sociopolítica.

El término “nivel establecido” es importante. En estas instancias, para que una sociedad colapse esta debe poseer (o estar en continuo desarrollo de) un nivel de complejidad, mantenido por varias generaciones. Por ejemplo, la caída del Imperio Carolingio no es un caso de colapso, sino más bien un intento fallido de construir un imperio. El colapso, entonces, debe ser rápido –no debería tomar más que algunas décadas– y debe conllevar una pérdida sustancial de estructura sociopolítica.

En general, el colapso se manifiesta en fenómenos tales como:

- Reducción en el grado de estratificación y diferenciación social;
- Reducción de la especialización económica y ocupacional, de individuos, grupos y territorios;
- Reducción del control centralizado, esto es, menor regulación e integración de las diversas actividades económicas y los grupos políticos, por la élite;
- Reducción en el control y la reglamentación;
- Reducción de inversión en los epifenómenos que caracterizan la complejidad, *i. e.*, aquellos elementos que definen el carácter de civilización: arquitectura monumental, registros literarios y artísticos, entre otros;
- Reducción en el flujo de información entre individuos, entre grupos políticos y económicos, y entre el centro y su periferia;
- Reducción de la producción, el intercambio y la redistribución de recursos;
- Reducción en la coordinación y organización de individuos y grupos;
- Reducción del territorio integrado, junto con una unidad política más simple (Tainter 1988:4).

Debe quedar claro que no todas las sociedades que experimentan colapso pueden ser igualmente caracterizadas por cada apartado de esta lista, que es incompleta. Algunas sociedades que satisfacen la definición de colapso no poseen todas estas características. Sin embargo, la lista anterior proporciona una descripción concisa de lo que sucedió en la mayoría de los casos documentados de colapso.

El colapso es un proceso sin restricción de algún tipo de sociedad o nivel de complejidad. La complejidad de las sociedades se mide en una escala continua, y las variaciones de ésta (incremento y reducción) se producen a lo largo de esta escala. Las sociedades simples pueden perder un nivel establecido de complejidad, de igual forma que los grandes imperios. Por ejemplo, una sociedad de horticultores sedentarios puede transformarse en grupos de forrajeros nómadas, y perder los atributos sociopolíticos específicos de las aldeas. Una región organizada bajo el control de un jefe administrativo central puede perder su estructura jerárquica, y revertirse en varias aldeas feudales independientes. Un grupo de forrajeros puede segmentarse a causa del deterioro de su entorno y abandonar su organización social. El fenómeno del colapso debe considerarse con relación al tamaño y a la complejidad de la sociedad en que este ocurre.

#### B. EL CASO DEL COLAPSO MAYA

A lo largo de la historia son muchos los casos de poblaciones que experimentaron decadencia. La civilización Maya no se escapa de este fenómeno. Las grandes ciudades que en un tiempo se extendieron por las Tierras Bajas mayas (territorio que comprendía noreste de Chiapas, sur de Campeche, El Petén, Belice y la porción noroccidental de Honduras), estaban totalmente abandonadas a la llegada de los españoles en el siglo XVI. Con muy pocas excepciones, los centros mayas de las Tierras Bajas meridionales y centrales evidenciaron decadencia al final del Período Clásico. Durante un largo período de tiempo, que corresponde aproximadamente al siglo IX, se refleja en los registros arqueológicos una reducción y luego un cese total de las actividades intelectuales y culturales de gran parte de la zona que había presenciado su auge a lo largo del Período Clásico Temprano y Tardío. A finales del Período Clásico, la construcción de grandes estructuras administrativas, ceremoniales y residenciales había cesado en casi todos los sitios de las Tierras Bajas centrales y del sur. A partir de esa época, no se erigieron nuevos monumentos dinásticos, y las fechas calendáricas en Cuenta Larga ya no se registraron. Desapareció la fabricación y distribución de los tradicionales y elaborados artículos suntuarios y rituales de alfarería, jade, madera, hueso y concha, casi por completo. Esta evidencia material indica que la decadencia de los Mayas de Tierras Bajas durante el Período Clásico afectó, ante todo, a la élite

gobernante, esa misma clase social que había patrocinado y dirigido la mayor parte de las actividades que desaparecieron de todo testimonio arqueológico (Joyce, 2000).

Debe quedar claro que, aunque al final del Período Clásico se produce una irrupción en la continuidad del sistema sociopolítico, la civilización maya continúa y se “transforma” hacia las manifestaciones del Período Postclásico. Además, el colapso de finales del Clásico no afectó de igual forma a todos los sitios de Tierras Bajas (Demarest 2004, Webster 1998).

### C. CLASIFICACIÓN DE TEORÍA SOBRE COLAPSO

Cualquier clasificación de teorías es, en cierto grado, arbitraria, y puede hacerse de muchas formas. Es común en las ciencias sociales encontrar causas internas y causas externas del cambio social, por lo que el estudio del colapso puede ser igualmente dicotomizado. Similarmente, el estudio se ha dividido en teorías conflictivas y teorías integrativas del cambio. Esta investigación pretende presentar un enfoque alternativo a las teorías generalmente aplicadas al análisis del colapso. Sin embargo, a continuación se enumeran los temas tratados con mayor frecuencia en la literatura arqueológica y antropológica. Estos son:

- Cese de los recursos vitales o de los recursos de los cuales la sociedad depende;
- Establecimiento de una nueva base de recursos;
- Ocurrencia de alguna catástrofe insuperable;
- Insuficiencia de respuesta a circunstancias;
- Aparecimiento de otras sociedades complejas;
- Intrusos;
- Conflicto de clases, contradicciones sociales o mala gestión por parte de la élite;
- Disfunción social;
- Factores místicos;
- Concatenación de varios eventos;
- Factores económicos (Tainter 1988:42).

## 20. LA PRODUCTIVIDAD MARGINAL DEL CAMBIO SOCIOCULTURAL

Los sistemas sociales son organizaciones políticas que, como los sistemas vivos, se mantienen mediante un flujo continuo de energía. Desde la unidad familiar más simple, hasta la jerarquía regional más compleja, las instituciones que comprenden una sociedad, y sus interacciones, dependen de energía. Al mismo tiempo, los mecanismos mediante los cuales los grupos humanos se abastecen y distribuyen sus recursos, están condicionados e integrados por instituciones sociopolíticas (esfera administrativa). El flujo de energía y la organización sociopolítica son lados opuestos de una misma ecuación. Ninguno de estos dos conceptos puede existir sin el otro, y no pueden presentar cambios considerables sin afectar de manera sustancial al opuesto.

El flujo de energía como tal no es suficiente para mantener el sistema social. La cantidad de energía de dicho flujo debe ser proporcional al nivel de complejidad del sistema. Las sociedades simples son menos costosas de mantener que las sociedades con un alto grado de complejidad, pues estas últimas requieren mayores niveles de soporte *per capita*. Al incrementar la complejidad de una sociedad, se crean más redes entre los individuos, se establecen más controles jerárquicos para regular estas redes, se procesa mayor cantidad de información, existe una mayor centralización del flujo de información, y se necesitan especialistas directamente involucrados en la producción de recursos. Como resultado, el sistema social envuelve mayor complejidad, y el costo que recae sobre cada individuo se incrementa, de forma que la población destinará parte de su presupuesto de energía al mantenimiento de las instituciones organizacionales.

Derivado de esta situación, es necesario investigar sobre los beneficios que recibe la población de su inversión en complejidad. Usualmente, se ha emprendido esta labor por medio de dos modelos: un **modelo del conflicto**, y un **modelo integrativo**. El modelo del conflicto interpreta la complejidad como una respuesta a la competencia entre clases y a la necesidad de la élite de mantener sus privilegios. El modelo integrativo percibe a la complejidad como una respuesta a las necesidades sociales. En ambas perspectivas, la complejidad es una respuesta a problemas advertidos, y la facilidad en la resolución de tales problemas se debe, en parte, a la relación entre beneficio e inversión.

El principio económico de los **rendimientos decrecientes** es uno de los pocos fenómenos con tal regularidad y predictibilidad, de forma que los economistas lo han categorizado como “ley”. En situaciones de producción, esta ley establece que la inversión en la formación de nuevos ingresos causa un declive en la tasa de productividad. Aunque los procesos que originan la disminución de la evolución sociopolítica no son exactamente análogos a este principio, cierta terminología puede ser útil para entender este fenómeno. Según la Ley de Rendimientos Decrecientes, el retorno de la inversión en complejidad varía en función de la inversión, y esta variación sigue una curva característica. Específicamente, en la mayoría de esferas del sistema, la inversión continua en complejidad sociopolítica alcanza un punto en donde los beneficios de tal inversión empiezan a declinar, inicialmente en forma gradual, y luego con una fuerza acelerada.

Dos conceptos usados por los economistas son de utilidad aquí: **retorno promedio** y **retorno marginal**. El retorno promedio de una actividad económica es simplemente el ingreso por cada unidad de inversión. El retorno marginal es la variación en el ingreso total que resulta al incrementar una unidad de inversión. Similarmente, el **costo promedio** es el gasto por cada unidad de inversión, mientras que el **costo marginal** es la variación en el gasto total que resulta del incremento en una unidad de inversión. La Ley de Rendimientos Decrecientes se refiere a los cambios en los costos y los retornos marginales. Como resultado, los costos y retornos promedio responden a los cambios en los costos y retornos marginales, pues ambos conceptos están sujetos a esta ley, llamada también Ley de Productividad Marginal Decreciente. La relación entre el retorno promedio y el retorno marginal se muestra en la Figura 20.1.

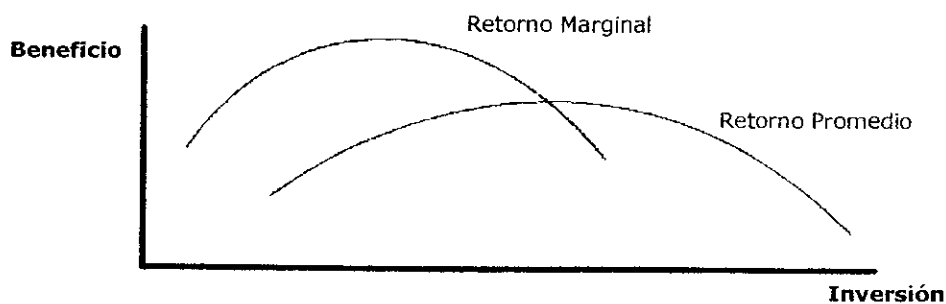


Figura 20.1: Relación entre el retorno marginal y el retorno promedio.

En términos de los procesos sociales, la Ley de Productividad Marginal Decreciente sugiere que el incremento en la evolución sociopolítica eventualmente alcanza un punto de retorno marginal decreciente. Es decir, la razón beneficio/inversión de la complejidad sociopolítica se comporta de acuerdo a la curva de la Figura 20.1.

Después de cierto punto, el incremento en la inversión de la complejidad cesa de generar un incremento respectivo en el retorno, por lo que el retorno marginal declina y el costo marginal aumenta. Como resultado, la complejidad (como estrategia) se vuelve altamente costosa y produce un beneficio marginal decreciente.

Para entender el colapso de los sistemas culturales, son importantes los siguientes puntos:

- Las sociedades humanas son organizaciones que solucionan problemas;
- Los sistemas sociopolíticos requieren energía para su mantenimiento;
- El incremento en la complejidad induce un aumento en los costos *per capita*;
- La inversión en complejidad sociopolítica, como respuesta en la resolución de problemas, eventualmente alcanza un punto de retorno marginal decreciente.

De estos, el último punto es el elemento crucial para la explicación del colapso. Todo sistema (en crecimiento), en particular los sistemas culturales, crecen en su complejidad, y la evolución sociopolítica se puede explicar en términos de ésta. Existen situaciones en las cuales un sector de la sociedad crece a expensas de los otros, pero se mantiene una fuerza cohesiva, y el sistema puede tolerar ciertos límites de tales condiciones.

Sin embargo, el crecimiento de los beneficios en función de los costos sigue, regularmente, la curva de la Figura 20.2, la cual muestra que después de determinado punto en la evolución de la sociedad, la inversión continua para aumentar la complejidad como estrategia en la solución de problemas, presenta un declive en el retorno marginal.

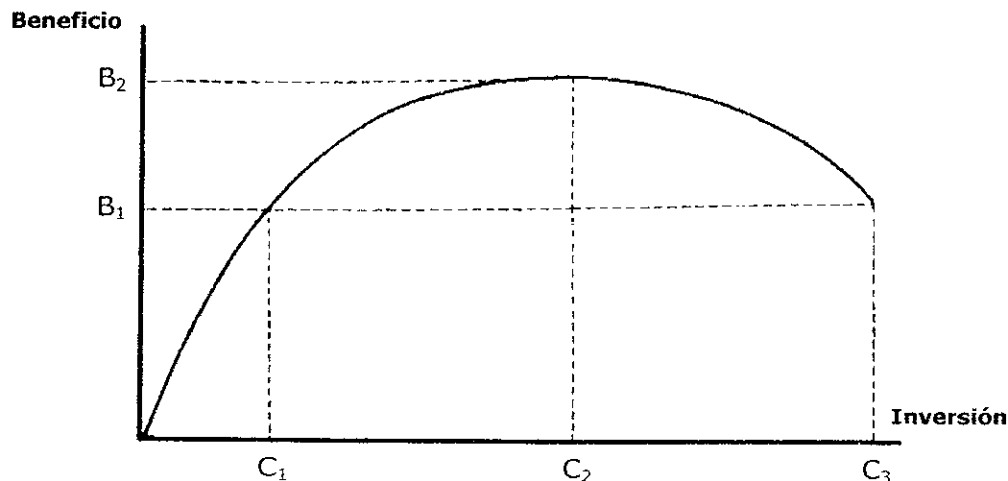


Figura 20.2: El retorno marginal del incremento en la complejidad.

En algún momento, la relación beneficio/inversión del sistema social alcanza el punto  $(C_1, B_1)$ . La productividad marginal se alcanza en el punto  $(C_2, B_2)$ , donde el beneficio marginal experimenta su máximo, debido a la base tecnológica del sistema, y a la disponibilidad y limitación de los recursos. Después de este punto, los beneficios aún responden a la inversión en complejidad, al menos por un tiempo, pero en una tasa marginal decreciente.

En la región de la curva entre los puntos  $(C_1, B_1)$  y  $(C_2, B_2)$  el sistema social experimenta un despliegue de complejidad, pero también, de acuerdo a la escuela del conflicto, se incrementa la adversidad y la insatisfacción. La tensión empieza a percibirse, y el sistema adopta un comportamiento enfatizado en buscar alternativas que brinden una mejor adaptación. Esto puede resultar en la segmentación del sistema social en una variedad de ideologías y estilos de vida, en la que algunos de estos segmentos pueden ser de origen foráneo. La jerarquía puede percibir a algunos de estos sectores como hostiles y subversivos, otros, como altamente beneficiosos. Al mismo tiempo, en una sociedad industrial que experimenta una reducción en los retornos marginales, la inversión en investigación y desarrollo puede incrementarse, como una estrategia para resolver la disminución de la tasa de retorno. Los impuestos se incrementan, y la inflación se hace tangible. Cerca del punto  $(C_2, B_2)$  la inversión e intensificación aún produce beneficios positivos, aunque el colapso de éstas se hace inevitable.

La región entre los puntos  $(C_2, B_2)$  y  $(C_3, B_1)$  es crítica. Es en esta parte de la evolución del sistema social cuando el incremento en la complejidad produce una reducción en los beneficios. Los subsistemas económicos y la base de sustento son impuestos, y los segmentos de la sociedad compiten para obtener los beneficios de la producción, hasta el punto en que la productividad decae. Esta es una etapa de vulnerabilidad extrema, pues la sociedad cuenta con reservas inadecuadas de recursos, y la producción excedente para inversión en investigación y desarrollo ha declinado. El comportamiento de adaptación óptima del sistema se ha detenido, y la clase regidora impone controles rígidos en la población para incrementar su eficiencia productiva.

Con el tiempo, el sistema cultural sigue su trayectoria hasta alcanzar el punto  $(C_3, B_1)$ . Los costos por complejidad han aumentado, pero los beneficios se han reducido hasta llegar a ser equivalentes a los obtenidos en un nivel previo de inversión. Los beneficios derivados de la inversión en  $C_3$  son iguales a los percibidos en  $C_1$ , pero la productividad marginal en este último es preferible. Para el sistema es más conveniente retornar al punto  $(C_1, B_1)$ , pues aunque los beneficios son los mismos que en  $(C_3, B_1)$ , el costo es menor y, por lo tanto, el retorno promedio es más alto. Es en este punto donde el sistema es vulnerable a descomposición. Las rebeliones y guerras de plebeyos se hacen frecuentes y son una muestra de la debilidad del sistema político. Es en los puntos como  $(C_3, B_1)$  en donde el sistema social experimenta una rápida desintegración. Como se verá en la sección 22 de esta investigación, el modelo propuesto describe esta misma peculiaridad.

Muchas alternativas de comportamiento pueden seguir al colapso de un sistema cultural. En particular, la innovación tecnológica puede afectar considerablemente la relación beneficio/inversión, y generar un nuevo período de retorno marginal creciente. Sin embargo, la innovación tecnológica es inusual en la historia humana, y requiere cierto nivel de inversión en investigación y desarrollo. Para las sociedades humanas, la mejor forma de continuar el crecimiento socioeconómico y evitar el declive de la productividad marginal, es obtener un nuevo subsidio de energía que haga –aparentemente– que el retorno marginal empiece a crecer (Tainter, 1988).

Cuando una nueva entrada de recursos se incorpora a un sistema económico, ya sea una innovación técnica o subsidio de energía, esta tiene el potencial de hacer que el sistema alcance cierto retorno marginal, al menos temporalmente. Con el tiempo, sin embargo, se llega a un nuevo estado de declive. Este proceso se muestra en la Figura 20.3. En la curva ilustrada,  $(C_1, B_1)$  representa el punto donde, bajo la acción de la Ley de Retorno Decreciente, se adopta una innovación tecnológica o un nuevo subsidio de energía, y la productividad marginal empieza a crecer. Al final, un nuevo punto de retorno marginal en declive es alcanzado, presagiando una nueva innovación, expansión económica o colapso. De esta forma, la Figura 20.3 muestra el problema recurrente del retorno marginal.

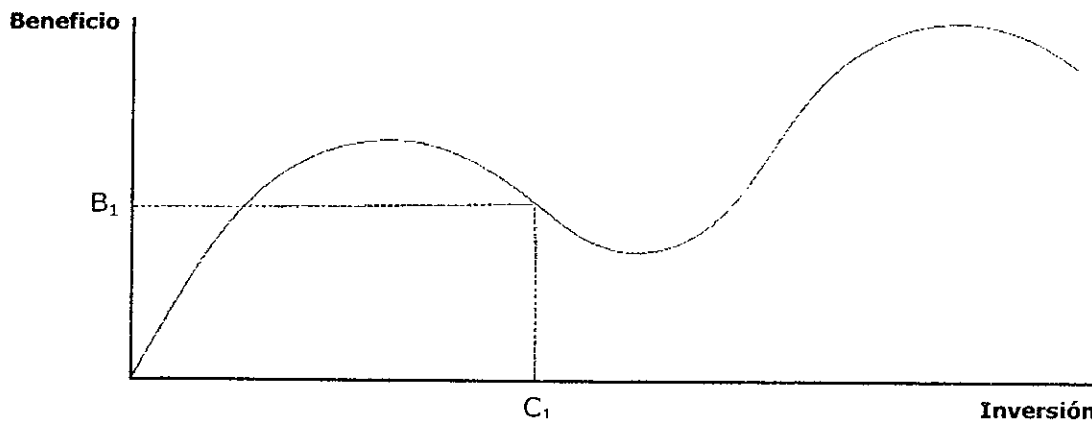


Figura 20.3: La productividad marginal de la complejidad en crecimiento, con innovación tecnológica o adquisición de fuentes de energía.

## 21. LA TEORÍA DE CATÁSTROFES Y LOS SISTEMAS SOCIALES

### A. DISCONTINUIDADES EN EL COMPORTAMIENTO HUMANO

En el registro arqueológico, los cambios abruptos y las discontinuidades han sido tomados tradicionalmente como reflejo de cambios drásticos en los factores causales subyacentes. Algunas veces estos cambios tienen, en efecto, causas discontinuas: no sería útil analizar la erupción del Vesuvio en 79 d. C. en términos de variables endógenas al

sistema cultural de Pompeya. Sin embargo, aún sería admisible atribuir cambios en la trayectoria cultural de Mesoamérica durante el siglo XVI d.C., al menos en parte, a la repentina y decisiva llegada de los conquistadores.

Desde hace algunos años, los arqueólogos han argumentado un acercamiento procesual, más que un acercamiento histórico-cultural, del cambio cultural (Flannery 1968; Binford 1965; Clark 1966; Renfrew 1972), han esbozado ideas sobre explicaciones en términos de invasiones y han buscado un análisis en términos de los procesos internos del sistema cultural. Esta nueva perspectiva ha sido aceptada para cambios significativos y graduales, sin discontinuidad, a través del tiempo. La trayectoria cultural puede analizarse en términos de cambios sistémicos continuos, sin necesidad de apelar a factores externos o explicaciones difusionistas. Para la escuela arqueológica procesualista, los cambios repentinos y los cambios discontinuos siguen siendo un problema. Si se concibe el comportamiento en cuestión descrito por variables que operan en un “espacio de comportamiento” o un “espacio de estado”, se puede imaginar que el valor de estas variables de estado es gobernado por factores causales que pueden describirse mediante variables que operan en un espacio control o en un espacio parámetro. Parece superficialmente justo y lógico que las discontinuidades repentinas surgen de los cambios súbitos o discontinuos en las variables control.

Es importante aclarar que la teoría de catástrofes no se refiere a los efectos de cataclismos naturales sobre poblaciones y culturas humanas. Ésta puntualiza la descripción y explicación, en términos de cambios suaves en las variables control, de los cambios abruptos o discontinuos. Pero, para los antropólogos, su relevancia consiste en la explicación de aquellas divergencias y cambios drásticos de las formaciones sociales que no tienen causas repentinas, pero que originan, de forma no tan obvia, una conjunción de factores que son cambios drásticos o discontinuos.

## B. LA TEORÍA DE CATÁSTROFES Y LOS SISTEMAS DINÁMICOS

Supóngase que se tiene un sistema cuyos estados de equilibrio se obtienen al maximizar o minimizar una función de costo, que incluye un número de factores o variables. Muchos

sistemas humanos son de este tipo. Los individuos de un sistema buscan, en general, maximizar los retornos y beneficios, mientras minimizan el esfuerzo y los costos. Se ha demostrado que, cuando no más de cuatro variables o factores de control están involucrados, todos los tipos de discontinuidad (cambios drásticos en el estado o el comportamiento) del sistema pueden clasificarse en forma simple:

Cuadro 21.1: Interpretación de las Siete Catástrofes Elementales <sup>1</sup>						
	Nombre	dim C	dim X	Potencial	Interpretación Espacial	Interpretación Temporal
Cuspoides	Doblez	1	1	$\frac{1}{3}x^3 + ax$	Frontera/fin	Inicio/fin
	Cúspide	2	1	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$	Falla	Separación/unión Generar/cambio
	Cola de Golondrina	3	1	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$	Partición	Cisma/rotura
	Mariposa	4	1	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx$	Cavidad	Llenar/vaciar
Umbílicas	Umbílica Hiperbólica	3	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$	Esquina	Colapso
	Umbílica Elíptica	3	2	$x^3 - 3xy^2 + ax + by + c(x^2 + y^2)$	Agujero	Perforación
	Umbílica Parabólica	4	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$	Jet	Perforación

<sup>1/</sup> Las C-coordenadas son a, b, c, d. Las X-coordenadas son x, y.

Cuando sólo hay dos variables control, el comportamiento más complicado posible del sistema está explicado por la llamada “catástrofe cúspide” (Figura 21.1). El aporte de esta descripción es el de analizar cómo los cambios drásticos en el comportamiento local del sistema pueden producirse por cambios graduales y continuos en el comportamiento de las variables control. Las discontinuidades dentro del sistema, así como los cambios abruptos, surgen, sin cambio repentino alguno, en el comportamiento de las fuerzas que actúan sobre el sistema. En otras palabras, las discontinuidades se originan del comportamiento continuo (i. e., continuidad  $\Rightarrow$  discontinuidad).

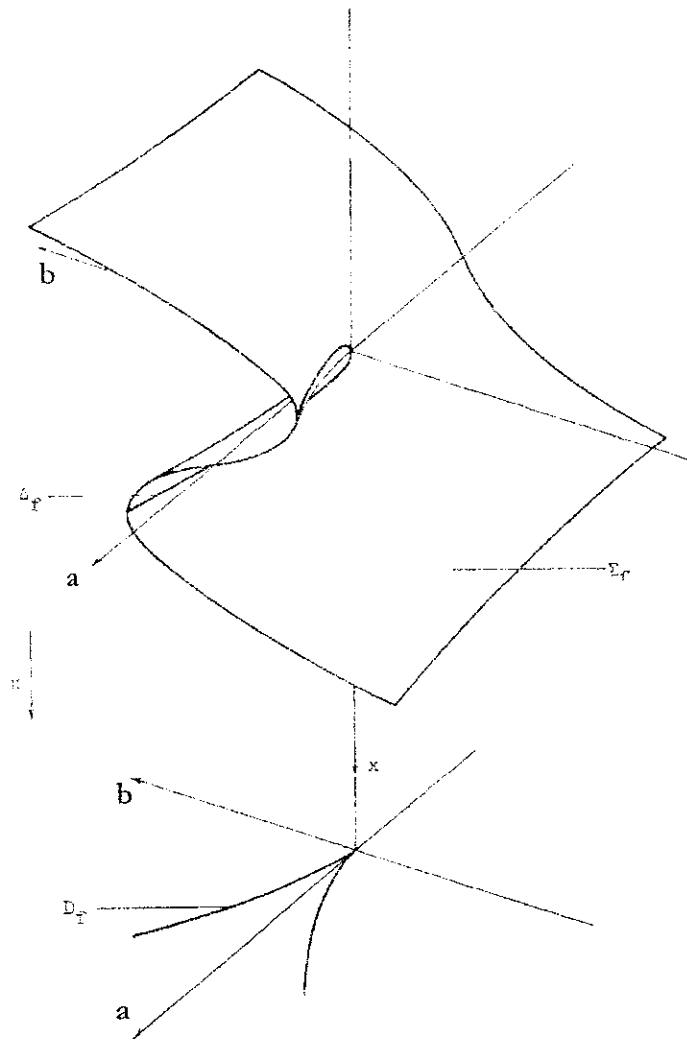


Figura 21.1: La catástrofe cúspide.

La superficie catastrófica representa todos los estados de equilibrio factibles del sistema. El eje vertical mide el comportamiento ( $x$ ) del sistema, mientras los cambios en las variables control ( $a$  y  $b$ ) están representados en el plano horizontal. Un estado de equilibrio del sistema se representa por un punto sobre la superficie catástrofe, y los cambios de estado por movimientos de estos puntos. Un cambio continuo de estados de equilibrio describe una trayectoria sobre la superficie. Por ejemplo, cuando  $b$  toma valores grandes y  $a$  toma valores pequeños, el estado del sistema se representa por un punto en la parte superior de la superficie, pero, al incrementar  $a$ , se alcanza el doblez y el punto cae súbitamente a la parte inferior de la superficie. Esto es la “catástrofe”. Nótese que durante este salto, las variables  $a$  y  $b$  no han cambiado significativamente, pero la variable  $x$ , que representa el estado del sistema, ha sufrido un cambio drástico.

Se ha dicho que el sistema bajo estudio está descrito por los valores de un número de variables (digamos  $m$  variables) en el espacio de estado. Sea  $X$  un espacio de estado, descrito por  $m$  variables reales. Un estado particular del sistema se representa por un punto de este espacio de estado particular  $X = \mathbb{R}^m$ . El comportamiento, *i. e.*, la dinámica del sistema, es gobernado por los valores de cierto número de variables control (digamos  $k$  variables). Las variables control se representan por puntos, cada uno de los cuales es una  $k$ -tupla de números reales. Un punto  $c = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  en el espacio control  $C = \mathbb{R}^k$  es llamado un punto control, y representa un conjunto particular de valores de las variables control.

La noción de modelo, de cualquier explicación, implica que existe una relación inherente entre las variables de estado y las variables de control. En realidad, no es necesario conocer en forma precisa cuál es esta relación. Se trabaja bajo el supuesto que la dinámica y evolución del sistema está regida por una familia de mapeos  $f_c$ ,  $c \in C$ , cada uno definido en el espacio de estado  $X$  y con valores reales, es decir,  $f_c : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Para cada punto  $c \in C$ , se tiene un mapeo  $f_c$ , que se puede interpretar como una función de potencial generalizada. Una función de costos es un ejemplo de tales mapeos. Los estados estables del sistema en consideración resultan ser los máximos o mínimos de este mapeo. La hipótesis principal es que todo sistema minimiza localmente a  $f_c$  (para una función de potencial) o maximiza localmente a  $f_c$  (para una función de utilidad que represente el beneficio, cuando las decisiones humanas están involucradas). Otra hipótesis importante es la de la estabilidad estructural. Para  $k \leq 5$ , todas las funciones de potencial son cercanamente estables y tienen singularidades equivalentes a las catástrofes elementales (Teorema 14.8).

Por ejemplo, un sistema que puede existir en alguno de dos estados estables puede representarse por una función de potencial que posee dos mínimos, uno por cada estado estable. Los cambios en el sistema producidos por cambios en el entorno pueden describirse en términos del efecto resultante en la naturaleza de la función de potencial. (Figura 21.2). El mapeo  $f_c$  cambia al mover el punto  $c \in C$ . Para cambios pequeños de  $c$ , la naturaleza cualitativa de  $f_c$  puede permanecer invariante. Sin embargo, la primera observación de la Teoría de Catástrofes es que eso no siempre sucede. Un pequeño cambio en  $c$  puede alterar

la naturaleza cualitativa de  $f_c$ , *i. e.*, destruir un mínimo, y causar un cambio considerable en la dinámica del sistema.

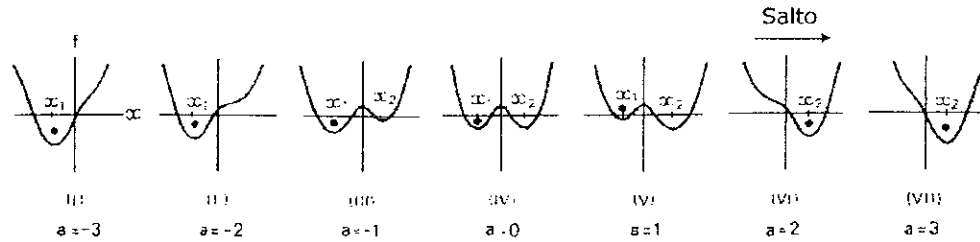


Figura 21.2: La regla del retardo. La función  $f$  es interpretada como una función de energía cuyos mínimos son los estados de equilibrio para  $x$ . Aquí  $x$  sufre un cambio drástico cuando el mínimo local desaparece.

Tales bifurcaciones o catástrofes no pueden ocurrir en aquellos puntos  $c_0 \in C$ , con la propiedad que para cada punto  $c$  en alguna vecindad de  $c_0$ , el mapeo  $f_c$  está suficientemente cerca de  $f_{c_0}$ . Tales puntos son los llamados puntos regulares (Definición 12.16). Los puntos que no son regulares son llamados puntos catástrofe, y el conjunto de dichos puntos es el conjunto catástrofe.

En términos matemáticos, el problema se trata como sigue: se desea estudiar los máximos y mínimos de los cambios en  $f_c$ , así que se construye el conjunto

$$\Sigma_{f_c} = \{(x, c) \in X \times C : d_x f_c(x, c) = 0\}.$$

Nótese que este conjunto es también una función multivaluada. Para cada  $c \in C$ , existen varios  $x \in X$  que satisfacen la propiedad anterior. Dado un punto  $c \in C$ , se puede construir una variedad diferenciable alrededor de  $c$ , aquella formada por los puntos  $x \in X$  tales que  $(x, c) \in \Sigma_{f_c}$ . La idea de la superficie  $\Sigma_{f_c}$  proyectada sobre el plano  $C$  se logra a través de la existencia del mapeo  $\chi : \Sigma_{f_c} \rightarrow C$  definido por  $(x, c) \mapsto c$ . Este mapeo es llamado el **mapeo catástrofe**. El Teorema 1.12 asegura que  $\Sigma_{f_c}$  es siempre una subvariedad diferenciable de  $X \times C$ .

El conjunto catástrofe puede caracterizarse como el conjunto de puntos  $c \in C$  tales que la recta  $\{(x, c) : x \in X\}$  es tangente a  $\Sigma_{f_c}$ . En otras palabras, es la imagen de las singularidades de  $\chi$ . El Teorema de Thom (Teorema 15.1), bajo la suposición de

estabilidad estructural, establece que si  $k \leq 5$ , cualquier singularidad es equivalente a una de las catástrofes elementales listadas en el Cuadro 21.1

El número de catástrofes elementales depende de  $k$ , como sigue:

<b>Cuadro 21.2: Dependencia del número de catástrofes elementales respecto del número de variables control.</b>						
<b>k</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
Catástrofes elementales	1	2	5	7	11	$\infty$

Los posibles tipos para  $k \leq 4$  fueron listados en el Cuadro 21.1. Nótese que las variables de estado no intervienen en la forma de la catástrofe. El sistema puede ser tan complicado como se desee, siempre que satisfaga las condiciones de estabilidad estructural. Muchas situaciones reales pueden describirse en la forma previamente establecida, es decir, el comportamiento se concibe como una función  $f$  de este tipo (la cual no necesariamente debe ser explícitamente conocida). El Teorema de Thom establece que sin importar lo complicado y elaborado del sistema, en términos de tener un número grande de variables de estado, se puede esperar que ciertos aspectos de su comportamiento puedan describirse en forma sencilla, tanto como el número de variables de control independientes no sea mayor que 5. Dichos aspectos del comportamiento que Thom permite clasificar son las transiciones o transformaciones entre los estados estables del sistema.

La fuerza real del teorema se hace clara cuando se considera un caso específico, como en el caso de la catástrofe cúspide ( $k = 2$ ). El teorema indica que en condiciones dadas (se puede mostrar que muchos sistemas reales satisfacen dichas condiciones), las singularidades sólo pueden ser de dos tipos específicos. Es posible escoger entre estas dos posibilidades, sin tener un entendimiento completo del sistema, o la naturaleza precisa de la función  $f$ , y aún así describir su comportamiento. Se tiene entonces una técnica para escribir o predecir el comportamiento cualitativo del sistema, sin necesidad de poseer un conocimiento absoluto de los detalles de sus mecanismos (*i. e.*, la forma precisa de  $f$ ). Esta herramienta permite dejar a un lado la complejidad de los factores internos en la realidad, y ofrece un acceso simple y profundo de las regularidades que gobiernan el comportamiento del sistema.

## C. LA CATÁSTROFE CÚSPIDE

La utilidad del enfoque de la Teoría de Catástrofes es más provechosa cuando se discute en el contexto de uno de los tipos de singularidades especificados por Thom. En el caso que el número de variables control es 2, El Teorema 15.1 garantiza que las singularidades se presentan sólo de dos formas posibles: el doblez y la cúspide. La cúspide es la más complicada.

Sea  $k = 2$ , y supóngase que el espacio control  $C = \mathbb{R}^2$  tiene coordenadas  $a, b$ . Sea  $n = 1$ , y supóngase que el espacio de estado  $X = \mathbb{R}$  está representado por la coordenada  $x$ . Por último, defínase el mapeo  $f_{(a,b)} : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_{(a,b)}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx.$$

Aquí se asume una forma específica para el mapeo  $f$ , según las catástrofes elementales para el caso  $k = 2$ . Como ya se explicó, la utilidad de este enfoque radica en que no se necesita conocer esta forma específica para alguna aplicación en particular. Dadas las suposiciones iniciales, sólo existen pocas formas en que las singularidades pueden ocurrir. No es indispensable conocer la relación entre las variables de estado y las variables de control cuando se desea investigar el comportamiento cualitativo. Es suficiente con saber que  $k = 2$ , y se tiene cierta forma de singularidad o discontinuidad que se desea examinar. La Figura 21.3 presenta el comportamiento local más complicado posible en el mapeo catástrofe  $\chi : \Sigma_f \rightarrow C$ .

La superficie  $\Sigma_f \subseteq X \times C$  está dada por el conjunto

$$\partial f / \partial x = x^3 + ax + b = 0.$$

Una singularidad de  $\chi$ , el mapeo catástrofe  $\chi : \Sigma_f \rightarrow C$ , ocurre en los puntos del conjunto  $\Delta_f = \{(x, c) \in \Sigma_f : d_x^2 f(x, c) = 0\}$ , es decir, cuando

$$\partial^2 f / \partial x^2 = 3x^2 + a = 0.$$

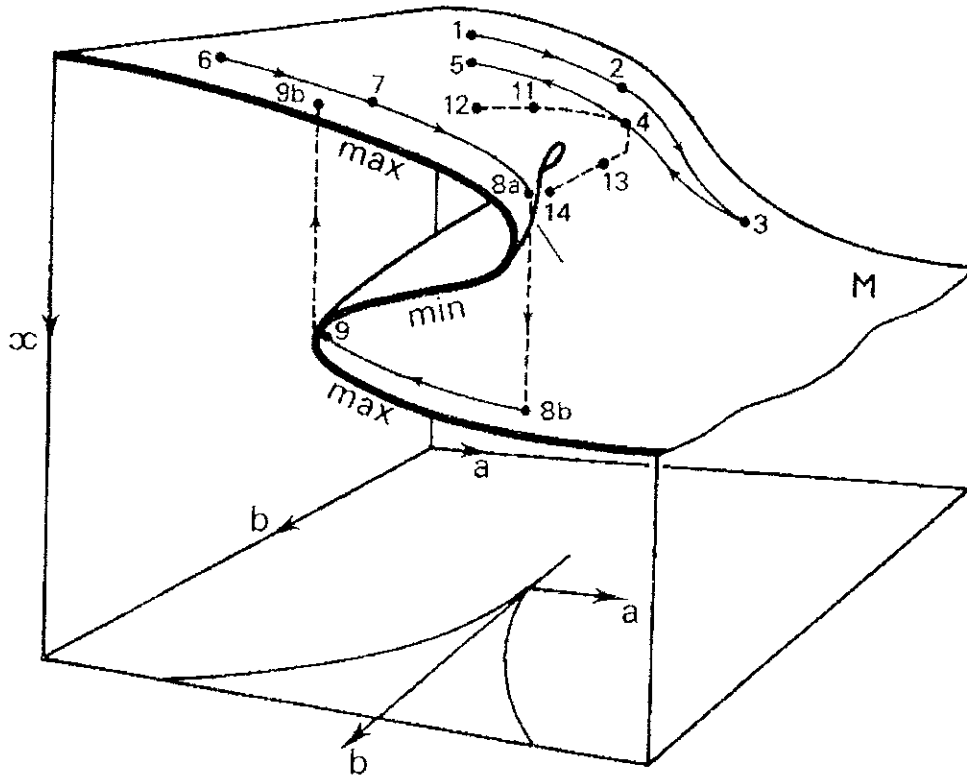


Figura 21.3: La catástrofe cúspide. La superficie  $M$  muestra los valores de la variable de estado  $x$ , y de las variables control  $a$ ,  $b$ , para las cuales la función de utilidad es un máximo o un mínimo, indicando un estado de equilibrio.

Entonces, el conjunto  $S$  de singularidades de  $\chi$  está dado por las ecuaciones anteriores  $d_x f = d_x^2 f = 0$ .  $S$  consiste de dos curvas doblez, determinadas por un parámetro no nulo  $\lambda$  en la forma

$$(x, a, b) = (\lambda, -3\lambda^2, 2\lambda^3), \quad \lambda \neq 0,$$

y una singularidad cúspide en el origen. El conjunto bifurcación  $B = \chi(S)$  está dado por

$$(a, b) = (-3\lambda^2, 2\lambda^3), \quad \lambda \neq 0,$$

que es la cúspide en  $4a^3 + 27b^2 = 0$ . Nótese que tanto  $\Sigma_f$  como  $S$  son diferenciables en el origen, y la cúspide ocurre en  $B$ , en lugar de  $S$ .

## D. ESTRATEGIA DE ELECCIÓN, DECISIÓN O ACEPTACIÓN DE INNOVACIÓN

Imagínese una situación en la que un individuo o un grupo de individuos se enfrenta a varias opciones, de forma que él o el grupo deben determinar el curso de su trayectoria, y considérese no solamente una decisión de sí/no, sino de estrategias mixtas. Esta conjunción se expresa por la variable de estado  $x$ .

Con el cambio hacia un nuevo valor de  $x$ , se induce una nueva estrategia por medio de un cambio en la variable control  $a$ , la cual es una medida del beneficio económico alcanzado por la innovación. Para complicar la decisión, se introduce otra variable control como "factor divisor", denotado por  $b$ . Este puede representar el costo de la inversión o simplemente un ajuste mental, como el grado de reestructuración de hábito o pensamiento implicado en el proceso de la aceptación de la innovación.

La función de potencial o de utilidad  $f(a, b, x) = \phi$  que define  $x$  en términos de  $a$  y  $b$ , no debe ser necesariamente conocida con detalle. Su valor  $\phi$  representa el beneficio o el atractivo percibido para una determinada estrategia  $x$ , para diferentes valores de  $a$  y de  $b$ . Se asume que el individuo actúa de tal forma que éste elige el valor de  $x$  que es localmente óptimo (en relación con el beneficio o atractivo percibido). En tal caso, con dos variables control y una sola variable de estado, el Teorema de Thom establece que los cambios drásticos en la decisión pueden describirse por la catástrofe cúspide.

Los beneficios totales  $\phi$  de una estrategia mixta en particular se indican de la siguiente manera: éstos se consideran en relación con la proporción  $x$  del elemento innovador en la estrategia total.

La Figura 21.4-1 indica la posición donde la mixtura de decisión existente es igualmente costosa o menor que la eficiencia en uso (*i. e.*,  $a$  es bajo), y existe en adición, un alto costo de instalación del dicha innovación ( $b$  es alto). Los beneficios son óptimos para un bajo valor de  $x$ : una baja proporción de los componentes innovadores en la elección seguida. Cuando

se trata del comportamiento de un grupo de individuos, y se logra una decisión en grupo, la ordenada puede indicar el soporte del curso de la acción implicada por el valor de  $x$ .

La Figura 21.4-2 indica la posición cuando el nuevo dispositivo es considerablemente más asequible y eficiente en uso, y cuando no existen costos de innovación ( $a$  alto,  $b$  bajo). La Figura 21.4-3 indica la posición cuando los costos de innovación son levemente bajos, y existe un balance en la eficiencia y los costos de la innovación en relación a los métodos tradicionales ( $a$  y  $b$  son ambos medios o bajos). Esta es una situación neutral.

La Figura 21.4-4 ilustra el caso cuando los costos de instalación son altos, pero también la innovación es mucho más eficiente o mucho menos costosa en uso ( $a$  y  $b$  son altos). En este caso hay dos máximos,  $x_1$  y  $x_2$ , ya que existe un beneficio al evadir los costos de instalación al retener el patrón existente, sin reparar en la reducción de costos que dicho cambio pueda implicar ( $x_1$ ). Al mismo tiempo, existe un beneficio como resultado de la inversión de capital y obtener una reducción de los costos debido al cambio ( $x_2$ ). Sin embargo, existe el peligro de invertir recursos en hacer un cambio y no alcanzar la reducción de los costos, derivada de dicha alteración ( $x_3$ ).

En este punto se puede hacer referencia al Teorema de Thom, y establecer que si existen singularidades, y ciertas suposiciones de naturaleza matemática, entonces la configuración más compleja de tales singularidades es la de una catástrofe cúspide (Figura 21.3). Ahora se está en posición de describir completamente la situación. La superficie de la Figura 21.3 representa aquellos valores de  $x$  para los cuales la función  $f$  es un máximo o un mínimo. Esta muestra el valor de  $x$  (dados los valores de  $a$  y de  $b$ ), que representa la estrategia óptima en términos de ambas variables. Esta representa, entonces, los valores de  $x$  para los cuales el sistema es estable. Si  $a$  o  $b$  varían (por ejemplo  $a$  lo largo de la trayectoria temporal de  $t_1$  a  $t_3$ , representados por los puntos 1 a 3), el valor de  $x$  varía, y, en consecuencia, el comportamiento del individuo o grupo en cuestión.

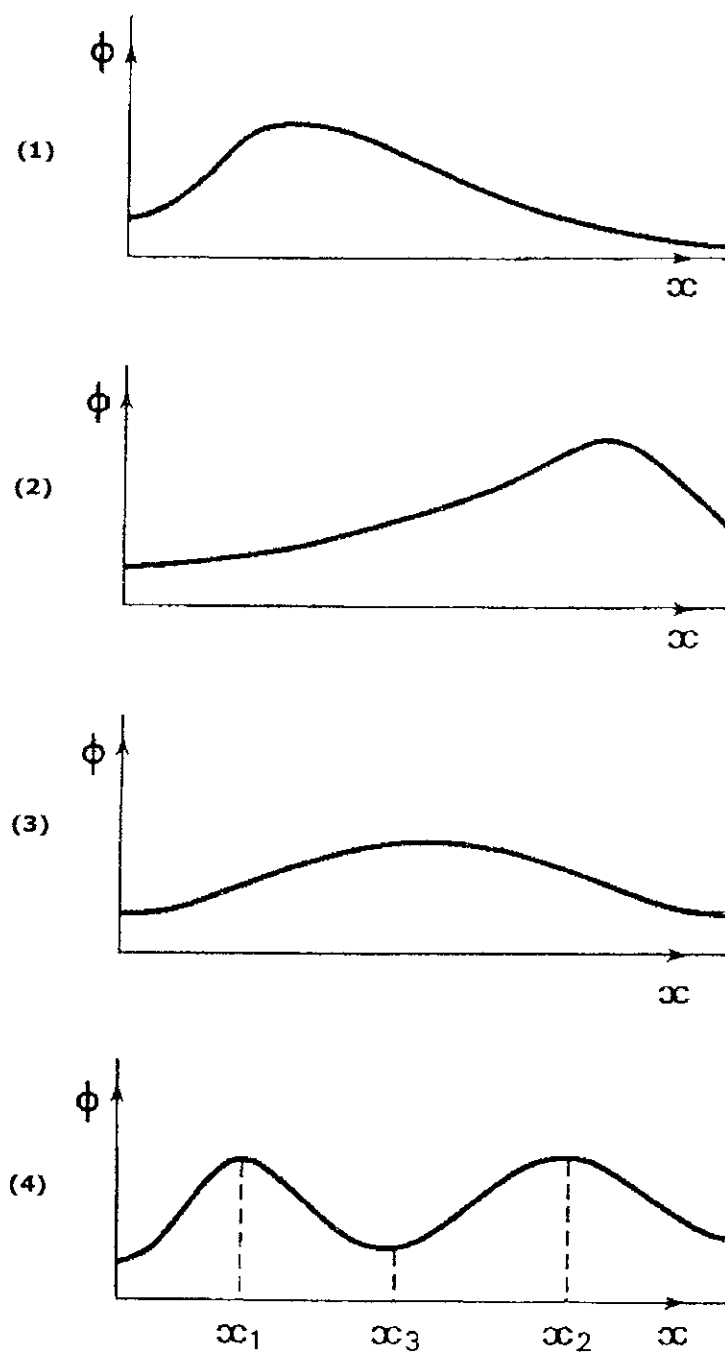


Figura 21.4: Distribución de la utilidad (beneficios) para una estrategia de comportamiento ( $x$ ) con cuatro diferentes pares de valores fijos para los parámetros de control,  $a$  y  $b$ .

En el caso de una sociedad en donde el costo de la inversión en innovación es bajo, la trayectoria usual que sigue se inicia en el punto  $t_1$  (Figura 21.3). En este punto,  $b$  es bajo e inicialmente la razón de eficiencia  $a$  es baja: el cambio no es económicamente ventajoso.

Consecuentemente, el valor de  $x$  para el cual el valor de la función  $f$  es un máximo es bajo. Aquí, el foco de interés es la cúspide, y esta es la configuración que muestra que en la trayectoria desde  $t_6$  hasta  $t_7$ , existen dos valores óptimos de  $x$ . Dado que el sistema busca maximizar  $x$  localmente, la trayectoria sigue hasta  $t_{8a}$  (si  $a$  se incrementa apropiadamente) y en ese punto existe un salto drástico en el comportamiento de, hasta  $t_{8b}$ .

Si  $b$  es alto ( $t_6$ ), existe poca respuesta de mejora en la eficiencia de la innovación ( $t_7$ ) hasta que se alcanza el punto  $t_8$ . Es aquí donde toma lugar la aceptación de dicha innovación. Esta es la catástrofe. Sin embargo, la eficiencia relativa de la innovación declina marcadamente, favoreciendo de nuevo un patrón pre-innovador de acción. El comportamiento óptimo local causa que la trayectoria siga hasta el punto  $t_{9a}$ , y la estrategia cambia rápidamente ( $t_{9b}$ ). Este es el valor del “factor divisor”  $b$  que determina cuándo el comportamiento es continuo o discontinuo. Sobre el espacio control (el plano  $R^2$ , donde se proyecta la cúspide) la curva indica el conjunto catástrofe (conjunto bifurcación). Este proporciona los puntos control, es decir, los valores de  $a$  y  $b$  donde ocurren las discontinuidades. Dichas discontinuidades no ocurren, cuando los puntos control ( $a$ ,  $b$ ) cruzan el conjunto catástrofe para entrar en la región encerrada por éste, sino cuando salen de dicha región, debido a la condición de optimalidad local.

La regla de retardo se muestra para el caso de dos dimensiones. Si el valor de  $b$  permanece constante (y alto), la trayectoria seguida ( $t_{8a}$   $t_{8b}$   $t_{9a}$   $t_{9b}$ ) es una curva cerrada, y el comportamiento del sistema el cíclico. Este es un efecto de retardo o un efecto de histéresis, y la trayectoria seguida se dice que es una curva de histéresis.

## 22. UN MODELO DEL COLAPSO MAYA

La noción general de colapso ha sido descrita por Adams (1973), Tainter (1988) y Webster (2002) para el caso de la civilización Maya clásica, y que fue discutida en la sección

19 de este trabajo de investigación. Este modelo puede aplicarse también al colapso de la civilización Micénica (ca. de 1100 a. C.), al colapso de la civilización del Valle Índico (ca. de 1800 a. C.), a la civilización Hitita (1200 a. C.), y posiblemente al Egipto Antiguo en los inicios del primer Período Intermedio. Renfrew (1979) ha sugerido que existe una regularidad en los procesos culturales respecto al colapso, es decir, la historia se repite, en diferentes tiempos y lugares, en el sentido que la misma dinámica subyacente del cambio cultural está en curso.

Algunos síntomas particulares del colapso de la civilización Maya son:

- 1.- Fallas en la cultura de la clase élite:
  - a) Abandono de estructuras residenciales y administrativas;
  - b) Cese de levantamiento y restauración de monumentos funerarios y fosas, o de actividades rituales (templos);
  - c) Cese de manufactura de registros y monumentos históricos esculpidos (estelas);
  - d) Cese de manufactura de objetos suntuosos como cerámica fina policroma, finos trabajos en piedra y jade, para el uso de la clase élite;
  - e) Cese en el uso del calendario y del sistema de escritura, al menos en la tradición del Período Clásico;
- 2.- Migración aparentemente rápida de los centros poblacionales y ceremoniales;
- 3.- Un corto período relativo de ocurrencia, entre 50 y 100 años (Adams 1973:22).

Si una civilización o sistema cultural puede expresarse en términos de una o varias variables, entonces al momento del colapso del sistema, el parámetro debería sufrir un cambio drástico y discontinuo en su valor (una pérdida súbita en el nivel establecido de complejidad según Tainter), del tipo de las catástrofes de Thom. El Teorema de Thom indica que si se tiene argumentos *a priori* para usar la catástrofe cúspide, entonces se sigue que una variable es suficiente para obtener todo el escenario que describe el sistema.

En la práctica, no es difícil encontrar un parámetro cuyo cambio drástico pueda utilizarse como indicador de colapso. La dificultad radica en seleccionar las variables control del sistema que no colapsen simultáneamente con tal indicador. Para el caso de una sociedad altamente organizada, una sociedad centralizada, y, por lo tanto, una sociedad con estructura

de estado (ya sea temprano o altamente desarrollado), existe una fuerte retroalimentación entre los subsistemas y entre las variables que describen a estos subsistemas.

Se considera innecesario que las variables control deban ser externas al sistema en cuestión. Más aún, las ideas de **foliación rápida**\* y **variedad lenta**\*\* son útiles cuando se considera sistemas con fuerte retroalimentación, en los que el cambio en el valor de las variables de estado, al acercarse al doblez, es mucho más rápido que el movimiento a lo largo de la superficie, la variedad lenta, siempre que éstas sean impulsadas a lo largo de la superficie por la dinámica retroalimentadora del sistema. Por ejemplo, el modelo de Zeeman del rompimiento de sistemas de intercambio puede ser de interés aquí, aunque su relevancia en el presente caso se reduce a la dependencia de la situación en la fuerte percepción de especuladores que causan inestabilidad, la cual, en el caso del colapso de sistemas sociales, tiene una causa más profunda que la imprudencia especulativa.

No es fácil encontrar una formulación apropiada en términos de dos variables control que proporcione una descripción adecuada del colapso de un sistema. Dicha formulación puede hacerse de otras formas, con otras variables control, como consecuencia de la fuerte interconexión entre los subsistemas del sistema social. Para estar en acuerdo con la definición de colapso según Tainter, este modelo considera la variación sólo entre dos polos de la variable de estado: una fuerte centralización (característica de las sociedades con organización de estado incipiente o más complejas), contra una descentralización total (sociedades relativamente simples). Un alto grado de complejidad es equivalente a un alto grado de centralización. Si se quisiera incorporar un tercer nivel de complejidad (sociedad de tipo cacicazgo) en el presente tratamiento, es necesario reformular el modelo y hacer uso de la catástrofe mariposa, la cual involucra cuatro variables control. La introducción de un valor de "compromiso" para C permite la introducción del concepto de cacicazgo en dicho tratamiento.

Se denotará por C a la variable de estado **Grado de Centralización**. Este parámetro en del comportamiento del sistema es una medida del control de un territorio (en un instante

---

\* Véase Zeeman (1972).

\*\* *ibid.*

dado), por una autoridad central a través de una estructura jerárquica fuerte. Un alto valor del grado de centralización se refleja arqueológicamente por una jerarquía de plazas centrales, signos de realeza, compleja maquinaria administrativa, mantenimiento de registros burocráticos y de otros epifenómenos de las sociedades. El grado de complejidad se refiere tanto a la superestructura, la realidad social, como a la estructura, el número de plazas y templos. Además, éste puede cambiar rápidamente. Para cada sociedad en cuestión, debe utilizarse diferentes escalas en la medición de C.

Las variables control propuestas son: **Inversión en Autoridad Carismática**, denotada por I; y **Grado de Marginalidad Rural**, denotada por M. La autoridad carismática central se refiere a la organización estructurada en la sociedad que resulta en adherencia a la política que simboliza la autoridad central. Esta no es una medida de la población o la creencia, sino de la energía asignada a los dispositivos culturales usados para promover afinidad a la autoridad central. Estos mecanismos son de tres tipos: fuerza coercitiva directa y aplicada, provisión de bienes materiales, y de beneficios simbólicos. El primero es tomado directamente de las características que definen a las sociedades complejas, como los estados. El segundo se refiere a los beneficios materiales que fluyen desde la autoridad central (en términos de redistribución). El tercero se refiere a los diversos artificios utilizados para producir lealtad, solidaridad, y adherencia a la autoridad central, ya sea a través de signos visibles, rituales o aquellos que involucran lo sobrenatural. Su efectividad puede ser difícil de medir, pero el esfuerzo invertido en estos rubros está bien documentado en el registro arqueológico.

No se ha mencionado el control burocrático, ni de la jerarquía de plazas centrales, ni del flujo de información, ni del grado de especialización de la sociedad. Estos también son medidores de la complejidad de un sistema social, y por lo tanto, son equivalentes al grado de centralización. Se ha hablado en cambio de la inversión y del impacto de la demostración de: eminencia de la realeza, poder religioso, y fuerza autorizada.

La segunda variable control, marginalidad rural, está relacionada con el balance económico de la población rural (o plebeya según Skalník) En el lado de los ingresos se toman en cuenta los esfuerzos agrícolas y artesanales. En el lado de los egresos se hallan las

contribuciones materiales, en bienes o labor, requeridas de los plebeyos por la autoridad central, como precio de su ciudadanía o de ser eximidos del castigo. La idea de marginalidad está diseñada para considerar simultáneamente la productividad, por una parte, y en nivel de impuestos o tributos, por otra. Un nivel dado de impuestos puede aceptarse enteramente en un estado del sistema, pero si el nivel de productividad *per capita* decrece (como consecuencia, por ejemplo, de un incremento en la población), la carga tributaria se vuelve mayor y la marginalidad es alta. En un “entorno marginal” difícil, la marginalidad permanece alta aunque la carga tributaria sea baja. Diversas mediciones pueden utilizarse para indicar la marginalidad. Factores relevantes como la productividad de los suelos, la densidad de población, y la prosperidad familiar son, en principio, accesibles en el registro arqueológico.

El modelo postula una función  $f(C, I, M) = 0$  que expresa en alguna forma apropiada el bienestar de la población rural. La población plebeya o dominada, y, por lo tanto, la población total, actúa de forma que  $f$  se puede maximizar localmente, aunque se debe tener en cuenta las restricciones inducidas por  $M$  y por  $I$ . El grado de centralización,  $C$ , es un reflejo de los sucesos o fallas de la autoridad central en regir o atraer la adherencia de la población rural a las políticas del sistema central.

Es importante destacar que la inversión en la estructura del gobierno proporciona estabilidad a la autoridad centralizada, además de una capacidad de resistir la adversidad (expresada, en este modelo, a través de la marginalidad) y asegura la supervivencia del sistema. Es por medio de la marginalidad que un estado del sistema es obligado a incrementar la eficiencia local, a través de una demanda de inversión en la estructuración gubernamental.

La respuesta  $\phi$  de la población dominada a diferentes valores de  $C$  puede resumirse como sigue:

- $I$  pequeño,  $M$  grande:  $C$  es muy pequeño. Esto corresponde a una sociedad acéfala con técnicas de producción rudimentarias. Compárese con la Figura 21.3-1 tomando  $x$  como  $C$ ,  $a$  como  $I$ , y  $b$  como  $M$ .

- I grande, M pequeño: Esto corresponde a muchas sociedades con organización de estado incipiente, donde la productividad es alta, y la tributación central no es excesivamente gravosa. Compárese con la Figura 21.3-2.
- I grande, M incipiente: El valor de C es muy alto, y representa una sociedad en un nivel intermedio de centralización. Figura 21.3-3.
- I grande, M grande: La curva es bimodal. Existen dos valores de C para los cuales la sociedad puede operar con eficiencia máxima. Estos corresponden a una sociedad altamente centralizada (estado) y la una sociedad totalmente descentralizada (acéfala). Véase la figura 21.3-4.

El análisis de las relaciones entre las variables arriba expuestas sugiere el uso de la catástrofe cúspide o de superficies globales más complicadas. El doblez y la cúspide son las únicas posibilidades localmente estables (en la ausencia de una frontera) y las hipótesis sugieren la presencia de al menos una cúspide. Esta es la forma más simple en que se puede describir el cambio discontinuo de un valor de C a otro, con cambios continuos en las dos variables control. El modelo establece que dos, y sólo dos, variables control están en operación, de forma que se asume que todos los factores de control relevantes son expresables en términos de I y de M. En un caso real esta situación no es tan simple. La variedad diferencial cuya superficie representa los estados de equilibrio de la función de eficiencia se muestra en la Figura 22.1.

Una trayectoria temporal, típica del colapso de un sistema social, por ejemplo, en el caso de la civilización Maya, es como sigue. La historia empieza en el punto 1, que representa al tiempo  $t_1$ . La marginalidad es baja, y también la inversión en autoridad. El grado de centralización es bajo: este es una sociedad próspera pero no centralizada, que puede ser igualitaria. Al incrementarse I (pues el sistema social invierte en aumentar su complejidad como solución a sus problemas), a través de los puntos  $t_2$  y  $t_3$ , se incrementa también C: la sociedad se desarrolla. Pero ahora la marginalidad M aumenta: no es fácilmente accesible a la población rural acrecentar la producción *per capita* en orden de sostener los requerimientos de la administración central. Al aumentar la población, o se reduce la fertilidad de los suelos, o la tasa de impuestos aumenta, y la marginalidad crece, junto con un aumento en I hasta el

punto  $t_4$ ; es en este momento cuando se alcanza el beneficio marginal máximo, *i. e.*, si el sistema sigue invirtiendo en aumentar su complejidad, ésta en lugar de incrementarse, decrece.

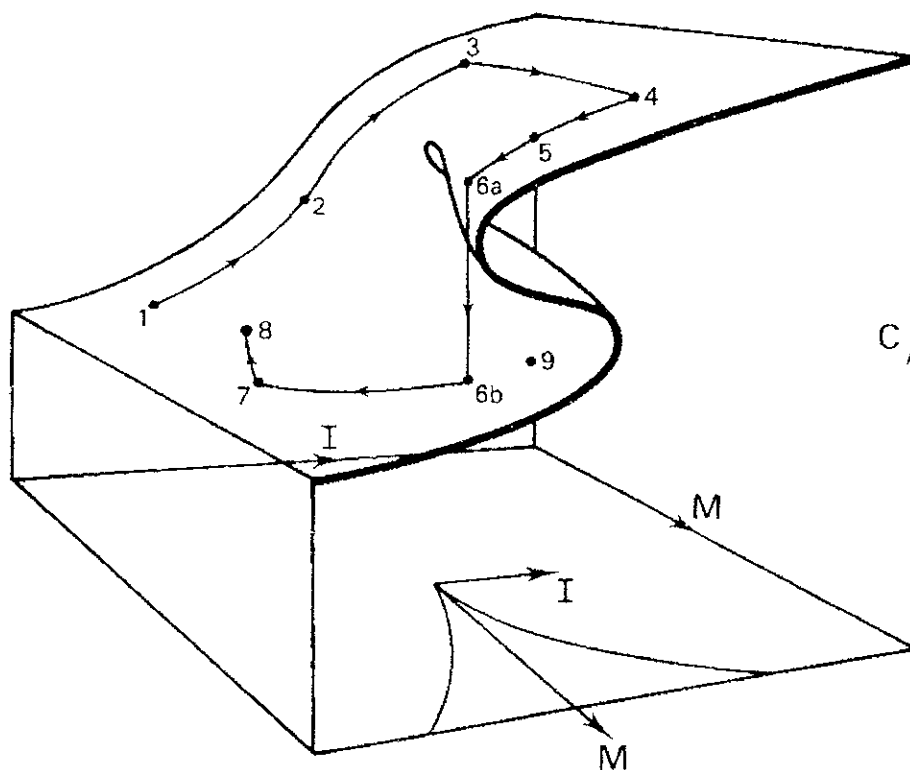


Figura 22.1: La rápida formación o colapso de entidades políticas centralizadas visto como una catástrofe cúspide.

Ahora el sistema está bajo tensión, con  $M$  muy alto, por lo que  $I$  decrece un poco, hasta el punto  $t_5$ . Nótese que en este momento existe otro valor de  $C$  (punto  $t_9$ ) con los mismos valores de  $I$  y de  $M$ , para el cual la eficiencia es también un máximo. Pero, la Regla del Retardo, que representa la inercia del sistema a través de sus complejas retroalimentaciones, impulsa al sistema a alcanzar el punto  $t_9$ , lo cual no es posible sino hasta  $t_{6a}$ , en donde los máximos locales se anulan en conjunto (Figura 21.2), lo que provoca un cambio repentino en el valor de  $C$  (punto  $t_{6b}$ ). Este cambio rápido, interpretado como el colapso del gobierno central, implica otras muchas variaciones. En particular, el personaje central ya no ejerce más control con el carisma que lo suele acompañar, no puede regular ya la inversión en la autoridad carismática  $I$ . El colapso de  $C$ , es decir, la ruptura del control centralizado, es

seguida por un rápida pero gradual disminución de  $I$  hasta el punto  $t_7$ . El aparato administrativo, con sus oficiales especialistas, desaparece (estos mueren o emigran) y la marginalidad se reduce (punto  $t_8$ ).

Esta formulación que usa la catástrofe cúspide, ofrece diversas ideas sobre el colapso de los sistemas sociales. Es interesante, además, estudiar las circunstancias en que la dirección del ciclo descrito puede revertirse, con un colapso positivo de una sociedad acéfala a una sociedad centralizada, y la formación repentina de un estado. Sin embargo, es necesario distinguir entre centralización a través de intensificación, cuando el tamaño del territorio no se ve alterado, y una centralización por medio de amalgamiento o fusión, cuando se incrementa el tamaño del territorio. En muchos casos, la formación de un estado acompaña a esta última.

El modelo evidencia que los cambios abruptos y discontinuos en  $C$ , pueden ser resultado de cambios continuos en  $I$  o  $M$ . Los valores de  $I$  y de  $M$  cambiarán rápidamente después del colapso de  $C$ , pero estos cambios son, aunque rápidos, graduales, y por lo tanto continuos.

## IV. CONCLUSIONES

«La matemática es la ciencia que obtiene conclusiones necesarias» (Benjamín Peirce).

1. La trascendencia de la Teoría de Catástrofes es la prueba de uno de los resultados más importantes de la matemática aplicada: El Teorema de Clasificación de Thom de las catástrofes elementales, el cual parte de la Teoría de Singularidades. Todos los conceptos presentados –gérmenes, jets, determinación, codimensión, corrancho, desdobles– se enlazan para fundamentar este resultado.
2. Bajo condiciones naturales (estabilidad estructural), el Teorema de Thom permite obtener una clasificación finita y completa de las singularidades. En general, este teorema soluciona sólo parcialmente el problema de determinar el número y la representación de las singularidades, es decir, el número de clases de la relación de equivalencia en el conjunto de funciones clase  $C^\infty$ , definida en términos de transformaciones suaves de coordenadas.
3. La motivación para el desarrollo de las ideas y técnicas de la Teoría de Catástrofes fue proveer un lenguaje que permitiera discutir los procesos de morfogénesis, *i. e.*, la aparición de formas. En este sentido, la Teoría de Catástrofes logra, de manera precisa, distinguir las geometrías en que ocurren dichas formas a través de las catástrofes elementales. Estas catástrofes elementales sirven como arquetipos geométricos para los “moldes” en que se presentan los fenómenos emergentes.
4. La Teoría de Catástrofes permite describir los efectos de la interrelación de factores sin necesidad de aclarar cómo es que se interrelacionan. Destaca que la función de potencial o de utilidad del modelo, cuyos máximos o mínimos representan los estados de equilibrio del sistema, no debe ser necesariamente conocida, únicamente se sugiere que las variables explicativas (variables de control) estén claramente definidas y se diferencien claramente de las variables de estado. En particular, es importante para los arqueólogos y antropólogos especificar cuáles son las variables de control del sistema, y cómo éstas

trabajan para producir el comportamiento discontinuo. En las aplicaciones es importante verificar que los cambios en las variables de control producen cambios en el comportamiento, y que no se requieren variables adicionales para inducir la discontinuidad.

5. Desafortunadamente, en la práctica la Teoría de Catástrofes no conduce a predicciones cuantitativas. Sin embargo, sí puede reconocer cuándo una forma específica de catástrofe implica la maximización de una función de potencial o de utilidad de dimensión y codimensión dadas. La aplicación de la Teoría de Catástrofes puede despertar el interés por la forma de tales funciones, así como el interés del enfoque formalista en el análisis de los procesos culturales en antropología.
6. La aplicación de la Teoría de Catástrofes al caso del colapso de los sistemas culturales es un ejemplo del modelado de fenómenos utilizando un fundamento lógico que incorpora el principio de contradicción. Bajo esta perspectiva, la interacción entre las variables endógenas del sistema es suficiente para producir el comportamiento discontinuo. Así, la caracterización del sistema cultural produce su misma catástrofe: el sistema implica su propio colapso.
7. El estudio del colapso de los sistemas culturales por medio de la Teoría de Catástrofes requiere muchos conceptos y técnicas matemáticas complejas. Como interés multidisciplinario, se puede estudiar el colapso de los sistemas culturales con herramientas matemáticas más directas. Por ejemplo, desde un enfoque lógico deductivo formal, haciendo uso de teorías recientes, tales como los sistemas de lógica paraconsistente.

## V. RECOMENDACIONES

«¿Qué me estoy contradiciendo? Muy bien: me estoy contradiciendo. (Soy amplio, contengo multitudes)» (Walt Whitman).

Este trabajo conduce a concluir como lógicamente válido que la inconsistencia es un fenómeno natural. La existencia de predicados ambiguos parece exigir la admisión de cierto tipo de contradicciones, ya que, para estos casos, es posible admitir como consecuencia la aceptación de contradicciones de la forma  $\Box Fa \wedge \neg Fa$ , donde F representa cualquier predicado ambiguo, sin que por ello la teoría necesariamente deba ser trivialmente inconsistente.

En la actualidad, existen sistemas de lógica paraconsistente que se han creado en función de las motivaciones antes reseñadas, que en general se caracterizan por construir teorías que no son trivialmente inconsistentes, es decir, teorías en las cuales es posible que determinadas contradicciones sean válidas, sin que por ello cualquier fórmula lo sea. El aspecto más interesante de la lógica paraconsistente radica en la posibilidad que ofrece de expresar las características de la dialéctica hegeliana. El sistema LD construido por Newton da Costa y Robert Wolf se expone con detalle en el Apéndice C. Este sistema de lógica paraconsistente fue específicamente creado para dar cuenta del principio dialéctico de la Unidad de los Opuestos, y fue expuesto en *“Studies in Paraconsistent Logic I: The Dialectical Principle of the Unity of Opposites”* (1980).

### PROPUESTA PARA INVESTIGACIÓN

En este trabajo, se discutieron las limitaciones de las ciencias formales para describir el comportamiento de los sistemas culturales, en cuanto que parten de la lógica clásica. El surgimiento de las lógicas paraconsistentes ha permitido formular desde un acercamiento deductivo formal el Principio de la Unidad de los Opuestos (PUO), evitando así el problema de la trivialización de la lógica. Con esta aproximación, es posible construir un sistema formal basado en alguna extensión del sistema LD que permita describir el comportamiento de un sistema social o cultural (a semejanza del espacio control), de acuerdo al siguiente mecanismo:

- definir el lenguaje y el conjunto de conectivos primitivos en una extensión de LD; y establecer las fórmulas bien formadas (*i. e.*, definir la sintaxis);
- proponer un conjunto de axiomas  $\Gamma$ ;
- formular una interpretación de  $\Gamma$  válida para un sistema cultural  $\varphi$ ; en la cual la fórmula  $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$  (u otra fórmula equivalente) se interprete como la condición que formaliza el colapso del sistema;
- demostrar la consistencia y la no trivialización del conjunto de estos axiomas, bajo esta interpretación;
- por último, establecer la condición formal del colapso de  $\varphi$  como resultado de tales axiomas, es decir, comprobar que  $\Gamma \sqcap \varphi \Rightarrow \neg\varphi$ .

Además, se podría verificar propiedades propiamente formales del modelo, tales como decidibilidad, independencia de axiomas, entre otras.

En este trabajo, se ha argumentado también sobre el carácter ambiguo de las afirmaciones en las ciencias sociales. El modelo lógico anteriormente expuesto puede complementarse, sumergiéndolo dentro de un ambiente de una de una lógica difusa, a manera de introducir un factor de “ambigüedad” que exprese, en forma más apropiada, este tipo de enunciados. Actualmente, se han desarrollado diversos tipos de sistemas de lógica: plurivalente, modal, de relevancia, entre otros, los cuales pueden brindar una mejor descripción del comportamiento y la imprecisión de los fenómenos sociales.

#### OTRAS RECOMENDACIONES

El modelo presentado en este trabajo de tesis es sólo una propuesta teórica al problema del colapso maya. Aún se debe evaluar la funcionalidad del modelo, es decir, verificar con datos arqueológicos si la dinámica de algunos sitios mayas corresponde al comportamiento sugerido. El planteamiento de modelos alternativos mediante el uso de la Teoría de Catástrofes también puede ser de interés. Similarmente, puede utilizarse esta teoría para construir un modelo que permita describir el surgimiento repentino de entidades socioculturales complejas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Abraham, R. y J. E. Marsden  
1967 *Foundations of Mechanics*. Benjamin, New York. 873pp.
- Ackermann, R.  
1967 *Introduction to Many Valued Logics*. Dover Publications, New York.
- Ackoff, Russell L.  
1972 "Towards a system of systems concepts". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 83-90.
- Adams, Richard E. W.  
1973a "The Collapse of Maya Civilization: A Review of Previous Theories". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 21-34.  
1973b "Maya Collapse: Transformation and Termination in the Ceramic Sequence at Altar de Sacrificios". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 133-163.
- Andrews, E. Wyllys.  
1973 "The Development of Maya Civilization after Abandonment of the Southern Cities". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 243-265.
- Arnold, V. I.  
1969 "Singularities of Smooth Mappings". En *Russian Mathematical Surveys*, 23:1-43.  
1974 "Critical Points of Smooth Functions". En *Proceedings of the International Congress of Mathematics*. Volumen 1. Vancouver. Pp 19-39.
- Bartle, Robert G.  
1966 *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons, Inc. New York. 130pp.  
1980 *Introducción al Análisis Matemático*. Editorial Limusa, México D. F. 519pp.
- Battacharya, P. B., S. K. Jain y S. R. Nagpaul  
1986 *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge. 454pp.
- Bekey, George A.  
1972 "The human operator in control systems". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 128-148.
- Berry, M. V.  
1976 "Waves and Thom's Theorem". En *Advanced in Physics*, 25:1-26.  
1977 "Focusing and Twinkling: Critical Exponents from Catastrophes in non-Gaussian Random Short Waves". En *Advanced in Physics*, 26:1-10.

Bertalanffy, Ludwig von

- 1968 *General System Theory*. George Braziller, New York. 289pp.  
 1972 "General system theory: a critical review". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 29-49.

Binford, Lewis R.

- 1962 "Archaeology as Anthropology". En *American Antiquity*, 28:217-225.  
 1964 "A Consideration of Archaeological Research Design". En *American Antiquity*, 29:425-441.  
 1965 "Archaeological Systematics and the Study of Culture Process". En *American Antiquity* 31:203-210.  
 1972 *An Archaeological Perspective*. University of New Mexico Press, Albuquerque.

Blancarte Suárez, Herminio

- 1998 "¿De qué se trata la teoría de singularidades y catástrofes? Segunda parte" En *SNI-PEIUAQ*, México.

Blumberg, Donald F.

- 1972 "The city as a system". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 296-309.

Boardman, J. M.

- 1967 "Singularities of Differentiable Maps". En *J. H. E. S. Publ. Math.*, 33:21-57.

Bourbaki, Nicolai

- 1970 "Algèbre". En *Éléments de Mathématique*, Tomo II. Hermann. París.  
 1974 "Topologie Générale". En *Éléments de Mathématique*, Tomo III. Hermann. París.

Brickell, F. y R. S. Clark

- 1970 *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand Reinhold Company, Londres. 289pp.

Bröcker, Th. y L. Lander

- 1975 *Differentiable Germs and Catastrophes*. London Mathematical Society Lecture Note Series 17. Cambridge University Press, Cambridge. 179pp.

Buckley, Walter

- 1968 *Modern Systems Research for the Behavioral Scientist*. Aldine, Chicago.  
 1970 *La sociología y la teoría moderna de los sistemas*. Amorrortu editores, Buenos Aires. 321pp.  
 1972 "Society as a complex adaptive system". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 155-178.

Bullard, William R.

- 1973 "Postclassic Culture in Central Peten and Adjacent British Honduras". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 221-241.  
 1974 "The Collapse of Maya Civilization". En *Ceremonial Centers of the Maya*. Editado por R. C. Craven, William Bullard y M. Kampen. University of Florida Press, Gainesville. Pp 1-19.

Callahan, J.

- 1974 "Singularities and Plane Maps". En *American Mathematical Monthly* 81:211-240.

Carnap, R.

- 1937 *The Logical Syntax of Language*. Routledge & Kegan Paul Ltd., Londres.

Castellanos, Gilda

- 1975 "Algunas aplicaciones de la matemática en biología". En *Memorias del Primer Congreso Matemático Guatemalteco*. Sociedad Matemática Guatemalteca. Guatemala. Pp 31-40.

- Carneiro, Robert L.  
1970 "A Theory of the Origin of the State". En *Science*, 169:733-738.
- Casti, John L.  
1989 *Alternate Realities: Mathematical Models of Nature and Man*. John Wiley & Sons, New York. 493pp.
- Checkland, P. B.  
1972 "A systems map of the universe". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 50-55.
- Chiang, Alpha A.  
1971 *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill, México D. F. 801pp.
- Chillingworth, D. R. J.  
1974 "The Catastrophe of a Bucking Beam". En *Dynamical Systems – Warwick 1974*. Springer Lecture notes in Mathematics 468. Springer-Verlag, Berlin. Pp 86-91.  
1976 *Differential Topology with a view of Applications*. Pitman, Londres.
- Church, Alonzo  
1956 *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press. New Jersey.
- Churchill, Ruel V.  
1983 *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill, México D. F. 402pp.
- Claessen, Henri J. M.  
1978 "The Early State: A Structural Approach". En *The Early State*. Editado por Henri J. M. Claessen y Peter Skalnik. Pp 593-596. Mouton, The Haghe.
- Claessen, Henri J. M. y Meter Skalnik  
1978a "The Early State: Theories and Hypotheses". En *The Early State*. Editado por Henri J. M. Claessen y Peter Skalnik. Pp 3-29. Mouton, The Haghe.  
1978b "Limits: Beginning and End of the Early State". En *The Early State*. Editado por Henri J. M. Claessen y Peter Skalnik. Pp 619-635. Mouton, The Haghe.  
1978c "The Early State: Models and Reality". En *The Early State*. Editado por Henri J. M. Claessen y Peter Skalnik. Pp 637-650. Mouton, The Haghe.
- Clarke, David L.  
1979 *Analytical Archaeology*. Columbia University Press, New York.
- Cogwill, George  
1964 *The End of Classic Maya Culture: A Review of Recent Evidence*. Southwest Journal of Anthropology 20:145-159.
- Conway, John B.  
1973 *Functions of One Complex Variable*. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York. 313pp.
- Cooke, J.  
1976 "Some Current Theories of the Emergence and Regulation of Spatial Organization in Early Animal Development". En *Annual Review of Biophysics and Bioengineering* 4:185-217.
- Cooke, J. y E. C. Zeeman  
1976 "A Clock and Wavefront Model for Control of the Number of Repeated Structures during Animal Morphogenesis". En *Journal of Theoretical Biology* 58:455-476.

- Culbert, T. Patrick
- 1973a "A Prologue to Classic Maya Culture and the Problem of its Collapse". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 3-19.
  - 1973b "The Maya Downfall at Tikal". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 63-92.
  - 1977 "Maya Development and Collapse: An Economic Perspective". En *Social Process in Maya Prehistory: Studies in Honour of Sir Eric Thompson*. Editado por Norman Hammond. Academic Press, New York. Pp 509-530.
  - 1988 "The Collapse of Classic Maya Civilization". En *The Collapse of Ancient States and Civilizations*. Editado por Norman Yoffee y George L. Cowgill. University of Arizona Press, Tucson. Pp 69-101.
  - 1995 "Población, subsistencia y el colapso de los Mayas del Clásico". En *XI Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1994 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 781-796.
- Da Costa, N.
- 1982 "The Philosophical Import of Paraconsistent Logic". En *The Journal of Non-Classical Logic*, 1:1-2.
- Da Costa, N. y Renato Lewin
- 1995 "Lógica paraconsistente". En *EIAF*, 7.
- Da Costa, N. y Robert Wolf
- 1980 "Studies in Paraconsistent Logic I: Dialectical Principles of the Unity of Opposites". En *Philosophía, Philosophical Quarterly of Israel*, 9:189-217.
- Dale, M. B.
- 1972 "Systems analysis and ecology". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 231-245.
- De Greene, Kenyon B.
- 1972 "Systems and psychology". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 92-127.
- Devaney, Robert L.
- 1989 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2ª. Edición. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, California. 336pp.
- Demarest, Arthur
- 2004 *Ancient Maya: The Rise and Fall of a Rainforest Civilization*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Demarest, Arthur A., Prudence M. Rice y Don S. Rice (editores)
- 2004 *The Terminal Classic in the Maya Lowlands: Collapse, Transition and Transformation*. University Press of Colorado.
- Demarest, Arthur y Héctor L. Escobedo.
- 1998 "Acontecimientos, procesos y movimientos de poblaciones en el Clásico Terminal y el Colapso Maya". En *XI Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1997 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 699-711.
- Demarest, Arthur, José S. Suasnávar, Claudia Wolley, Matt O'Mansky, Joshua Hinson, Erin Sears y Coral Rasmussen.
- 1998 "Reconocimientos en sistemas defensivos de Petexbatún: la evidencia material de la guerra". En *Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1997 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Pp 517-521.

- Demarest, Arthur y Juan Antonio Valdés.  
 1995 "Guerra, regresión política y el colapso de la Civilización Maya en la región Petexbatún". En *VIII Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1994 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 777-781.
- Diamond, Jared  
 1995 *Collapse: How to Societies Choose to Fail or Succeed*. Viking, New York. 826pp.
- Dieudonné, J.  
 1969 *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York. 387pp.
- Dodson, C. T. J. y M. M. Dodson  
 1975 *Simple Non-linear Systems and the Cusp Catastrophe*. Lancaster & York University Press.
- Dunford, N. y J. Schwartz  
 1958 *Linear Operators*. Interscience, New York.
- Eaton, David  
 1972 "A systems analysis of political life". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 179-186.
- Eells, James  
 1967 *Singularities of Smooth Maps*. Notes on Mathematics and its applications. Gordon and Breach, New York. 104pp.
- Emery, Kitty F.  
 1999 "Zooarqueología y el colapso clásico Maya en el Petexbatún". En *XII Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1998 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 943-964.
- Engel, Alejandro B.  
 1978 *Elementos de Biomatemática*. Monografía No. 20. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Washington D. C. 76pp.
- Flannery, Kent  
 1968 "Archaeological Systems Theory and Early Mesoamerica". En *Anthropological Archaeology in the Americas*. Editado por B. J. Meggers. Anthropological Society of Washington, Washington D. C.
- Foias, Antonia E. y Ronald L. Bishop.  
 1997 "Changing Ceramic Production and Exchange in the Petexbatún Region, Guatemala: Reconsidering the Classic Maya Collapse". En *Ancient Mesoamerica*, 8:275-291. Cambridge University Press. Cambridge.
- Forrester, Jay W.  
 1972 "Understanding the counterintuitive behaviour of social systems". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 200-217.
- Forsyth, Donald W.  
 1995 "Cambios y continuidades en la cerámica arqueológica del sur de las Tierras Bajas Mayas y las implicaciones para el Colapso Maya". En *XI Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1994 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 783-789.

- Fulton, William  
1972 "The Riemann-Hugoniot Catastrophe and Van der Waal's Equation". En *Towards a Theoretical Biology*. Editado por C. H. Waddington. Edinburgh University Press. Pp 1-7.
- Fulton, William  
1969 *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts. 226pp.
- Gandolfo, Giancarlo  
1997 *Economic Dynamics*. Springer-Verlag.
- Godwig, A. N.  
1971 "Three Dimensional Pictures for Thom's Parabolic Umbilic". En *I. H. E. S. Publ. Math*, 40:117-138.
- Gold, Harvey J.  
1977 *Mathematical Modeling of Biological Systems: an Introductory Guidebook*. John Wiley & Sons, New York. 357pp.
- Golubitsky, Martin y Victor Guillemin  
1973 *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14. Springer-Verlag, New York. 209pp.
- Gómez G. y Herminio Blancarte  
1997 "¿De qué se trata la teoría de singularidades y catástrofes? Primera parte". En *Eureka* 11, México.
- Gómez-Alcaraz, G. y G. Rivas-Lechuga  
1996 "Tres intentos de matematización en problemas biológicos". En *IV Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática: Memorias*. Guatemala. Pp 1-9.
- Graham, John A.  
1973 "Aspects of Non-Classic Presences in the Inscriptions and Sculptural Art of Seibal". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 207-219.
- Guckenheimer, John  
1973 "Review of 'Stabilité Structurale et Morphogénèse, Essai d'une Théorie Générale des Modèles' by René Thom". En *Bulletin of the American Mathematical Society* 79: 879-890, Número 5. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.  
1975 *Comments on Catastrophe Theory and Chaos*. University of California Press.  
1978 *A Strange Attractor, The Hopf Bifurcation*. Graduate Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.
- Guckenheimer, John y Philip Holmes  
1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag, New York. 453pp.
- Gunning, R. C. y H. Rossi  
1965 *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall.
- Halmos, P.  
1950 *Measure Theory*. Van Nostrand, New York.
- Hambling, Robert L., Michael Hout, Jerry L. L. Miller y Brian L. Pitcher  
1977 "Arms Races: A Test of two Models". En *American Sociological Review* 42:338-354.

- Hambling, Robert L., R. B. Jacobsen y Jerry L. L. Miller  
1973 *A Mathematical Theory of Social Change*. Wiley Interscience, New York.
- Hambling, Robert L. y Brian L. Pitcher  
1980 "The Classic Maya Collapse: Testing Class Conflict Hypotheses". En *American Antiquity* 45:246-267.
- Hammond, Norman  
1977 *Social Process in Maya Prehistory: Studies in Honour of Sir Eric Thompson*. Academic Press, New York. 609pp.
- Harrison, Peter D.  
1977 "The Rise of the bajos and de Fall of the Maya". En *Social Process in Maya Prehistory: Studies in Honour of Sir Eric Thompson*. Editado por Norman Hammond. Academic Press, New York. Pp 469-508.
- Harrison, P. J. y E. C. Zeeman  
1973 "Applications of Catastrophe Theory in Macroeconomics". En *Symposium on Applications of Global Analysis*. Utrecht University. Utrecht.
- Herstein, I. N.  
1967 *Álgebra moderna*. Editorial Trillas, México D. F.
- Hilbert, D. y N. Ackermann  
1962 *Elementos de lógica teórica*. Tecnos, Madrid.
- Holmes, P. J. y D. A. Rand  
1976 "The Bifurcations of Duffing's Equation: An Application of Catastrophe Theory". En *Journal of Sound and Vibration* 44:237-253.
- Hörmander, L.  
1967 *Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand, Londres.
- Horváth, Juan  
1969 *Introducción a la topología general*. Monografía No. 9. Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Washington D. C. 147pp.
- Hosler, Doroty, Jeremy A. Sabloff y Dale Runge  
1977 "Situation Model Development: A Case Study of the Classic Maya Collapse". En *Social Process in Maya Prehistory: Studies in Honour of Sir Eric Thompson*. Editado por Norman Hammond. Academic Press, New York. Pp 553-590.
- Imaz, Carlos y Zdenek Vorel  
1968 *Ecuaciones diferenciaels ordinarias*. Editorial Limusa-Wiley, S. A. México D. F. 245pp.
- Isaacs, I. Martin  
1994 *Algebra: A Graduate Course*. Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Groove. 516pp.
- Isnard, C. A. y E. C. Zeeman  
1974 "Some Models for Catastrophe Theory in the Social Sciences". En *Use of Models in the Social Sciences*. Editado por L. Collins. Tavistock Publications, Londres. Pp 44-100.
- Jenkins, Gwilym M.  
1972 "The systems approach". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 56-82.

Johnston, Kevin

- 1997 "Ecología tropical y el Colapso Maya". En *X Simposio de Investigaciones Arqueológicas en Guatemala 1996 Museo Nacional de Arqueología y Etnología*. Ministerio de Cultura y Deportes, Instituto Nacional de Antropología e Historia y Asociación Tikal, Guatemala. Pp 483-490.

Joyce, Rosemary A.

- 2000 "El colapso maya al final del Período Clásico". En *Historia General de Guatemala*. Tomo 1. Asociación de Amigos del País, Guatemala. Pp 381-396.

Kast, F. E. y J. E. Rosenzweig

- 1972a "The modern view: a systems approach". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 14-28.
- 1972b "Organization structure". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 247-269.

Kelley, J. L.

- 1955 *General Topology*. Van Nostrand, New York.

Kreider, Donald L., Robert G. Kuller y Donald R. Otsberg

- 1973 *Ecuaciones diferenciales*. Fondo Educativo Interamericano, S. A. México D. F. 486pp.

Kolmogorov, A. N. y S. V. Fomin

- 1970 *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, Inc., New York. 403pp.

Kuntz, Ernst

- 1985 *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, Boston. 238pp.

Kuratowski, C.

- 1933 *Topologie I*. Dover Publications, New York.

Lang, Serge

- 1958 *Introduction to Algebraic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts. 260pp.
- 1964 *Algebraic Geometry*. Wiley.
- 1965 *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 526pp.
- 1968 *Analysis I*. Addison-Wesley.
- 1969 *Real Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts. 476pp.
- 1972 *Differential Manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts. 230pp.

Leach, Edmund R.

- 1961 "Rethinking Anthropology". En *Rethinking Anthropology*. Editado por E. R. Leach. Monographs on Social Anthropology. London School of Economics. University of London, The Athlone Press, Londres. Pp 1-27.

Leija Vásquez, Verónica

- 1999 *Crisis o colapso en cuatro sociedades de pequeña escala*. Tesis licenciatura. Universidad del Valle de Guatemala, Guatemala. 152pp.

Lévi-Strauss, Claude

- 1981 *Las estructuras elementales del parentesco*. Editorial Paidós, Buenos Aires. 575pp.
- 1979 *Antropología estructural*. Editorial Siglo XXI, México D. F.

Lomelí, Héctor y Beatriz Rumbos

- 2003 *Métodos dinámicos en economía: otra búsqueda del tiempo perdido*. International Thompson Editores, México D. F.

Loomis, Charles, P.

- 1960 *Social Systems*. D. Van Nostrand Company, Inc., New Jersey. 349pp.

- Lowe, John W. G.  
 1982 "Mathematical Models of the Classic Maya Collapse: The Class Conflict Hypotheses Reexamined". En *American Antiquity* 47:643-652.  
 1985 *The Dynamics of Apocalypse: a Systems Simulation of the Classic Maya Collapse*. University of New Mexico Press, Albuquerque. 275pp.
- Lu, Y. C.  
 1976 *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Malgrange, B.  
 1964 *The Preparation Theorem for Differentiable Functions*. Differential Analysis, Bombay Colloquium. Oxford University Press.  
 1966 *Ideals of Differentiable Functions*. Bombay Lecture Notes. Oxford University Press.
- Marsden, Jerrold E.  
 1973 *Basic Complex Analysis*. W. H. Freeman and Company, New York. 472pp.
- Mather, J.  
 1968a "Stability of  $C^\infty$ -mappings I: The Division Theorem". En *Annals of Mathematics*, 87:89-104.  
 1968b "Stability of  $C^\infty$ -mappings III: Finitely Determined Map-Germs". En *I.H.E.S. Publications*, 35:127-156.  
 1969 *Right Equivalence*. University of Warwick Press.  
 1971 "On Nirenberg's Proof of Malgrange's Preparation Theorem". En *Liverpool Symposium on Singularities*. Springer Lecture Notes on Mathematics 192. Springer-Verlag, Berlin. Pp 116-120.  
 1973 *On Thom-Boardman Singularities*. Academic Press, New York.
- Mayrhofer, K.  
 1952 *Contents and Measure*. Springer-Verlag, New York.
- Merton, Robert K.  
 1968 *Social Theory and Social Structure*. The Free Press, New York. 702pp.
- Mesarovic, M. D. (editor)  
 1968 *System Theory and Biology*. Springer-Verlag, Berlin. 404pp.
- Miller, Mary Ellen.  
 (s.f.) *On the Eve of the Collapse: Maya Art of the Eighth Century*. Pp 355-411.
- Milnor, J.  
 1958 *Differential Topology*. Lecture Notes, Princeton.  
 1963 "Morse Theory". En *Annals of Mathematical Studies*, 51.  
 1968 "Singular Points of Complex Hypersurfaces". En *Annals of Mathematical Studies*, 61.  
 1969 *Topology from the Differentiable Viewpoint*. Virginia.
- Milsum, J. H.  
 1972 "Technosphere, biosphere, and sociosphere: an approach to their systems modeling and optimization". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 187-199.
- Morse, Marston y Stewart S. Cairns  
 1969 *Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology*. Academic Press, New York. 389pp.
- Munkres, James R.  
 2000 *Topology*. 2ª. Edición. Prentice Hall, New Jersey. 537pp.
- Nadel, S. F.  
 1966 *Teoría de la Estructura Social*. Ediciones Guadarrama, Madrid. 239pp.

- Narasimhan, R.  
1968 *Analysis on Real and Complex Manifolds*. Masson and Cie, París, and North-Holland, Amsterdam.
- Needham, Rodney  
1971 *Rethinking Kinship and Marriage*. Editado por Rodney Needham. Tavistock Publications, Londres. 276pp.
- Niremberg, L.  
1971 "A proof of the Malgrange Preparation Theorem". En *Procedures of Liverpool Singularities, Symposium I*. Springer Lecture Notes, 192:97-105.
- Palau, Gladys  
2002 *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*. Temas de Cátedra 4. Editorial Gedisa, Barcelona. 203pp.
- Parsons, Talcott  
1951 *The Social System*. The Free Press, New York. 575pp.  
1962 *Toward a General Theory of Action*. Harvard University Press, Cambridge. 555pp.
- Patten, Bernard C. (editor)  
1971 *Systems Analysis and Simulation in Ecology*. Volumen I. Academic Press, New York.  
1972 *Systems Analysis and Simulation in Ecology*. Volumen II. Academic Press, New York.
- Pellecer, Julio A  
1975 "La matemática en ecología". En *Memorias del Primer Congreso Matemático Guatemalteco*. Sociedad Matemática Guatemalteca, Guatemala. Pp 25-30.
- Pielou, E. C.  
1977 *Mathematical Ecology*. John Wiley & Sons, New York. 385pp.
- Pitcher, Brian L., Robert L. Hambling y Jerry L. L. Miller  
1978 "The Diffusion of Collective Violence". En *American Sociological Review* 43:23-45.
- Porteous, I. R.  
1962 *Simple Singularities of Maps*. Liverpool Singularities – Symposium I. Springer Lecture Notes, 192:286-307.
- Poston, T. y E. R. Woodcock  
1973 "Zeeman's Catastrophe Machine". En *Proceeding of Cambridge Philosophic Sociology* 74:217-226.  
1974 *A Geometrical Study of Elementary Catastrophes*. Lecture Notes in Mathematics 373. Springer-Verlag, Berlin.
- Poston, T. y I. N. Stewart  
1976 *Taylor Expansions and Catastrophes*. Pitman, Londres.
- Priban, Ian.  
1972 "Models in medicine". En *Systems Behaviour*. Editado por John Beishon y Geoff Peters. The Open University Press, Harper & Row, Publishers, Londres. Pp 222-230.
- Priest, G.  
2001 *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Prior, A. N.  
1962 *Formal Logic*. Clarendon Press, Oxford.
- Quine, W.  
1970 *Filosofía de la lógica*. Alianza, Madrid.

- Rands, Robert L.
- 1973a "The Classic Collapse in the Southern Maya Lowlands: Chronology". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 43-62.
- 1973b "The Classic Maya Collapse: Usumacinta Zone and the Northwestern Periphery". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 165-205.
- Rathje, William L.
- 1973 "Classic Maya Development and Denouement: A Research Design". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 405-454.
- Reid, Miles
- 1988 *Undergraduate Algebraic Geometry*. London Mathematical Society. Student Texts 12. Cambridge University Press, Cambridge. 131pp.
- 1995 *Undergraduate Commutative Algebra*. London Mathematical Society. Student Texts 29. Cambridge University Press, Cambridge. 153pp.
- Renfrew, Colin
- 1978 "Trajectory Discontinuity and Morphogenesis: The Implications of Catastrophe Theory for Archaeology". En *American Antiquity* 48:203-222.
- 1979 "Systems Collapse as Social Transformation Catastrophe and Anastrophe in Early State Societies". En *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*. Editado por Colin Renfrew y K. L. Cooke. Academic Press, New York. Pp 481-506.
- Renfrew, Colin y E. V. Level
- 1979 "Exploring Dominance: Predicting Polities from Centers". En *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*. Editado por Colin Renfrew y K. L. Cooke. Academic Press, New York. Pp 145-168.
- Renfrew, Colin y K. L. Cooke (editores)
- 1979 *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*. Academic Press, New York.
- Renfrew, Colin y Tim Poston
- 1979 "Discontinuities in the Endogenous Change of Settlement Pattern". En *Transformations: Mathematical Approaches to Culture Change*. Editado por Colin Renfrew y K. L. Cooke. Academic Press, New York. Pp 437-462.
- Riesz, F. y B. Nagy
- 1956 *Functional Analysis*. Ungar, New York.
- Royden, H. L.
- 1968 *Real Analysis*. 2a. Edición. Macmillan Publishing Co., New York. 387pp.
- Rudin, Walter
- 1966 *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- 1967 *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York. 270pp.
- Sabloff, Jeremy A.
- 1973a "Major Themes in the Past Hypotheses of the Maya Collapse". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 35-40.
- 1973b "Continuity and Disruption during Terminal Late Classic Times at Seibal: Ceramic and Other Evidence". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 107-131.

- Sabloff, Jeremy A. y Gordon R. Willey  
 1967 "The Collapse of Maya Civilization in the Southern Lowlands: A Consideration of History and Process". En *Southwest Journal of Anthropology* 23:311-336.
- Salmon, Merrilee H.  
 1978 "What can Systems Theory do for Archaeology?". En *American Antiquity* 43:174-183.
- Sanders, William T.  
 1973 "The Cultural Ecology of the Lowland Maya: A Reevaluation". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 325-365.
- Saul, Frank, P.  
 1973 "Disease in the Maya Area: the Pre-Columbian Evidence". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 301-324.
- Schubert,  
 1964 *Topologie*. Teubner. Stuttgart.
- Schurle, Arlo W.  
 1979 *Topics in Topology*. North Holland, New York. 266pp.
- Sewell, M. J.  
 1978 "Some Mechanical Examples of Catastrophe Theory". En *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*.
- Shater, Robert J.  
 1977 "The maya Collapse Revisited: Internal and External Perspective". En *Social Process in Maya Prehistory: Studies in Honour of Sir Eric Thompson*. Editado por Norman Hammond. Academic Press, New York. Pp 531-552.  
 1998 *La Civilización Maya*. 3ª. Edición. Fondo de Cultura Económica, México D. F. 882pp.
- Shimkin, Demitri B.  
 1973 "Models for the Downfall: Some Ecological and Culture-Historical Considerations". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 269-299.
- Siersma, D.  
 1973 "Singularities of  $C^\infty$  Functions or Right-codimension Smaller or Equal than Eight". En *Indag* 25:31-37.
- Simmons, George F.  
 1963 *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, New York. 372pp.  
 1993 *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. 2ª Edición. McGraw-Hill Interamericana, Madrid. 658pp.
- Sims, Benjamin T.  
 1976 *Fundamentals of Topology*. Macmillan Publishing Company, Inc., New York. 179pp.
- Smith, J. Maynard  
 1968 *Mathematical Ideas in Biology*. Cambridge University Press, Cambridge. 152pp.  
 1974 *Models in Ecology*. Cambridge University Press, Cambridge. 146pp.
- Spivak, Michael  
 1999 *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. 3ª. Edición. Publish or Perish, Inc., Houston. 489pp.

- Stenberg, S.  
1964 *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall.
- Stuart, David.  
(s.f.) *Historical Inscriptions and the Maya Collapse*. Pp 321-354.
- Tabor, Michael  
1989 *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*. John Wiley & Sons, New York. 364pp.
- Tainter, Joseph A.  
1988 *The Collapse of Complex Societies*. New Studies in Archaeology. Cambridge University Press, Cambridge. 250pp.
- Tarski, A.  
1930a "On Some Fundamental Concepts of Metamathematics". En *Logic, Semantics and Mathematics*. Hackett Publishing Company, New York.  
1930b "Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences". En *Logic, Semantics and Mathematics*. Hackett Publishing Company, New York.  
1933 "The Concept of Truth in Formalized Languages". En *Logic, Semantics and Mathematics*. Hackett Publishing Company, New York.
- Thom, René  
1962 "La Stabilité topologique des applications polynomiales". En *l'Enseignement Mathématique*, 8:24-33.  
1966 "Une théorie dynamique de la morphogénèse". En *Towards a Theoretical Biology 1*. Editado por C. H. Waddington. Edinburgh University Press. Pp 152-66.  
1968 "Topologie et signification". En *L'Age de la Science 4* :219-242.  
1969 "Topological Models in Biology". En *Topology* 8:313-335.  
1970a "Topological Models in Biology". En *Towards a Theoretical Biology 3*. Editado por C. H. Waddington. Edinburgh University Press. Pp 89-116.  
1970b "Topologie et linguistique". En *Essays on Topology*. Springer-Verlag. Berlin.  
1971a "A Global Dynamical Scheme for Vertebrate Embriology". En *Some Mathematical Questions in Biology, Symposium V*. Lectures on Mathematics in the Life Sciences 5:1-45. American Mathematical Society.  
1971b "Phase-transitions as Catastrophes". En *Conference on Statistical Mechanics*. Chicago.  
1971c "Structuralism and Biology". En *Towards a Theoretical Biology 4*. Editado por C. H. Waddington. Edinburgh University Press.  
1972a "Les singularités des applications différentiables". En *Annals of Institute Fourier*. Pp 17-86.  
1972b *Stabilité structurelle et morphogénèse*. Paris.  
1973a "La théorie des catastrophes: État présent et perspectives". En *Manifold* 14 :16-23. University of Warwick.  
1973b "Langage et catastrophes: Eléments pour une sémantique topologique". En *Dynamical Systems*. Editado por M. M. Pleixoto. Academic Press. New York.  
1974 *Modèles mathématiques de la morphogénèse*. Union Générale d'Éditions, Paris.  
1975 *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts. 348pp.
- Thom, René y E. C. Zeeman  
1974 "Catastrophe Theory: Its Present State and Future Perspectives". En *Dynamical Systems*. Springer Lecture Notes in Mathematics, 468:366-401.
- Thom, René y H. I. Levine  
1971 *Singularities of Differentiable Mappings*. Liverpool Singularities – Symposium I. Springer Lecture Notes, 192:1-89.
- Thompson, J. M. T.  
1975 "Experiments in Catastrophe". En *Nature* 254:392-395.

- Tougeron, J. C.  
1968 "Idéaux de fonctions différentiables I". En *Annals Inst. Fourier*, 18:177-240.
- Trotman, D. J. A. y E. C. Zeeman  
1976 "The Classification of Elementary Catastrophes of Codimension  $\leq 5$ ". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 263-327.
- Tuggle, H. D., A. H. Townsend y T. J. Riley  
1972 "Laws Systems and Reseach Design". En *American Antiquity* 37:3-12.
- Waddington, C. H.  
1967-1971 *Towards a Theoretical Biology*. Edinburgh University Press. 4 Volúmenes.
- Wassermann, G.  
1971 *(r, s)-Stability of Unfoldings*. Regensburg Universität.  
1974 *Stability of Unfoldings*. Lecture Notes on Mathematics 393. Springer Verlag, Berlin.  
1975 "Stability of Unfoldings on Space and Time". En *Acta Mathematica* 135:14-20.
- Webb, Malcolm C.  
1973 "The Peten Maya Decline Viewed in the Perspective of State Formation". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 367-404.
- Webster, David  
2002 *The Fall of the Ancient Maya: Solving the Mystery of the Maya Collapse*. Thames & Hudson, Londres. 1008pp.
- Whitney, H.  
1955a "Mappings of the Plane into the Plane". En *Annals of Mathematics*, 62:411-470.  
1955b "On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces I". En *Annals of Mathematics*, 62:374-410.  
1957 "Elementary Structure of Real Algebraic Varieties". En *Annals of Mathematics*, 66:545-556.
- Willard, Stephen  
1968 *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts. 370pp.
- Wiley, Gordon R.  
1973 "Certains Aspects of the Late Classic to Postclassic Periods in the Belize Valley". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New México Press, Albuquerque. Pp 93-106.
- Wiley, Gordon R. y Demitri B. Shimkin  
1973 "The Maya Collapse: A Summary View". En *The Classic Maya Collapse*. Editado por T. Patrick Culbert. University of New Mexico Press, Albuquerque. Pp 457-501.
- Wilson, David  
1975 *The New Archaeology*. Alfred Knopf, New York.
- Wittgenstein, Ludwig  
1918 *Tractatus Logico-Philosophicus*. Routledge & Kegan Paul Ltd., Londres.
- Woodcock, A. E. R. y T. Poston  
1974 *A Geometrical Study of Elementary Catastrophes*. Springer Lecture Notes in Mathematics 373. Springer-Verlag, New York.

Zeeman, E. C.

- 1965 "Topology of the Brain". En *Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine*. Medical Research Council, Londres.
- 1971 *Geometry of Catastrophes*. Times Literary Supplement, 10 de diciembre. Pp 1156-1557.
- 1972a "A Catastrophe Machine". En *Towards a Theoretical Biology 4*. Editado por C. H. Waddington. Edinburgh University Press. Pp 276-282.
- 1973a "Catastrophe Theory in Brain Modelling". En *International Journal of Neuroscience* 6:39-41.
- 1973b "Differential equations for heartbeat and nerve impulse". En *Dynamical Systems*. Editado por M. M. Peixoto. Academic Press, New York. Pp 683-741.
- 1974a "Catastrophe Theory: a replay to Thom". En *Manifold* 15:4-15. Mathematical Institute. University of Warwick.
- 1974b "Levels of Structure in Catastrophe Theory Illustrated by Applications in the Social and Biological Sciences". En *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Volumen 2. Vancouver. Pp 533-546.
- 1974c "On the Unstable Behaviour of Stock Exchanges". En *Journal of Mathematical Economics* 1:39-49.
- 1974d "Primary and Secondary Waves in Developmental Biology". En *Lectures on Mathematics in the Life Sciences* 7:69-161. American Mathematical Society.
- 1974e "Research, Ancient and Modern". En *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 10:272-281.
- 1975a "Applications of Catastrophe Theory". En *Manifolds Tokio*. University of Tokio Press. Tokio. Pp 11-23.
- 1975b "Differentiation and Pattern-formation" Apéndice de *Some Current Theories of the Emergence and Regulation of Spatial Organization in Early Animal Development*. Editado por J. Cooke. En *Annual Review of Biophysics and Bioengineering* 4:185-217.
- 1976a "A Catastrophe Model for the Stability of Ships". En *Proceedings of III Escola Latinoamericana de Matematica*. IMPA, Río de Janeiro.
- 1976b "A Mathematical Model for Conflicting Judgements Caused by Stress, Applied to Possible Misestimations of Speed Caused by Alcohol". En *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 29:19-31.
- 1976c "Brain Modelling". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 367-372.
- 1976d "Catastrophe Theory". En *Scientific American* 234:65-83.
- 1976e "Duffing's Equation in Brain Modelling". En *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* 12:207-214.
- 1976f "Euler's Buckling". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 373-395.
- 1976g "Gastrulation and Formation of Somites in Amphibia and Birds". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 396-401.
- 1976h "Prison Disturbances". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 402-406.
- 1976i "The Umbilic Bracelet and the Double-Cusp Catastrophe". En *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences*. Springer Lecture Notes in Mathematics 525. Springer-Verlag, Berlin. Pp 328-366.
- 1977a *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts. 674pp.
- 1977b "A Dialogue between a Biologists and a Mathematician". En *Biosciences Comunnications*.
- 1978 *An Extension Problem Involving Cusps*. University of Warwick Press. Coventry.
- s. f. *Gradients and Catastrophes in Developmental Biology*.

Zeeman, E. C., C. S. Hall, P. J. Harrison, G. H. Marriage y P. H. Shapland

- 1976 "A Model for Institutional Disturbances". En *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 29:66-80.



## BIBLIOGRAFÍA POR CAPÍTULO

### Capítulo I

Casti 1989; Hegel 1878; Gadamer 1984; Leach 1961; Lévi-Strauss 1981; Martínez 2000; Needham 1971; Spirkin 1969; Tainter 1988.

### Capítulo II

#### Sección 1:

Dieudonné 1969; Halmos 1950; Riesz y Nagy 1956; Royden 1968; Rudin 1966.

#### Sección 2:

Bartle 1966; Kelley 1955; Kuratowski 1933; Mayrhofer 1952; Milnor 1969; Narasimhan 1968; Sternberg 1964.

#### Sección 3:

Brickell y Clark 1970; Schubert 1964; Whitney 1955a, 1955b, 1957.

#### Sección 4:

Bourbaki 1970; Lang 1965; Mather 1968b; Narasimhan 1968;

#### Sección 5:

Conway 1973; Hörmander 1967; Lang 1965; Malgrange 1964; Marsden 1973; Mather 1968b; Nirenberg 1971.

#### Sección 6:

Hörmander 1967; Malgrange 1964; Mather 1968b; Nirenberg 1971.

#### Sección 7:

Bourbaki 1970; Lang 1965; Mather 1968b.

#### Sección 8:

Malgrange 1964; Milnor 1963; Narasimhan 1968; Whitney 1955a, 1955b.

#### Sección 9:

Boardman 1967; Mather 1973; Milnor 1958; Thom y Levine 1959.

#### Sección 10:

Arnold 1969; Lang 1968; Porteous 1962; Thom 1962.

## Sección 11:

Gunning y Rossi 1965; Mather 1968b; Milnor 1968; Tougeron 1968.

## Sección 12:

Battacharya *et al.* 1986; Hodge y Pedoe 1954; Lang 1958, 1964, 1965; Whitney 1957.

## Sección 13:

Tougeron 1968.

## Sección 14:

Mather 1969; Wasserman 1974.

## Sección 15:

Mather 1969; Morse y Cairns 1969; Thom 1975; Trotman y Zeeman 1976; Wasserman 1974.

## Sección 16:

Mather 1969; Wasserman 1974.

## Sección 17:

Godwig 1971; Thom 1975; Trotman y Zeeman 1976; Wasserman 1971, 1974.

## Capítulo III

Lowe 1985; Renfrew 1978, 1979; Tainter 1988; Thom 1975; Zeeman 1974b, 1974c, 1974e, 1976b, 1976h.

## Apéndice A

Casti 1989; Thom 1975.

## Apéndice B

Godwig 1971; Thom 1975; Trotman y Zeeman 1976; Wasserman 1971, 1974.

## Apéndice C

Casti 1989; Trotman y Zeeman 1976.

## Apéndice D

Palau 2002; Da Costa 1982; Da Costa y Lewin 1995; Da Costa y Wolf 1980.

## APÉNDICE A: ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

Para los propósitos que conciernen a esta tesis, se dice que una función  $f$  se “parece” a otra función  $\hat{f}$  cuando  $f$  está “cerca” de  $\hat{f}$  por alguna función de medida. De esa forma, los puntos críticos de  $f$  y  $\hat{f}$  poseen la misma estructura topológica (mínimos locales, máximos locales, puntos silla, entre otros).

Dicho de otra forma, se dice que las dos funciones  $f$  y  $\hat{f}$  son “semejantes” si a través de un cambio de coordenadas en el dominio y rango de  $f$  se puede transformar  $f$  en  $\hat{f}$ , y de forma converso. Así,

**Definición A.1:** Si  $f, \hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , entonces  $f$  se dice que es **equivalente** a  $\hat{f}$  si existen cambios de coordenadas  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

conmuta.

Siempre se asumirá que  $f, \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , y que  $g, h$  son difeomorfismos que preservan el origen (i. e., mapeos biyectivos, suaves, y normalizados  $g(0) = h(0) = 0$ ).

Una forma natural de obtener una función  $\hat{f}$  a partir de una función dada  $f$  es cuando  $f$  es un miembro de una **familia parametrizada** de funciones. Si se toma  $\alpha \in \mathbb{R}^k$  como un vector parámetro, entonces se puede definir la función  $f_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  para algún valor fijo de  $\alpha$ . Efectuando el mapeo  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ , se obtiene un nuevo elemento  $f_{\hat{\alpha}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  de la

familia de funciones. En estas circunstancias, se dice que  $f_{\hat{\alpha}}$  es equivalente a  $f_{\alpha}$  si se pueden encontrar cambios de coordenadas  $g$  y  $h$  como antes, así como algún mapeo suave  $a: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , tales que el diagrama anterior conmuta tomando  $f = f_{\alpha}$  y  $\hat{f} = f_{\hat{\alpha}}$ . En general, los puntos críticos de  $f_{\alpha}$  dependerán también del parámetro  $\alpha$ , por lo que se induce un mapeo

$$\chi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \ni \alpha \mapsto x^*(\alpha),$$

Donde  $x^*$  es un punto crítico de  $f$ . Son de alta importancia, tanto en la teoría y en la práctica, aquellos valores de  $\alpha$  para los cuales el mapeo  $\chi$  es discontinuo.

Por ejemplo, considérese la familia parametrizada de funciones  $f_{\alpha}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Los puntos críticos  $x^*(\alpha)$  son las raíces reales de la ecuación  $f'_{\alpha}(x) = x^2 + \alpha = 0$ . En consecuencia, se puede apreciar una discontinuidad de  $\chi$  cuando se pasa a través del punto  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha < 0$ , la familia posee dos puntos críticos de signo opuesto (uno máximo local, el otro un mínimo local), y estos dos puntos colapsan en  $\alpha = 0$  a un punto de inflexión, lo que luego genera el caso de no puntos críticos para  $\alpha > 0$ .

Ya se ha demostrado que cualquier función  $f_{\hat{\alpha}}$  en esta familia es equivalente a  $f_{\alpha}$  para un  $\hat{\alpha}$  en una vecindad local de  $\alpha$ , bajo la condición que dicha vecindad no incluya al origen. Así, el punto de bifurcación  $\alpha = 0$  divide a la familia  $f_{\alpha}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha x$  en tres clases disjuntas: funciones que poseen dos, uno o ningún punto crítico. Estas tres clases están representadas por los valores  $\alpha < 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\alpha > 0$ , respectivamente.

Ahora, ya se puede formular de manera precisa la noción de estabilidad de una función cuando se somete a cambios o perturbaciones suaves:

**Definición A.2:** Sean  $f$  y  $p$  funciones en  $C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Se dice que  $f$  es **estable** con respecto a las perturbaciones suaves  $p$  si  $f$  y  $f + p$  son equivalentes.

Es decir,  $f$  es estable con respecto a  $p$  si existen cambios de coordenadas  $g$  y  $h$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f+p} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

conmuta para todos los mapeos suaves  $f + p$  suficientemente cercanos a  $f$ . Para que esta definición tenga sentido, es necesario dotar de una topología al espacio  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  a manera de permitir la noción de cercanía de dos mapeos. La topología que se emplea usualmente es la **Topología de Whitney**, la cual define una  $\varepsilon$ -vecindad de  $f$  como aquella que consiste en todas las funciones que coinciden con  $f$  y todas sus derivadas hasta en una diferencia de  $\varepsilon$ , *i. e.*,  $\|\varphi^{(n)} - f^{(n)}\| < \varepsilon$ , para todo número natural  $n$ .

**Definición A.3:** Sea  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Entonces  $f$  es **estable** si existe una vecindad  $V_f$  en la Topología de Whitney, tal que para cada  $\hat{f} \in V_f$ ,  $\hat{f}$  es equivalente a  $f$ .

**Teorema A.4:** Las definiciones A.2 y A.3 son equivalentes.

En otras palabras.  $F$  es una función estable si  $f$  se comporta igual en toda una vecindad de ésta en la Topología de Whitney, salvo difeomorfismos.

Al considerar toda una familia parametrizada de funciones, la anterior definición de estabilidad se puede modificar de forma que incluya la variación no sólo en  $x$ , sino también en el parámetro  $\alpha$ . Sea  $f_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  una de tales familias de funciones, entonces:

**Definición A.5:** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^k$ . La función  $f_\alpha(x)$  es **equivalente** a  $q_\beta(x)$  si existe una familia de difeomorfismos  $g_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^k$ ; un difeomorfismo  $e : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ; y un mapeo suave  $h_\alpha : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{R}^m \\
 \downarrow g_\alpha & & \downarrow h_\alpha \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{q_\alpha} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

conmuta.

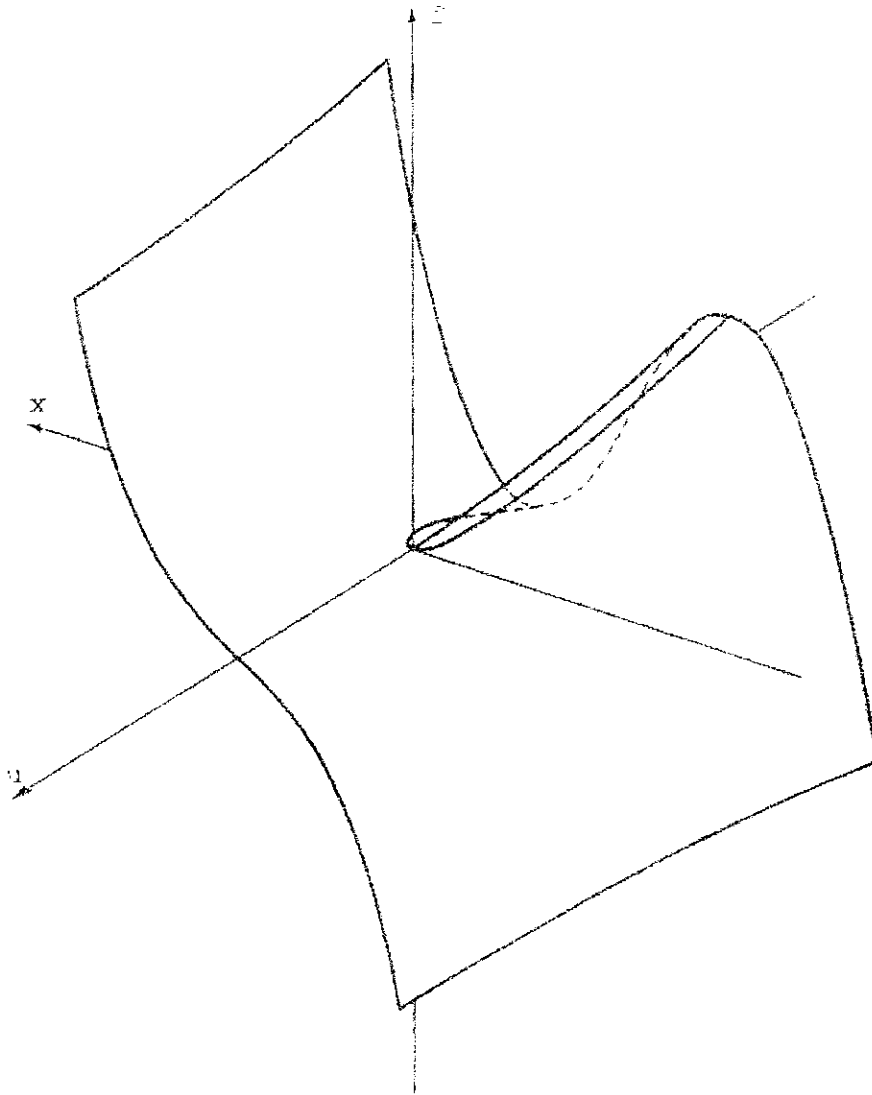
Si  $f$  y  $q$  son equivalentes, entonces  $q_\beta(x) = f_{c(\alpha)}(g_\alpha(x)) + h_\alpha(x)$ , para todo  $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  en una vecindad de  $(0, 0)$ .

Ahora el concepto de estabilidad estructural para familias de funciones:

**Definición A.6:** Sea  $f_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  una familia parametrizada de funciones. Se dice que  $f_\alpha$  es **estructuralmente estable** como familia si  $f_\alpha$  es equivalente a  $f_\alpha + q_\alpha$ , para cualquier familia parametrizada de funciones  $q_\alpha$  suficientemente pequeña.

## APÉNDICE B: GRÁFICAS DE LAS CATÁSTROFES ELEMENTALES

### B.1 El Doblez:



*Figura B.1: La catástrofe doblar.*

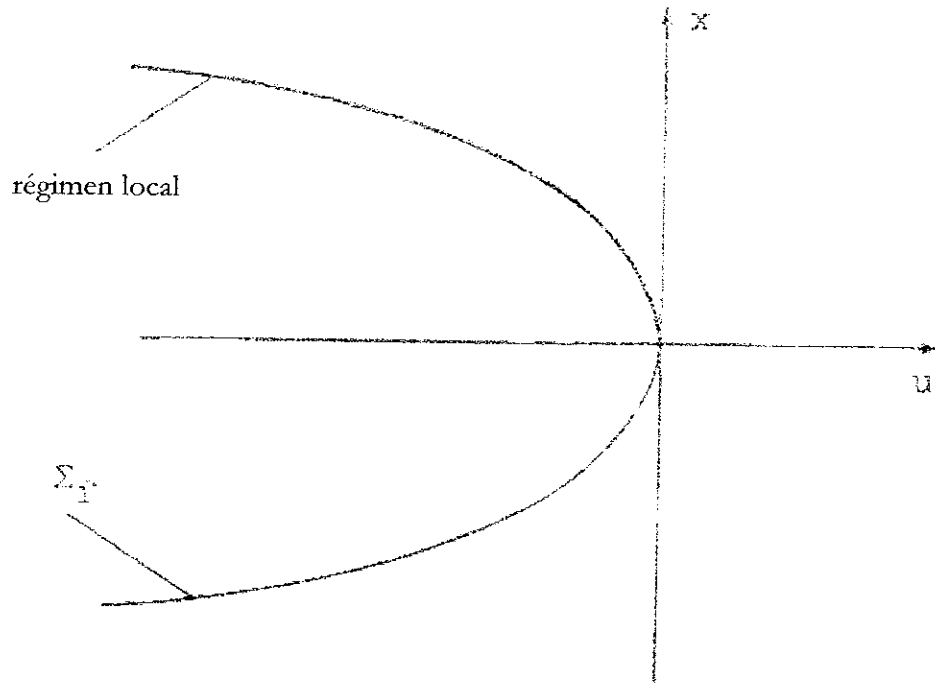


Figura B.2: El conjunto  $\Sigma_f$  en el plano  $(x, u)$  para la catástrofe doble.

## B.2 La Cúspide:

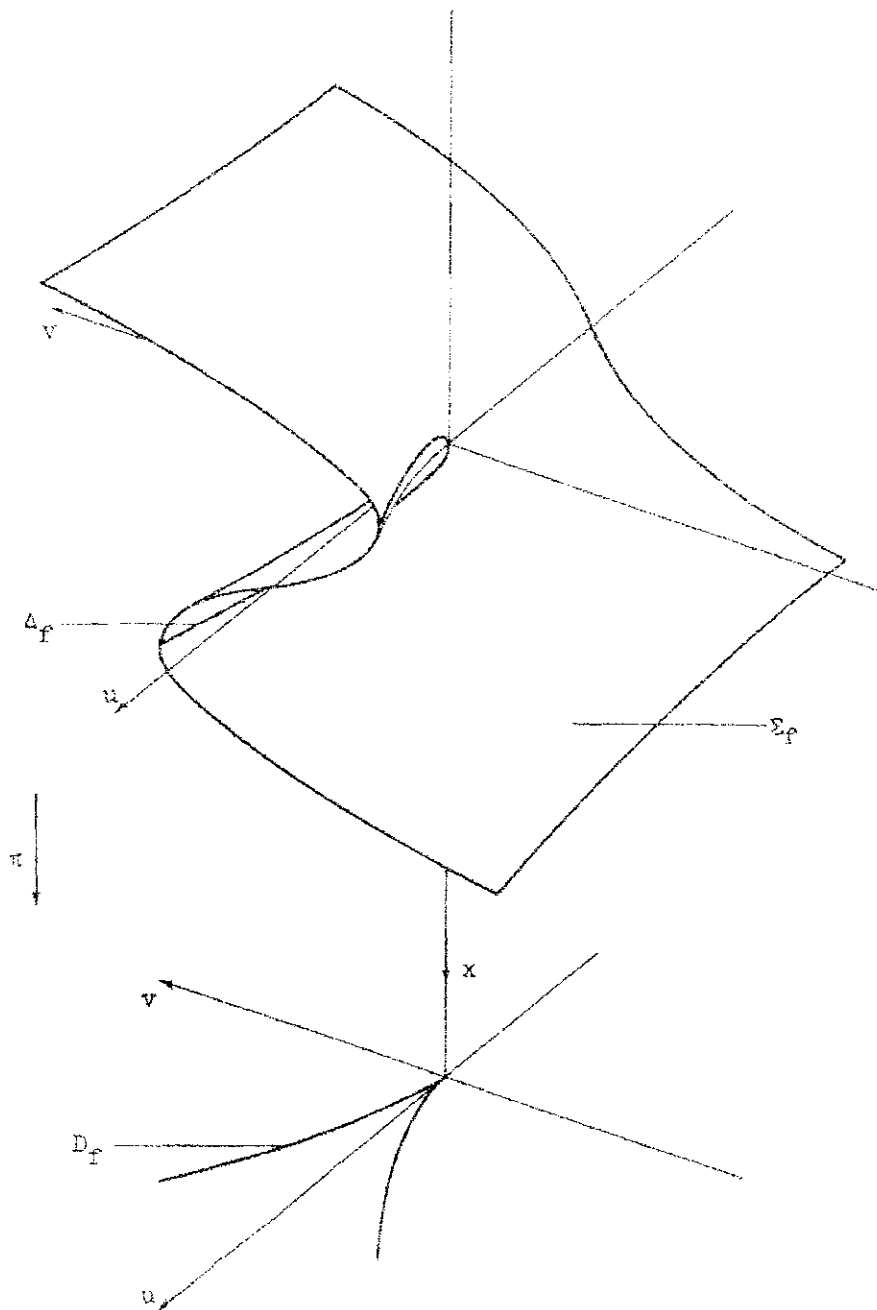


Figura B.3: El conjunto  $\Sigma_f$  para la catástrofe cúspide.

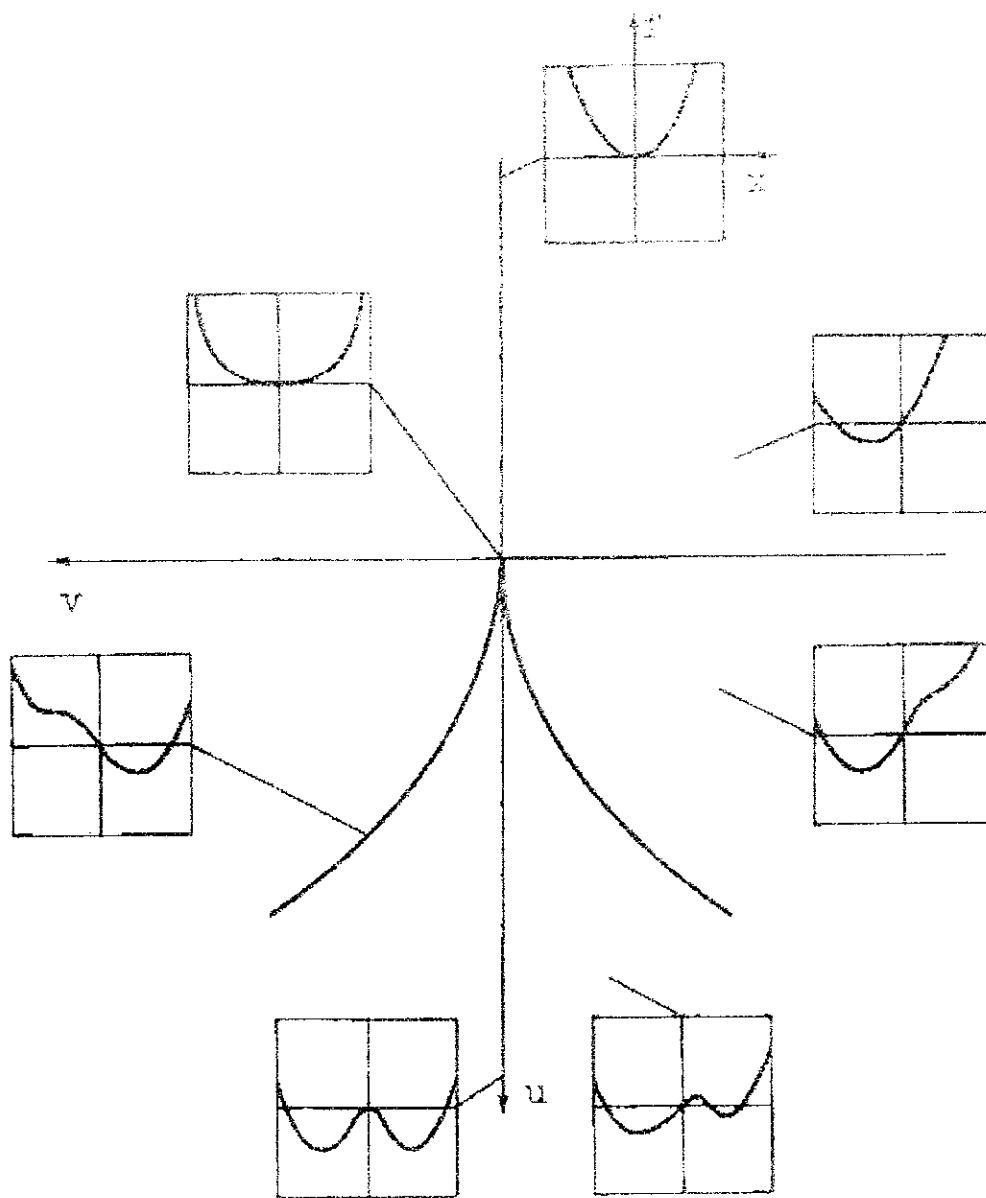


Figura B.4: Funciones de potencial en el plano  $(u, v)$  de la catástrofe cúspide.

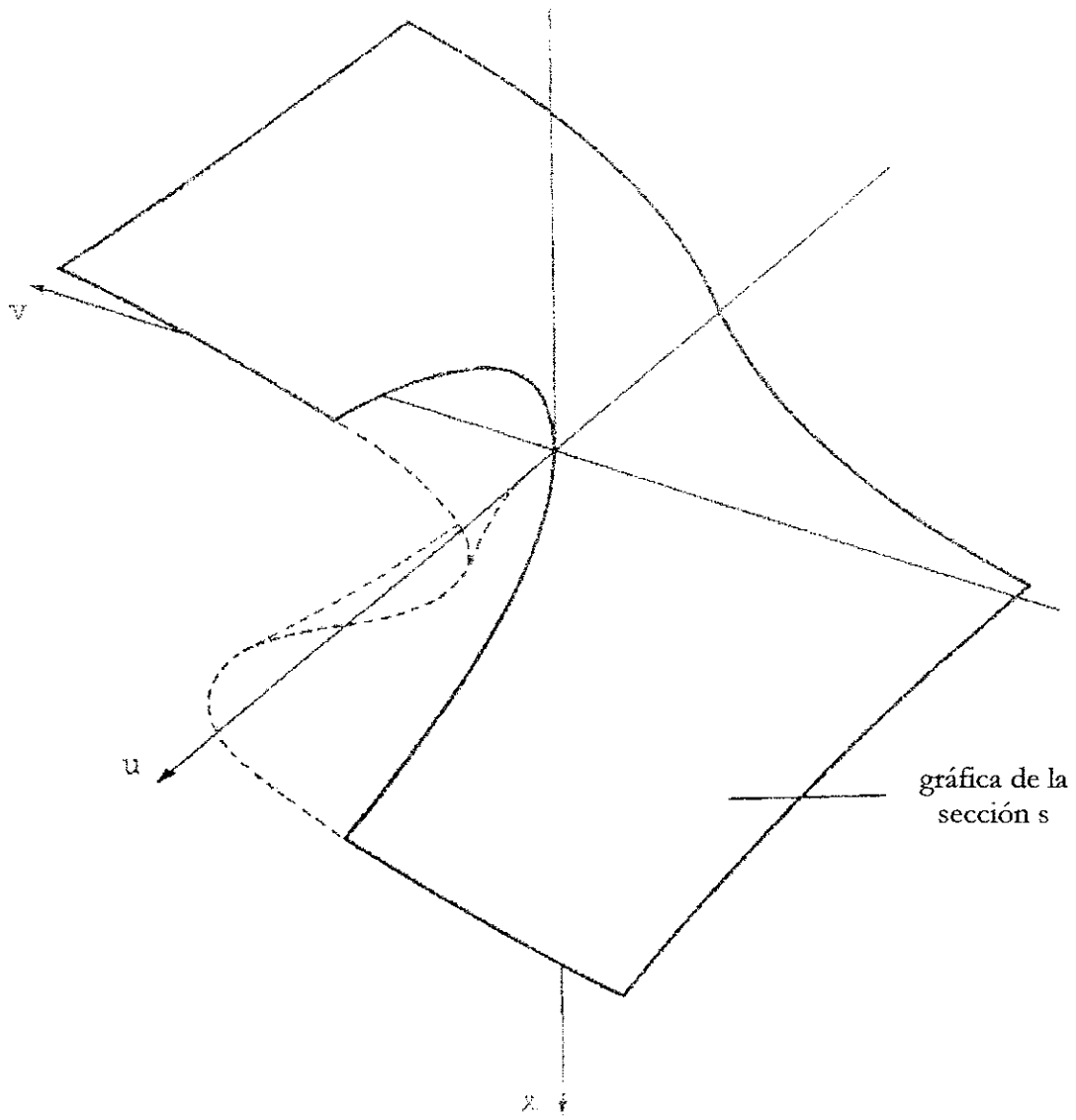


Figura B.5: Convención de Maxwell para la catástrofe cúspide.

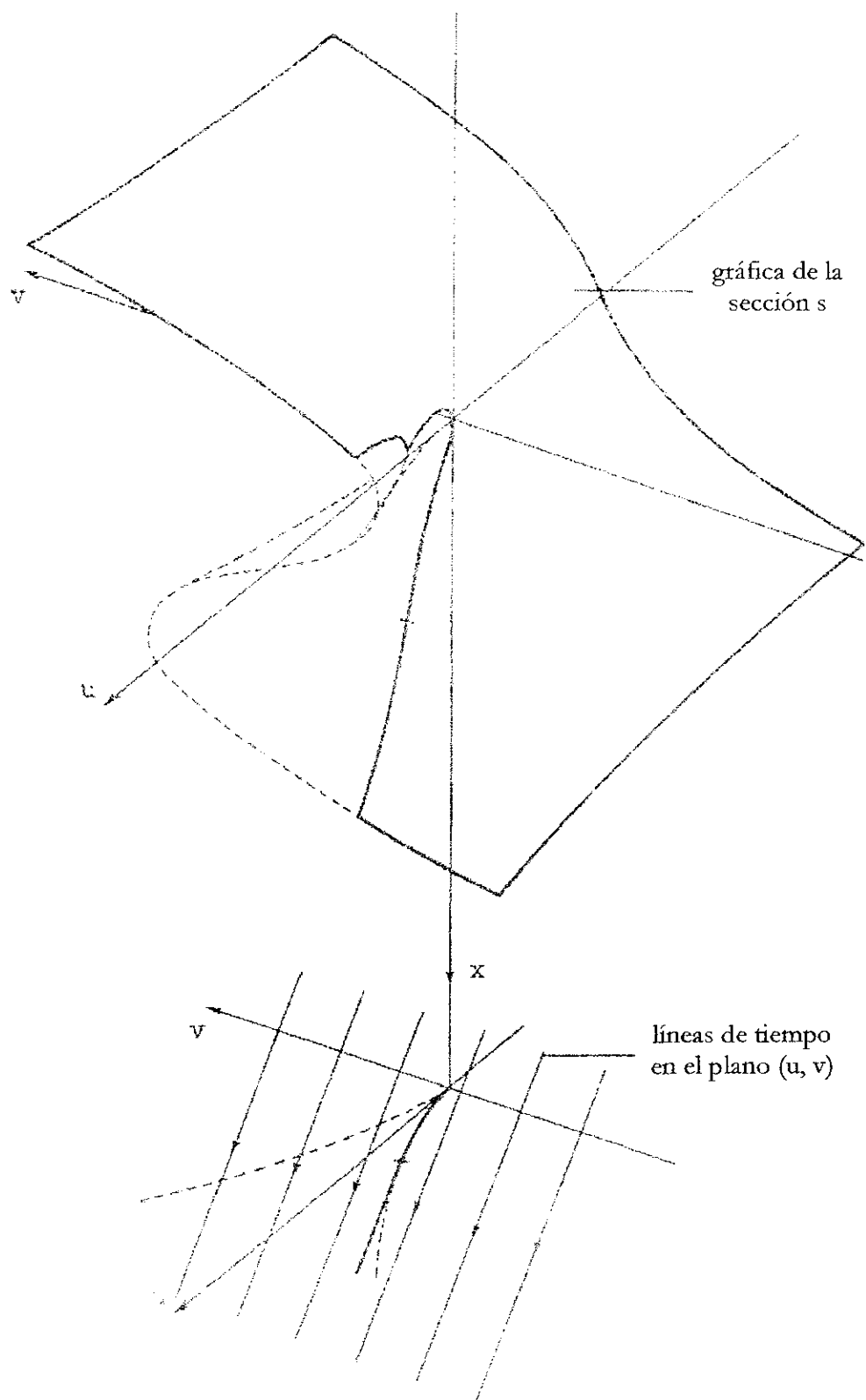


Figura B.6: Convención del retardo perfecto para la catástrofe cúspide.

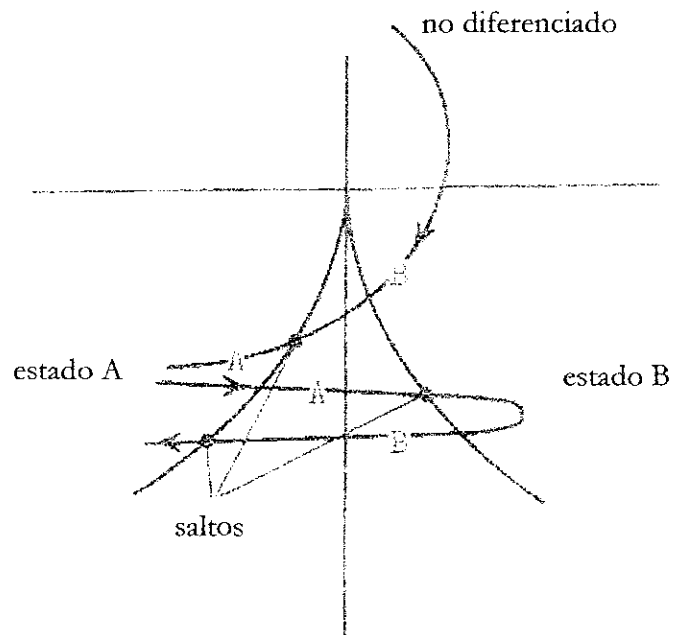


Figura B.7: Dos modelos posibles cuando el proceso se interpreta como una asignación de una sección.

### **B.3 La Cola de Golondrina:**

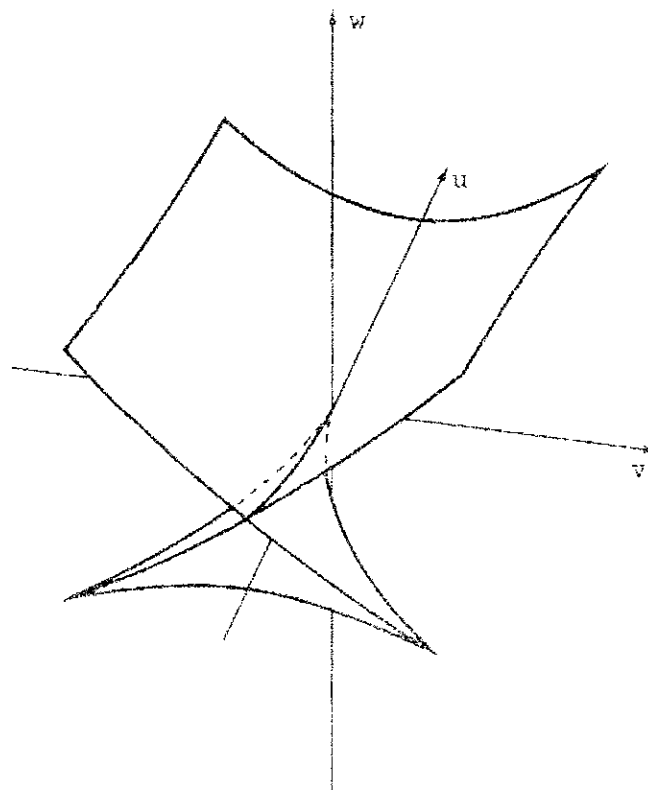


Figura B.8: El conjunto  $D_f$  para la cola de golondrina.

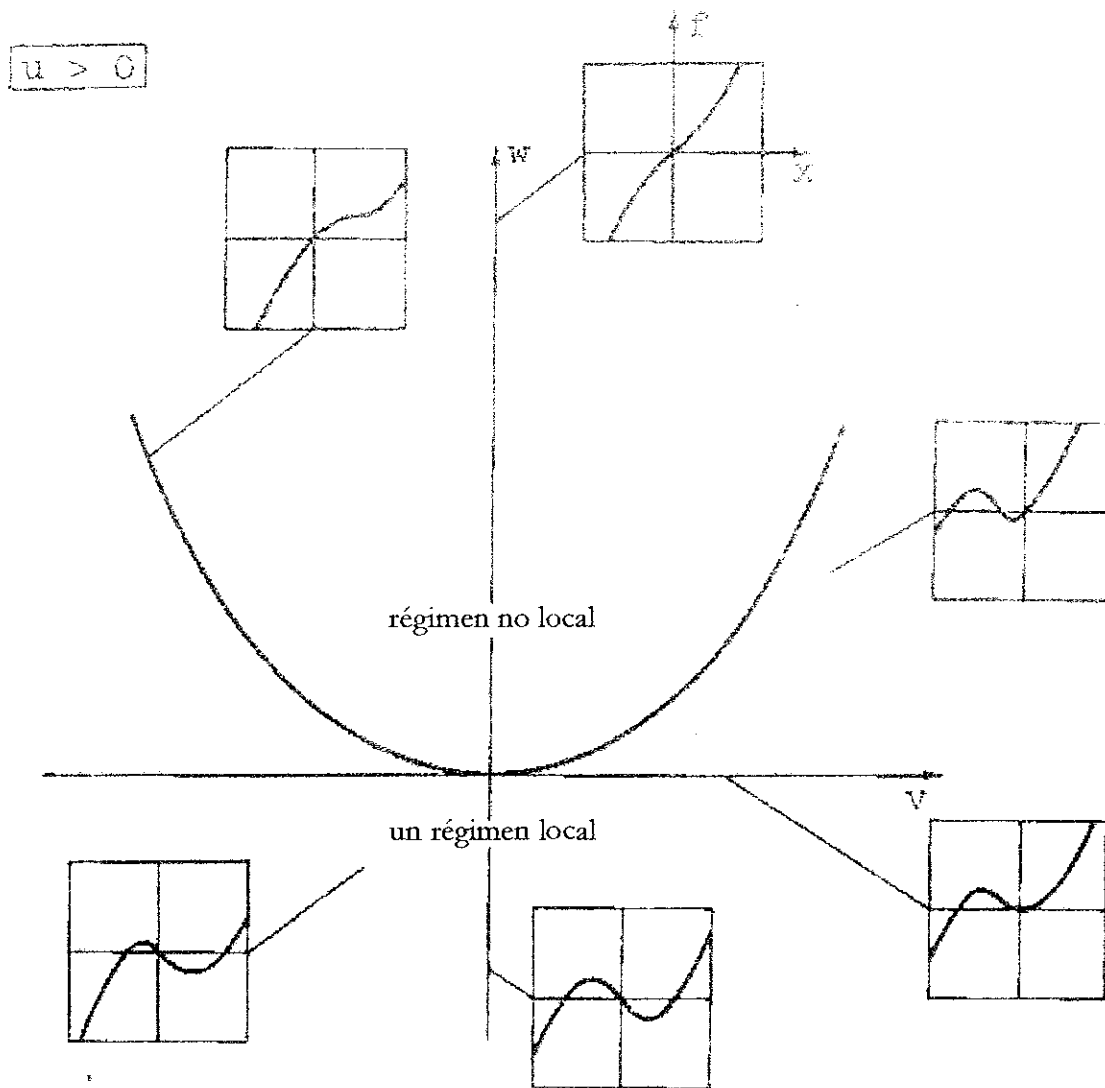


Figura B.9: Distribución de regímenes para la cola de golondrina, cuando  $u > 0$ .

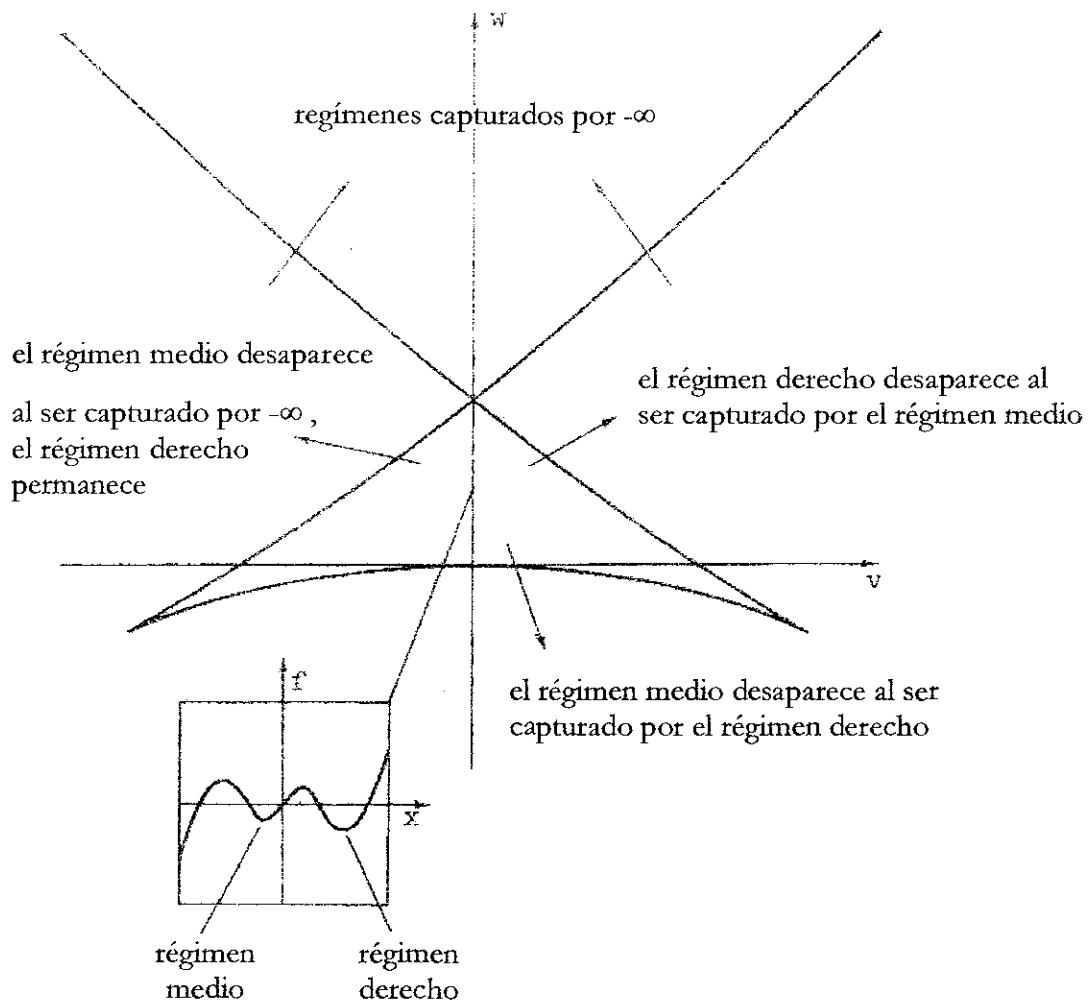


Figura B.10: Distribución de regímenes para la cola de golondrina, cuando  $u < 0$ .

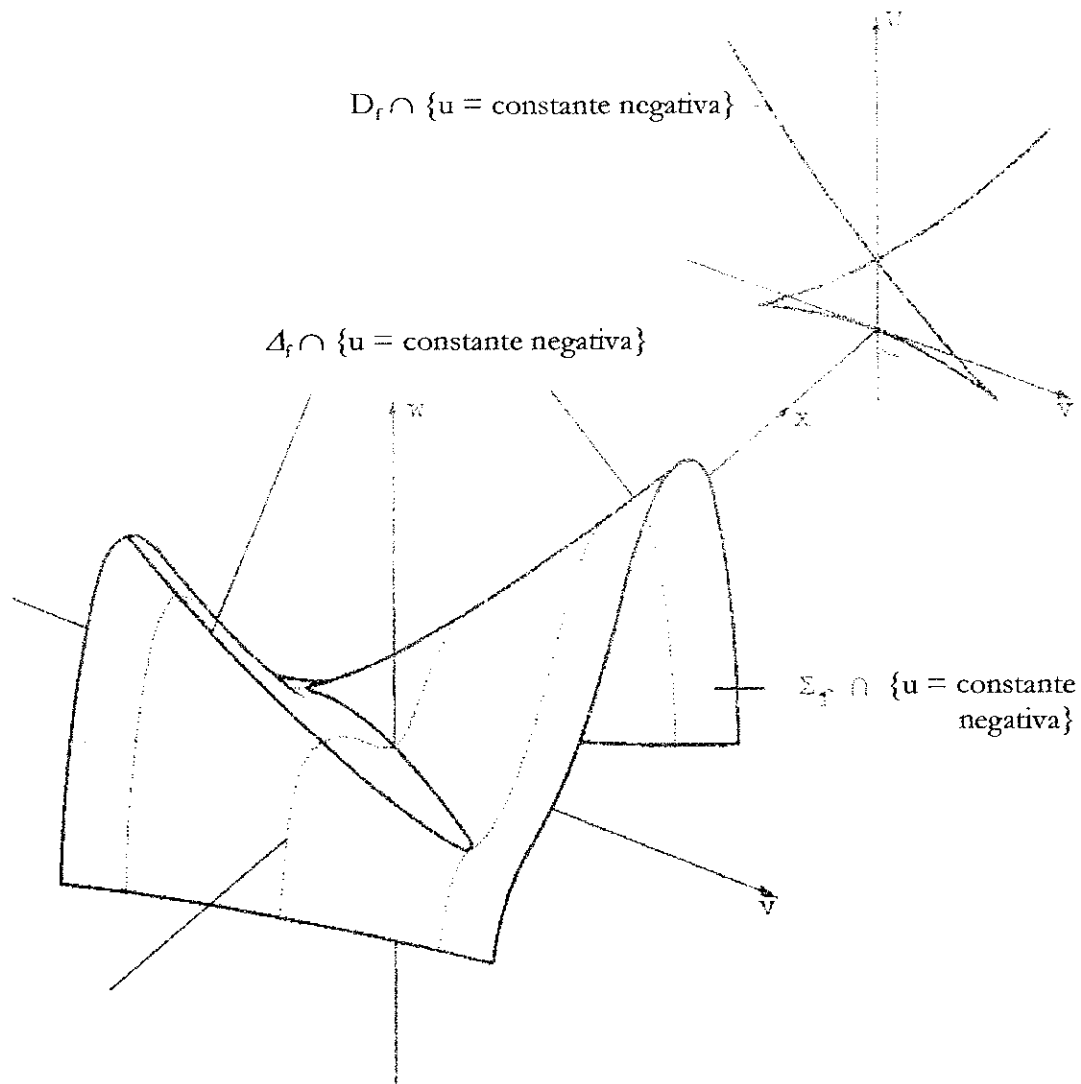


Figura B.11: El conjunto  $\Sigma_f$  para la cola de golondrina, cuando  $u < 0$ .

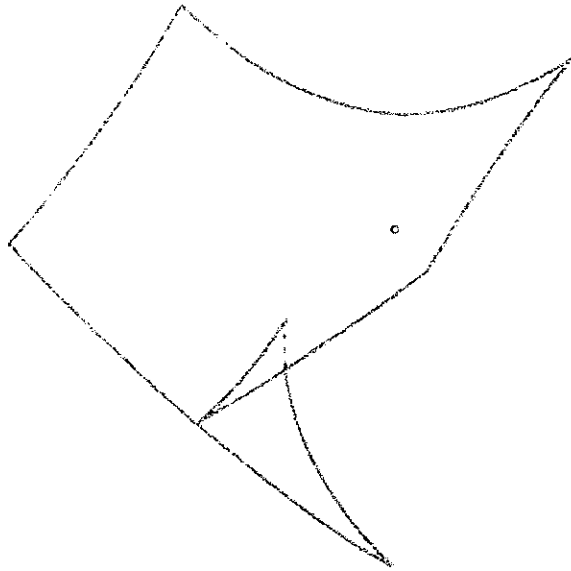


Figura B.12: Conjunto catástrofe con la convención del retardo perfecto, si el tiempo fluye paralelamente al eje  $w$ .

#### B.4 La Umbílica Hiperbólica:

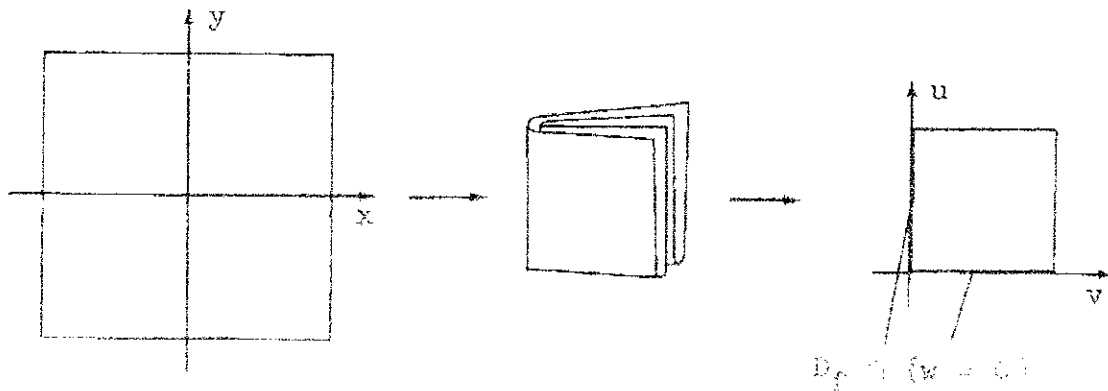


Figura B.13:  $\Sigma_f$  determina un mapeo semejante a un pañuelo doblado, cuando  $w = 0$ .

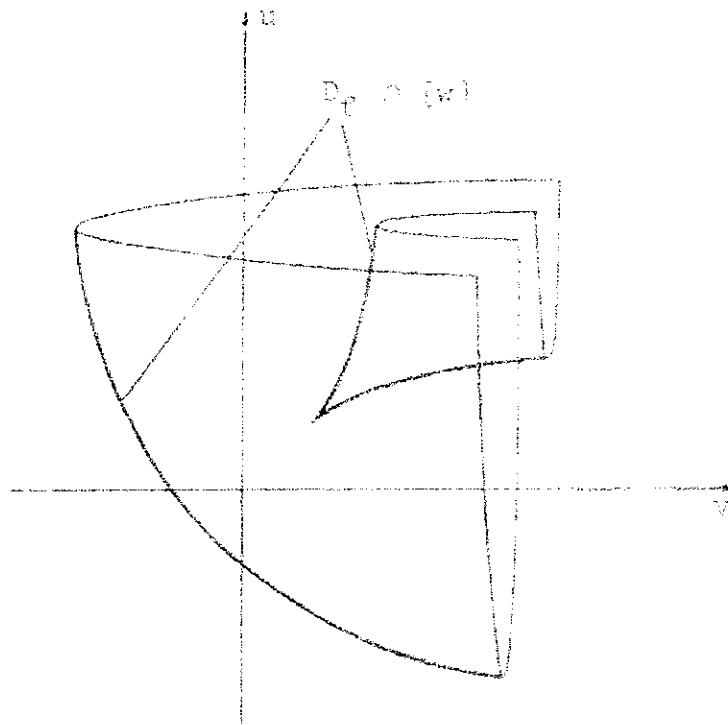


Figura B.14: Mapeo determinado por  $\Sigma_f$  en la umbilica hiperbólica, cuando  $w \neq 0$ .

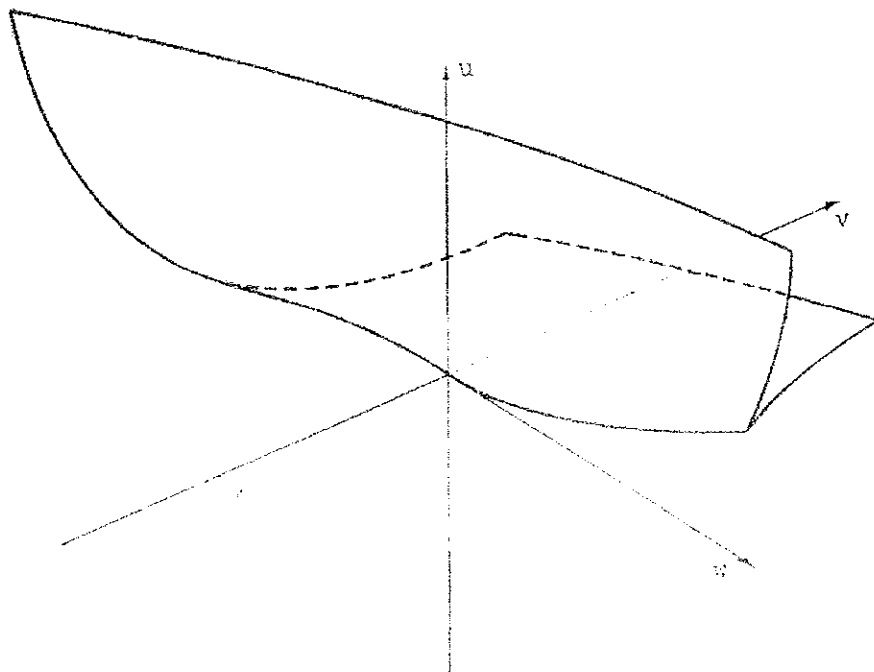


Figura B.15: La mitad del conjunto  $D_f$  para la umbilica hiperbólica.

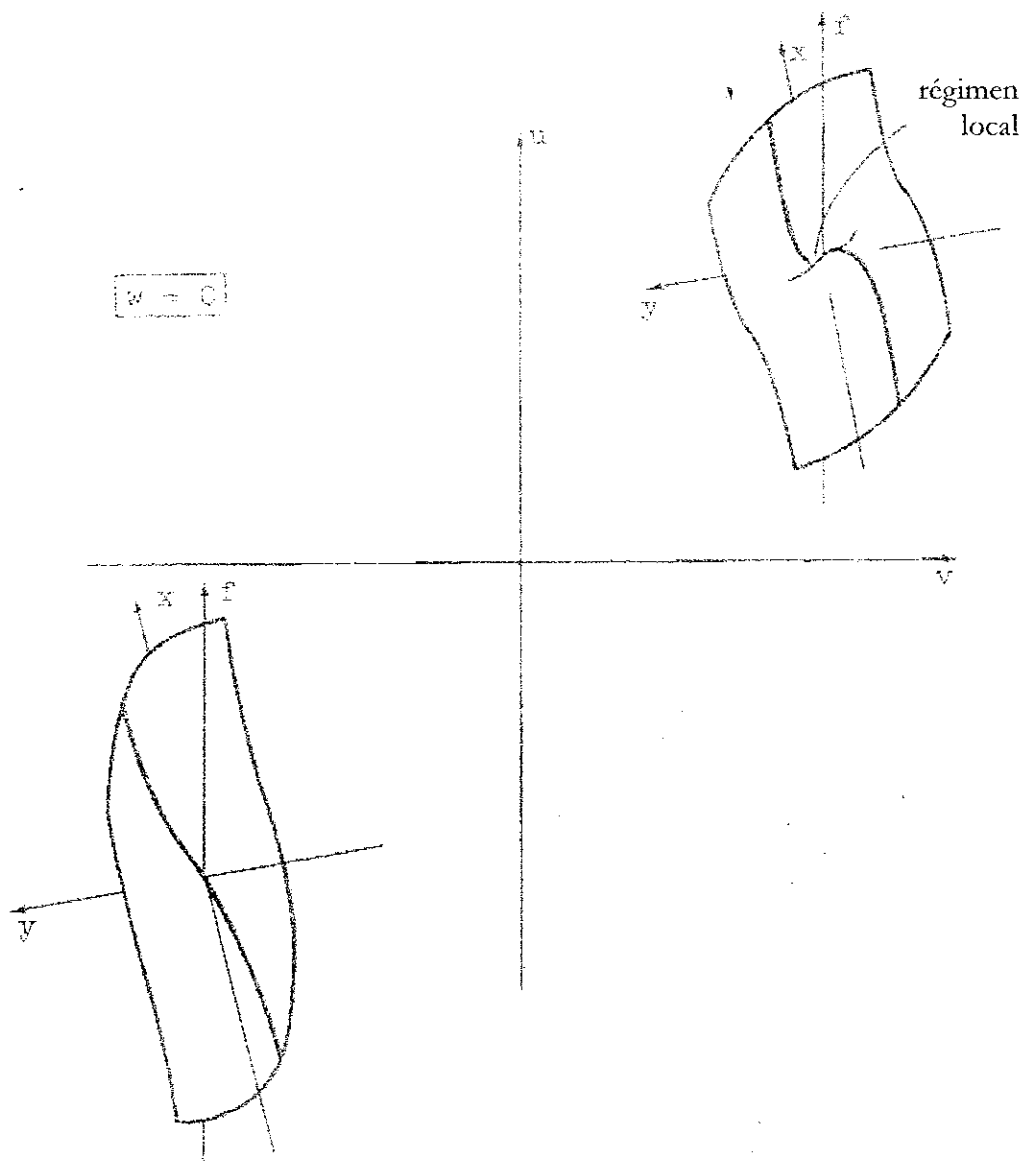


Figura B.16: Gráfica de  $f$  para  $u, v > 0$  ó  $u, v < 0$ , cuando  $w = 0$ .

### B.5 La Umbilica Elíptica:

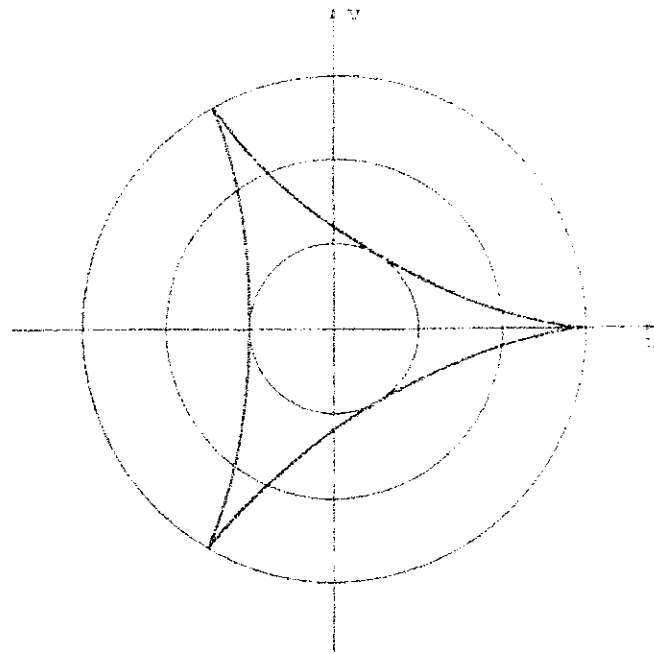


Figura B.17: Curva  $2e^6 + 2e^{i\theta}$ .

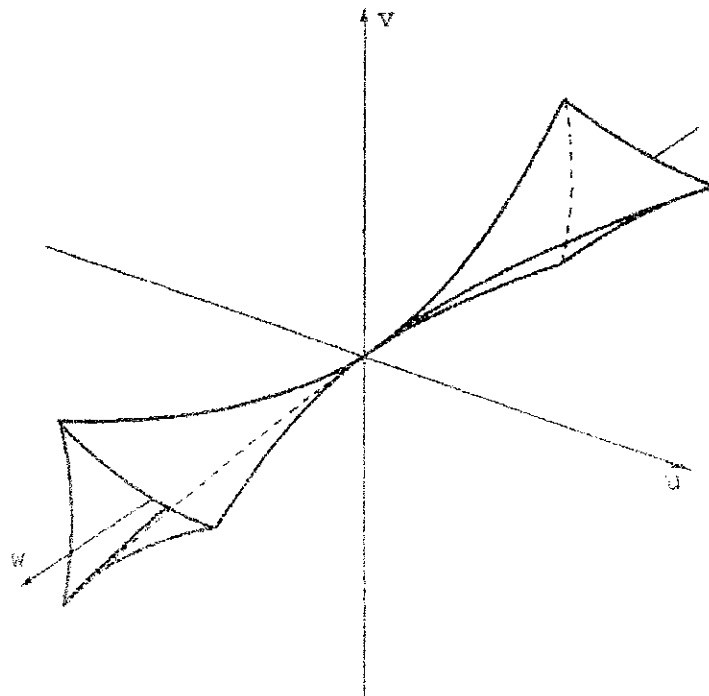


Figura B.18: El Conjunto  $D_1$  para la umbilica elíptica, cuando  $w = 1$ .

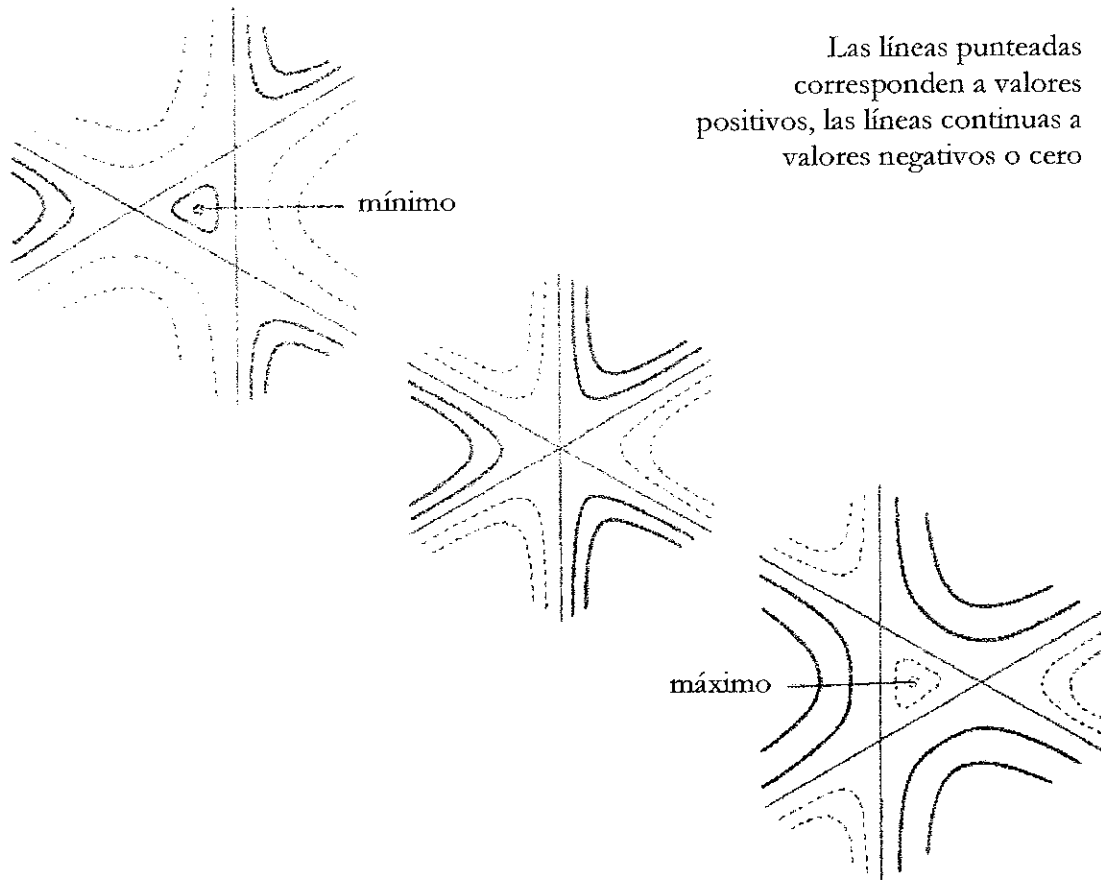


Figura B.19: Desdoble de la “silla de montar trilobular” de la gráfica  $f(x, y)$  para el punto  $u = v = w = 0$  cerca del eje  $w$  y dentro de  $D_f$ . El diagrama muestra las curvas de nivel.

### B.6 La Mariposa:

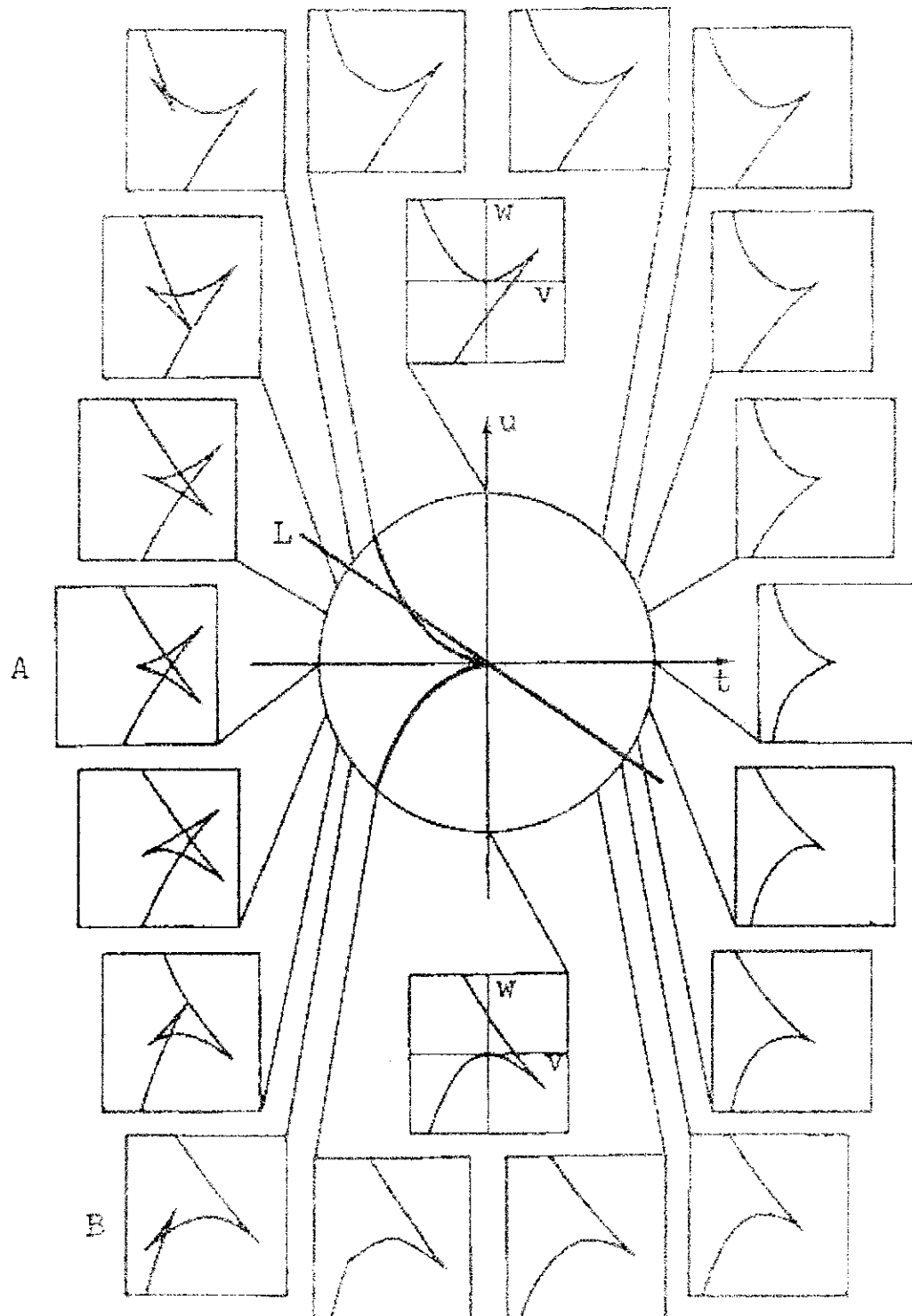


Figura B.20: Diagrama reloj del conjunto  $D_7$  para la catástrofe mariposa.

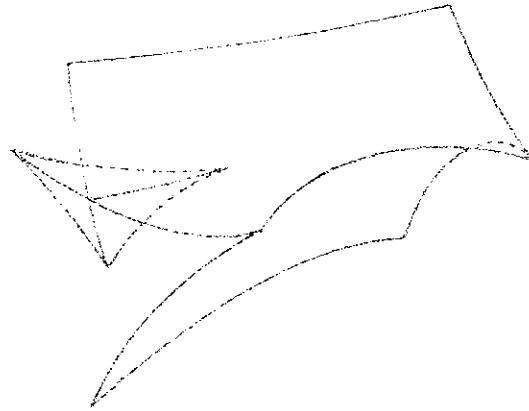


Figura B.21: Superficie de  $D_f$  generada a lo largo de la recta  $L$ .

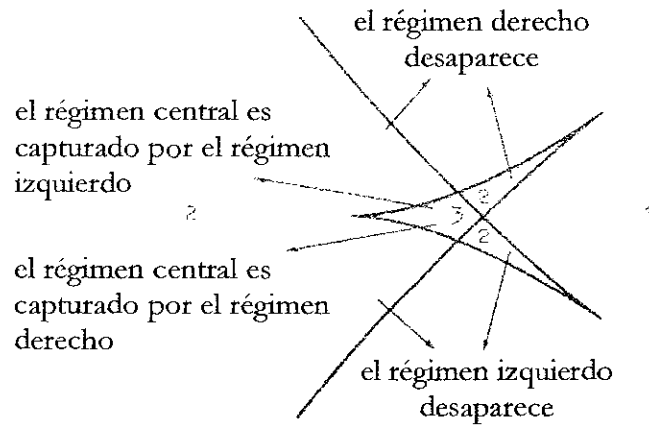


Figura B.22: Distribución de regímenes locales del subdiagrama A.

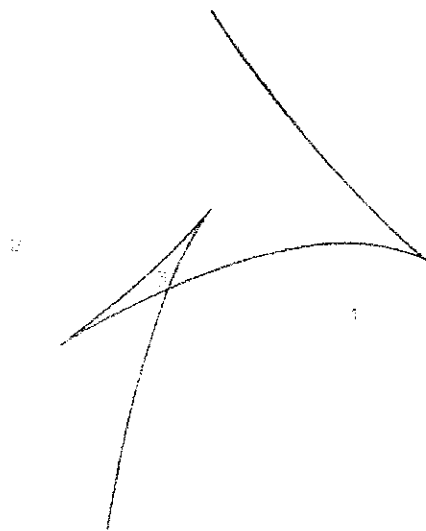


Figura B.23: Distribución de regímenes locales del subdiagrama B.

**B.7 La Umbílica Parabólica:**

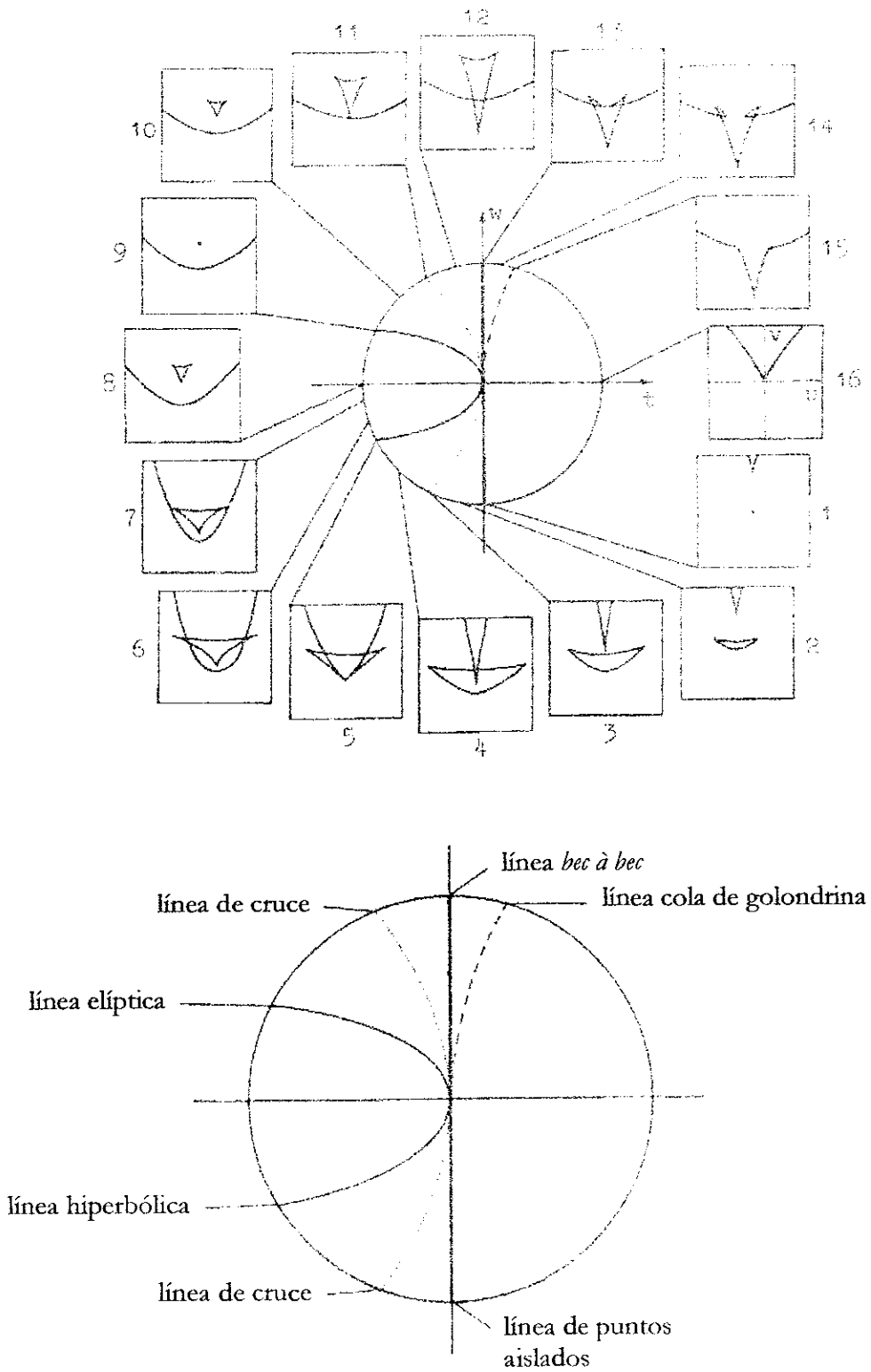


Figura B.24: Diagrama reloj para la úmbilica parabólica.

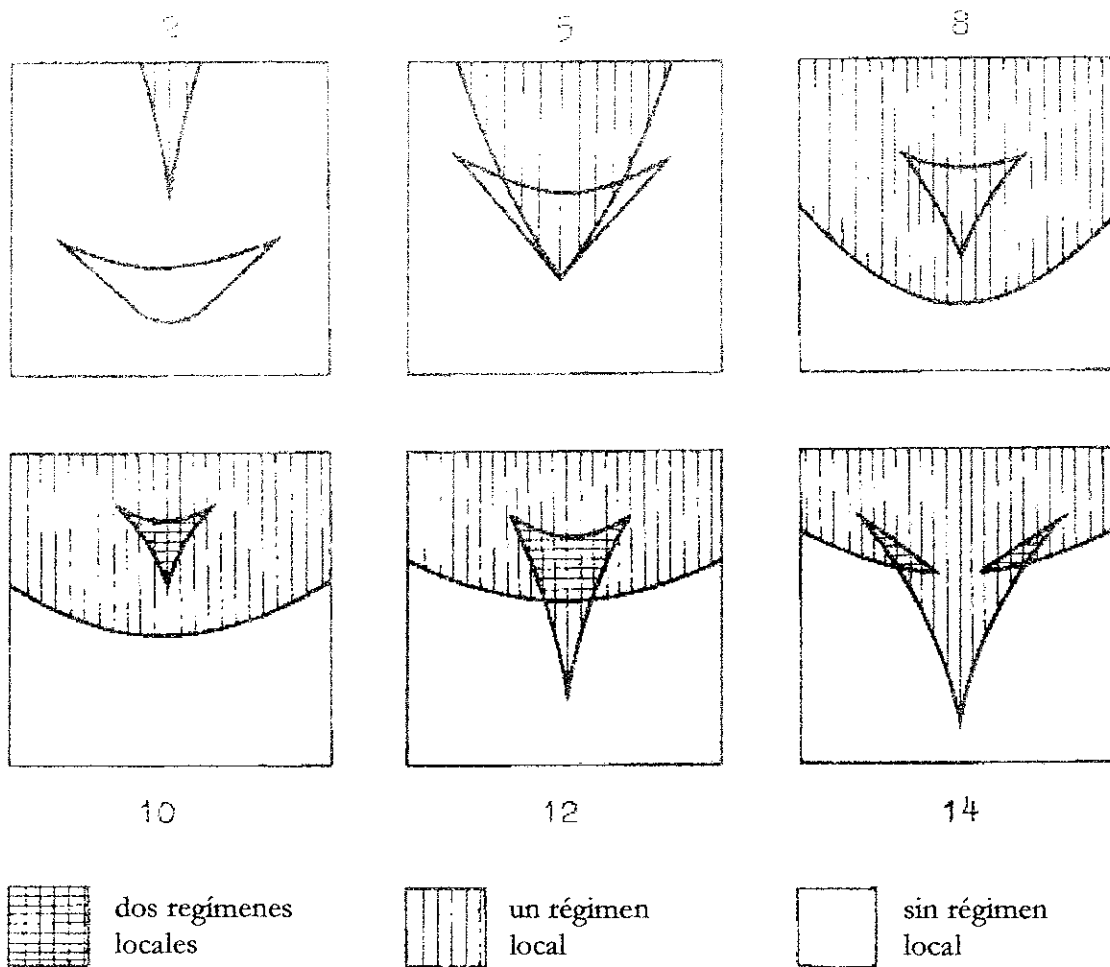


Figura B.25: Número de regímenes locales para la umbilica parabólica.

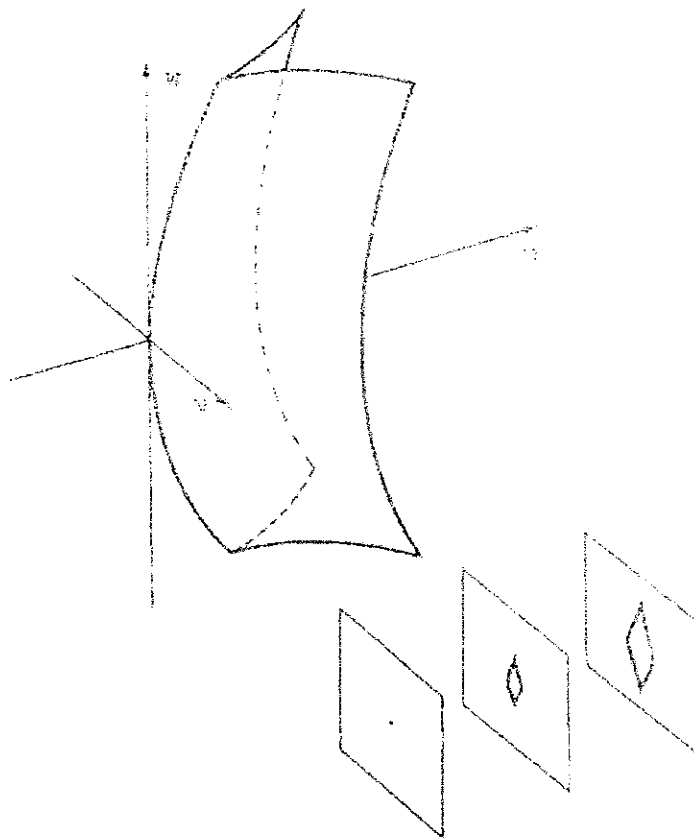


Figura B.26: El conjunto  $D_f$  del desdoble universal  $x^2 - (u - v^2)x^2 - vx$ .

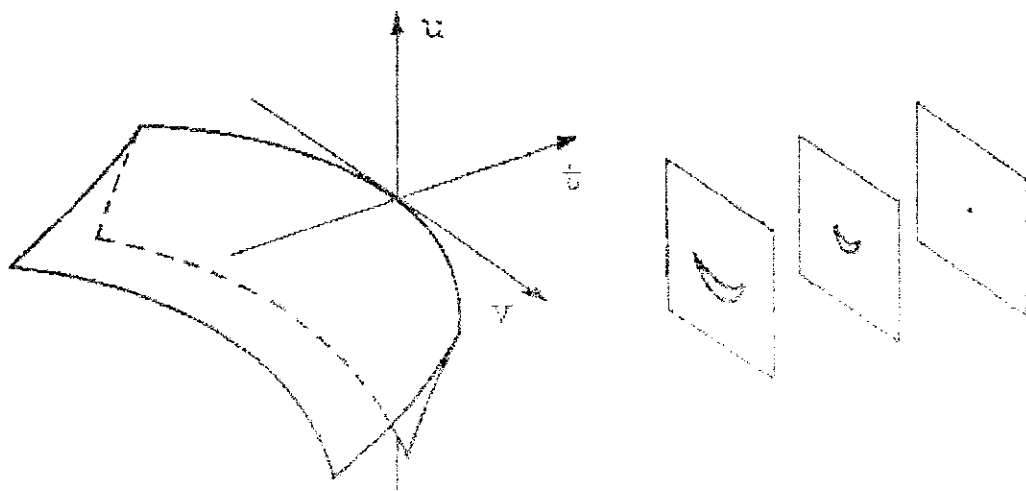


Figura B.27: El conjunto  $D_f$  del desdoble universal  $x^2 + ux^2 + vx + ux + v^2x$ .

## APÉNDICE C: CATÁSTROFES ELEMENTALES DE CODIMENSIÓN

### 5

#### El Iglú:

$$\text{Desdoble: } f(x, s, t, u, v, w) = x^7 + sx^5 + tx^4 + ux^3 + vx^2 + wx$$

$$\Sigma_f = \{(x, s, t, u, v, w) : 7x^6 + 5sx^4 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0\}$$

#### La Umbilica Simbólica:

$$\text{Desdoble: } f(x, y, s, t, u, v, w) = x^3 + y^4 + sxy^2 + ty^2 + uxy + vy + wx$$

$$\Sigma_f = \{(x, y, s, t, u, v, w) : 3x^2 + sy^2 + uy + w = 4y^3 + 2sxy + 2ty + ux + v = 0\}$$

#### La Segunda Umbilica Elíptica:

$$\text{Desdoble: } f(x, y, s, t, u, v, w) = x^2y - y^5 + sy^3 + ty^2 + ux^2 + vy + wx$$

$$\Sigma_f = \{(x, y, s, t, u, v, w) : 2xy + 2ux + w = x^2 - 5y^4 + 3sy^2 + 2ty + v = 0\}$$

#### La Segunda Umbilica Hiperbólica:

$$\text{Desdoble: } f(x, y, s, t, u, v, w) = x^2y + y^5 + sy^3 + ty^2 + ux^2 + vy + wx$$

$$\Sigma_f = \{(x, y, s, t, u, v, w) : 2xy + 2ux + w = x^2 + 5y^4 + 3sy^2 + 2ty + v = 0\}$$



## APÉNDICE D: EL SISTEMA DE LÓGICA DIALÉCTICA LD

Los sistemas de lógica paraconsistente que se han creado se caracterizan por construir teorías no-trivialmente inconsistentes, es decir, teorías en las cuales es posible que determinadas contradicciones sean válidas, sin que por ello cualquier fórmula lo sea. Así, problema principal que deben encarar estos sistemas es permitir que ciertas contradicciones sean válidas sin que la teoría se trivialice. Esta propiedad de trivialización (Triv) se suele representar de las dos siguiente formas:

$$(i) A, \neg A \vdash B$$

$$(ii) (A \wedge \neg A) \vdash B$$

Resulta que, aunque expresadas de distinta manera, ambas formas corresponden a la inferencia conocida bajo el nombre de *Ex contradictione quodlibet* (ECQ), la cual constituye la versión inferencial del principio de Duns Escoto,  $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ , el cual, en la lógica clásica, es equivalente a la paradoja negativa del condicional material  $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ . De ahí que un problema inmediato de los sistemas de lógica paraconsistente consiste en modificar el significado de la negación y del condicional a fin de validar contradicciones sin por ello aceptar Triv. En suma, todo sistema que pretenda constituir una lógica paraconsistente, debe satisfacer al menos las siguientes condiciones:

- El principio de no contradicción no debe ser válido, o sea  $\neq \neg(A \wedge \neg A)$ .
- La regla ECQ no debe ser una inferencia válida, es decir,  $(A \wedge \neg A) \neq B$ .
- Las leyes y reglas de la lógica clásica compatibles con (i) y (ii) deben continuar siendo válidas.

### A. CARACTERÍSTICA INTUITIVAS DE LD

En el artículo *Studies in Paraconsistent Logic I: The Dialectical Principle of the Unity of Opposites* (1980), da Costa y Wolf se ocupan de señalar que el sistema de lógica proposicional

paraconsistente LD no intenta representar todos los aspectos de la lógica dialéctica de Hegel y Marx, sino más bien, algunos rasgos esenciales. En particular, en el sistema LD se pretende mostrar el tipo de elucidación que desde la lógica formas es posible ofrecer respecto de la teoría dialéctica, en relación con el Principio de Unidad de los Opuestos (PUO). Para ello, se eligen tres de las seis interpretaciones que McGill y Parry dieron de este principio en 1948, a saber:

- (a) Un sistema o proceso concreto está simultáneamente determinado por fuerzas, tendencias, movimientos, dirigidos en sentido opuesto, *i. e.*, hacia A y no-A.
- (b) En todo *continuum* concreto, temporal o no, entre dos propiedades contiguas y opuestas, A y no-A, existe una zona intermedia, esto es, un tramo del *continuum* en el cual no es verdadero que toda cosa sea A o no-A.
- (c) En todo *continuum* concreto hay un tramo en el cual es verdadero que algunas cosas sean A y no-A.

La formulación (a) es descartada para el análisis, porque para McGill y Parry, no contradice a la lógica clásica, simplemente por el hecho de que no involucra ninguna afirmación lógica genuina. Por ello, deciden aceptar las dos restantes como interpretaciones adecuadas del mencionado principio dialéctico. Sin embargo, debe reconocerse que la formulación (a) pone de manifiesto que la dialéctica hegeliana traspasa los límites de la lógica clásica e indican que el PUO debe ser pensado como un criterio normativo general acerca de la estructura del mundo y de las teorías, tanto científicas como filosóficas. Es posible que este principio tenga, dentro de la lógica hegeliana, un estatus similar al Principio de no contradicción de la lógica aristotélica, en el sentido de que este enfatiza más los aspectos ontológicos, que los estrictamente lógicos. En efecto, Aristóteles dedica el libro *Γ* de la *Metafísica* casi totalmente al tratamiento del Principio de no contradicción, y lo formula desde una perspectiva ontológica, afirmando que “lo mismo no puede pertenecer y no pertenecer conjuntamente a lo mismo bajo el mismo aspecto”. Más aún, en los *Segundos Analíticos* afirma que este principio no es necesario para ninguna demostración, sino que se encuentra en el fundamento mismo de las cosas, por ello es “verdadero” para todas las cosas que son.

Según da Costa y Wolf, si se quiere construir un sistema paraconsistente que dé cuenta del PUO bajo las interpretaciones aceptadas, y al mismo tiempo, satisfaga las condiciones expuestas con anterioridad, éste debe contener las siguientes particularidades:

- (i) Poseer un tipo de negación más débil que la negación de la lógica clásica, designada por el signo  $\sim$ , definida sólo por las leyes de De Morgan, la cual recibirá el nombre de **negación concreta o negación débil**.
- (ii) Poseer una constante, denotada por  $^{\circ}$ , llamada **estabilizador**, para referirse a aquellas fórmulas que se “comportan bien”, es decir, que se comportan de acuerdo a la lógica clásica, de tal forma que  $A^{\circ}$  se interprete como aceptando la ley clásica  $\neg(A \wedge \neg A)$ .
- (iii) Definir las conectivas proposicionales  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  y  $\Leftrightarrow$  mediante matrices veritativo funcionales finitas.

Como se mostrará más adelante, la introducción de la negación débil  $\sim$  conduce directamente a la satisfacción de las dos primeras condiciones exigidas para una lógica paraconsistente, ya que en el sistema resultarán inválidos el Principio de Doble Negación, el Principio del Tercero Excluido, la equivalencia entre éste y el Principio de No Contradicción y la regla ECQ. El rechazo de la doble negación se hace evidente, ya que en el proceso dialéctico, la tesis  $A$ , deviene en su antítesis  $\sim A$ , y a su vez ésta deviene en la síntesis  $\sim\sim A$ , la cual no es equivalente a  $A$ . Además, como el rechazo de la doble negación arrastra el rechazo de la Ley de Contraposición (dado que la hipótesis del absurdo que implica su prueba es  $\sim\sim A$ ), tampoco la fórmula  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$  es teorema. En opinión de da Costa y Wolf, el hecho de que esta ley no pueda ser un principio dialéctico constituye una de las contribuciones que la lógica paraconsistente hace respecto de la dialéctica. La eliminación de esta ley no proviene del modelo elegido, sino del hecho de que en este sistema, si a los axiomas de LD se les adicionan las leyes de contraposición y doble negación, el sistema LD “colapsa” en el cálculo proposicional clásico, *i. e.*, LD se hace indiferenciable de LC.

## B. LA FORMULACIÓN DE LD AL ESTILO HILBERT

LD se construye axiomáticamente, es decir, como un cálculo al estilo Hilbert. El lenguaje  $L$  de LD es un lenguaje proposicional con  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\sim$  y  $\circ$  como constantes lógicas primitivas y las reglas de formación de fórmulas correspondientes. Su relación de consecuencia está determinada por la base deductiva  $Q_{LD}$ . Esta base deductiva se construye en tres etapas.

Primera etapa: se parte de un conjunto de axiomas equivalente a la lógica proposicional positiva  $H_+$ , o sea:

- LD1             $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
- LD2             $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
- LD3             $A \Rightarrow B, A \vdash B$             (MP)
- LD4             $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$
- LD5             $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow B$
- LD6             $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$
- LD7             $\vdash B \Rightarrow (A \vee B)$
- LD8             $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$
- LD9             $\vdash (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$
- LD10            $\vdash A \vee (A \Rightarrow B)$

Nótese que LD3, aunque figura como axioma, es la regla de inferencia *Modus Ponens*. Dado que en LD vale el Teorema de la Deducción TD, si  $\Gamma, A \vdash B$  entonces  $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$ , y, aunque por usar reglas metalingüísticas no se incluya la Regla de Sustitución Uniforme, ésta también se satisface. Entonces, la base deductiva de  $Q_{LD+}$  es igual a la base deductiva de  $Q_{H_+}$ . A su vez, debe aclararse que la base deductiva de LD podría haber sido cualquier otra

variante del fragmento positivo de la lógica clásica, inclusive podría ser sustituido por la base deductiva  $R_+$  del sistema R de A&B, lo cual produciría como resultado un sistema de lógica paraconsistente relevante.

Segunda etapa: La base deductiva  $LD_+$  es enriquecida con el signo  $\sim$  para la negación concreta, la cual, como ya se dijo, es caracterizada mediante las leyes de De Morgan, agregando dos axiomas más:

$$LD11 \quad \vdash \sim(A \wedge B) \Leftrightarrow (\sim B \vee \sim A)$$

$$LD12 \quad \vdash \sim(A \vee B) \Leftrightarrow (\sim B \wedge \sim A)$$

Al fragmento de LD cuya base deductiva es LD1-LD12, se denota por  $LD_-$ .

Tercera etapa: Para obtener el sistema de LD, el lenguaje de  $LD_-$  se enriquece con la constante primitiva  $^\circ$ , que cumpla la función de un estabilizador, en el sentido ya señalado de que, si  $A^\circ$  es verdadera, entonces A cumple con todas las leyes de la lógica clásica, es decir, la fórmula A “se comporta bien”. De ahí que los autores propongan la interpretación alternativa de  $^\circ$  directamente como  $\neg(A \wedge \neg A)$ . La base deductiva de LD,  $Q_{LD}$ , se completa con seis axiomas más, a saber:

$$LD13 \quad \vdash A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow ((A \Rightarrow B)^\circ \wedge (A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (\sim A)^\circ)$$

$$LD14 \quad \vdash A^\circ \wedge B^\circ \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \sim B) \Rightarrow \sim A))$$

$$LD15 \quad \vdash A^\circ \Rightarrow (\sim \sim A \Rightarrow A)$$

$$LD16 \quad \vdash A^{\circ\circ} \Leftrightarrow A^\circ$$

$$LD17 \quad \vdash A^\circ \Rightarrow ((A \vee \sim A) \wedge ((A \Rightarrow B) \vee (\sim A \Rightarrow B)))$$

$$LD18 \quad \vdash \sim(A^\circ) \Rightarrow (((A \vee \sim A) \Rightarrow B) \vee (A \wedge \sim A))$$

Es interesante destacar el significado de algunos de estos axiomas. El axioma LD13 dice que si las fórmulas A y B son estables, entonces también lo son sus elementos componentes, es decir, las conectivas de LD se comportan como las conectivas clásicas y, por lo tanto, valen para ellas las mismas leyes clásicas. LD14 y LD15 son claves para distinguir el

comportamiento de la negación dentro de una fórmula que tiene estabilizador, ya que LD14 afirma que si  $A$  y  $B$  son estables, entonces, si  $A$  implica una contradicción  $B \wedge \sim B$ , entonces  $A$  es falsa; y LD15 establece que si una fórmula es estable, entonces para ella rige la Regla de Eliminación de la Doble Negación. LD16 afirma que  $A^\circ$  es estable si, y sólo si,  $A$  es estable. LD17 asegura que si una fórmula  $A$  es estable, entonces, al igual que en LC, vale el PTE y que  $A$  y  $\sim A$  no pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas. Finalmente, LD18 dice que si una fórmula  $A$  carece de estabilizador,  $A$  y  $\sim A$  pueden ser ambas verdaderas o ambas falsas.

Ahora, algunos resultados metateóricos de LD:

I. Todos los teoremas y reglas válidas de  $H_+$  (i. e.,  $LC_+$ ) son válidos en LD. Este resultado es obvio ya que LD es una extensión del fragmento positivo de LD.

II. Los siguientes esquemas válidos de LC no son válidos en LD:

1.  $\# A \Leftrightarrow \sim\sim A$  (DN)
2.  $\# A \vee \sim A$  (PTE)
3.  $\# (A \wedge \sim A) \Rightarrow B$  (ECQ)
4.  $\# (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\sim A \vee B)$
5.  $\# \sim(A \wedge \sim A)$  (PNC)
6.  $\# (A \Rightarrow B) \Rightarrow \sim(A \wedge \sim B)$
7.  $\# A \Rightarrow (\sim A \Rightarrow B)$  (Paradoja Negativa)
8.  $\# (A \Rightarrow \sim A) \Rightarrow \sim A$
9.  $\# (\sim A \Rightarrow A) \Rightarrow A$
10.  $\# (\sim B \Rightarrow \sim A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$  (Contraposición clásica)
11.  $\# (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\sim B \Rightarrow \sim A)$  (Contraposición intuicionista)

III. En LD son válidas, entre otras, las siguientes fórmulas e inferencias:

1.  $\vdash (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

2.  $\vdash (A^\circ \wedge (A \wedge \sim A)) \Rightarrow B$
3.  $\vdash (A^\circ \wedge (A \wedge \sim A)) \Rightarrow \sim B$
4.  $A^\circ \vdash A^\circ \vee \sim A^\circ$
5.  $B^\circ \vdash (A^\circ \Rightarrow B^\circ) \Rightarrow ((A^\circ \Rightarrow \sim B^\circ) \Rightarrow \sim A^\circ)$
6.  $A^\circ \vdash A^\circ \Rightarrow (\sim A^\circ \Rightarrow B^\circ)$

IV. Es posible definir en LD la negación clásica de la siguiente forma:

Def 1:  $\perp = A^\circ \wedge A \wedge \sim A$  (donde A es una fórmula atómica proposicional fija).

Def 2:  $\neg A = A \Rightarrow \perp$ , donde la constante  $\perp$  no pretende denotar una contradicción fuerte, sino que mediante ella se significa que  $\neg$  obedecerá las leyes de la lógica clásica.

V. Son teoremas de LD, entre otros, las siguientes fórmulas que involucran la negación clásica:

1.  $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$
2.  $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
3.  $\vdash A \vee \neg A$
4.  $\vdash A^\circ \Rightarrow (\neg A \Leftrightarrow \sim A)$

Para el caso, interesa solamente hacer algunas observaciones sobre el fragmento que involucra a la negación concreta  $\sim$ , o sea,  $LD_{\sim}$ . El conjunto de las fórmulas no válidas de  $LD_{\sim}$  que ni la negación de  $LD_{\sim}$  es la negación clásica, ni el condicional de  $LD_{\sim}$  es el condicional material. En particular, da Costa y Wolf sostienen que la negación cumple con los requisitos esenciales de la lógica dialéctica, en el sentido de no aceptar la definición de la falsedad como la negación concreta de la verdad. En otras palabras, mientras la negación clásica  $\neg A$  se lee directamente como “A es falsa”, la negación concreta  $\sim A$  debe leerse como “A no es verdadera”. Asimismo, puesto que el condicional de LD no es definible en términos de la negación y la disyunción, ni en términos de la conjunción y negación, el condicional de LD es un signo lógico primitivo. En suma, dado que las definiciones del

condicional en términos de las restantes conectivas involucran la Ley de Doble Negación, éstas no pueden ser leyes de LC, *i. e.*, el condicional de LD no es el condicional material debido a que la negación  $\sim$  no es la negación clásica. Para efectos de comprender la adecuación del sistema LD al fin que se propusieron da Costa y Wolf, se hace necesario exponer su semántica.

### C. LA SEMÁNTICA DE LD

En la semántica de LD se define una función de valuación  $V$  que hace corresponder a cada fórmula de LD un elemento del conjunto  $\{0, 1\}$ , en forma similar a la función de valuación  $V$  de la lógica proposicional clásica. Las valuaciones que  $V$  asigna a las fórmulas de  $LD_+$  coinciden con las de LC respecto de las conectivas  $\Rightarrow$ ,  $\wedge$  y  $\vee$ . De esta forma se obtiene para fórmulas cualesquiera  $A$  y  $B$  de LD las siguientes matrices, similares a las de LC, en las cuales el conjunto  $D$  de elementos designados es también  $\{0, 1\}$ :

A	B	A $\Rightarrow$ B	A $\wedge$ B	A $\vee$ B
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Por lo cual, las condiciones de verdad establecidas por la función  $V$  respecto de  $\vee$ ,  $\wedge$  y  $\Rightarrow$ , son iguales a las clásicas, o sea:

- (i)  $V(A \wedge B) = 1$  ssi  $V(A) = V(B) = 1$
- (ii)  $V(A \vee B) = 1$  ssi  $V(A) = 1$  ó  $V(B) = 1$
- (iii)  $V(A \Rightarrow B) = 1$  ssi  $V(A) = 0$  ó  $V(B) = 1$

Puesto que la negación débil no es veritativo funcional, las condiciones de la función  $V$  para esta negación débil se establecen mediante las condiciones de verdad que corresponden a las leyes de De Morgan:

- (iv)  $V(\sim(A \vee B)) = 1$  ssi  $V(\sim A) = V(\sim B) = 1$
- (v)  $V(\sim(A \wedge B)) = 1$  ssi  $V(\sim A) = 1$  ó  $V(\sim B) = 1$

Las restantes condiciones involucran fórmulas que contienen  $^{\circ}$ :

- (vi) Si  $V(A^{\circ}) = V(B^{\circ}) = 1$ ,  $V((A \Rightarrow B)^{\circ}) = V((A \wedge B)^{\circ}) = V((A \vee B)^{\circ}) = V((\sim A)^{\circ}) = 1$

- (vii)  $V(A^\circ) = 1$  ssi  $V(A^{\circ\circ}) = 1$
- (viii) Si  $V(A^\circ) = 1$  entonces  $V(\sim A \Rightarrow A) = 1$
- (ix) Si  $V(A) = V(\sim A)$  entonces  $V(A^\circ) = 0$
- (x) Si  $V(A) \neq V(\sim A)$  entonces  $V(\sim A^\circ) = 0$

Como se vio, la negación concreta no tiene matriz característica finita (da Costa y Wolf 1980: teorema 16). Específicamente, las condiciones (iv) y (v), muestran que  $V(\sim A)$  puede ser 1 ó 0, cualquiera que sea  $V(A)$ , lo cual muestra que efectivamente la negación concreta no es una constante veritativo funcional. Esto hace que en LD esté permitido que tanto  $A$  como  $\sim A$  adquieran ambas el valor 1, ambas el valor 0, que una adquiera el valor 1 y su negación concreta 0 o el converso. Aplicando la función de valuación dada, se puede comprobar fácilmente la invalidez de las fórmulas e inferencias consignadas en la sección B. En particular, la interpretación dada a la negación concreta  $\sim$  posibilita que en LD se presenten situaciones en las cuales un conjunto de fórmulas, pese a tener modelo (*i. e.*, ser no trivial), sea inconsistente respecto de  $\sim$  (*Ibid.*: Teorema 15).

Representadas bajo la forma de tabla, las condiciones establecidas por la función de valuación  $V$  para las fórmulas que contienen  $\sim$  (cláusulas iv y v), serían las siguientes:

$\sim A$	$\sim B$	$\sim(A \wedge B)$	$\sim(A \vee B)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Sin embargo, pese a que la negación concreta no posee matriz veritativo funcional, mediante un método debido a da Costa y Alves en 1997, se muestra que LD es **decidible**. Este método consiste en construir una cuasi matriz para cada fórmula de LD, el cual, expuesto en forma abreviada, consta de los siguientes procedimientos:

1. Si la fórmula no tiene los signos  $\sim$  ó  $^\circ$ , se procede de acuerdo a las matrices de LC.

2. Si la fórmula tiene la forma  $\sim B$ , entonces se bifurca la línea de manera tal que pueda adquirir valor 1 ó 0, ya que la negación concreta no es veritativo funcional por no tener matriz propia.
3. Si la fórmula tiene la forma  $B^\circ$ , entonces, si el valor de  $B$  es el mismo que el de  $\sim B$ , se asigna 0 a  $B$ , en caso contrario, también se bifurca la línea.

El método permite comprender mejor las distintas situaciones que en LD se dan respecto de la negación concreta. En efecto, respecto de  $A$  y  $\sim A$  existen los siguientes cuatro posibles casos:  $A$  verdadera y  $\sim A$  falsa;  $A$  falsa y  $\sim A$  verdadera;  $A$  y  $\sim A$  ambas verdaderas; y  $A$  y  $\sim A$  ambas falsas.

Nótese que la responsabilidad de admitir contradicciones radica en la invalidez de la doble negación, mientras que la invalidez de ECQ permite que LD no sea trivialmente inconsistente. Sin embargo, puesto que hay conjuntos de fórmulas que tienen modelo, se prueba que LD es  $\sim$ -consistente.

Finalmente, para expresar fielmente el Principio de Unidad de los Opuestos en sus formulaciones (b) y (c), que involucran el continuo, da Costa y Wolf siguen el enfoque de Routley y Meyer (1976) y agregan tres nuevos axiomas que incorporan constantes lógicas que toman valores del continuo, obteniendo el sistema LD\*. Dado que, desde el punto de vista lógico, estos nuevos axiomas no modifican las características de LD, debe observarse que, dadas sus motivaciones específicas señaladas al comienzo, este es un sistema que puede considerarse *ad hoc*, o sea que formaliza el caso particular de las inferencias paraconsistentes válidas en el contexto regido por el PUO. De ahí que, a fin de construir sistemas paraconsistentes que culminen en una lógica, se haga necesario una presentación general, tal como la que hace el mismo da Costa en la familia de sistemas paraconsistentes  $C_n, 1 \leq n \leq \omega$ .