

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

**Explicación del efecto Aharonov-Bohm usando el
Teorema de Van Kampen**

**Trabajo de graduación presentado por Rolando
Francisco Alfredo Vásquez Escobar para optar al grado
académico de Licenciado en Física**

Guatemala

2015

**Explicación del efecto Aharonov-Bohm usando el
Teorema de Van Kampen**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades


**Explicación del efecto Aharonov-Bohm usando el
Teorema de Van Kampen**

**Trabajo de graduación presentado por Rolando
Francisco Alfredo Vásquez Escobar para optar al grado
académico de Licenciado en Física**

Guatemala

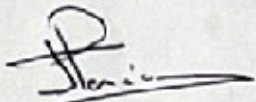
2015

Vo.Bo.:

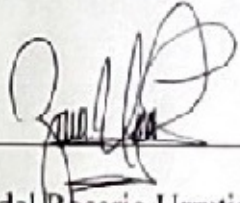
(f)  _____

Lic. Juan Diego Chi-Wen Chang Santizo


Tribunal:

(f)  _____

Phd. Juan Adolfo Ponciano Castellanos
Examinador

(f)  _____

M.Sc. Zaida del Rosario Urrutia del Cid de Gutiérrez
Directora de Departamento

(f)  _____

Lic. Juan Diego Chi-Wen Chang Santizo
Asesor.

Fecha de Aprobación: Guatemala 22 de enero de 2015

PREFACIO

Esta tesis surge por mi necesidad de estudiar matemática pura, en específico topología y categorías, para poder resolver problemas específicos en física experimental y mecánica cuántica. En el transcurso de la licenciatura en física recibí diversos cursos de física los cuales me ayudaron en mi formación para poder estudiar mecánica cuántica y así poder desarrollar este tema. Además, llevé varios cursos de matemática los cuales fueron determinantes al momento de elegir, no solo el tema de tesis sino también el camino que quiero seguir y el objetivo al cual quiero llegar.

Quiero agradecer al Lic. Dorval Carias por sus valiosas clases de matemáticas, al Dr. Álvaro Veliz por su clase de mecánica cuántica y por proponer este tema de tesis. Al Lic. Juan Diego Chang por su aporte como asesor en la realización de este tema. También quiero agradecer por la importancia que tuvieron en mi formación académica al Dr. Raúl González, Lic. Paulo Mejía, Lic. Adrián Licht y finalmente quiero agradecer a la directora de departamento de física M.Sc. Zaida Urrutia.

CONTENIDO

	Página
Prefacio	VI
Lista de figuras	VIII
Lista de símbolos	IX
Resumen	X
Capítulos	
1. Introducción	1
2. Construcción de la Integral de Trayectoria	3
3. Teorema de Van Kampen	9
4. Efecto Aharonov-Bohm	19
5. Topología y Experimento	26
6. Conclusiones	30
7. Bibliografía	31
8. Apéndice	33

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
1.	Experimento con $\mathbf{B} = 0$	20
2.	Experimento con $\mathbf{B} \neq 0$	21
3.	Experimento de Tonomura	27
4.	Retracto de deformación	29
5.	Lazo amperiano solenoide	37
6.	Lazo amperiano toroide	39
7.	Efecto Aharonov-Bohm eléctrico	41

LISTA DE SÍMBOLOS

$ \psi\rangle$	Estado Cuántico
H	Operador Hamiltoniano
\hbar	Constante de Planck
q_n, p_n	Coordenadas Generalizadas
S	Acción
L	Lagrangiano
X	Espacio Topológico
$\bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$	Unión cualquiera de conjuntos X_{α}
$\bigcap_{\alpha=1}^N X_{\alpha}$	Intersección finita de X_{α}
$\alpha(s)$	Trayectoria
$c_x(s)$	Loop Constante
α^{-1}	Trayectoria Inversa
\mathbb{R}	Conjunto de los Reales
\mathbb{Z}	Conjunto de los enteros
$[\alpha], [\beta]$	Clases de Homotopía
$[c_x]$	Elemento Identidad
$\pi_1(X)$	Grupo Fundamental de X
$X \vee Y$	Suma Cuña entre X y Y
B	Campo Magnético
A	Potencial Vectorial Magnético
Φ	Flujo Magnético
Φ_0	Cuanto de Flujo Magnético Mínimo

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo de graduación es explicar la solución de un problema de física experimental en mecánica cuántica usando topología algebraica. El efecto Aharonov-Bohm es un fenómeno puramente cuántico el cual consiste en demostrar la importancia del potencial vectorial magnético en una región libre de campo magnético. Para poder realizar esta demostración se trabaja primero con el desarrollo teórico presentado por Aharonov y Bohm en 1959. Cuya presentación se realizó en un experimento idealizado en dos dimensiones que es físicamente imposible de realizar. Para esta explicación se utiliza la formulación cuántica en términos de la integral de trayectoria. Después se presenta una breve descripción de la demostración experimental definitiva de dicho efecto, realizada por Akira Tonomura en 1986, la cual fue realizada en tres dimensiones. Finalmente, se demuestra utilizando los espacios topológicos de las dos presentaciones anteriores, la de dos dimensiones y la de tres dimensiones, que dichos espacios tienen la misma estructura topológica por lo tanto son equivalentes, por lo tanto el desarrollo experimental valida completamente el desarrollo teórico.

I. INTRODUCCIÓN

El efecto Aharonov-Bohm es un fenómeno puramente cuántico, i.e., no tiene análogo clásico. En este efecto una partícula cargada eléctricamente se ve afectada por un campo electromagnético; aún cuando esta viaja en una región libre de campos magnéticos y eléctricos. Pero en esta región existen potenciales eléctricos o vectoriales magnéticos. En esta monografía se presenta el efecto Aharonov-Bohm en su versión del desfase en la medición de probabilidad de llegada de dos rayos de electrones. Estos rayos de electrones interactúan con un potencial vectorial magnético, fenómeno que no se ve en la teoría clásica .

En 1949 Werner Ehrenberg y Raymond Siday descubrieron este efecto por primera vez, sin que su trabajo tomara relevancia. Diez años después en 1959 David Bohm y su alumno Yakir Aharonov describieron este efecto de manera independiente, ya que el trabajo de Ehrenberg y Siday no fue conocido ni muy dado a conocer en el ámbito científico. Bohm y Aharonov publicaron su trabajo en la revista *Physics Review* bajo el nombre “Significance Of Electromagnetic Potentials In The Quantum Theory” (Aharonov, 1959).

El artículo fue causa de controversia debido a que reducía las cantidades fundamentales de la teoría electromagnética en física cuántica a los potenciales electromagnéticos. A diferencia de su contraparte en la física clásica en la cual las cantidades fundamentales son los campos electromagnéticos y los potenciales sólo tienen un significado matemático, no físico. La utilización de los potenciales electromagnéticos dio lugar a un gran rechazo de la existencia de dicho efecto, además, porque ellos presentaron en su artículo un caso muy restringido en dos dimensiones el cual experimentalmente es físicamente imposible de realizar.

Muchos experimentos fueron realizados para demostrar la existencia de dicho efecto. La demostración definitiva de la existencia de este efecto fue presentada por Akira

Tonomura y sus colaboradores en 1986. En su artículo “Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor” ellos demostraron la existencia de dicho efecto en tres dimensiones.

Aharonov y Bohm presentaron un experimento idealizado en dos dimensiones. Tonomura por su parte presentó un experimento en tres dimensiones. El objetivo de esta monografía es demostrar mediante propiedades topológicas que los espacios en los cuales se realizaron los experimentos son homeomorfos¹.

Con base al objetivo de la investigación es necesario identificar varios aspectos que concebirán que la investigación sea completa y se lleve a cabo de manera integral. Entre los cuales están: explicar teóricamente el efecto Aharonov-Bohm, Discutir la existencia física del potencial vectorial magnético y demostrar la cuantización del campo magnético.

Dado que los artículos de Aharonov y Tonomura son tratados en espacios físicos diferentes es de gran importancia demostrar que ambos son equivalentes para dar una validación satisfactoria de la existencia del efecto Aharonov-Bohm. De la misma forma el efecto Aharonov-Bohm demuestra que las cantidades electromagnéticas fundamentales en mecánica cuántica son los potenciales electromagnéticos lo cual no sucede en mecánica clásica y esto abre la pregunta sobre la existencia física de estos potenciales. La investigación de Aharonov y Bohm abre nuevos espacios y preguntas, como ¿existe el potencial vectorial magnético?, ¿el flujo magnético está cuantizado?. Que fueron controversiales y fueron confirmados gracias a Tonomura. La indiscutible equivalencia de los experimentos identificados en ambos artículos hace necesaria la explicación que se realiza en esta investigación.

¹Ver capítulo Teorema de Van Kampen

II. CONTRUCCIÓN DE LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA

Derivaremos la integral de trayectoria a partir de la ecuación de Schrödinger. De la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo: (Altland, 2001)

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \quad (1)$$

obtenemos el operador de evolución temporal

$$|\Psi(t)\rangle = U|\Psi(t')\rangle \quad (2)$$

El operador U es conocido como el propagador, y este describe la evolución temporal del estado $|\Psi\rangle$ bajo la influencia del Hamiltoniano para ir de un estado en tiempo t' a un estado en tiempo t . El propagador es definido por (Altland, 2001)

$$U(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t')} | q \rangle \quad (3)$$

Iniciaremos la derivación de la integral de trayectoria describiendo la evolución temporal por pequeños tiempos infinitesimales. En orden de formular esta idea dividiremos la evolución temporal en $N \gg 1$, intervalos ϵ . Además, sin pérdida de generalidad hagase $t' = 0$ (Altland, 2001).

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) = \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\epsilon\right)\right]^N \quad (4)$$

Donde $\epsilon = t/N$, y considerando el límite cuando N tiende a infinito. Utilizando la siguiente aproximación

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2} \quad (5)$$

Y aplicando el Hamiltoniano en (4), obtenemos

$$e^{-iH\epsilon/\hbar} = e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} e^{(TV-VT)(\epsilon/\hbar)^2} \quad (6)$$

$$e^{-iH\epsilon/\hbar} = e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} + O(\epsilon^2) \quad (7)$$

Utilizando (3), (4) y (7) tenemos (Altland, 2001)

$$\langle q_f | [e^{-iH\epsilon/\hbar}]^N | q_i \rangle = \langle q_f | \Lambda e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} \Lambda \dots \Lambda e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_i \rangle \quad (8)$$

Ahora insertamos en cada posición indicada por Λ el elemento identidad

$$I = \iint dq_n dp_n |q_n\rangle \langle q_n| p_n\rangle \langle p_n| \quad (9)$$

Nótese que

$$\int dq_n \langle q_n | q_n \rangle = 1$$

Insertando (9) en (8), obtenemos

$$\begin{aligned} \langle q_f | [e^{-iH\epsilon/\hbar}]^N | q_i \rangle = & \\ \int \prod_{n=1}^N dq_n \int \prod_{n=1}^N dp_n \langle q_f | q_N \rangle \langle q_N | p_N \rangle \langle p_N | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{N-1} \rangle & \quad (10) \\ \times \langle q_{N-1} | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{N-2} \rangle \times \dots \times \langle q_n | p_n \rangle & \\ \langle p_n | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{n-1} \rangle \times \dots \times \langle q_1 | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_i \rangle & \end{aligned}$$

Nótese que $q_f = q_N$, $q_i = q_0$, entonces escribimos (10) como

$$\begin{aligned} \langle q_f | [e^{-iH\epsilon/\hbar}]^N | q_i \rangle = & \\ \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \int \prod_{n=1}^N dp_n \langle q_N | p_N \rangle \langle p_N | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{N-1} \rangle & \quad (11) \\ \times \langle q_{N-1} | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{N-2} \rangle \times \dots \times \langle q_n | p_n \rangle & \\ \langle p_n | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_{n-1} \rangle \times \dots \times \langle q_1 | p_1 \rangle \langle p_1 | e^{-iT\epsilon/\hbar} e^{-iV\epsilon/\hbar} | q_0 \rangle & \end{aligned}$$

Evaluando los eigenvalores de energía potencial en el Ket, y del operador energía cinética en el Bra, obtenemos: (Altland, 2001)

$$\langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | e^{-i\epsilon T/\hbar} e^{-i\epsilon V/\hbar} | q_{n-1} \rangle = \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle e^{-i\epsilon T(p_n)/\hbar} e^{-i\epsilon V(q_{n-1})/\hbar} \quad (12)$$

Usando

$$\langle q | p \rangle = \langle p | q \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iqp/\hbar}$$

En (12), se obtiene

$$\langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | e^{-i\epsilon T/\hbar} e^{-i\epsilon V/\hbar} | q_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{iq_n p_n/\hbar} e^{iq_{n-1} p_n/\hbar} e^{-i\epsilon T(p_n)/\hbar} e^{-i\epsilon V(q_{n-1})/\hbar} \quad (13)$$

Nótese que para cada $0 < n < N$ se tiene una expresión similar a la ecuación (13). Insertando (13) en (11) tenemos: (Altland, 2001)

$$\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle = \int_{q_i, q_f} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left(-i \frac{\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(T(p_{n+1}) + V(q_n) - p_{n+1} \frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \right) \right) \quad (14)$$

Entonces la evolución temporal es expresada como una $2N - 1$ integral sobre los eigenvalores. En cada escalón de tiempo $t_n = n\epsilon$, $n = 1, \dots, N$, estamos integrando sobre un par de coordenadas (q_n, p_n) parametrizadas por t en el espacio de fase clásico. Tomando todos los puntos (q_n, p_n) estos forman una trayectoria discreta de N -puntos en este espacio. Tomando el límite $N \rightarrow \infty$ y manteniendo fijo $t = N\epsilon$, el conjunto discreto $t_n = n\epsilon$, $n = 1, \dots, N$, se convierte en un conjunto denso en el intervalo $[0, t]$, y entonces el conjunto de puntos (q_n, p_n) en el espacio de fase forma una curva continua $(q(t), p(t))$. También notemos que en el límite tenemos: (Altland, 2001)

$$\epsilon \sum_{n=1}^{N-1} \rightarrow \int_0^t dt'$$

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \rightarrow \partial_{t'} q|_{t'=t_n} \equiv \dot{q}|_{t=t_n}$$

$$T(p_{n+1}) + V(q_n) \rightarrow T(p|_{t'=t_n}) + V(q|_{t'=t_n}) \equiv H(p|_{t'=t_n}, q|_{t'=t_n})$$

En el límite $N \rightarrow \infty$, T y V son evaluados en vecindades de tiempos muy pequeños, lo cual llegará a ser irrelevante. Por lo tanto, con este argumento se pasa de lo cuántico a lo clásico. Por lo tanto en la tercera línea H denota el Hamiltoniano clásico. Al tomar el límite $N \rightarrow \infty$ se define la medida de integración de la integral (14) de la siguiente forma: (Altland, 2001)

$$\int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} D(q, p) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{q_i, q_f} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar}$$

Aplicando las convenciones desarrolladas cuando $N \rightarrow \infty$ a la integral (14) obtenemos como resultado final: (Altland, 2001)

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_i \rangle = \int_{q(0)}^{q(t)} D(q, p) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' (p\dot{q} - H(p, q)) \right] \quad (15)$$

La ecuación (15) representa la formulación Hamiltoniana de la integral de trayectoria: la integral se extiende sobre todas las trayectorias posibles del espacio de fase clásico del sistema las cuales inician y terminan en los mismos puntos q_i y q_f . La contribución de cada trayectoria es pesada con su acción Hamiltoniana (Altland, 2001).

Usando la conexión entre Hamiltoniano y Lagrangiano por medio de una transformación de Legendre, $H(p, q) = p\dot{q} - L(p, q)$, la acción clásica de una trayectoria $t \rightarrow q(t)$ es dada por: (Altland, 2001)

$$S = \int_0^t dt' L(q, \dot{q}) = \int_0^t dt' [p\dot{q} - H(p, q)] \quad (16)$$

Ahora escribiremos la integral (15) en términos de L . Empezaremos por escribir el lado derecho de (15) de la siguiente forma: (Altland, 2001)

$$\int_{q(0)}^{q(t)} Dq \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V(q) \right] \int Dp \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left(\frac{p^2}{2m} - p\dot{q} \right) \right] \quad (17)$$

La integral en Dp de (17) volvemos a rediscritizarla y a reinstalar el límite continuo: (Altland, 2001)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left(-i \frac{\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{p_{n+1}^2}{2m} - p_{n+1} \frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \right) \right) \quad (18)$$

Realizando integración Gaussiana, la ecuación (18) queda

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(\frac{Nm}{it2\pi\hbar} \right)^{1/2} \exp \left(i \frac{\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\epsilon} \right)^2 \right) \\ &= \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{Nm}{it2\pi\hbar} \right)^{N/2} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \frac{m}{2} (\partial_{t'} q)^2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Insertando (19) en (17) obtenemos

$$\int_{q(0)}^{q(t)} Dq \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{Nm}{it2\pi\hbar} \right)^{N/2} \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left(\frac{m}{2} (\partial_{t'} q)^2 - V(q) \right) \right) \quad (20)$$

De la integral anterior, de (16) y de (15) tenemos

$$\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle = \int_{q(0)}^{q(t)} Dq(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L(q, \dot{q}) \right] \quad (21)$$

Donde la medida de integración de la integral anterior es

$$Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{Nm}{it2\pi\hbar} \right)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n$$

La integral (21) es la formulación Lagrangiana de la integral de trayectoria, en donde L es el Lagrangiano clásico. En mecánica cuántica una transición de amplitud puede ser expresada en términos de una integral de dimensión infinita que se extiende sobre trayectorias en el espacio de fase (15) o el espacio de configuraciones (21). Nótese que todas las trayectorias tienen los mismos puntos iniciales y finales. Además, cada trayectoria está pesada por su acción clásica. Nótese en particular que la amplitud de transición cuántica ha sido cambiada a una forma que no contiene operadores mecánicos cuánticos. Sin embargo, la mecánica cuántica está presente. Esto debido a que la

integración se extiende sobre todas las trayectorias y no solo al subconjunto de soluciones de las ecuaciones clásicas del movimiento. Finalmente las dos formas de la integral de trayectoria, (15) y (21), representan la implementación formal de una presentación alternativa de la mecánica cuántica (Altland, 2001).

III. TEOREMA DE VAN KAMPEN

Uno de los problemas básicos de la matemática moderna es calcular el grupo fundamental asociado a un espacio topológico dado. En este capítulo se presenta el teorema de Van Kampen, el cual ofrece una forma de calcular el grupo fundamental de un espacio topológico mediante la descomposición de este espacio en espacios topológicos más simples cuyos grupos fundamentales son más fáciles de calcular (Hatcher, 2002). El objetivo del capítulo es presentar el teorema de Van Kampen y aprender a usar este teorema. El teorema de Van Kampen será de gran importancia en la conexión de la teoría y el experimento del efecto Aharonov-Bohm. Antes de enunciar dicho teorema, se presentarán la teoría de espacios topológicos, se definirá homotopía entre trayectorias y finalmente se construirá el grupo fundamental. Para finalmente enunciar dicho teorema y mostrar unos ejemplos de cómo se aplica este teorema. Iniciaremos entonces con la definición básica de lo que es un espacio topológico (Hatcher, 2002).

3.1 Definición: Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X , llamados los conjuntos abiertos que satisfacen: (Munkres, 2000)

1. Cualquier unión de elementos de τ pertenece a τ .
2. Cualquier intersección finita de elementos de τ pertenece a τ .
3. \emptyset y X pertenecen a τ .

Note que el conjunto vacío \emptyset es el conjunto que carece de elementos.

3.2 Definición: Un espacio topológico es el par (X, τ) . El cual se abreviará diciendo X es un espacio Topológico (Munkres, 2000).

3.3 Definición: Sea X un espacio topológico y $x \in X$, una vecindad de x es un conjunto U el cual contiene un conjunto abierto V tal que $x \in V$ (Munkres, 2000).

3.4 Definición: Sean X y Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces f es continua en $x_0 \in X$ si y solo si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y , existe una vecindad U de x_0 en X tal que $f(U) \in V$. Se dice que f es continua sobre X si y solo si f es continua en cada $x_0 \in X$ (Munkres, 2000).

3.5 Teorema: La composición de funciones continuas es continua (Munkres, 2000).

3.6 Definición: Un espacio X es desconexo si y solo si existen conjuntos abiertos no vacíos H, K , tales que $H \cap K = \emptyset$ y $H \cup K = X$. Entonces se dice que X es desconexo por H y K . Cuando no existen tales desconexiones, se dice que X es conexo (Munkres, 2000).

3.7 Teorema: La imagen continua de un espacio conexo es conexa (Munkres, 2000).

Sean X_α una colección de conjuntos donde $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, definimos cualquier unión de X_α como $X = \cup_\alpha X_\alpha$; y la intersección finita de X_α como $\cap_{\alpha=1}^N X_\alpha$.

3.8 Teorema: Si $X = \cup_\alpha X_\alpha$ donde cada X_α es conexo y $\cap_{\alpha=1}^N X_\alpha \neq \emptyset$, entonces X es conexo (Munkres, 2000).

De la definición (2,6) notamos que un conexo es un espacio topológico de una sola pieza, el cual no puede ser separado en dos conjuntos abiertos. Hasta aquí se han presentado algunas definiciones básicas y algunos teoremas, estos son necesarios para explicar el concepto de homotopía.

3.9 Definición: Sea X un espacio topológico y sea $I = [0, 1]$. Un mapeo continuo $\alpha : I \rightarrow X$ es llamado una trayectoria con punto inicial x_0 y punto final x_1 si $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, la trayectoria es llamada un loop con punto base x_0 o un loop en x_0 (Munkres, 2000).

3.10 Definición: Sea $x \in X$, se define una trayectoria constante $c_x : I \rightarrow X$ como $c_x(s) = x \forall s \in I$. Una trayectoria constante es también un loop constante dado que

$c_x(0) = c_x(1) = x$ (Munkres, 2000).

3.11 Definición: Un espacio X es conexo por trayectorias si y solo si para cualesquiera dos puntos $x_0, x_1 \in X$, existe una trayectoria con punto inicial x_0 y punto final x_1 (Munkres, 2000).

3.12 Teorema: Todo espacio conexo por trayectorias es conexo (Munkres, 2000).

3.13 Corolario: Un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n es conexo por trayectorias (Munkres, 2000).

Entonces de la definición (3,9) podemos decir que una trayectoria es un camino que nos lleva de un punto x_0 a un punto x_1 . Ahora dotaremos con una estructura algebraica el conjunto de trayectorias o loops de un espacio topológico.

3.14 Definición: Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ trayectorias tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. El producto de α y β , denotado por $\alpha * \beta$, es una trayectoria en X definida por: (Munkres, 2000)

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s - 1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Note que en la definición anterior, tenemos por el teorema (3,5) que $\alpha * \beta$ es una trayectoria continua.

3.15 Definición: Sea $\alpha : I \rightarrow X$ una trayectoria de x_0 a x_1 . La trayectoria inversa α^{-1} de α , la cual va de x_1 a x_0 , es definida por: (Munkres, 2000)

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$$

Dado que un loop es un caso especial de una trayectoria, el producto de loops y el loop inverso se definen de la misma forma que el presentado para una trayectoria en las dos definiciones anteriores. Para dotar de una estructura algebraica al conjunto de loops notemos que $\alpha * \alpha^{-1}$ no es necesariamente igual a c_x . Porque la multiplicación de

loops esta parametrizada para α por $[0, 1/2]$ y para α^{-1} por $[1/2, 1]$; mientras que c_x esta parametrizado por $[0, 1]$. Por lo que se necesita de un concepto más fuerte, el cual es conocido como homotopía (Munkres, 2000).

3.16 Definición: Sean $f, g : X \rightarrow Y$ mapeos continuos, decimos que f es homotópica a g si existe un mapeo continuo $F : X \times I \rightarrow Y$ $\ni F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$ para cada x . El mapeo F es llamado una homotopía entre f y g , denotada $f \simeq g$. Si $f \simeq g$ y g es el mapeo constante, entonces se dice que f es homotopicamente nulo (Munkres, 2000).

La definición anterior nos da el concepto de homotopía. Reescribiendo la definición anterior en terminos de loops, tenemos:

3.17 Definición: Sean $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ loops en x_0 . Se dice que α y β son homotópicas, denotado $\alpha \simeq \beta$, si existe un mapeo continuo $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s) \forall s \in I$$

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0 \forall t \in I$$

El mapeo conexión F es llamado una homotopía entre α y β (Munkres, 2000).

Entonces homotopía se refiere a la deformación de un loop α en otro loop β , mediante el salto continuo de un punto a otro.

3.18 Proposición: La relación $\alpha \simeq \beta$ es una relación de equivalencia (Munkres, 2000).

De la proposición (3,18) formamos las clases de equivalencia de loops, denotadas por $[\alpha]$, y la cual es llamada clase de homotopía de α .

3.19 Definición: El producto de clases de homotopía $[\alpha]$ y $[\beta]$ se define como: $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ (Munkres, 2000).

Las clases de homotopía para un punto x_0 en X forman un grupo, en el cual el pro-

ducto de clases de homotopía es definido de forma natural por el producto entre loops. El problema del elemento identidad se resuelve considerando la clase de homotopía $[c_x]$ como dicho elemento. Al realizar la operación producto de clases de homotopía $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x]$ lo que queremos es que el producto $\alpha * \alpha^{-1}$ sea homotópico a c_x , dicha homotopía existe, por lo tanto $\alpha * \alpha^{-1}$ pertenece a la clase de equivalencia $[c_x]$. Ahora presentaremos el primer grupo fundamental (Munkres, 2000).

3.20 Definición: Sea X un espacio topológico. El conjunto de clases de homotopía de loops en $x_0 \in X$ es denotado por $\pi_1(X, x_0)$ y es llamado el grupo fundamental (o primer grupo de homotopía) de X con punto base x_0 (Munkres, 2000).

3.21 Teorema: El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ junto con la operación producto de clases de homotopía forman un grupo (Munkres, 2000).

De la definición del primer grupo fundamental, podemos pensar en la existencia de grupos fundamentales distintos a $\pi_1(X, x_0)$. En efecto, estos grupos existen y se denotan por $\pi_n(X, x_0)$, su definición es igual a la definición del primer grupo fundamental; con la diferencia que la homotopía entre trayectorias viene dada por $F : I^n \times X \rightarrow X$. Se ha construido el grupo fundamental, pero ahora surge una pregunta ¿Depende el grupo fundamental de la elección del punto base x_0 ? Para responder esta pregunta pongase especial atención a la siguiente definición y al siguiente teorema (Hatcher, 2002).

3.22 Definición: Sea γ una trayectoria en X desde x_0 a x_1 . Defínase el mapeo

$$\hat{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

tal que

$$\hat{\gamma}([\alpha]) = [\gamma^{-1}] * [\alpha] * [\gamma]$$

De la definición anterior notemos que si α es un loop en x_0 , entonces $\gamma^{-1} * (\alpha * \gamma)$ es un loop en x_1 . Por lo cual $\hat{\gamma}$ mapea $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$; note que esta depende únicamente en la homotopía de clases de γ (Hatcher, 2002).

3.23 Teorema: El mapeo $\hat{\gamma}$ es un isomorfismo de grupos (Hatcher, 2002).

3.24 Corolario: Si X es un espacio conexo por trayectorias, entonces para cualquier par de puntos x_0 y x_1 en X , $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos (Hatcher, 2002).

Del teorema (3,23) notamos que $\hat{\gamma}$ es un isomorfismo entre grupos fundamentales que tienen diferentes puntos bases. Entonces el grupo fundamental no depende de la elección del punto base. Ahora surgen otras preguntas, ¿cuál es la importancia del grupo fundamental?, ¿cómo se relaciona este con un espacio topológico? Nótese que $\pi_1(X, x_0)$ surge a partir de los loops en $x_0 \in X$. Entonces se ha creado una imagen algebraica del espacio topológico. Ahora, se presentará como un mapeo entre espacios topológicos induce un morfismo entre grupos fundamentales (Hatcher, 2002).

3.25 Definición: Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función continua tal que $f(x_0) = y_0$. Definimos

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

tal que

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

Se dice que f_* es el morfismo inducido por f , relativo al punto base x_0 (Hatcher, 2002).

Notemos que $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es la notación para decir que f mapea $x_0 \in X$ en $y_0 \in Y$. Con la definición anterior se ha construido un morfismo a partir de una función continua. Si α es un loop en X con punto base x_0 entonces $f_*([\alpha])$ es un loop en Y con punto base y_0 (Hatcher, 2002).

3.26 Teorema: Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X y Y , entonces f_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ (Hatcher, 2002).

Entonces si dos espacios son homeomorfos existe un isomorfismo entre sus grupos fundamentales, pero si dos grupos fundamentales son isomorfos sus espacios no necesariamente son homeomorfos (Hatcher, 2002). A continuación veremos un método que

nos permite retraer un espacio topológico en otro espacio, por lo cual el problema de calcular el grupo fundamental de un espacio se reduce al problema de calcular el grupo fundamental de algún otro espacio, en el cual es más fácil el cálculo de dicho grupo (Hatcher, 2002).

3.27 Definición: Un subconjunto A de X es un retracto de X si y solo si existe un mapeo continuo $f : X \rightarrow A$, llamado retracción, tal que $f(a) = a \forall a \in A$ (Hatcher, 2002).

3.28 Lema: Si A es un retracto de X , entonces el morfismo de grupos fundamentales inducido por la inclusión $j : A \rightarrow X$ es inyectivo (Hatcher, 2002).

3.29 Definición Sea A un subespacio de X . A es un retracto de deformación de X si y solo si existe una retracción $f : X \rightarrow A$ la cual es homotópica al mapeo identidad i sobre X . Si $f \simeq i$, la homotopía F entre f e i es llamada un retracto de deformación (Hatcher, 2002).

3.30 Definición: Dos espacios X y Y se dice que son homotópicamente equivalentes si y solo si existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f : X \rightarrow X$ es homotópica al mapeo identidad de X y que la composición $f \circ g : Y \rightarrow Y$ es homotópica al mapeo identidad de Y . Los mapeos f y g son llamados equivalencias homotópicas y g es llamado la inversa homotópica de f (Hatcher, 2002).

3.31 Teorema: Si A es un retracto de deformación de X , entonces A es homotópicamente equivalente a X (Hatcher, 2002).

Del teorema anterior tenemos que el mapeo inclusión $j : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ induce un isomorfismo $j_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Donde (A, x_0) denota el subespacio topológico $A \subset X$ tal que $x_0 \in A$ (Hatcher, 2002).

3.32 Definición: Sea un espacio topológico X , y sean $x_0, x_1 \in X$. Entonces X es llamado

simplemente conexo si este es conexo por trayectorias y si todas las trayectorias de x_0 a x_1 son homotópicas (Hatcher, 2002).

De la definición anterior tenemos que si X es simplemente conexo, todos los loops basados en x_0 son homotópicos, entonces todos los loops pertenecen a la clase de equivalencia del loop constante c_{x_0} . Es decir, todos los loops son deformados a un punto x_0 . De aquí se observa que $\pi_1(X, x_0)$ tiene solo el elemento $[c_{x_0}]$, este grupo es conocido como grupo trivial. Nótese que si X tiene un agujero, no se podrán deformar todos los loops a un punto, entonces X no es simplemente conexo. Entonces $\pi_1(X, x_0)$ no es el grupo trivial. Entonces notemos que el grupo fundamental mide cuantos agujeros tiene un espacio topológico. Se denomina como genus al número de agujeros que tiene un espacio, por ejemplo un simplemente conexo tiene genus cero, dos espacios X y Y con igual genus son homeomorfos (Hatcher, 2002).

Ahora tenemos las herramientas topológicas y algebraicas necesarias para presentar el teorema de Van Kampen; también conocido como teorema de Seifert-Van Kampen.

3.33 Teorema de Van Kampen: Si X es la unión de conjuntos abiertos y conexos por trayectorias A_i tal que cada uno de los A_i contiene el punto base $x_0 \in X$ y si cada intersección $A_i \cap A_j$ es conexo por trayectorias, entonces el homomorfismo

$$\Phi : *_i\pi_1(A_i, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es sobreyectivo. Si además, cada intersección $A_i \cap A_j \cap A_k$ es conexa por trayectorias, entonces el kernel de Φ es el subgrupo normal N generado por todos los elementos de la forma $i_{ij}(\omega)i_{ji}(\omega)^{-1}$, y entonces Φ induce un isomorfismo (Hatcher, 2002)

$$\pi_1(X, x_0) \simeq *_i\pi_1(A_i, x_0)/N$$

El teorema anterior quiere decir que el grupo fundamental de un espacio X queda completamente determinado a partir de los grupos fundamentales de los espacios A_i contenidos en X , tales que los A_i sean conexos por trayectorias. La operación $*_i\pi_1(A, x_0)$

es el producto libre de grupos, la explicación de dicho producto se presenta en el Apéndice A. La segunda parte del teorema se refiere a que los elementos del kernel de Φ son de la forma $i_{ij}(\omega)i_{ji}(\omega)^{-1}$, donde $i_{ij} : \pi_1(A_i \cap A_j, x_0) \rightarrow \pi_1(A_i, x_0)$ y $\omega \in \pi_1(A_i \cap A_j)$, es más, estos elementos forman un grupo normal N . Entonces se induce un isomorfismo entre el grupo fundamental de X y el cociente entre el producto libre de grupos $*_i \pi_1(A_i, x_0)$ con el grupo normal N . A continuación presentaremos un corolario derivado del Teorema de Van Kampen (Hatcher, 2002).

3.34 Corolario: Sea $X = A_1 \cup A_2$ donde A_1 y A_2 son conjuntos abiertos y conexos por trayectorias tal que $x_0 \in A_1$ y $x_0 \in A_2$. Si $A_1 \cap A_2$ es simplemente conexo, entonces existe un isomorfismo (Hatcher, 2002)

$$\Phi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

Ahora presentaremos unos ejemplos para mostrar como se usa el teorema de Van Kampen. Empesaremos dando la siguientes definiciones.

3.35 Definición: El índice de una trayectoria cerrada alrededor de un punto es un entero del número de veces que la trayectoria encierra el punto. El índice depende de la orientación de la trayectoria, es positivo si la orientación es contrarreloj y negativo si la orientación es la del reloj (Hatcher, 2002).

3.36 Definición: Dados dos espacios X y Y , elegimos puntos $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$, entonces la suma cuña es $X \vee Y = (X \amalg Y) / \sim$, donde $x_0 \sim y_0$ se identifican como un solo punto. Es decir, la suma cuña es la unión en un punto (Hatcher, 2002).

Ejemplo 1: considérense dos círculos que tienen un punto en común x_0 , de la definición anterior $S^1 \vee S^1$ es homeomórfico a la figura '8'. Calculando su grupo fundamental, notemos que S^1 es abierto y conexo por trayectorias, además todo loop basado en x_0 tienen índice infinito en una orientación e indice menos infinito en la otra orientación, por lo cual su grupo fundamental es $(\mathbb{Z}, +)$ (denotado \mathbb{Z}). Aplicando el teorema de Van

Kampen tenemos $\pi_1(S^1 \vee S^1, x_0) \simeq \pi_1(S^1, x_0) * \pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (Hatcher, 2002).

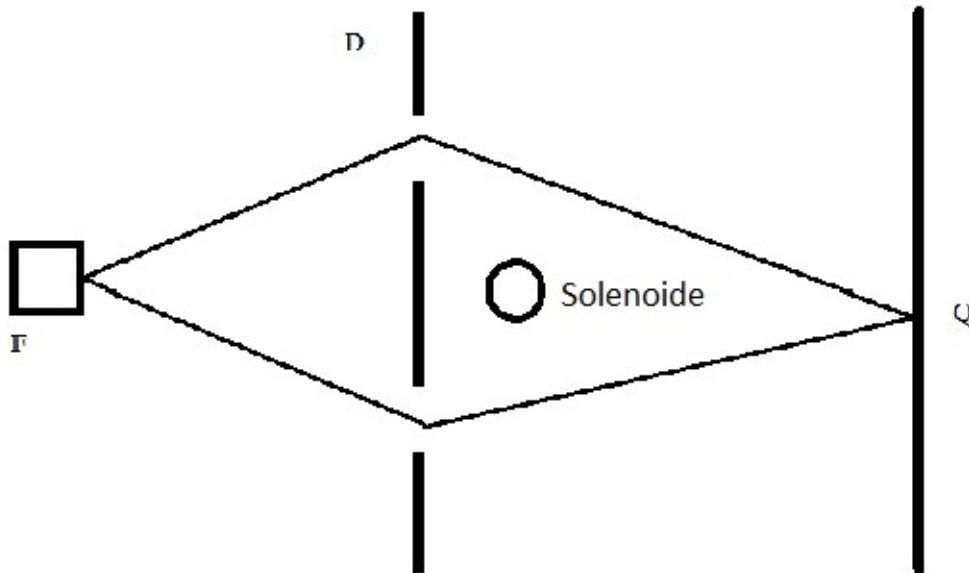
Ejemplo 2: Considérense dos esferas tocándose en un punto x_0 , $S^2 \vee S^2$. Note que para una esfera S^2 todo loop con punto base en x_0 es homotópico al loop constante c_{x_0} , entonces su grupo fundamental es el trivial, denotado 0. Aplicando el teorema de Van Kampen tenemos $\pi_1(S^2 \vee S^2, x_0) \simeq \pi_1(S^2, x_0) * \pi_1(S^2, x_0) \simeq 0 * 0$ (Hatcher, 2002).

En este capítulo se ha presentado el teorema de Van Kampen y se han presentado unos ejemplos de cómo se utiliza éste. Este resultado final es de gran importancia en el Capítulo “Topología y Experimento”, donde es necesario mostrar que dos espacios topológicos particulares son homeomórficos.

IV. EFECTO AHARONOV-BOHM

En 1959 Yakir Aharonov y David Bohm describieron un efecto en mecánica cuántica que predice el desfase relativo entre dos rayos de electrones que encierran un flujo magnético, aún cuando estos rayos no tienen interacción con el campo magnético. Entonces tenemos que una partícula cargada se ve afectada por un campo magnético aún cuando esta viaje en una región en la cual no existe campo magnético. Consideremos un experimento idealizado para medir el efecto Aharonov-Bohm. Supongamos que tenemos una máquina que produce electrones en el estado $|x_i, t_i\rangle$, y estos viajan a través de un plano en cuyo centro se coloca un solenoide de longitud infinita, hasta llegar a un detector en el cual se mide que los electrones han llegado en el estado $|x_f, t_f\rangle$. Entonces desde la máquina lancemos un rayo de electrones de forma que éste se divida en dos y mandamos los dos rayos por los lados del solenoide. Los rayos de electrones son entonces recombinados y entran al detector. Note que clásicamente el solenoide es impenetrable para los rayos de electrones. Entonces los electrones no sentirán ninguna fuerza distinta a la producida por los mismos electrones que viajan en dichos rayos, los dos rayos se unirán y producirán una señal en el detector. Este experimento se muestra en la Figura 1 (Aharonov, 1959).

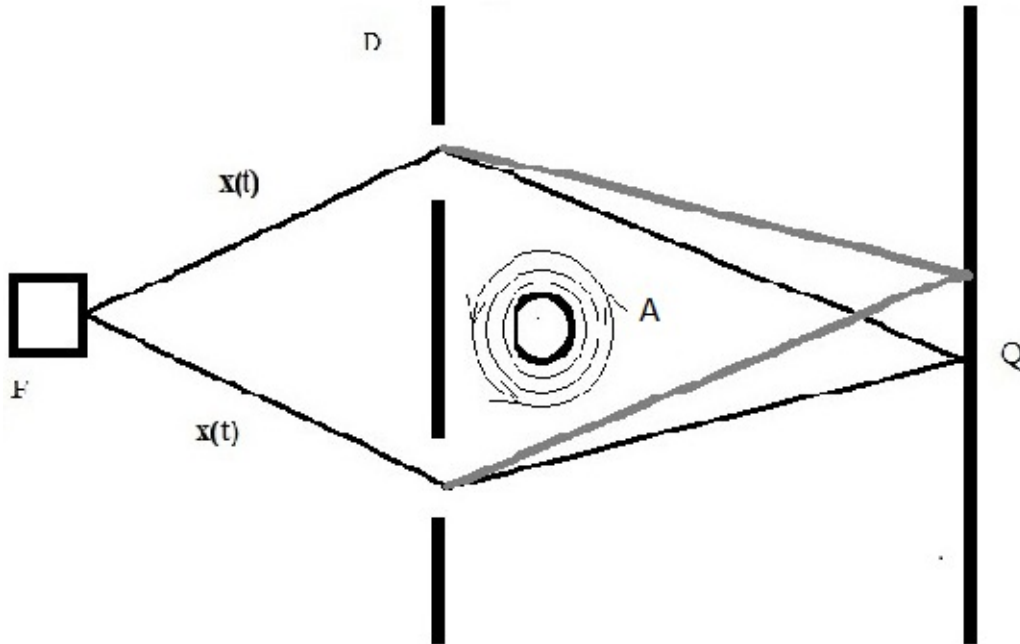
Ahora, en una segunda versión del experimento anterior un campo magnético fluye en el interior del solenoide, el cual es perpendicular al plano en el cual viajan los electrones. Entonces existe un potencial vectorial magnético que tiene forma circular. Sin embargo clásicamente no existen campos eléctricos o magnéticos en el exterior del solenoide. Dado que los electrones no pueden penetrar el solenoide, ellos nunca entrarán a una región donde el campo magnético sea distinto de cero, así que ellos continuarán sin sentir fuerza alguna debido a este campo. Dado que los campos eléctrico y magnético afuera del solenoide son los mismos que en el experimento anterior, se esperaría que los resultados fueran los mismos. El segundo experimento se muestra en la Figura 2 (Aharonov, 1959).

Figura 2: Experimento con $\mathbf{B} = 0$ 

(Larson, 2005)

En el experimento #2 se espera obtener la misma señal que en el experimento #1, sin embargo esto no es así. La señal observada en el experimento #2 cambia como una función del campo magnético en el interior del solenoide (Aharonov, 1959). Este resultado ya fue confirmado experimentalmente por Akira Tonomura y sus colaboradores en 1986, y es un efecto puramente de la mecánica cuántica conocido como efecto Aharonov-Bohm (Larson, 2005).

A continuación demostraremos que la probabilidad de un electrón en viajar de un estado $|x_i\rangle$ a un estado $|x_f\rangle$ en una región en la cual no actúa un campo magnético, pero si existe un potencial vectorial magnético, se ve afectada por un factor de desfase. Este factor de desfase viene dado en términos del flujo de campo magnético. Comencemos definiendo que el solenoide es de longitud infinita. Ahora bien, en el interior del solenoide colocamos un campo magnético constante que es paralelo al eje z y en dirección $+z$. Entonces se produce un potencial vectorial magnético, el campo y el potencial tienen la

Figura 3: Experimento con $\mathbf{B} \neq 0$ 

(Larson, 2005)

siguiente forma: (Larson, 2005)

$$\mathbf{B} = B\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2S} \hat{\phi}$$

Donde R es el radio del solenoide, y S es la distancia del centro a un punto externo al solenoide. Este potencial se muestra en la figura del experimento #2. Para ver a detalle la elección de \mathbf{B} y \mathbf{A} referirse al apéndice B. Finalmente para que la función de onda del electrón no colapse en el interior del solenoide se coloca sobre la superficie del solenoide un potencial eléctrico muy grande de tal forma que el solenoide sea impenetrable para los electrones. Si bien puede existir efecto túnel, la probabilidad de que este ocurra es muy pequeña (Aharonov, 1959).

Supóngase que se emiten dos electrones tales que tienen los mismos estados $|x_i\rangle$ y $|x_f\rangle$, tal y como se muestra en las dos figuras anteriores. Describiremos por $x(t)$ las

trayectorias seguidas por los electrones. Considérese el Langrangiano para el electron que viaja a través de un campo magnético; siendo este: (Larson,2005)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (22)$$

Entonces la acción es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} dt = S_0 + e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (23)$$

Donde el último término de la ecuación anterior es una integral de línea, y este se deduce de: (Larson,2005)

$$\int_{t_1}^{t_2} e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} dt = e \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{A} dt = e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (24)$$

Para calcular la amplitud del electrón en viajar de x_i a x_f , utilizaremos la formulación de la mecánica cuántica en términos de la integral de trayectoria. Entonces consideremos todas las posibles trayectorias por medio de las cuales los electrones viajan de x_i a x_f . Nótese que tenemos coordenadas generalizadas $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, por lo cual estamos en el espacio de configuraciones. Por lo tanto se usará la formulación Lagrangiana de la mecánica cuántica. Como se vio en el Capítulo “Construcción de la Integral de Trayectoria”, de la ecuación (21) tenemos: (Larson, 2005)

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{\text{trayectorias}} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right)} \quad (25)$$

Nótese que la integral de arriba la podemos separar en dos, una para las trayectorias arriba del solenoide y otra para las trayectorias abajo del solenoide (Larson, 2005).

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{\text{Arriba}} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right)} + \int_{\text{Abajo}} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right)} \quad (26)$$

Note que en la región exterior al solenoide

$$B = \nabla \times A = 0$$

Entonces,

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Arriba}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Abajo}} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \quad (27)$$

Dado que la probabilidad viene dada por:

$$\mathcal{P}(i \rightarrow f) = |\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle|^2$$

Entonces,

$$\mathcal{P} = \left| e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Arriba}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Abajo}} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i \rightarrow f) &= \left| \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 + \left| \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \\ &+ 2Re \left(e^{-\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Arriba}} e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right]_{Abajo}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Note que en la última línea se combinan la trayectoria abajo del solenoide con el negativo de la trayectoria arriba del solenoide, con lo cual se forma una trayectoria cerrada. Con esto obtenemos: (Larson, 2005)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i \rightarrow f) &= \left| \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 + \left| \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \\ &+ 2Re \left(e^{\frac{i}{\hbar} e \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \end{aligned} \quad (30)$$

De la ecuación anterior notamos que la probabilidad del electrón en viajar de x_i a x_f esta desfazada por el factor $e^{\frac{i}{\hbar} e \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}}$. Por lo tanto la trayectoria del electrón se ve afectada cuando en el interior del solenoide actua un campo magnético. Este resultado es contradictorio al resultado esperado clásicamente. Además, note que (Larson, 2005)

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \int_{superficie} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{superficie} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi \quad (31)$$

Donde Φ es el flujo magnético que pasa a través del solenoide. Entonces en la probabilidad de que los electrones lleguen al detector se da una dependencia del flujo de

campo magnético, donde esta variación viene dada por el factor $e^{\frac{ie}{\hbar}\Phi}$. Ahora, note que el detector no medirá ningún desfase en la probabilidad cuando $e^{\frac{ie}{\hbar}\Phi} = 1$. Entonces, (Larson, 2005)

$$e^{\frac{ie}{\hbar}\Phi} = e^{i2\pi n}$$

Entonces

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{e}n = 2\Phi_0 n \quad (32)$$

De donde definimos el cuanto de flujo magnético mínimo como

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (33)$$

Entonces el flujo magnético viene dado en múltiplos de Φ_0 , con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, por lo tanto el flujo magnético esta cuantizado (Larson, 2005).

Especial atención merece el hecho que en la explicación del efecto Aharonov-Bohm aparece el potencial vectorial magnético \mathbf{A} , entonces uno puede preguntarse, ¿Existe físicamente \mathbf{A} ?, la respuesta es no. Nótese que \mathbf{A} aparece únicamente en pasos intermedios, mientras que el resultado final depende de $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ (Larson, 2005).

Ahora bien, considérese que el diámetro del solenoide solo ocupa un punto en el plano, y supongamos que el solenoide esta en la posición $(0, 0)$. Entonces podemos representar el espacio a través del cual viajan los electrones como un $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Nótese que en este espacio la trayectoria inversa de la trayectoria $x(t)$ es la trayectoria en la cual los electrones viajan del estado $|x_f, t - f\rangle$ al estado $|x_i, t_i\rangle$, y esta se denota por $x^{-1}(t)$. Entonces podemos formar trayectorias cerradas en el punto x_i las cuales tienen la forma

$$x_{Arriba} * x_{Abajo}^{-1}(s) = \begin{cases} x_{Arriba}(s) & t_i \leq s \leq t_f \\ x_{Abajo}^{-1}(s) & t_f \leq s \leq 2t_f \end{cases}$$

Donde $s \in [t_i, 2t_f]$. De igual forma podemos formar las trayectorias cerradas $x_{Abajo} * x_{Arriba}^{-1}(s)$ en x_i . Entonces uno puede imaginar que las trayectorias que siguen los rayos

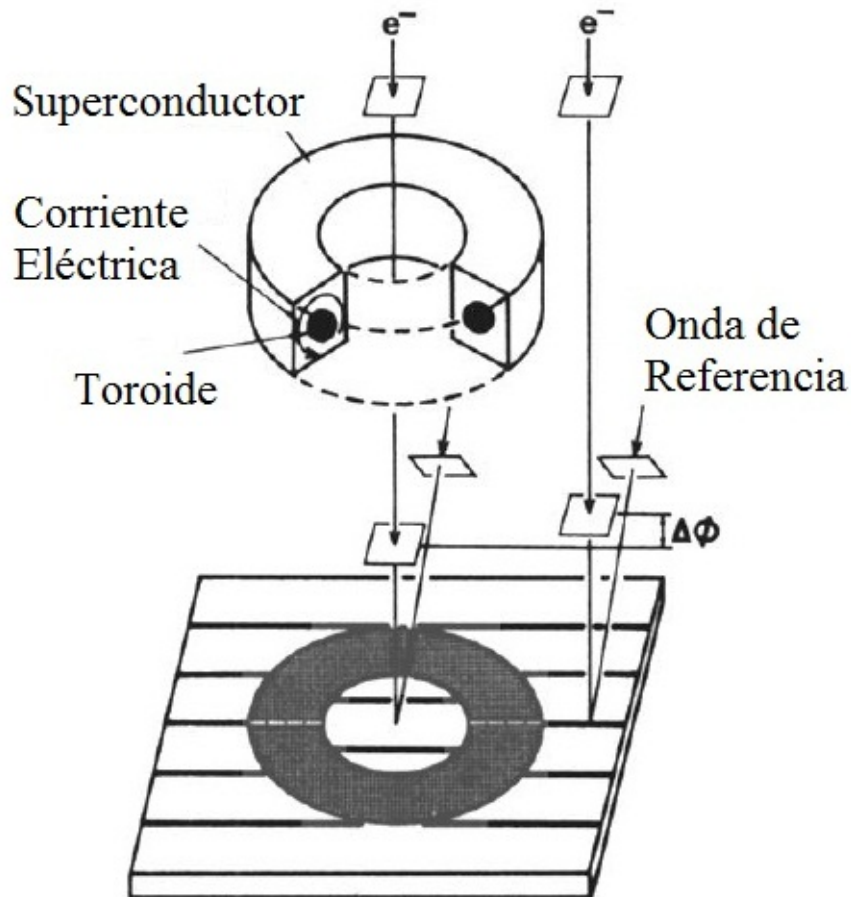
de electrones encierran el flujo magnético varias veces, como se vio en el Capítulo Teorema de Van Kampen el número de veces que una trayectoria encierra el solenoide es llamado el índice. En particular para el índice de este espacio note que las trayectorias $x_{Arriba} * x_{Abajo}^{-1}(s)$ dan infinitas vueltas alrededor del punto $(0, 0)$ en sentido de las agujas del reloj, y considerando las trayectorias $x_{Abajo} * x_{Arriba}^{-1}(s)$ las cuales también dan infinitas vueltas alrededor de $(0, 0)$ pero en sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos que el índice es \mathbb{Z} . Entonces notamos que se tiene una propiedad topológica para el espacio en el cual viajan los electrones. Finalmente nos preguntamos, ¿qué tan válido es este efecto debido a que este se ha realizado bajo condiciones muy idealizadas?, es más, éste se ha realizado en dos dimensiones. Por lo cual es natural preguntarnos, ¿existe el efecto Ahornov-Bohm en \mathbb{R}^3 ? En el Capítulo “Topología y Experimento” se presentan las respuestas a estas preguntas (Larson, 2005).

V. TOPOLOGÍA Y EXPERIMENTO

En 1986 Akira Tonomura y sus colaboradores realizaron físicamente el experimento definitivo que demostró la existencia del efecto Aharonov-Bohm en tres dimensiones. consideremos el siguiente experimento: supóngase que tenemos una máquina que produce electrones en el estado $|x_i, t_i\rangle$ y estos viajan a través del espacio de tres dimensiones hasta llegar a un detector en el cual se mide que los electrones han llegado en el estado $|x_f, t_f\rangle$. En la trayectoria de los electrones entre la máquina y el detector coloquemos un toroide, el cual tiene un campo magnético en su interior y esta cubierto por un superconductor. Se cubre con el superconductor porque este aísla completamente el campo magnético en el interior del toroide. Recordemos que el campo magnético del toroide es circular en su interior y cero en el exterior; pero aquí si existe un potencial vectorial magnético (ver Apéndice B). Entonces se lanzan dos rayos de electrones, uno pasa a travez del centro del toroide y el otro por uno de los lados, como se muestra en la Figura 3. Los electrones de los dos rayos tienen los mismos estados iniciales $|x_i, t_i\rangle$, notemos que los electrones al viajar no se ven afectados por el campo magnético del toroide. Al llegar al detector los dos rayos de electrones se mide un ángulo de desfase entre dichos rayos. Clásicamente las trayectorias de los electrones no son afectadas por el campo magnético del toroide, pero a nivel cuántico las trayectorias si se ven afectadas por el potencial vectorial magnético. Ésta es la idea general del experimento realizado por Akira Tonomura en 1986, del cual concluyó que existe un desfase en la probabilidad de llegada de los rayos de electrones al detector debido a que las trayectorias de los electrones se ven afectadas por el campo magnético en el interior del toroide. La Figura 3 muestra dicho experimento (Tonomura, 1986).

Con la descripción del experiemnto anterior se demostró que el efecto Aharonov-Bohm existe en tres dimensiones espaciales, pero en el Capítulo “Efecto Aharonov-Bohm” con un experimento muy diferente se demostró su existencia en dos dimensiones espaciales, entonces es natural preguntarnos, ¿son equivalentes el experimento ideali-

Figura 4: Experimento de Tonomura



(Tonomura, 1986)

zado y el experimento realizado físicamente con un toroide?. Recordemos que el experimento en dos dimensiones es realizado en el espacio topológico $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ el cual tiene la propiedad topológica que su índice es \mathbb{Z} (Larson, 2005).

Entonces ahora encontremos en qué espacio topológico fue realizado el experimento de Tonomura, primero notemos que es en tres dimensiones, por lo tanto, es un \mathbb{R}^3 , luego en este \mathbb{R}^3 los electrones son libres de seguir cualquier trayectoria posible entre la maquina que los produce y el detector menos las trayectorias que pasan por el interior del toroide éstas son las trayectorias prohibidas para los electrones. Notemos que el

toroide lo podemos hacer muy delgado de tal forma que lo podemos modelar como un círculo, digamos S^1 . Entonces el espacio topológico para el experimento de Tonomura es $\mathbb{R}^3 - S^1$ (Hatcher, 2002). Nótese que el solenoide de longitud infinita del experimento idealizado posee un campo magnético en su interior cuyas líneas de campo van de menos infinito hacia más infinito de tal forma que estas queden encerradas en el solenoide, mientras que el toroide del experimento de Tonomura posee un campo magnético en su interior cuyas líneas de campo son circulares y estas están confinadas a su interior. Entonces podemos imaginar que tomamos el solenoide y juntamos sus extremos de tal forma que formamos el toroide (Tononura, 1989).

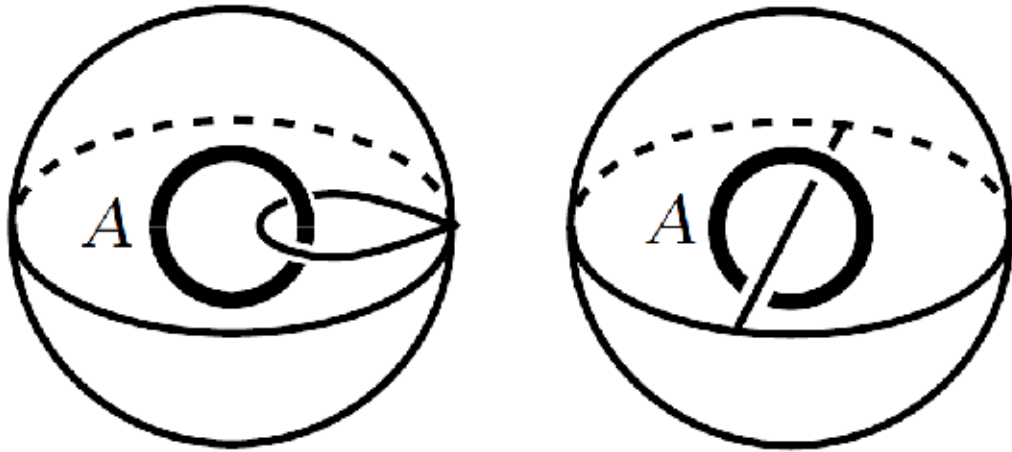
Ahora demostraremos que los espacios $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y $\mathbb{R}^3 - S^1$ son homeomorfos. Para esta demostración calcularemos el grupo fundamental de cada espacio. Primero notemos que $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tiene índice \mathbb{Z} entonces su grupo fundamental es: (Hatcher, 2002)

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{Z} \quad (34)$$

Segundo para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 - S^1$ utilizaremos retracts de deformación. Para este espacio en particular notemos que tiene el retracto de deformación de la suma cuña $S^1 \vee S^2$, tal como se muestra en la Figura 4. Para dejar en claro esta deformación notemos que $\mathbb{R}^3 - S^1$ se retrae a S^2 con un diámetro, tal como se muestra en el lado derecho de la Figura 4, donde los puntos del espacio $\mathbb{R}^3 - S^1$ que se encuentran afuera de S^2 se retraen a una deformación sobre S^2 , y los puntos adentro de S^2 y que no están en S^1 pueden ser puestos en S^2 o el diámetro. Teniendo esta deformación, podemos observar que esta puede ser modificada si los dos puntos finales del diámetro son movidos uno hacia el otro hasta que ellos coincidan formando un S^1 , entonces de aquí obtenemos la suma cuña $S^1 \vee S^2$; ver Figura 4. Dado que $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$ y $\pi(S^2) = 0$, entonces como se vio en el Capítulo Teorema de Van Kampen, por el corolario 3.34 tenemos (Hatcher, 2002):

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1) = \pi_1(S^1 \vee S^2) = \mathbb{Z} \quad (35)$$

Figura 5: Retracto de deformación



(Hatcher, 2002)

Entonces $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ y $\mathbb{R}^3 - S^1$ tienen el mismo grupo fundamental (Hatcher, 2002). Por lo tanto queda demostrada la equivalencia de los experimentos realizados por Aharonov y Tonomura. Por lo cual podemos concluir que el efecto Aharonov-Bohm existe en el espacio físico de dos y tres dimensiones (Larson, 2005).

VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha demostrado que en efecto el experimento realizado en dos dimensiones y el realizado en tres dimensiones son equivalentes. Es de gran interés el estudio del efecto Aharonov-Bohm en cuatro o más dimensiones, tomando en consideración que estos experimentos para esas dimensiones pueden ser contruidos a partir de la topología y el grupo fundamental de los experimentos de Aharonov y Tonomura.

Se demostró la cuantización del campo magnético.

Se demostró la importancia del potencial vectorial magnético, sin embargo no se tiene suficiente información para demostrar su existencia física. Es necesario que se realicen más experimentos con los cuales se pueda identificar la existencia de dicho potencial.

VII. BIBLIOGRAFÍA

1. Aharonov, Yakir y Bohm, David. 1959. *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*. Physical Review. Vol. 115. Págs 485-491.
2. Altland, Alexander y Simons, Ben. 2010. *Condensed Matter Field Theory*. 2nd edition. Cambridge University Press. 770 págs.
3. Altland, Alexander y Simons, Ben. 2001. *Concepts of Theoretical Solid State Physics*. <http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/bds10/tp3.html>. Cambridge University.
4. Griffiths, David. 2012. *Introduction to Electrodynamics*. Addison-Wesley. 624 págs.
5. Griffiths, David. 1999. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey. Prentice Hall. 596 págs.
6. Hatcher, Allen. 2002. *Algebraic Topology*. Cambridge. University Press. 553 págs.
7. Larson, Daniel. 2005. *How to Talk to a Physicist: Groups, Symmetry and Topology*. <http://physics.harvard.edu/dtlarson/tutorial05/>. Harvard University. 73 págs.
8. Marrion, Jerry y Thornton, Stephen. 2003. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5th edition. Cengage Learning. 627 págs.
9. Munkres, James. 2000. *Topology*. New Jersey. Printece Hall. 551 págs.
10. Nakahara, Mikio. 2003. *Geometry, Topology and Physics*. 2nd edition. London. Taylor and Francis. 596 págs.
11. Peskin, Murray y Tonomura, Akira. 1989. *The Aharonov-Bohm Effect*. Lectures Notes in Physics 340. Berlin. Springer-Verlag. 155 págs.
12. Rotman, Joseph. 1999. *And Introduction To The Theory of Groups*. 4th edition. Springer-Verlag. 517 págs.

13. Shankar, Ramamurti. 1994. *Principles of Quantum Mechanics*. 2nd edition. New York. Plenum Press. 453 págs.
14. Tonomura, Akira, *et al.* 1986. *Experimental Confirmation of Aharonov-Bohm Effect Using a Toroidal Magnetic Field Confined by a Superconductor*. *Physical Review*. Vol. 34, number 2. págs 815-822.
15. Willard, Stephen. 1970. *General Topology*. New York. Dover Publications. 369 págs.

VIII. APÉNDICE

A. Teoría de Grupos

El objetivo de este apéndice es presentar la definición de grupo libre, siendo este un grupo que se construye a partir de una colección de grupos dados. Cada grupo utilizado para la construcción de este nuevo grupo, es un subgrupo en el nuevo grupo. Empezaremos entonces con los conceptos básicos de teoría de grupos.

A.1 Definición: Sea G un conjunto no vacío, una operación binaria en G es una función $*$: $G \times G$ (Rotman, 1999).

A.2 Definición: Un grupo $(G, *)$ es un conjunto G con una operación binaria $*$ que cumple los siguientes axiomas: (Rotman, 1999)

1. Cerradura: si $a, b \in G \Rightarrow a * b \in G$.
2. Asociatividad: $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Neutro: existe un elemento $e \in G \ni e * a = a \forall a \in G$.
4. Inverso: para cada $a \in G$ existe un $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = e$.

Nos referiremos a un grupo denotándolo por G .

A.3 Teorema: Sea G un grupo y sea $a \in G$. Entonces existe un único elemento neutro e que satisface $a * e = a$. Además, existe un único elemento inverso $a^{-1} \in G$ que satisface $a * a^{-1} = e$ (Rotman, 1999).

A.4 Definición: Sean $(G, *)$ y (H, \circ) grupos. Un homomorfismo $f : G \rightarrow H$ es una función que cumple

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b) \forall a, b \in G$$

Un isomorfismo es un homomorfismo que es inyectivo y sobreyectivo. Dos grupos G y H son isomórficos, denotado $G \simeq H$, si existe un isomorfismo $f : G \rightarrow H$ (Rotman, 1999).

A.5 Definición: Sea G un grupo, G es un grupo abeliano (o conmutativo) si para cada par de elementos $a, b \in G$ se tiene que $a * b = b * a$ (Rotman, 1999).

A.6 Definición: Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un subgrupo de G , si S es un grupo con la operación binaria de G (Rotman, 1999).

A.7 Teorema: Sea S un subconjunto de un grupo G ; S es un subgrupo si y solo si S es no vacío, y para $a, b \in S$ se tiene que $ab^{-1} \in S$ (Rotman, 1999).

A.8 Teorema: Sean G, H grupos, y sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces la imagen de $f = \{h \in H : h = f(a) \text{ para algún } a \in G\}$ es un subgrupo de H (Rotman, 1999).

A.9 Definición: Sean S y T subconjuntos de un grupo G . Se define (Rotman, 1999)

$$ST = \{st : s \in S, t \in T\}$$

En particular

$$St = \{st : s \in S\}$$

A.10 Definición: Sea S un subgrupo de G . Una clase derecha de S en G es un subconjunto St ; una clase izquierda es un subconjunto tS . Se dice que t es una representación de St ; y también de tS (Rotman, 1999).

A.11 Lema: Sea S un subgrupo de G . Entonces $Sa = Sb$ si y solo si $ab^{-1} \in S$. $aS = bS$ si y solo si $ab^{-1} \in S$ (Rotman, 1999).

Una clase derecha de $S \in G$ tiene muchas representaciones. El lema anterior nos da un criterio para determinar cuando dos clases derechas de S son la misma cuando la

representación de cada una es conocida.

A.12 Teorema: Si S es un subgrupo de G , entonces cualesquiera dos clases derechas de $S \in G$ son idénticas o disjuntas (Rotman, 1999).

El teorema anterior nos dice que un subgrupo S induce una partición de un grupo G , en clases derechas. Además el número de clases derechas de S es igual al número de clases izquierdas de S (Rotman, 1999).

A.13 Definición: Si S es un subgrupo de G , el índice de S en G , denotado $[G : S]$, es el número de clases derechas de S en G (Rotman, 1999).

A.14 Definición: Un subgrupo S de G es un subgrupo normal de G , denotado $S \triangleleft G$, en caso que $aSa^{-1} \subset S \forall a \in G$ (Rotman, 1999).

A.15 Teorema: Si $S \triangleleft G$, entonces las clases de S en G forman un grupo, denotado G/S , de orden $[G : S]$ (Rotman, 1999).

El teorema anterior construye el grupo cociente G/S .

A.16 Definición: Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. El Kernel de f es el subconjunto de G : $\text{kernel } f = \{x \in G : f(x) = e\}$ (Rotman, 1999).

A.17 Teorema: (Primer Teorema de Isomorfismos) Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo con kernel K . Entonces K es un subgrupo normal de G y $G/K \simeq \text{im}(f)$ (Rotman, 1999).

A.18 Definición: Sea A_α una familia de grupos. El producto libre de los grupos A_α es un grupo P que tiene las siguientes propiedades: (Rotman, 1999)

1. P contiene una copia isomórfica de cada A_α , es decir, para cada α existe un homomorfismo $i_\alpha : A_\alpha \rightarrow P$ que es uno a uno.
2. Para cada grupo G y cada familia de homomorfismos $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow G$, existe un

único homomorfismo $\Phi : P \rightarrow G$ que extiende cada f_α , es decir, para cada α , $\Phi i_\alpha = f_\alpha$.

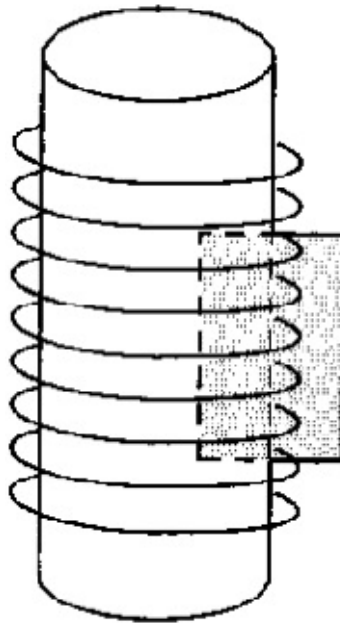
A.19 Teorema: Si A_α es una familia de grupos, entonces existe el producto libre de los A_α (Rotman, 1999).

A.20 Teorema: Sea A_α una familia de grupos, y sean G y H productos libres de los A_α . Entonces $G \simeq H$ (Rotman, 1999).

B. Campo magnético del solenoide y el toroide

En este apéndice se calculan el campo magnético y el potencial vectorial magnético para un solenoide y un toroide. Considérese un solenoide de longitud infinita, el cual tiene radio R y n vueltas por unidad de longitud, y a través de éste pasa una corriente eléctrica constante I , ver la Figura 5 (Griffiths, 1999).

Figura 6: Lazo amperiano solenoide



(Griffiths, 1999)

Considérese la versión integral de la ley de Ampère.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Donde el lazo amperiano utilizado es un rectángulo cuyo lado mayor es L , el cual encierra $I_{enc} = nIL$ en el interior del solenoide y $I_{enc} = 0$ en el exterior del solenoide (Griffiths, 1999). Entonces,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 nIL$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} & \text{interior} \\ 0 & \text{exterior} \end{cases}$$

Entonces el campo magnético es constante, además, escribamos el campo magnético en el interior como $\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} = B \hat{\mathbf{z}}$. Ahora calcularemos el potencial vectorial magnético \mathbf{A} de dicho solenoide. Note que el problema de encontrar \mathbf{A} para el solenoide es análogo al problema de la ley de Ampere para un cable de longitud infinita que posee una distribución de corriente uniforme. Entonces el lazo amperiano utilizado es un círculo de radio s . Para la región $s < R$ tenemos: (Griffiths, 1999)

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$A(2\pi s) = \mu_0 n I (\pi s^2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} s \hat{\phi}$$

Para la región $s > R$ tenemos

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$A(2\pi s) = \mu_0 n I (\pi R^2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2s} \hat{\phi}$$

De donde se nota que la dirección de \mathbf{A} es la dirección de la corriente eléctrica (Griffiths, 1999).

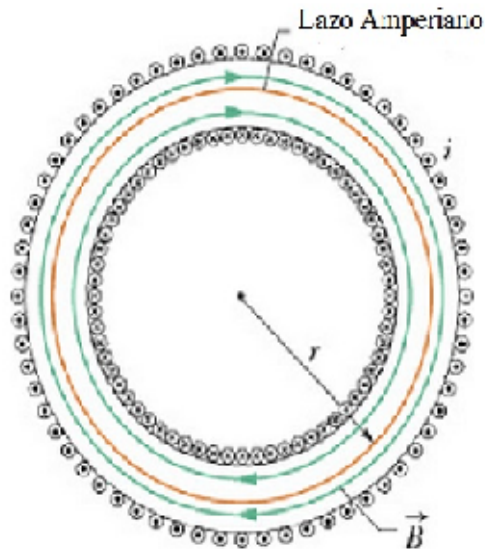
Ahora considérese un toroide con radios s_1 y s_2 con respecto a su eje, además tiene una corriente eléctrica I con N vueltas en total, ver la Figura 6 (Griffiths, 1999).

En el interior del toroide usamos un lazo amperiano de radio s (Griffiths, 1999).

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}$$

$$B(2\pi s) = \mu_0 N I$$

Figura 7: Lazo amperiano toroide



(Griffiths, 1999)

Para el exterior del toroide

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(NI - NI) = 0$$

Entonces

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} \hat{\phi} & \text{interior} \\ 0 & \text{exterior} \end{cases}$$

Para calcular \mathbf{A} utilizaremos un lazo amperiano circular de radio R . Entonces en el exterior del toroide: (Griffiths, 1999)

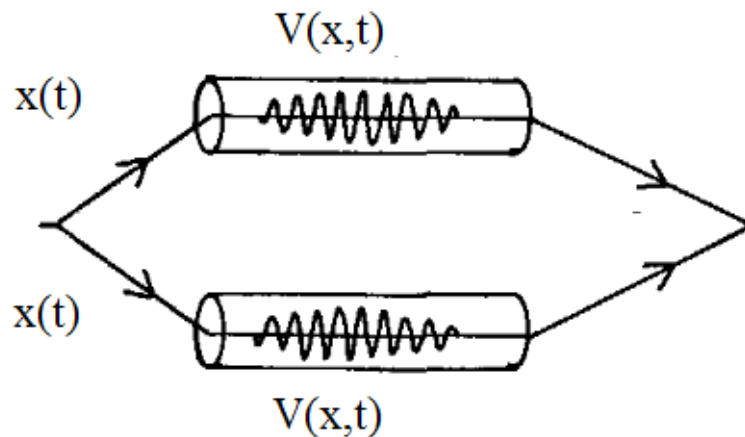
$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \\ A(2\pi R) &= B \left(\pi \left(\frac{s_2 - s_1}{2} \right)^2 \right) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi s_2} \left(\pi \left(\frac{s_2 - s_1}{2} \right)^2 \right) \\ \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 NI}{16\pi s_2 R} (s_2 - s_1)^2 \hat{\theta} \end{aligned}$$

Notemos que \mathbf{A} tiene forma de círculos que encierran el toroide, además \mathbf{A} tiene la dirección de I (Griffiths, 1999).

C. Efecto Aharonov-Bohm eléctrico

En este apéndice se estudiará el efecto Aharonov-Bohm eléctrico. Este se produce cuando un electrón viaja en una región libre de campo eléctrico, pero en dicha región actúa un potencial eléctrico $V(x, t)$. Este efecto en contraste con su contraparte magnética no tiene prueba experimental. Sin embargo no hay nada que impida darle un tratamiento teórico. Considérese el siguiente experimento idealizado. Se tiene una máquina que emite un rayo de electrones, luego este se divide en dos rayos. Los dos rayos entran a una región en la cual existe un potencial eléctrico, luego los rayos salen de esta región y son recombinados en un solo rayo. Entonces los electrones llegan a un detector, note que los electrones nunca viajan en una región en la cual exista un campo eléctrico. Sin embargo, ellos atraviesan un cilindro cargado, por lo cual existe un potencial eléctrico en su interior. Este experimento se describe en la Figura 7 (Peskin, 1989).

Figura 8: Efecto Aharonov-Bohm eléctrico



(Peskin, 1989)

Supóngase que se emiten dos electrones tales que tienen los mismos estados $|x_i\rangle$ y $|x_f\rangle$, tal y como se muestra en la figura anterior. Describiremos por $x(t)$ las trayectorias seguidas por los electrones. Considérese el Lagrangiano para el electrón que viaja a

través de un potencial eléctrico; siendo este: (Peskin, 1989)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + eV(\mathbf{x}, t) \quad (36)$$

Entonces la acción es

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + eV(\mathbf{x}, t) \right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 dt + \int_{t_i}^{t_f} eV(\mathbf{x}, t) dt = S_0 + e \int_{t_i}^{t_f} V(\mathbf{x}, t) dt \quad (37)$$

Para calcular la amplitud del electrón en viajar de x_i a x_f , utilizaremos la formulación de la mecánica cuántica en términos de la integral de trayectoria. Entonces consideremos todas las posibles trayectorias por medio de las cuales los electrones viajan de x_i a x_f . Nótese que tenemos coordenadas generalizadas $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, por lo cual estamos en el espacio de configuraciones. Por lo tanto se usará la formulación Lagrangiana de la mecánica cuántica, como se vio en el capítulo 1, de la ecuación (21) tenemos:

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{\text{trayectorias}} D\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{t_i}^{t_f} V(\mathbf{x}, t) dt \right)} \quad (38)$$

Nótese que la integral de arriba la podemos separar en dos, una para las trayectorias arriba del solenoide y otra para las trayectorias abajo del solenoide (Peskin, 1989).

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{\text{Arriba}} D\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{t_i}^{t_f} eV(\mathbf{x}, t) dt \right)} + \int_{\text{Abajo}} D\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \left(S_0 + e \int_{t_i}^{t_f} V(\mathbf{x}, t) dt \right)} \quad (39)$$

Entonces,

$$\mathcal{A}(i \rightarrow f) = e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{t_i}^{t_f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{\text{Arriba}}} \int_{\text{Arriba}} D\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_{t_i}^{t_f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{\text{Abajo}}} \int_{\text{Abajo}} D\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \quad (40)$$

Dado que la probabilidad viene dada por:

$$\mathcal{P}(i \rightarrow f) = |\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle|^2$$

Entonces,

$$\mathcal{P} = \left| e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_i^{f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{Arriba}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} + e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_i^{f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{Abajo}} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i \rightarrow f) &= \left| \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 + \left| \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \\ &+ 2Re \left(e^{-\left[\frac{i}{\hbar} e \int_i^{f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{Arriba}} e^{\left[\frac{i}{\hbar} e \int_i^{f} V(\mathbf{x}, t) dt \right]_{Abajo}} \int_{Arriba} Dx(t) e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

Note que en la última línea se combinan la trayectoria abajo del solenoide con el negativo de la trayectoria arriba del solenoide, con lo cual se forma una trayectoria cerrada. Con esto obtenemos: (Peskin, 1989)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i \rightarrow f) &= \left| \int_{Arriba} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 + \left| \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right|^2 \\ &+ 2Re \left(e^{\frac{i}{\hbar} e \oint V(\mathbf{x}, t) dt} \int_{Arriba} Dx(t) e^{-\frac{i}{\hbar} S_0} \int_{Abajo} Dx(t) e^{\frac{i}{\hbar} S_0} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

De la ecuación anterior notamos que la probabilidad del electrón en viajar de x_i a x_f está desfasada por el factor $e^{\frac{i}{\hbar} e \oint V(\mathbf{x}, t) dt}$. Por lo tanto la trayectoria del electrón se ve afectada cuando éste viaja a través de una región en la cual no existe campo eléctrico pero sí potencial eléctrico. Este resultado es contradictorio al resultado esperado clásicamente (Peskin, 1989).

Ahora, note que el detector no medirá ningún desfase en la probabilidad cuando $e^{\frac{i}{\hbar} e \oint V(\mathbf{x}, t) dt} = 1$ (Peskin, 1989). Entonces,

$$e^{\frac{i}{\hbar} e \oint V(\mathbf{x}, t) dt} = e^{i2\pi n}$$

Entonces

$$\oint V(\mathbf{x}, t) dt = \frac{2\pi\hbar}{e} n \quad (44)$$

Donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, nótese que el desfase entre los dos rayos en el efecto eléctrico es similar al de su contraparte magnética (Peskin, 1989).

D. Una explicación diferente del efecto Aharonov-Bohm

Considere el experimento presentado en el Capítulo Efecto Aharonov-Bohm, el experimento de la Figura 1 y Figura 2. Cuando no existe campo magnético en el interior del solenoide los electrones en los rayos de electrones tienen únicamente energía cinética, por lo cual su Hamiltoniano es $H = H_0$ (Aharonov, 1959). Cuando se induce un campo magnético en el interior del solenoide el nuevo Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{[P - (e/c)A]^2}{2m} = H_0 + H_A$$

Entonces

$$\begin{aligned} H\psi &= H_0\psi + H_A = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = E\psi \\ &-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + H_A \psi = E\psi \end{aligned}$$

Una solución para la ecuación de arriba es

$$\psi = \psi_0 e^{-iS/\hbar}$$

donde

$$S = (e/c) \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$$

Dado que se tienen dos rayos de electrones, uno arriba del solenoide y otro en el lado opuesto, se tiene que la solución la podemos escribir como

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\psi = \psi_1^0 e^{-iS_1/\hbar} + \psi_2^0 e^{-iS_2/\hbar}$$

Entonces

$$\psi = \psi_1^0 + \psi_2^0 e^{iS_1/\hbar} e^{-iS_2/\hbar}$$

$$\psi = \psi_1^0 + \psi_2^0 e^{(i/\hbar)(S_1 - S_2)}$$

Por lo cual se tiene

$$\delta S = \frac{1}{\hbar} (S_1 - S_2) = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \Phi$$

Entonces observamos que el desfase en las funciones de onda de los electrones viene dado por el factor $e^{\frac{ie}{\hbar}(S_1-S_2)}$ (Aharonov, 1959). Nótese que no se medirá desfase entre dichas funciones cuando $e^{\frac{ie}{\hbar}(S_1-S_2)} = 1$. Entonces

$$e^{\frac{ie}{\hbar c}\Phi} = e^{i2\pi n}$$

Entonces

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{e}n$$

Por lo tanto el flujo magnético está cuantizado y este viene dado en unidades de $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (Aharonov, 1959). Hemos obtenido los mismos resultados que en el Capítulo “Efecto Aharonov-Bohm” utilizando un enfoque diferente.