

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

**BIBLIOTECA  
DE LA  
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS  
FUNCIONES ESPECIALES  
DE LA FISICA

ROBERTO LIONEL TEJADA OAJACA

Guatemala

1984

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS  
FUNCIONES ESPECIALES  
DE LA FISICA

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA  
Facultad de Ciencias y Humanidades

ALGUNAS APLICACIONES DE LAS  
FUNCIONES ESPECIALES  
DE LA FISICA

ROBERTO LIONEL TEJADA OAJACA

Trabajo de investigación  
presentado para optar  
al grado académico de  
Licenciado en Física

Guatemala

1984

Vo. Bo. :

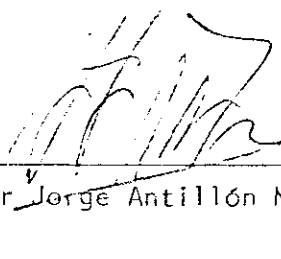
(f)



Licenciado José Luis Cofiño Samayoa  
Asesor

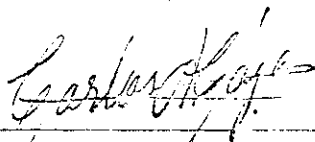
Tribunal :

(f)



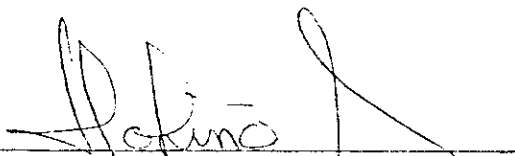
Doctor Jorge Antillón Matta

(f)



Doctor Carlos Cajas Vidaurre

(f)



Licenciado José Luis Cofiño Samayoa

Fecha de aprobación: noviembre 2 de 1984

.

A Dios Todopoderoso.

A la memoria de mi padre:  
Lionel Tejada Zepeda.

A mi madre, Victoria:  
Por su ayuda y apoyo  
constantes.

A mis hermanos: Eugenia  
Isabel, Jorge Antonio,  
Elsa Marina, Graciela  
Victoria y Silvia  
Lucrecia.

A mis amigos.



## PREFACIO

El presente trabajo puede utilizarse en cursos de matemática aplicada cuya cobertura abarque las funciones especiales y sus aplicaciones, particularmente aquellos dedicados a problemas con valores en la frontera de la física matemática e ingeniería.

Se analiza la fundamentación teórica de las funciones especiales que aquí se trabajan (Hipergeométrica, Legendre, Bessel, Laguerre y Hermite), con el fin de obtener un mejor entendimiento de las ecuaciones que generalmente aparecen en las aplicaciones físicas que involucran de alguna manera una determinada función especial. Este análisis, aunque breve, se hace en detalle para la obtención de las soluciones de la ecuación diferencial de cada función especial, así como también para las propiedades más comunes e importantes de cada función, a saber: fórmulas de recurrencia, representaciones integrales, formas asintóticas, propiedades de ortogonalidad y otras. Además se trata con propiedades exclusivas de cada función.

En el tercer capítulo se estudian varias aplicaciones de las funciones especiales a la física. Tales aplicaciones comprenden problemas desde la física clásica hasta la teoría cuántica, así como también aplicaciones en la electrónica.



## CONTENIDO

	Páginas
PREFACIO	ix
I. INTRODUCCION	1
II. FUNDAMENTACION TEORICA	5
1. Funciones Hipergeométricas	5
1.1 La serie hipergeométrica	5
1.2 Fórmula integral para las series hipergeométricas	6
1.3 Fórmulas de recurrencia	9
1.4 Ecuación hipergeométrica	14
1.5 Relaciones lineales entre soluciones de la ecuación hipergeométrica	19
2. Funciones de Legendre	21
2.1 Polinomios de Legendre	21
2.2 Fórmula de Rodrigues para $P_n(x)$	25
2.3 Fórmula integral de Schläfli	26
2.4 Fórmulas de recurrencia para $P_n(x)$	27
2.5 Ecuación diferencial de Legendre	29
2.6 Propiedades integrales de los polinomios de Legendre. Funciones como una serie de polinomios de Legendre	38
3. Funciones de Bessel	40
3.1 Coeficiente de Bessel	40
3.2 Relaciones de recurrencia para los coeficientes de Bessel	45
3.3 Ecuación diferencial de Bessel	47

	Páginas
3.4 Formas integrales para las funciones de Bessel $J_n(x)$	54
3.5 Fórmulas de adición para las funciones de Bessel $J_n(x)$	56
3.6 Integrales de Funciones de Bessel	57
3.7 Desarrollo asintótico de las funciones de Bessel $J_n(x)$ y $Y_n(x)$	62
3.8 Los ceros de las funciones de Bessel $J_n(x)$	64
3.9 Las integrales de Fourier-Bessel	69
3.10 Funciones Hankel	73
3.11 Funciones esféricas de Bessel	75
3.12 Funciones modificadas de Bessel	77
3.13 Algunas propiedades de las funciones modificadas de Bessel	82
3.14 Funciones Ber y Bei	83
4. Funciones de Laguerre	87
4.1 Polinomios de Laguerre	87
4.2 Fórmulas de recurrencia	90
4.3 Ecuación diferencial de Laguerre	91
4.4 Propiedades integrales de los polinomios de Laguerre	93
5. Funciones de Hermite	94
5.1 Polinomios de Hermite	94
5.2 Fórmulas de recurrencia	97
5.3 Ecuación diferencial de Hermite	98
5.4 Propiedades integrales de las funciones de Hermite	103

	Páginas
III. APLICACIONES A LA FISICA	107
6. Aplicaciones de las funciones hipergeométricas	107
6.1 Trompo simétrico	107
6.2 Niveles energéticos en un pozo potencial	113
6.3 Penetración en una barrera potencial por electrones	116
6.4 Coeficiente de reflexión en una barrera potencial	132
7. Aplicaciones de las funciones de Legendre	125
7.1 Carga puntual	125
7.2 Distribución de temperatura en un casquete esférico	127
7.3 Esfera conductora en el campo de una carga puntual	132
8. Aplicaciones de las funciones de Bessel	135
8.1 Solución de la ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas	135
8.2 Vibraciones de la membrana circular	138
8.3 Ondas en el agua	145
8.4 Un pozo de potencial cuadrado tridimensional	151
8.5 Conducción de calor sobre superficies aumentadas	156
9. Aplicación de las funciones de Laguerre	159
9.1 Respuesta en la banda de baja frecuencia de un amplificador RC en cascada	159
10. Aplicaciones de las funciones de Hermite	165
10.1 Oscilador armónico simple	165

	Páginas
10.2 Oscilador armónico perturbado	173
IV. CONCLUSIONES	177
V. BIBLIOGRAFIA	179

## I. INTRODUCCION

El planteamiento matemático de los problemas físicos se hace, generalmente, en términos de ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el comportamiento de las cantidades físicas que intervienen. El problema se reduce entonces a buscar las funciones que son soluciones de estas ecuaciones y que satisfagan, además, ciertas condiciones en la frontera de la región en consideración.

Puede suceder que en ciertos sistemas de coordenadas, estas ecuaciones diferenciales parciales sean solubles por el método de separación de variables. En tal caso, pueden resultar una o varias ecuaciones diferenciales totales, cuya solución no se pueda expresar en términos de funciones elementales. En este caso se definen nuevas funciones (funciones especiales), que son las soluciones matemáticas de estas ecuaciones; las propiedades de éstas son indispensables para la interpretación física de los problemas.

El estudio de las propiedades de las funciones especiales puede realizarse por medio de procedimientos muy variados. Aquí se realiza por el método de la función generadora, que tiene quizá, un poco más de generalidad si se compara con otros métodos. Se postula la función generadora para cada una de las funciones especiales que se estudiarán, y a partir de éstas, se obtendrán, además de algunas de sus propiedades, la ecuación diferencial que satisfacen. La obtención de las soluciones de estas ecuaciones se hará por medio del método de solución en serie; pues este méto-

do nos conduce por lo menos a una solución particular, si no es que a la solución general.

La finalidad de este trabajo es la de proporcionar una ayuda a los estudiantes de física que se inician en el estudio de las funciones especiales. Se pretende dar, de una manera compacta, la mayoría de las propiedades que aparecen con mayor frecuencia en los problemas de la física y de analizar estas propiedades de la manera más simple posible. A través del presente trabajo se intenta mostrar cómo estas funciones pueden utilizarse en la discusión, tanto de problemas de física clásica como de problemas de la teoría cuántica. El plan general del contenido es presentar la teoría de las funciones de la manera antes mencionada, para luego demostrar la aplicación de esta teoría mediante problemas específicos.

De cada una de las funciones especiales se establecen ciertas propiedades como son las fórmulas de recurrencia, las representaciones integrales, las formas asintóticas, las propiedades de ortogonalidad y otras. Además se tratará con propiedades exclusivas de cada función. En las funciones hipergeométricas se encuentran las relaciones lineales entre soluciones de esta ecuación que expresan una serie hipergeométrica en términos de otras dos linealmente independientes. Este tipo de relaciones se pueden emplear, por ejemplo, para la determinación del coeficiente de reflexión en problemas de barreras de potencial.

No se pretende de ninguna manera abarcar toda la teoría de las funciones especiales, sino de ilustrar de manera general, la gran aplicabilidad de estas funciones en las diversas ramas de la física y el porqué de su importancia. Para todos aquellos interesados en analizar otros tratamientos y ahondar en el estudio de las funciones especiales, se aconseja con-

sultar libros especializados, algunos de los cuales se citan al final de este trabajo.



## II. FUNDAMENTACION TEORICA

### 1. Funciones Hipergeométricas

#### 1.1 La Serie Hipergeométrica

A la serie

$$1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \delta} x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1 \cdot 2 \cdot \delta(\delta+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \delta(\delta+1)(\delta+2)} x^3 + \dots \quad (1.1.1)$$

se le denomina serie hipergeométrica y es la generalización de la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

cuando en aquella hacemos  $\alpha=1$  y  $\beta=\delta$ . La serie converge para  $|x| < 1$  si  $\delta$  no es cero ni entero negativo y diverge para  $|x| > 1$ ; mientras que si  $|x|=1$  la serie es absolutamente convergente si  $\delta > \alpha + \beta$ . Converge cuando  $x = -1$  siempre que  $\delta > \alpha + \beta - 1$ .

A la serie hipergeométrica se le acostumbra denotar por

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; x) \quad (1.1.2)$$

Si introducimos la notación

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (1.1.3)$$

podemos expresar a la serie hipergeométrica en la forma

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\delta)_n} x^n \quad (1.1.4)$$

De la definición (1.1.4), tenemos:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; x) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \delta; x) \quad (1.1.5)$$

Una propiedad muy importante de las series hipergeométricas se sigue inmediatamente de (1.1.4); si derivamos ésta con respecto a  $x$  obtenemos:

$$\frac{d}{dx} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n-1)! (\delta)_n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{n! (\delta)_{n+1}} x^n$$

por medio de la igualdad,  $(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n$ , podemos escribir el miembro derecho de la igualdad en la forma

$$\frac{\alpha\beta}{\delta} \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n}{n! (\delta+1)_n} x^n,$$

así que

$$\frac{d}{dx} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{\alpha\beta}{\delta} {}_2F_2(\alpha+1, \beta+1; \delta+1; x) \quad (1.1.6)$$

Nuevamente de (1.1.4), tenemos

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; c) = 1 \quad (1.1.7)$$

por lo que, resulta de (1.1.6)

$$\left[ \frac{d}{dx} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) \right]_{x=c} = \frac{\alpha\beta}{\delta}. \quad (1.1.8)$$

Muchas funciones pueden expresarse en términos de las funciones hipergeométricas, por ejemplo:

$$(1+x)^n = {}_2F_1(-n, b; b; -x), \quad (1+x) = x {}_2F_1(1, 1; 2; -x),$$

$$P_n(x) = {}_2F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}), \quad J_n(x) = \frac{(x/2)^n}{\Gamma(1+n)} {}_2F_1(-; 1+n; -\frac{x^2}{4}),$$

$$L_n(x) = {}_2F_1(-n; 1; x), \quad H_n(x) = (2x)^n {}_2F_0(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}; -; -\frac{1}{2x}).$$

## 1.2 Fórmula Integral para las Series Hipergeométricas

Encontraremos una expresión integral de las series hipergeométricas

para obtener, por medio de ésta, otras propiedades. De la definición de las funciones beta (Rainville, 1960: p. 18)

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (1.2.1)$$

tenemos usando (1.1.3) que

$$\frac{(\beta)_n}{(\delta)_n} = \frac{B(\beta+n, \delta-\beta)}{B(\beta, \delta-\beta)} = \frac{1}{B(\beta, \delta-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\beta+n-1} dt. \quad (1.2.2)$$

Sustituyendo (1.2.2) en (1.1.4) resulta

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{1}{B(\beta, \delta-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\beta+n-1} dt$$

que puede escribirse como

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{1}{B(\beta, \delta-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (xt)^n dt$$

y usando el hecho de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (xt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+n-1)!}{n!(\alpha-1)!} (xt)^n = (1-xt)^{-\alpha}$$

se obtiene finalmente la fórmula integral

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{1}{B(\beta, \delta-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} dt, \quad (1.2.3)$$

válida si  $|x| < 1$  y  $\beta, \delta > 0$ .

Una aplicación de (1.2.3) es, por ejemplo, escribir series hipergeométricas con argumento unitario

$$\begin{aligned} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta, 1) &= \frac{1}{B(\beta, \delta-\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\beta-1} (1-t)^{-\alpha} dt \\ &= \frac{B(\beta, \delta-\alpha-\beta)}{B(\beta, \delta-\beta)} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

si  $\delta - \alpha - \beta > 0$ ,  $\beta > 0$  .. De (1.2.1), expresando la función beta en términos de funciones gama, se obtiene el Teorema de Gauss

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; z) = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta - \alpha - \beta)}{\Gamma(\delta - \alpha)\Gamma(\delta - \beta)} \quad (1.2.5)$$

Ahora si  $\alpha = -n$ , un entero negativo, tenemos

$$\frac{\Gamma(\delta - \alpha - \beta)}{\Gamma(\delta - \beta)} = (\delta - \beta)_n, \quad \frac{\Gamma(\delta - \alpha)}{\Gamma(\delta)} = (\delta)_n$$

así que la ecuación (1.2.5) se reduce a

$${}_2F_2(-n, \beta; \delta; z) = \frac{(\delta - \beta)_n}{(\delta)_n} \quad (1.2.6)$$

que se conoce como el Teorema de Vandermonde.

Se puede deducir a partir de la fórmula (1.2.3), relaciones entre series hipergeométricas de argumento  $x$  y aquellas de argumento  $\frac{x}{x-1}$ .

Si hacemos  $z = \frac{x}{x-1}$  en la ecuación (1.2.3) y como

$$\left[1 - x(1-z)\right]^{-\alpha} = (1-x)^{-\alpha} \left[1 + \frac{x}{1-x}z\right]^{-\alpha}$$

tenemos

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}}{B(\beta, \delta - \beta)} \int_0^1 (1-z)^{\beta-1} z^{\delta-\beta-1} \left[1 - \frac{x}{x-1}z\right]^{-\alpha} dz$$

y aplicando la relación (1.2.3)

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}}{B(\beta, \delta - \beta)} B(\delta - \beta, \beta) {}_2F_2(\alpha, \delta - \beta; \delta; \frac{x}{x-1}),$$

de donde obtenemos

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = (1-x)^{-\alpha} {}_2F_2(\alpha, \delta - \beta; \delta; \frac{x}{x-1}) \quad (1.2.7)$$

y por simetría la relación

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta, \gamma; x) = (1-x)^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \beta; \gamma, \frac{x}{1-x}). \quad (1.2.8)$$

Usando la relación (1.1.4) y la ecuación (1.2.7) con  $x$  reemplazada por  $\frac{x}{x-1}$ , tenemos

$${}_2F_2(\alpha, \delta-\beta; \gamma, \frac{x}{x-1}) = {}_2F_2(\delta-\beta, \alpha; \gamma; \frac{x}{x-1}) = (1-x)^{\delta-\beta} {}_2F_2(\delta-\beta, \delta-\alpha; \delta; x)$$

por lo tanto

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) = (1-x)^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta; x). \quad (1.2.9)$$

### 1.3 Fórmulas de Recurrencia

A las seis funciones

$${}_2F_2(\alpha \pm 1, \beta; \delta; x), \quad {}_2F_2(\alpha, \beta \pm 1; \delta; x), \quad {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta \pm 1; x),$$

las llamaremos funciones contiguas a  ${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x)$ . Por brevedad usaremos las notaciones

$${}_2F_2 = {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x)$$

$${}_2F_2(\alpha+) = {}_2F_2(\alpha+1, \beta, \delta, x)$$

$${}_2F_2(\alpha-) = {}_2F_2(\alpha-1, \beta; \delta; x)$$

así como  ${}_2F_2(\beta+)$ ,  ${}_2F_2(\beta-)$ ,  ${}_2F_2(\delta+)$ ,  ${}_2F_2(\delta-)$ , para las otras cuatro de las seis funciones contiguas a  ${}_2F_2$ .

Gauss probó, y seguiremos su técnica, que entre  ${}_2F_2$  y dos de sus funciones contiguas, existe una relación lineal con coeficientes que son funciones lineales de  $x$ .

Si denotamos por

$$\delta_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\delta)_n} x^n$$

entonces

$${}_2F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$$

y

$${}_2F_2(\alpha+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+)_n}{(\alpha)_n} \delta_n \quad \cdot \quad {}_2F_2(\alpha-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-)_n}{(\alpha)_n} \delta_n.$$

Como,  $\alpha(\alpha+2)_n = (\alpha+n)(\alpha)_n$  y  $(\alpha-2+n)(\alpha-2)_n = (\alpha-2)(\alpha)_n$ , podemos escribir las seis funciones contiguas a  ${}_2F_2$  en la forma

$${}_2F_2(\alpha+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha+n}{\alpha} \delta_n, \quad {}_2F_2(\alpha-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha-2}{\alpha-2+n} \delta_n,$$

$${}_2F_2(\beta+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\beta} \delta_n, \quad {}_2F_2(\beta-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta-2}{\beta-2+n} \delta_n, \quad (1.3.1)$$

$${}_2F_2(\delta+) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{\delta+n} \delta_n, \quad {}_2F_2(\delta-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta-2+n}{\delta-2} \delta_n.$$

Emplearemos también el operador  $\theta = (x \frac{d}{dx})$ ; este operador tiene la particularidad de que  $\theta x^n = n x^n$ .

Como

$$(\theta + \alpha) {}_2F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) \delta_n,$$

se tiene con ayuda de (1.3.1) que

$$(\theta + \alpha) {}_2F_2 = \alpha {}_2F_2(\alpha+), \quad (1.3.2)$$

$$(\beta + \alpha)_2 F_2 = \alpha {}_2 F_2(\alpha +), \quad (1.3.3)$$

$$(\beta + \delta - 1)_2 F_2 = (\alpha - 1)_2 F_2(\delta -). \quad (1.3.4)$$

De (1.3.2), (1.3.3) y (1.3.4) se sigue inmediatamente que

$$(\alpha - \beta)_2 F_2 = \alpha {}_2 F_2(\alpha +) - \beta {}_2 F_2(\beta +) \quad (1.3.5)$$

y

$$(\alpha - \delta + 1)_2 F_2 = \alpha {}_2 F_2(\alpha +) - (\delta - 1)_2 F_2(\delta -) \quad (1.3.6)$$

dos de las fórmulas de recurrencia.

Ahora, considérese

$$\theta {}_2 F_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n! (\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\delta)_n} x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{n! (\delta)_{n+2}} x^n$$

entonces

$$\theta {}_2 F_2 = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - n)(\beta - n)}{(\delta + n)} \delta_n \quad (1.3.7)$$

como

$$\frac{(\alpha - n)(\beta - n)}{(\delta + n)} = n + (\alpha + \beta - \delta) + \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta + n)}$$

la ecuación (1.3.7) resulta

$$\theta {}_2 F_2 = x \sum_{n=0}^{\infty} n \delta_n + (\alpha + \beta - \delta) x \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n + \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{\delta + n} \delta_n,$$

que puede escribirse en la forma

$$(1-x) \theta {}_2 F_2 = (\alpha + \beta - \delta) x {}_2 F_2 + \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} x {}_2 F_2(\delta +). \quad (1.3.8)$$

De (1.3.2) obtenemos

$$(1-x) \theta {}_2 F_2 = -\alpha (1-x) {}_2 F_2 + \alpha (1-x) {}_2 F_2(\alpha +)$$

que combina con (1.3.8) resulta otra de las fórmulas de recurrencia

$$[\alpha + (\beta - \delta)x] {}_2F_2 = \alpha (1-x) {}_2F_2(\delta+) - \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} x {}_2F_2(\delta+). \quad (1.3.9)$$

Aplicando el operador  $\theta$  a la serie  ${}_2F_2(x-)$ , obtenemos

$$\theta {}_2F_2(\alpha-) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-1)_n (\beta)_n}{(n-1)! (\delta)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-1)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{n! (\delta)_{n+1}} x^{n+1}$$

que puede escribirse como

$$\theta {}_2F_2(\alpha-) = (\alpha-1)x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta+n}{\delta+n} \delta_n, \quad (1.3.10)$$

pero tenemos que

$$\frac{\beta+n}{\delta+n} = 1 - \frac{\delta-\beta}{\delta+n}$$

de donde, la relación (1.3.10) se transforma en

$$\theta {}_2F_2(\alpha-) = (\alpha-1)x \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n - \frac{(\alpha-1)(\delta-\beta)}{\delta} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta}{\delta+n} \delta_n,$$

que en vista de (1.3.1) resulta

$$\theta {}_2F_2(\alpha-) = (\alpha-1) x {}_2F_2 - \frac{(\alpha-1)(\delta-\beta)}{\delta} x {}_2F_2(\delta+). \quad (1.3.11)$$

Si en (1.3.2) cambiamos  $\alpha$  por  $(\alpha-1)$ , ésta se transforma en

$$\theta {}_2F_2(\alpha-) = (\alpha-1) {}_2F_2 - (\alpha-1) {}_2F_2(\alpha-) \quad (1.3.12)$$

De (1.3.11) y (1.3.12) se sigue que

$$(1-x) {}_2F_2 = {}_2F_2(\alpha-) - \frac{\delta-\beta}{\delta} x {}_2F_2(\delta+). \quad (1.3.13)$$

Similarmente, como  $\alpha$  y  $\beta$  pueden intercambiarse sin que se afecte la serie hipergeométrica, escribimos

$$(\alpha - \chi)_2 F_2 = {}_2F_2(\beta -) - \frac{\delta - \alpha}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +) \quad (1.3.14)$$

Hemos obtenido cinco fórmulas de recurrencia (1.3.5, 1.3.6, 1.3.9, 1.3.12, 1.3.13); por combinaciones convenientes de estas cinco relaciones, pueden obtenerse otras fórmulas de recurrencia. Daremos a continuación una tabla útil de éstas:

- (a)  $(\alpha - \rho)_2 F_2 = \alpha {}_2F_2(\alpha +) - \rho {}_2F_2(\rho +)$
- (b)  $(\alpha - \delta + 1)_2 F_2 = \alpha {}_2F_2(\alpha +) - (\delta - 1)_2 F_2(\delta -)$
- (c)  $[\alpha + (\rho - \delta)\chi]_2 F_2 = \alpha(1 - \chi)_2 F_2(\alpha +) - \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +)$
- (d)  $(1 - \chi)_2 F_2 = {}_2F_2(\alpha -) - \frac{(\delta - \beta)}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +)$
- (e)  $(1 - \chi)_2 F_2 = {}_2F_2(\rho -) - \frac{(\delta - \alpha)}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +)$
- (f)  $[2\alpha - \delta + (\beta - \alpha)\chi]_2 F_2 = \alpha(1 - \chi)_2 F_2(\alpha +) - (\delta - \alpha)_2 F_2(\alpha -)$
- (g)  $(\alpha - \beta - \delta)_2 F_2 = \alpha(1 - \chi)_2 F_2(\alpha +) - (\delta - \beta)_2 F_2(\beta -)$
- (h)  $(\delta - \alpha - \beta)_2 F_2 = (\delta - \alpha)_2 F_2(\alpha -) - \beta(1 - \chi)_2 F_2(\beta +)$
- (i)  $(\beta - \alpha)(1 - \chi)_2 F_2 = (\delta - \alpha)_2 F_2(\alpha -) - (\delta - \beta)_2 F_2(\beta -)$
- (j)  $[1 - \alpha + (\delta - \beta - 1)\chi]_2 F_2 = (\delta - \alpha)_2 F_2(\alpha -) - (\delta - 1)(1 - \chi)_2 F_2(\delta -)$
- (k)  $[2\beta - \delta + (\alpha - \beta)\chi]_2 F_2 = \beta(1 - \chi)_2 F_2(\beta +) - (\delta - \beta)_2 F_2(\beta -)$
- (l)  $[\beta + (\alpha - \delta)\chi]_2 F_2 = \beta(1 - \chi)_2 F_2(\beta +) - \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +)$
- (m)  $(\beta - \delta + 1)_2 F_2 = \beta {}_2F_2(\beta +) - (\delta - 1)_2 F_2(\delta -)$
- (n)  $[1 - \rho + (\delta - \alpha - 1)\chi]_2 F_2 = (\delta - \beta)_2 F_2(\beta -) - (\delta - 1)(1 - \chi)_2 F_2(\delta -)$
- (o)  $[\delta - 1 + (\alpha + \beta + 1 - 2\delta)\chi]_2 F_2 = (\delta - 1)(1 - \chi)_2 F_2(\delta -) - \frac{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)}{\delta} \chi {}_2F_2(\delta +)$

## 1.4 Ecuación Hipergeométrica

En ciertos problemas físicos se desea resolver la ecuación diferencial

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + [(1+\alpha+\beta)x-\gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y \quad (1.4.1)$$

donde los parámetros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son constantes. Esta ecuación se conoce como la ecuación hipergeométrica. Se encuentra que tiene puntos regulares singulares en  $x=0, x=1, x=\infty$ ; entonces es posible encontrar la solución de esta ecuación, haciendo un desarrollo en serie alrededor de cada uno de estos puntos.

a) Desarrollo alrededor del punto  $x=0$ .

Proponemos como solución

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{\lambda+\lambda} \quad (1.4.2)$$

Sustituyendo esta serie en la ecuación (1.4.1), obtenemos la relación

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda+\alpha)(k+\lambda+\beta)a_{\lambda} x^{k+\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-1+\delta)a_{\lambda} x^{k+\lambda-1} = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo valor de  $x$  y esto se satisface solo si el coeficiente de cualquier potencia de  $x$  es idénticamente cero; es decir debe verificarse el sistema de ecuaciones:

$$a_0(k-1+\delta) = 0 \quad (1.4.3a)$$

$$a_{j+1} = \frac{(k+j+\alpha)(k+j+\beta)}{(k+j+1)(k+j+\delta)} a_j \quad (1.4.3b)$$

Si en la ecuación (1.4.3a), llamada ecuación indicial, se toma  $a_0 \neq 0$ , és-

ta se verifica solamente si

$$1^\circ \text{ caso } k = 0$$

$$2^\circ \text{ caso } k = 1 - \delta$$

$$1^\circ \text{ caso } k = 0$$

La ecuación (1.4.3b), llamada fórmula de recurrencia para los coeficientes, toma la forma

$$a_{j+1} = \frac{(j+\alpha)(j+\beta)}{(j+1)(j+\delta)} a_j \quad (1.4.4)$$

y la solución que resulta es:

$$y_1 = a \left[ 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\delta} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\delta(\delta+1)} x^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+r-1)}{r!\delta(\delta+1)\dots(\delta+r-1)} x^r + \dots \right]. \quad (1.4.5)$$

La serie dentro del parentesis cuadrado es la serie hipergeométrica; por lo tanto, esta solución se puede escribir en la forma

$$y_1 = a_1 {}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; x) \quad (1.4.6)$$

$$2^\circ \text{ caso } k = 1 - \delta$$

Con esta condición la fórmula de recurrencia toma la forma

$$a_{j+1} = \frac{(\alpha - \delta + j + 1)(\beta - \delta + j + 1)}{(j+1)(j+2-\delta)} a_j \quad (1.4.7)$$

si se hace el cambio de notación siguiente:

$$\alpha' = \alpha - \delta + 1, \quad \beta' = \beta - \delta + 1, \quad \delta' = 2 - \delta$$

la ecuación (1.4.7) se transforma en

$$a_{j+1} = \frac{(j+\alpha')(j+\beta')}{(j+1)(j+\delta')} a_j \quad (1.4.8)$$

que es del mismo tipo que la fórmula de recurrencia (1.4.4); por lo tanto, la solución es

$$y_2 = a_0 x^{1-\delta} {}_2F_1(\alpha-\delta+1, \beta-\delta+1; \alpha-\delta; x). \quad (1.4.9)$$

La solución más general es entonces la combinación lineal de las dos soluciones particulares, es decir

$$y = A {}_2F_1(\alpha, \beta; \delta; x) + B x^{1-\delta} {}_2F_1(\alpha-\delta+1, \beta-\delta+1; \alpha-\delta; x) \quad (1.4.10)$$

b) Desarrollo alrededor del punto  $x=1$ .

Si hacemos el cambio de variable  $\xi = 1-x$ , la ecuación (1.4.1) se reduce a

$$\xi(\xi-1) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + [(\alpha+\beta+1)\xi - (\alpha+\beta-\delta+1)] \frac{dy}{d\xi} + \alpha\beta y = 0$$

que es idéntica con la ecuación (1.4.1), con  $\delta$  igual a  $\alpha+\beta-\delta+1$  y  $x$  igual a  $\xi = 1-x$ . Entonces se sigue de (1.4.10) que la solución requerida es

$$y = A {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\delta+1; 1-x) + B (1-x)^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_1(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\alpha-\beta+1; 1-x) \quad (1.4.11)$$

c) Desarrollo alrededor de  $x=\infty$ .

Proponemos como solución

$$y = \sum_{\lambda=c}^{\infty} a_{\lambda} x^{-k-\lambda}$$

la cual sustituida en la ecuación (1.4.1), da la relación

$$\sum_{\lambda=c}^{\infty} (k+\lambda-\alpha)(k+\lambda-\beta) a_{\lambda} x^{-k-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)(k+\lambda-\delta+1) a_{\lambda} x^{-k-\lambda-1} = 0$$

Análogamente al caso a), debe cumplirse el sistema de ecuaciones

$$a_0 (1-\alpha)(1-\beta) = 0 \quad (1.4.12a)$$

$$a_{j+1} = \frac{(j+1)(k+j-\alpha+1)}{(k+j-\alpha+1)(k+j-\beta+1)} a_j \quad (1.4.12b)$$

Para que la ecuación indicial (1.4.12a) se cumpla es necesario que

$$k = \alpha \quad \text{o} \quad k = \beta$$

1° caso  $k = \alpha$

La ecuación (1.4.12b) toma la forma

$$a_j y_j = \frac{(j+1)(j+\alpha-\delta+1)}{(j+1)(j+\alpha-\beta+1)} y_j$$

haciendo los siguientes cambios de notación

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \alpha - \delta + 1, \quad \gamma' = \alpha - \beta + 1,$$

la fórmula de recurrencia se convierte en la ecuación (1.4.4), así que su solución es:

$$y_1 = x^{-\alpha} {}_2F_2(\alpha, \alpha - \delta + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x})$$

2° caso  $k = \beta$

La solución puede obtenerse por analogía con la anterior, resultando

$$y_2 = x^{\beta} {}_2F_2(\beta, \beta - \delta + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x})$$

La solución general es:

$$y = A x^{-\alpha} {}_2F_2(\alpha, \alpha - \delta + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}) + B x^{\beta} {}_2F_2(\beta, \beta - \delta + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{x}) \quad (1.4.13)$$

Ahora demostraremos que ecuaciones del tipo

$$(x^2 + Ax + B) \frac{d^2 y}{dx^2} + (Cx + D) \frac{dy}{dx} + Ey = 0 \quad (1.4.14)$$

pueden reducirse a la ecuación hipergeométrica. Para esto supondremos que las dos raíces  $a$  y  $b$  de  $(x^2 + Ax + B)$  son diferentes.

Si en la ecuación (1.4.14), hacemos el cambio de variable

$$t = \frac{x-a}{b-a}$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$(t^2 - t) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[ Ct + \frac{Ca + D}{b-a} \right] \frac{dy}{dt} + Ey = 0$$

que es la ecuación hipergeométrica con:

$$C = 1 + \alpha + \beta$$

$$\frac{C\alpha + D}{b - a} = -\gamma$$

$$E = \alpha\beta.$$

Existen algunas relaciones entre la ecuación hipergeométrica y otras ecuaciones muy utilizadas en la física matemática. A continuación obtendremos algunas de estas relaciones.

Si introducimos una nueva variable  $\xi$ , de la forma

$$x = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

y la sustituimos en la ecuación diferencial hipergeométrica, ésta toma la forma

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (1 + \alpha + \beta - 2\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi) \frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0. \quad (1.4.15)$$

Si escogemos las constantes  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  como:

$$\alpha = \ell + 1, \quad \beta = -\ell, \quad \gamma = 1$$

La ecuación (1.4.15) se reduce a

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 y}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dy}{d\xi} + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad (1.4.16)$$

que se conoce con el nombre de ecuación diferencial de Legendre.

Una solución particular de esta ecuación es

$$y = a_2 F_2(\ell + 1, -\ell; 1; \frac{1 - \xi}{2}). \quad (1.4.17)$$

Una ecuación que se conoce como la ecuación de Tschbyscheff es

$$(1-\xi^{-1}) \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \xi \frac{dy}{d\xi} + n^2 y = 0 \quad (1.4.18)$$

que resulta, cuando en la ecuación (1.4.15) hacemos

$$\alpha = -\rho = n \text{ (ENTERO)} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

y su solución es

$$y(\xi) = A {}_2F_2\left(n, -n; \frac{1}{2}, \frac{1-\xi}{2}; \frac{1-\xi}{2}\right) + B \left(\frac{1-\xi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} {}_2F_2\left(n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{1-\xi}{2}\right) \quad (1.4.19)$$

el primer término de la solución es un polinomio y se conoce como el polinomio de Tschbyscheff de grado  $n$ .

### 1.5 Relaciones Lineales entre Soluciones de la Ecuación Hipergeométrica.

Las series de la solución (1.4.10) son convergentes si  $|x| < 1$ , es decir en el intervalo  $(-1, 1)$ , mientras que las series de la solución (1.4.11) son convergentes en el intervalo  $(0, 2)$ . Existe, por lo tanto, un intervalo  $(0, 1)$ , en el que las cuatro series convergen y como solamente dos soluciones de la ecuación diferencial son linealmente independientes, se sigue que debe existir una relación lineal, válida si  $0 < x < 1$ , entre soluciones del tipo (1.4.10) y entre las del tipo (1.4.11). Es decir que deben existir constantes  $A$  y  $B$  no nulas tales que

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta, \lambda; x) = A {}_2F_2(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \delta + 1; 1-x) + B(1-x)^{\lambda-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\alpha-\beta+1; 1-x).$$

Si  $x=0$ , tenemos

$$1 = A {}_2F_2(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \delta + 1; 1) + B {}_2F_2(\delta - \alpha, \delta - \beta; \delta - \alpha - \beta + 1; 1)$$

y si  $x=1$

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; 1) = A$$

si suponemos que  $1 > \delta > \alpha + \beta$

Con la ayuda de la ecuación (1.2.5), tenemos que

$$A = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)}$$

y además

$$1 = A \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\delta+1)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\beta-\delta+1)\Gamma(\alpha-\delta+1)} + B \frac{\Gamma(\delta-\alpha-\beta+1)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}$$

resultando de estas dos últimas relaciones

$$B = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}{\Gamma(1)\Gamma(\beta)}$$

sustituyendo los valores de A y B, encontramos finalmente

$$\begin{aligned} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta, \chi) &= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} {}_2F_2(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\delta+1; 1-\chi) \\ &+ \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-\chi)^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\alpha-\beta+1; 1-\chi) \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Si reemplazamos  $\chi$  por  $\frac{1}{\chi}$  en la ecuación (1.5.1) obtenemos

$$\begin{aligned} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; \frac{1}{\chi}) &= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} {}_2F_2(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\delta+1; 1-\frac{1}{\chi}) + \\ &+ \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-\frac{1}{\chi})^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\alpha-\beta+1; 1-\frac{1}{\chi}). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Ahora, debido a la ecuación (1.2.7)

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; 1-\frac{1}{\chi}) = \chi^\alpha {}_2F_2(\alpha, \delta-\beta; \delta; 1-\chi)$$

por lo que, sustituyendo esta última relación en (1.5.2), tenemos

$$\begin{aligned} {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; \frac{1}{\chi}) &= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\delta-\alpha-\beta)}{\Gamma(\delta-\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} \chi^\alpha {}_2F_2(\alpha, \delta-\beta; \delta; 1-\chi) \\ &+ \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\beta-\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \chi^\alpha (1-\chi)^{\delta-\alpha-\beta} {}_2F_2(\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\alpha-\beta+1; 1-\chi) \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

donde  $1 < x < 2$  y  $1 > \delta > \alpha + \beta$ .

Se puede demostrar, de una manera similar, la relación

$$\begin{aligned}
 {}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x) &= \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta-\alpha)} (-x)^{-\alpha} {}_2F_2(\alpha, \alpha+1-\delta; \alpha+1-\beta; \frac{1}{x}) + \\
 &+ \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\delta-\beta)} (-x)^{-\beta} {}_2F_2(\beta, \beta+1-\delta; \beta+1-\alpha; \frac{1}{x}),
 \end{aligned}
 \tag{1.5.4}$$

que expresa a  ${}_2F_2(\alpha, \beta; \delta; x)$  como una serie que converge para  $|x| > 1$ .

Todas estas relaciones son típicas entre soluciones de la ecuación hipergeométrica (1.4.1). Si se cambia la variable independiente, en esta ecuación, por cualquiera de las siguientes:

$$1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x-1}{x}, \quad \frac{x}{x-1},$$

la ecuación se transforma en una del mismo tipo (pero naturalmente con diferentes parámetros). La ecuación (1.4.1) tiene así doce soluciones, dos para cada variable independiente. Ahora, cualquiera de estas soluciones puede expresarse en términos de dos soluciones fundamentales, como de los tipos de las ecuaciones (1.5.1), (1.5.3) y (1.5.4); se tienen así veinticuatro soluciones de la ecuación hipergeométrica.

## 2. Funciones de Legendre

### 2.1 Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ , se definen por medio de la función

generadora

$$H(x, r) = (1 - 2xr + r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n \quad (2.1.1)$$

Demostraremos primeramente que el coeficiente  $P_n(x)$  de  $r^n$  es un polinomio en  $x$ , precisamente de grado  $n$ . Desarrollando el miembro izquierdo de la relación (2.1.1) tenemos

$$\begin{aligned} (1 - 2xr + r^2)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s)!}{2^{2s} (s!)^2} (2xr - r^2)^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s \frac{(-1)^k (2s)! (2x)^{s-k}}{2^{2s} (s!) k! (s-k)!} r^{s+k} \end{aligned}$$

Se sigue de (2.1.1), igualando los coeficientes de  $r^n$ , que:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n n! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.1.2)$$

donde, mediante  $\frac{n}{2}$ , se expresa el máximo entero  $\leq \frac{n}{2}$ . La ecuación

(2.1.2) muestra que  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $x$ . Desarrollando la suma, resulta

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \left[ x^n \frac{n! (n-1)!}{2! (n-1)!} x^{n-2} + \frac{n! (n-2)! (n-1)! (n-3)!}{2^2 4! (n-1)! (n-3)!} x^{n-4} \dots \right] \quad (2.1.2a)$$

Los primeros polinomios de Legendre se evalúan fácilmente a partir de la relación (2.1.2) ó (2.1.2a), y son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \quad (2.1.3)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \quad \text{etc.}$$

Si en (2.1.1) reemplazamos  $x$  por  $-x$  y  $r$  por  $-r$ , el miembro izquierdo no cambia, entonces

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \quad (2.1.4)$$

de lo que se concluye que  $P_n(x)$  es una función par en  $x$  para  $n$  par y una función impar en  $x$  para  $n$  impar.

Ahora, si en (2.1.1) hacemos  $x=1$ , obtenemos

$$(1-r)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) r^n,$$

como el desarrollo de

$$(1-r)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n,$$

se sigue que

$$P_n(1) = 1, \quad (2.1.5)$$

si la combinamos con (2.1.4), resulta

$$P_n(-1) = (-1)^n. \quad (2.1.6)$$

Nuevamente de (2.1.1), si  $\chi=0$ , tenemos

$$(1+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) r^n$$

pero como

$$(1+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} r^{2n},$$

entonces

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}; \quad (2.1.7)$$

resultado que también puede obtenerse fácilmente a partir de (2.1.2).

Derivando la ecuación (2.1.2) con respecto a  $x$ , tenemos

$$P'_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k-1)!} x^{n-2k-1} \quad (2.1.8)$$

y de (2.1.8) se sigue que

$$P'_{2n}(0) = 0, \quad P'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (2.1.9)$$

## 2.2 Fórmula de Rodrigues para $P_n(x)$ .

Cuando  $n$  es un entero, se tiene que

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} x^{2n-2k}$$

si derivamos este resultado  $n$  veces con respecto a  $x$ , obtenemos

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$$

y dividiendo ambos miembros de la ecuación por  $2^n n!$ , resulta

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

y por la definición de  $P_n(x)$ , ecuación (2.1.2), tenemos que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n, \quad (2.2.1)$$

que se conoce como la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre.

La fórmula de Rodrigues es de gran utilidad para la evaluación de integrales definidas que contienen polinomios de Legendre.

Considérese por ejemplo la integral

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx, \quad (2.2.2)$$

sustituyendo la fórmula de Rodrigues podemos escribirla en la forma

$$I = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx,$$

integrando por partes tenemos

$$I = \frac{1}{2^n n!} \left[ f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx,$$

la cantidad dentro del paréntesis cuadrado se elimina para ambos límites, por lo que

$$I = - \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n f''(x) dx.$$

continuando este proceso, encontramos finalmente que

$$I = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n f^{(n)}(x) dx. \quad (2.2.3)$$

### 2.3 Fórmula Integral de Schläfli

A partir de la fórmula de Rodrigues (2.2.1) y utilizando la fórmula integral de Cauchy, para la  $n$ -ésima derivada de una función analítica,

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(r)}{(r-x)^{n+1}} dr,$$

donde  $C$  es un contorno que rodea al punto  $x=r$ , obtenemos la fórmula

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(r^2 - 1)^n}{(r-x)^{n+1}} dr$$

que se conoce como la fórmula integral de Schläfli para los polinomios de Legendre.

#### 2.4 Fórmulas de Recurrencia para $P_n(x)$ .

Las fórmulas de recurrencia, son relaciones que conectan funciones de Legendre de diferentes grados con sus derivadas. Estas fórmulas las deduciremos a partir de la función generadora (2.1.1). Si derivamos con respecto a  $r$  ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial H(x,r)}{\partial r} = \frac{x+r}{(1-2xr+r^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) r^{n-1} \quad (2.4.1)$$

que puede escribirse en la forma

$$(x-r) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) r^n = (1-2xr+r^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) r^{n-1}.$$

Igualando coeficientes de  $r^n$ , obtenemos la relación

$$x P_n(x) - P_{n-1}(x) = (n+1) P_{n+1}(x) - 2x n P_n(x) + (n-1) P_{n-1}(x) \quad n > 0$$

la cual se reduce a

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0. \quad n > 0 \quad (2.4.2)$$

Por otra parte, si derivamos ambos miembros de la ecuación (2.1.1)

con respecto a  $x$ , obtenemos

$$\frac{\partial H(x,r)}{\partial x} = \frac{r}{(1-2xr+r^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) r^n \quad (2.4.3)$$

donde

$$P_n'(x) = \frac{d}{dx} P_n(x)$$

combinando (2.4.1) y (2.4.3)

$$(x-r) \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) r^n.$$

Igualando los coeficientes de  $r^n$ , obtenemos la relación

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x), \quad n > 0 \quad (2.4.4)$$

De la igualdad

$$r \frac{\partial}{\partial r} (rH) = (1-xr) \frac{\partial H(x,r)}{\partial x}$$

sustituyendo (2.4.1) y (2.4.3) obtenemos la ecuación

$$nP_{n-1}(x) - P_n'(x) + xP_{n-1}'(x) = 0. \quad (2.4.5)$$

Derivando (2.4.2) con respecto a  $x$  obtenemos

$$(n+1)P_{n+1}'(x) - (2n+1)P_n'(x) - (2n+1)xP_n'(x) + nP_{n-1}'(x) = 0. \quad (2.4.6)$$

De (2.4.4) y (2.4.6) eliminando  $P_n'(x)$  obtenemos la fórmula

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x) \quad (2.4.7)$$

Sumando (2.4.4) y (2.4.7) tenemos

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x). \quad (2.4.8)$$

De (2.4.4) y (2.4.5) eliminando  $P_{n-1}'(x)$ , obtenemos la relación

$$(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (2.4.9)$$

Derivando esta última relación se obtiene que

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) = -nxP_n'(x) - nP_n(x) + nP_{n-1}'(x);$$

sustituyendo en ésta el valor de  $P_{n-1}'(x)$ , dado por la ecuación (2.4.4)

y reorganizando términos, resulta

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (2.4.10)$$

la cual nos muestra que los polinomios de Legendre son soluciones de la ecuación diferencial

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (2.4.11)$$

para  $n$  entero; esta ecuación se conoce como la ecuación diferencial de Legendre.

## 2.5 Ecuación Diferencial de Legendre.

En la sección anterior se demostró que  $P_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \quad (2.5.1)$$

cuando  $n$  es un entero. En esta sección determinaremos la solución más general de esta ecuación. Proponemos una solución en potencias crecientes de  $x$ , alrededor del punto  $x=0$ , de la forma

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda} \quad (2.5.2)$$

Sustituyendo esta serie en la ecuación, obtenemos la relación

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} [(k+\lambda)(k+\lambda-1) + 2(k+\lambda) - n(n+1)] x^{k+\lambda} = 0$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo valor de  $x$  y esto se verifica solamente si el coeficiente de toda potencia de  $x$  es cero. Es decir, se debe satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$a_0 k(k-1) = 0 \quad (\text{para } \lambda = -2) \quad (2.5.3a)$$

$$a_1 k(k+1) = 0 \quad (\text{para } \lambda = -1) \quad (2.5.3b)$$

$$a_{j+2} = \frac{(k+j)(k+j+1) - n(n+1)}{(k+j+1)(k+j+2)} a_j \quad (\text{para } \lambda \geq 0) \quad (2.5.4)$$

Si en la ecuación (2.5.3a) suponemos que  $a_0 \neq 0$ , entonces claramente las soluciones de esta ecuación son:

$$k = 0, 1$$

Si  $k=0$ , (2.5.3b) se cumple para todo valor de  $a_1$

Si  $k=1$ , (2.5.3b) se cumple solamente para  $a_1 = 0$

Ahora, de la ecuación (2.5.3b), si suponemos que  $a_1 \neq 0$ , la ecuación se satisface para los valores de

$$k = 0, -1$$

Si  $k=0$ , (2.5.3a) se cumple para todo valor de  $a_0$

Si  $k=-1$ , (2.5.3a) se cumple cuando  $a_0 = 0$

Entonces tenemos tres casos por resolver:  $k=0, 1$  y  $-1$

1° caso,  $k=0$

La fórmula de recurrencia (2.5.4) toma la forma

$$a_{j+2} = \frac{(j-n)(j+n+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \quad (2.5.5)$$

De la serie (2.5.2) vemos que la solución es

$$y = (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2r} x^{2r} + \dots) + (a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2r+1} x^{2r+1} + \dots) \quad (2.5.6)$$

y tomando, con ayuda de (2.5.5),  $a_0$  y  $a_1$  como constantes arbitrarias

$$\begin{aligned} y = & a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots + \right. \\ & \left. (-1)^r \frac{n(n-2) \dots (n-2r+2)(n+1) \dots (n+2r-1)}{(2r)!} x^{2r} + \dots \right] \\ & + a_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right. \\ & \left. (-1)^r \frac{(n-1)(n-3) \dots (n-2r+1)(n+2) \dots (n+2r)}{(2r+1)!} x^{2r+1} + \dots \right] \end{aligned}$$

La cual puede reescribirse así

$$y = a_0 \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r n(n-2) \dots (n-2r+2)(n+1)(n+3) \dots (n+2r-1)}{(2r)!} x^{2r} \right] \\ + a_1 x \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (n-1)(n-3) \dots (n-2r+1)(n+2)(n+4) \dots (n+2r)}{(2r+1)!} x^{2r} \right] \quad (2.5.6a)$$

2° caso,  $k=1$  con  $a_1=0$

La fórmula de recurrencia toma la forma

$$a_{j+2} = \frac{(j+1-n)(j+n+2)}{(j+2)(j+3)} a_j$$

la solución será ahora solamente en potencias impares de  $x$  de la forma

$$y = a_0 x + a_2 x^3 + \dots + a_{2r} x^{2r+1} + \dots$$

Si hacemos el cambio de notación

$$a_{2r} \equiv A_{2r+1}$$

la fórmula de recurrencia toma la forma

$$A_{(j+1)+2} = \frac{(j+1-n)(j+1+n+1)}{(j+1+1)(j+1+2)} A_{j+1},$$

ahora hacemos  $j' = j+1$ , entonces

$$A_{j'+2} = \frac{(j'-n)(j'+n+1)}{(j'+1)(j'+2)} A_{j'}, \quad j' = 1, 3, 5, \dots \quad (2.5.7)$$

Comparando esta última fórmula de recurrencia (2.5.7) con la fórmula de recurrencia (2.5.5), vemos que son del mismo tipo con la diferencia que la ecuación (2.5.7) es únicamente para los coeficientes de las potencias impares de  $x$ ; por lo tanto, tenemos que este resultado es solamente un caso particular de la solución (2.5.6).

3° caso,  $k=-1$  con  $a_0=0$

La fórmula de recurrencia resulta

$$a_{j+2} = \frac{(j-1)j-n(n+1)}{j(j+1)} a_j$$

y la solución es de la forma

$$y = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2r+2} x^{2r+2} + \dots$$

si se hace el cambio de variable

$$a_{2r+2} \equiv A_{2r}$$

la fórmula de recurrencia se transforma en

$$A_{(j-1)+2} = \frac{(j-1)(j-n-1)}{j(j+1)} A_{(j-1)}$$

si hacemos  $j' = j-1$ , ésta se convierte en

$$A_{j'+2} = \frac{(j'-1)(j'-n-1)}{(j'+1)(j'+2)} A_{j'} \quad j' = 0, 2, 4, \dots \quad (2.5.8)$$

Vemos nuevamente que resulta un caso particular de la solución (2.5.6a).

Entonces la solución más general es la que se obtuvo en el caso  $k=0$ , es decir la solución (2.5.6a).

Para que el método de solución en serie sea aplicable, es necesario que la solución sea convergente. La serie converge si

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+2}}{a_j} \right| x^2 < 1$$

Pero el valor de

$$\left| \frac{a_{j+2}}{a_j} \right|$$

que se obtiene inmediatamente de (2.5.5), tiende a 1 cuando  $j \rightarrow \infty$ , por lo tanto la condición para que (2.5.6a) converja es que  $x^2 < 1$ , es decir, que  $|x| < 1$ .

Por conveniencia usaremos la notación

$$y_1 = a_0 \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r n(n-2)\dots(n-2r+2)(n+1)(n+3)\dots(n+2r-1)}{(2r)!} x^{2r} \right] \quad (2.5.9)$$

$$y_2 = a_1 x \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r (n-1)(n-3)\dots(n-2r+1)(n+2)(n+4)\dots(n+2r)}{(2r+1)!} x^{2r} \right] \quad (2.5.10)$$

que convergen si  $|x| < 1$ . Veremos ahora si es posible construir una solución que sea válida para  $|x| > 1$ .

Supóngase una solución en serie en potencias decrecientes de  $x$ , de la forma

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k-\lambda}$$

de la que obtenemos, siguiendo el procedimiento anterior, la ecuación indicial

$$a_0 [k(k+1) - n(n+1)] = 0 \quad (2.5.11)$$

que se cumple para

$$k = n \quad \text{o} \quad k = -n-1$$

y la fórmula de recurrencia

$$a_{j+2} = \frac{(k-j)(k-j-1)}{(k-j-2)(k-j-1) - n(n+1)} a_j \quad (2.5.12)$$

1° caso:  $k = n$

La ecuación (2.5.12) resulta

$$a_{j+2} = \frac{(n-j)(n-j-1)}{(j+2)(j-2n+1)} a_j$$

que da como solución la serie

$$y = a_0 x^n \left[ 1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{-4} - \dots \right. \\ \left. \frac{(-1)^r n(n-1)(n-2) \dots (n-2r+2)(n-2r+1)}{2^r (2r-2)(2r-4) \dots 2(2n-1) \dots (2n-2r+1)} x^{-2r} + \dots \right]$$

que también puede escribirse

$$y = a_0 x^n \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r n(n-1)(n-2) \dots (n-2r+2)(n-2r+1)}{2^r (2r-2)(2r-4) \dots 2(2n-1) \dots (2n-2r+1)} x^{-2r} \right] \quad (2.5.13)$$

2° caso:  $k = -n-1$ .

Tenemos que

$$2j+2 = \frac{(j+n+1)(j+n+2)}{(j+2)(2n+j+3)} a_j,$$

la solución resulta ser

$$y = a_0 x^{-n-1} \left[ 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-2} + \frac{(n+2)(n+1)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4(2n+3)(2n+5)} x^{-4} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(n+3)(n+5) \dots (n+2r)}{2^r (2r-2)(2r-4) \dots 2(2n+3) \dots (2n+2r+1)} x^{-2r} + \dots \right]$$

6

$$y = a_0 x^{-n-1} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(n+2)(n+3) \dots (n+2r)}{2^r (2r-2)(2r-4) \dots 2(2n+3) \dots (2n+2r+1)} x^{-2r} \right] \quad (2.5.14)$$

Las dos soluciones (2.5.13) y (2.5.14) son independientemente y por lo tanto, su suma representa la solución general de la ecuación de Legendre.

Se puede demostrar fácilmente que estas series convergen para  $|x| > 1$ .

Hemos obtenido dos soluciones generales de la ecuación de Legendre.

La primera (ecuaciones 2.5.9 y 2.5.10) converge para  $|x| < 1$ , la segunda

(ecuaciones 2.5.13 y 2.5.14) converge para  $|x| > 1$ . Sin embargo, para

ciertos valores de los coeficientes, las series se vuelven polinomios, los cuales permanecen finitos para todo valor finito de  $x$ .

La ecuación 2.5.9 se reduce a un polinomio cuando  $n$  es un entero positivo par o un entero negativo impar (o cero).

a) Sea  $n$  par y positivo:  $n=2r$ , (2.5.9) se vuelve

$$y = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \dots - \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n(n-2) \dots 2(n+2) \dots (2n-4)}{n!} x^n \right].$$

Por otro lado (2.5.13) se reduce, bajo estas mismas condiciones a

$$y = a_0 x^n \left[ 1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-4)} x^{-2} + \dots - \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{n(n-2) \dots 2(n+2) \dots (2n-4)} x^{-n} \right].$$

Estas dos soluciones son equivalentes hasta una constante multiplicativa, que se pone de manifiesto si multiplicamos la segunda por el factor

$$\frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n(n-2) \dots 2(n+2) \dots (2n-4)}{n!}.$$

b) Un procedimiento análogo, hace ver que si  $n$  es impar negativo (2.5.9) es equivalente a (2.5.14).

c) Algo semejante ocurre con (2.5.10) y (2.5.13) cuando  $n$  es un entero positivo impar y con (2.5.10) y (2.5.14) cuando  $n$  es un entero negativo impar.

Puesto que ya hemos establecido relaciones entre las cuatro soluciones, nos limitaremos a estudiar (2.5.13) y (2.5.14). Si la constante  $a_0$  en (2.5.13) se hace igual a

$$a_0 = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{n!}$$

el polinomio de grado  $n$  que resulta es el polinomio de Legendre  $P_n(x)$ .

Por otro lado, si en la solución (2.5.14) hacemos

$$a_r = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

con  $n$  entero positivo, la serie que resulta se denota por  $Q_n(x)$

$$Q_n(x) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \left[ x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-n-3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(n+1) \cdots (n+2r)}{2 \cdot 4 \cdots 2r (2n+3) \cdots (2n+2r+1)} x^{-n-2r-1} + \dots \right], \quad (r \geq 1)$$

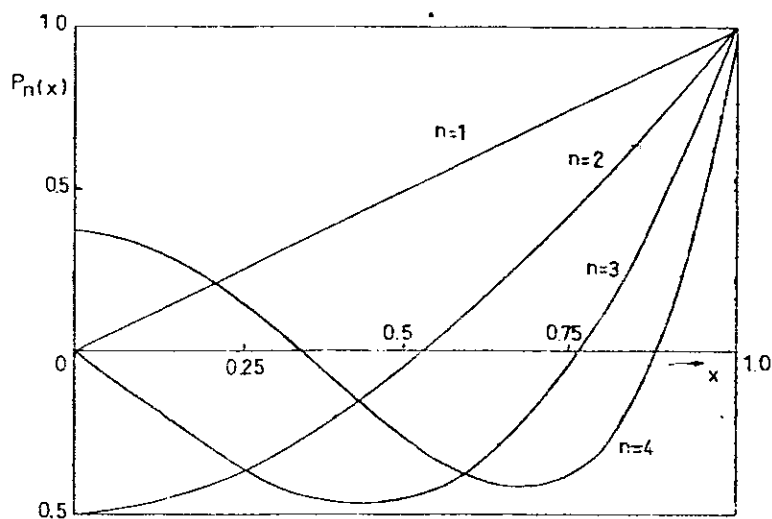


Fig. 1 Variación de  $P_n(x)$  con  $x$

que también puede ser escrita así

$$Q_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^n (n+r)! (n+2r)!}{r! (2n+2r+1)!} x^{-n-2r-1}, \quad (2.5.15)$$

válida para  $|x| > 1$ .

Esta serie infinita se denomina función de Legendre de segundo orden.

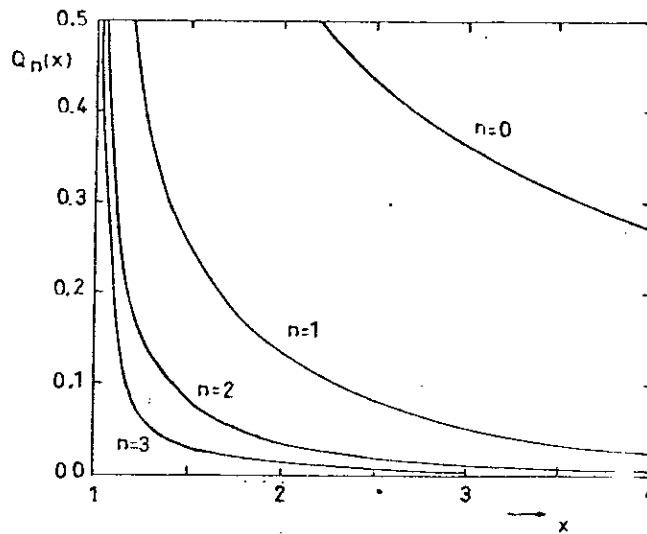


Fig. 2 Variación de  $Q_n(x)$  con  $x$

Cuando  $n$  es un entero positivo (2.5.13) es un polinomio y (2.5.14) una serie infinita. La solución general de (2.5.1) es, por lo tanto, la combinación lineal de las dos. Es decir,

$$y = AP_n(x) + BQ_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5.16)$$

Cuando  $2n$  es algún entero positivo impar, la solución degenera en (2.5.14). Para ver esto, supongamos que  $2n = 2k - 1$ , entonces el denominador del coeficiente de  $x^{n-2k}$  se anula y lo mismo ocurre para todos los términos subsecuentes. Para eliminar esta indeterminación, se multiplica la serie entera por  $(k-r)$ , lo cual causa que todos los términos de orden mayor que  $n-2k$  se anulen, mientras que los otros permanecen finitos, entonces la serie comienza con la potencia  $x^{n-2k} = x^{-n-1}$  y una inspección muestra que es idéntica con (2.5.14). En este caso, nuestro método nos proporciona solamente una solución particular que es una serie infinita. En forma análoga, cuando  $2n$  es un entero negativo impar, (2.5.14) degenera en (2.5.13).

En la mayoría de las aplicaciones, la variable  $x$  aparece en la ecuación

ción (2.5.1) como el coseno de un ángulo; como por otra parte las condiciones físicas del problema imponen la restricción de que la solución sea finita en todo el dominio de definición de la variable  $x$ , incluyendo los extremos  $x = \pm 1$ , resulta de lo anterior que tales funciones existen solamente cuando  $n$  es un entero positivo o negativo. Pero cuando  $n$  es un entero, basta considerar las soluciones (2.5.13) y (2.5.14), ya que las otras se reducen a éstas. Más aún, se puede mostrar que sustituyendo en (2.5.14)  $n$  por  $-n+1$  se obtiene (2.5.13). Basta entonces considerar solamente  $n$  entero positivo (ó cero) y tomar (2.5.13) como solución. Finalmente, como (2.5.13) con la constante debidamente escogida, es el polinomio de Legendre  $P_n(x)$ , decimos que: en los problemas físicos donde  $x = \cos \theta$ , la única solución convergente de la ecuación de Legendre para todo valor de la variable independiente, es el polinomio de Legendre de grado  $n$ .

2.6 Propiedades Integrales de los Polinomios de Legendre. Función como una serie de Polinomios de Legendre.

Mostraremos que:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (2.6.1)$$

1° caso:  $m \neq n$ .

Si en la fórmula (2.2.2) hacemos  $f(x) = P_m(x)$  con  $m < n$ , obtenemos, por el resultado (2.2.3), que

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) dx$$

Debido a la fórmula de Rodrigues tenemos que

$$\frac{d^n}{dx^n} P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^m = 0 \quad m < n,$$

por lo tanto la integral resulta ser igual a cero. Si  $m > n$ , tomamos

$f(x) = P_n(x)$  y seguimos el mismo procedimiento, obteniéndose, como es de esperar, el idéntico resultado; por lo tanto

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad m \neq n$$

2° caso:  $m = n$ .

Si  $f(x) = P_n(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx$$

entonces

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx.$$

Para calcular la integral del miembro derecho, hacemos el cambio de variable  $x = \cos \theta$

$$I = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \quad n \geq 1$$

6

$$I = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad n \geq 0$$

de donde:

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

Hemos obtenido así, ambos resultados requeridos.

Ahora demostraremos que dada una función, ésta se puede expresar como una serie de polinomios de Legendre. Es decir, dada  $f(x)$  siempre es posible escoger  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  tales que

$$f(x) \equiv a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots \quad (2.6.2)$$

Para determinar estos coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ , multiplicamos (2.6.2) por  $P_m(x)$  e integramos. Por la propiedad (2.6.1) tenemos que

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) f(x) dx = \frac{2}{2m+1} a_m$$

de donde resulta

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_m(x) f(x) dx \quad (2.6.3)$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$

### 3. Funciones de Bessel

#### 3.1 Coeficientes de Bessel

Los coeficientes de Bessel de orden  $n$ ,  $J_n(x)$ , se definen como el coeficiente de  $t^n$  en el desarrollo de la función exponencial  $e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})}$ .

En otras palabras se define a  $J_n(x)$  por medio del desarrollo

$$g(x, t) = e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n, \quad (3.1.1)$$

llamada la función generadora para los coeficientes de Bessel.

Si desarrollamos la función exponencial en serie de potencias, obtenemos que

$$e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(xt)^r}{2^r r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-x)^s}{2^s t^s s!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r! s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} t^{r-s},$$

de la definición (3.1.1),  $J_n(x)$  es el coeficiente de  $t^n$  en este desarrollo. Si  $n$  es cero o un entero positivo, encontramos que

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \frac{x^n}{2^n n!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(n+1)_s} \left(-\frac{1}{4}x^2\right)^s \quad (3.1.2)$$

Ya que  $g(x,t)$  es idéntica con  $g(x, -\frac{1}{t})$  nosotros también podemos considerar la función generadora como

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \left(-\frac{1}{t}\right)^n$$

la cual, cuando  $n$  es reemplazado por  $-n$  (entero negativo), es equivalente a

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{-n}(x) t^n \quad (3.1.3)$$

Igualando potencias de  $t^n$  en (3.1.1) y (3.1.3), nosotros tenemos la relación

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \quad (3.1.4)$$

A partir del desarrollo en la serie (3.1.2) pueden encontrarse fácilmente relaciones simples para los coeficientes de Bessel.

Por ejemplo

$$x^n J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2n+2s}}{s!(n+s)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2s} \quad (3.1.5)$$

tenemos además, como resultado de derivar ambos miembros de esta ecuación con respecto a  $x$  y hacer uso del hecho de que  $(2n+2s)/(n+s)! = 2/(n-1+s)!$ , que

$$\frac{d}{dx} \left[ x^n J_n(x) \right] = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2n+2s-1}}{s!(n-1+s)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+2s}$$

la cual comparada con (3.1.5) muestra que

$$\frac{d}{dx} \left[ x^n J_n(x) \right] = x^n J_{n-1}(x). \quad (3.1.6)$$

Si escribimos este resultado en la forma

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ x^n J_n(x) \right] = x^{n-1} J_{n-1}(x)$$

vemos que si  $m$  es un entero positivo menor que  $n$ , entonces

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left[ x^n J_n(x) \right] = x^{n-m} J_{n-m}(x) \quad (3.1.7)$$

Similarmente, podemos establecer que

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{-n} J_n(x) \right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (3.1.8)$$

lo cual es lo mismo que

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left[ x^{-n} J_n(x) \right] = -x^{-n-1} J_{n+1}(x),$$

resultado que puede generalizarse a la forma

$$\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left[ x^{-n} J_n(x) \right] = (-1)^m x^{-n-m} J_{n+m}(x), \quad (3.1.9)$$

en particular, tenemos la relación

$$x^{-n} J_n(x) = (-1)^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n J_0(x) \quad (3.1.10)$$

que muestra que el coeficiente de Bessel  $J_n(x)$  puede obtenerse de  $J_0(x)$ .

Otra propiedad importante de los coeficientes de Bessel, puede también encontrarse del desarrollo en serie de potencias (3.1.2). Su comportamiento atañe a pequeños valores del argumento  $x$ .

$$\begin{aligned}
 x^{-n} J_n(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \frac{x^{2s}}{2^{n+2s}} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \frac{x^{2s}}{2^{n+2s}}
 \end{aligned}$$

tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \frac{x^{2s}}{2^{n+2s}} = 0$$

por lo tanto resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-n} J_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \quad (3.1.11)$$

en otras palabras, para pequeños valores de  $x$  el coeficiente de Bessel  $J_n(x)$  se comporta como  $x^n/2^n n!$ .

Si en la función generadora (3.1.1) hacemos el cambio de variable  $t = e^{i\theta}$ , obtenemos la relación

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta} \quad (3.1.12)$$

que puede escribirse, con la ayuda de la ecuación (3.1.4), en la forma

$$\begin{aligned}
 e^{ix \operatorname{sen} \theta} &= J_0(x) + 2i J_1(x) \operatorname{sen} \theta + 2 J_2(x) \cos 2\theta \\
 &\quad + 2i J_3(x) \operatorname{sen} 3\theta + 2 J_4(x) \cos 4\theta + \dots \\
 &= J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos(2m\theta) + \\
 &\quad + 2i \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x) \operatorname{sen}(2m+1)\theta
 \end{aligned} \quad (3.1.12a)$$

por lo tanto igualando las partes reales y las imaginarias obtenemos que

$$\cos(x \operatorname{sen} \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(x) \cos(2m\theta) \quad (3.1.13a)$$

$$\operatorname{Sen}(x \operatorname{sen} \theta) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(x) \operatorname{Sen}(2m+1)\theta \quad (3.1.13b)$$

Nuevamente, si en (3.1.12a, 3.1.13a, 3.1.13b) cambiamos  $\theta$  por  $\frac{\pi}{2} - \theta$ ; se obtiene

$$e^{ix \cos \theta} = J_0(x) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} i^m J_m(x) \cos(m\theta) \quad (3.1.14)$$

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2\theta + 2J_4(x) \cos 4\theta - \dots \quad (3.1.14a)$$

$$\operatorname{Sen}(x \cos \theta) = 2J_1(x) \cos \theta - 2J_3(x) \cos 3\theta + \dots \quad (3.1.14b)$$

Las fórmulas del (3.1.12) a (3.1.13b) se cumplen para todo valor de  $\theta$  y  $x$ . Si multiplicamos (3.1.13a) por  $\cos m\theta$  y (3.1.13b) por  $\operatorname{Sen} m\theta$  e integramos con respecto a  $\theta$  de 0 a  $\pi$  y hacemos uso de la fórmula

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \int_0^{\pi} \operatorname{Sen} m\theta \operatorname{Sen} n\theta d\theta = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n}$$

obtenemos las fórmulas

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} \theta) \cos n\theta d\theta \quad (n \text{ par o cero}) \quad (3.1.15a)$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Sen}(x \operatorname{Sen} \theta) \operatorname{Sen} n\theta d\theta \quad (n \text{ impar}) \quad (3.1.15b)$$

ya que de las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas se

sabe que la integral de la derecha de la ecuación (3.1.15a) se anula si  $n$  es impar, mientras que la integral de la derecha de la ecuación (3.1.15b) se anula si  $n$  es par. Entonces, por adición para todo valor entero de  $n$ , tenemos

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(x \sin \theta) \cos n\theta + \sin(x \sin \theta) \sin n\theta] d\theta$$

la cual es de la forma

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \quad (3.1.16)$$

Se ha representado así al coeficiente de Bessel de orden  $n$  como una integral, que se conoce como la integral de Bessel y que es de gran utilidad en la física matemática. En particular tenemos que para  $n=0$

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) d\theta \quad (3.1.17)$$

### 3.2 Relaciones de Recurrencia para los Coeficientes de Bessel.

Si derivamos la función generadora (3.1.1) con respecto a  $x$ , se encuentra

$$\frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) e^{\frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ J_n(x) t^{n+1} - J_n(x) t^{n-1} \right] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n'(x) t^n = 0$$

Igualando coeficientes de  $t^n$  obtenemos la relación

$$2 J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad (3.2.1)$$

Por otro lado, si derivamos (3.1.1) con respecto a  $t$ , resulta la ecua

ción

$$\frac{1}{2} x \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) Q^{\frac{1}{2} x} \left( t - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1}$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{2} x \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t^n + t^{n-2}) J_n(x) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-1} = 0,$$

igualando coeficientes de  $t^{n-1}$  se obtiene la relación de recurrencia

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-2}(x) + J_{n+2}(x) \quad (3.2.2)$$

Sumando (3.2.1) y (3.2.2) obtenemos la relación

$$x J_n'(x) = x J_{n-1}(x) - n J_n(x), \quad (3.2.3)$$

restando la relación (3.2.1) de (3.2.2) obtenemos

$$x J_n'(x) = n J_n(x) - x J_{n+1}(x). \quad (3.2.4)$$

Si hacemos  $n=0$  en esta última ecuación, se tiene el importante caso especial

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (3.2.5)$$

Ahora, si en la ecuación (3.2.3) tomamos  $n=1$ , encontramos que

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x) \quad (3.2.6)$$

Derivando ambos miembros de (3.2.5) con respecto a  $x$  y haciendo uso del resultado (3.2.6), tenemos

$$J_0''(x) = -J_2(x) + \frac{1}{x} J_1(x)$$

la cual, como una consecuencia de (3.2.5) puede escribirse como

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + J_0(x) = 0 \quad (3.2.7)$$

que muestra que  $y = J_0(x)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad (3.2.8)$$

Se puede demostrar de una manera similar, que la función de Bessel  $J_n(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (n \text{ entero}) \quad (3.2.9)$$

De la ecuación (3.2.4) encontramos, como un resultado de derivar ambos miembros respecto a  $x$ , que

$$x J_n''(x) + J_n'(x) = n J_n'(x) - J_{n+1}(x) - x J_{n+1}'(x)$$

ahora, multiplicando por  $n$  (3.2.4)

$$n J_n'(x) = \frac{n^2}{x} J_n(x) - n J_{n+1}(x)$$

cambiando en (3.2.3)  $n$  por  $n+1$ , tenemos

$$x J_{n+1}'(x) + (n+1) J_{n+1}(x) = x J_n(x)$$

por lo tanto

$$x J_n''(x) + J_n'(x) = \frac{n^2}{x} J_n(x) - x J_n(x) \quad (3.2.10)$$

que muestra que  $J_n(x)$  es una solución de la ecuación diferencial (3.2.9) suponiendo  $n$  entero.

### 3.3 Ecuación Diferencial de Bessel

Mostramos (sección 3.2 ecuación (3.2.10)) previamente que cuando  $n$  es un entero,  $J_n(x)$  es una solución de la ecuación diferencial de Bessel (3.2.9). Ahora examinaremos la solución de la ecuación cuando  $n$  no es ne

cesariamente un entero. La ecuación diferencial de Bessel es de la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (3.3.1)$$

Esta ecuación tiene una singularidad regular en el origen, de modo que se puede proponer como solución

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda} \quad (3.3.2)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, es decir, sustituyendo (3.3.2) en (3.3.1), resulta la ecuación algebraica

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} [(k+\lambda)^2 - n^2] a_{\lambda} x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda} x^{k+\lambda+2} = 0. \quad (3.3.3)$$

Esta función debe cumplirse para todo valor de  $x$  y esto se verifica solamente si el coeficiente de toda potencia de  $x$  es idénticamente cero; es decir que debe cumplirse el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a) \quad a_0(k^2 - n^2) &= 0 \\ b) \quad a_1[(k+1)^2 - n^2] &= 0 \\ c) \quad [(k+j+2)^2 - n^2]a_{j+2} + a_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Si tenemos que  $a_0 \neq 0$ , la ecuación (3.3.4a) se verifica si:

1° caso  $k=n$  ó

2° caso  $k=-n$

Mientras que (3.3.4b) se verifica solamente si  $a_1=0$ .

Si tenemos que  $a_1 \neq 0$  la ecuación (3.3.4b) se verifica si:

3° caso  $k=n-1$  ó

4° caso  $k=-n-1$

en tanto que (3.3.4a) se verifica solamente si  $a_2 = 0$ .

Finalmente la ecuación (3.3.4c) se verifica si los coeficientes se construyen con la fórmula de recurrencia

$$a_{j+2} = - \frac{a_j}{(k+j+2+n)(k+j+2-n)} \quad (3.3.5)$$

1° caso  $k = n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_2 = 0$

Con estas condiciones, la fórmula de recurrencia (3.3.5) toma la forma

$$a_{j+2} = - \frac{a_j}{(2n+2+j)(2+j)} \quad (3.3.6)$$

obteniéndose la solución

$$y_1 = a_0 x^n \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{(-1)^r x^{2r}}{2 \cdot 4 \dots 2r(2n+2) \dots (2n+2r)} + \dots \right] \quad (r \geq 1)$$

que también puede escribirse de la siguiente forma

$$y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_0 x^{n+2r}}{2^{2r} r! (n+1)(n+2) \dots (n+r)} \quad (3.3.7)$$

2° caso  $k = -n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_2 = 0$

La fórmula de recurrencia resulta, para este caso

$$a_{j+2} = \frac{a_j}{(j+2)(2n-j-2)} \quad (3.3.8)$$

Con estas condiciones se obtiene la solución

$$y_2 = a_0 x^{-n} \left[ 1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{x^{2r}}{2 \cdot 4 \dots 2r(2n-2) \dots (2n-2r)} + \dots \right] \quad (r \geq 1)$$

que también puede escribirse de la siguiente forma

$$y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_0 x^{-n+2r}}{2^{2r} r! (n-1)(n-2)\dots(n-r)} \quad (3.3.9)$$

3° caso  $k = n-1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$

La fórmula de recurrencia toma la forma

$$a_{j+2} = -\frac{a_j}{(j+1)(j+2n+1)} \quad (3.3.10)$$

y la solución correspondiente es

$$y_3 = a_1 x^n \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots + (-1)^r \frac{x^{2r}}{2 \cdot 4 \dots 2r(2n+2)\dots(2n+2r)} + \dots \right] \quad (r \geq 1)$$

que también puede escribirse en la forma

$$y_3 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r a_1 x^{n+2r}}{2^{2r} r! (n+1)(n+2)\dots(n+r)} \quad (3.3.11)$$

Comparando esta solución (3.3.11) con la solución (3.3.7), se ve que difieren a lo más hasta una constante multiplicativa.

4° caso  $k = -n-1$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$

Con estas condiciones la fórmula de recurrencia resulta

$$a_{j+2} = \frac{a_j}{(j+1)(2n-j-1)} \quad (3.3.12)$$

la cual da como solución

$$y_4 = a_1 x^{-n} \left[ 1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n-2)(2n-4)} + \dots + \frac{x^{2r}}{2 \cdot 4 \dots 2r(2n-2)\dots(2n-2r)} + \dots \right] \quad (r \geq 1)$$

6

$$y_4 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_1 x^{-n+2r}}{2^{2r} r! (n-1)(n-2)\dots(n-r)} \quad (3.3.13)$$

que al compararla con la solución (3.3.9) vemos que también difiere hasta una constante multiplicativa.

Hemos obtenido en esta forma, como soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel las series (3.3.7) y (3.3.9); vamos ahora a determinar el intervalo de convergencia de estas series. Tenemos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| x^2 = 0;$$

por lo tanto las dos series son convergentes para todo valor de  $x$ .

Cuando la constante  $a_0$  en (3.3.7) se escoge como

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

la solución toma la forma

$$y_1 = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2} x^2)^r}{r! \Gamma(n+1)_r}. \quad (3.3.14)$$

Comparando esta serie con (3.1.2) vemos que son de la misma forma, ya que  $\Gamma(n+1) = n!$  cuando  $n$  es un entero positivo o cero. Si hacemos que la serie (3.1.2) defina la "función de Bessel de primer grupo de orden  $n$ " aún cuando  $n$  no sea un entero, podemos escribir la solución (3.3.14) en la forma:

$$y_1 = J_n(x)$$

Similarmente, si tomamos el mismo valor de  $a_0$  en la serie (3.3.9), esta se vuelve  $J_{-n}(x)$ . Por lo tanto la solución completa de la ecuación de Bessel, cuando  $n$  no es un entero es

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad (3.3.15)$$

Cuando  $n$  es cero o un entero, tenemos, de la ecuación (3.1.4), que las soluciones  $J_n(x)$  y  $J_{-n}(x)$  no son linealmente independientes. Por lo que debemos determinar una segunda solución para cuando  $n$  sea cero o un entero.

Si  $y$  es una función que cumple con la ecuación diferencial de Bessel y  $\mu = J_n(x)$ , entonces por (3.3.1)

$$\begin{aligned}x^2 \mu'' + x \mu' + (x^2 - n^2) \mu &= 0 \\x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por  $y$ , la segunda por  $\mu$  y restandolas, obtenemos

$$x(y\mu'' - \mu y'') + (y\mu' - \mu y') = 0$$

pero como

$$y''\mu - y\mu'' = \frac{d}{dx}(y'\mu - y\mu')$$

entonces

$$\frac{d}{dx} [x(y'\mu - y\mu')] = x(y''\mu - y\mu'') + (y'\mu - y\mu') = 0$$

por lo tanto

$$x(y'\mu - y\mu') = B$$

donde  $B$  es una constante. Dividiendo entre  $x^2 \mu^2$ , tenemos

$$\frac{y'\mu - y\mu'}{\mu^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{\mu} \right) = \frac{B}{x\mu^2},$$

integrando esta última, obtenemos

$$\frac{y}{\mu} = A + B \int \frac{dx}{x\mu^2}$$

donde  $A$  es la constante de integración. Consecuentemente como  $\mu = J_n(x)$

$$y = AJ_n(x) + BJ_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} \quad (3.3.16)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias,  $B \neq 0$  ya que por definición no es un múltiplo constante de  $J_n(x)$ .

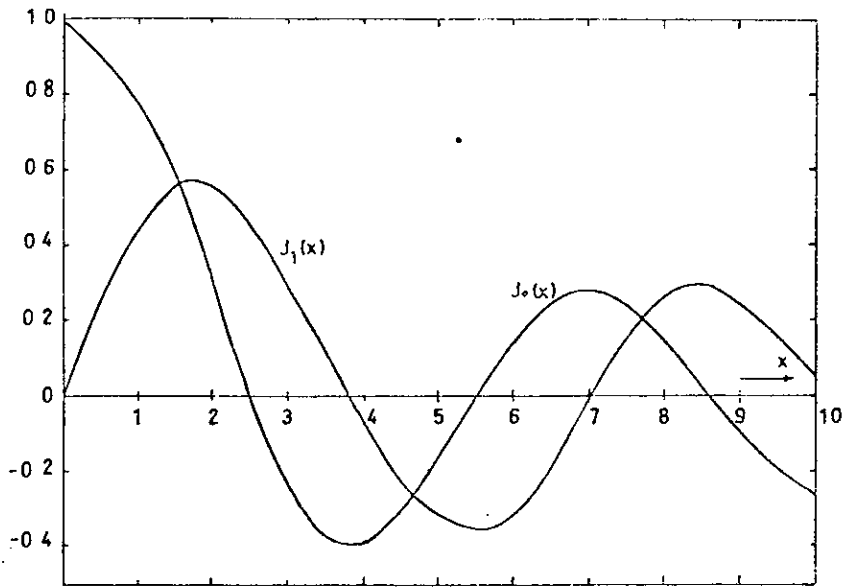


Fig. 3 Variación de  $J_0(x)$  y  $J_1(x)$  con  $x$ .

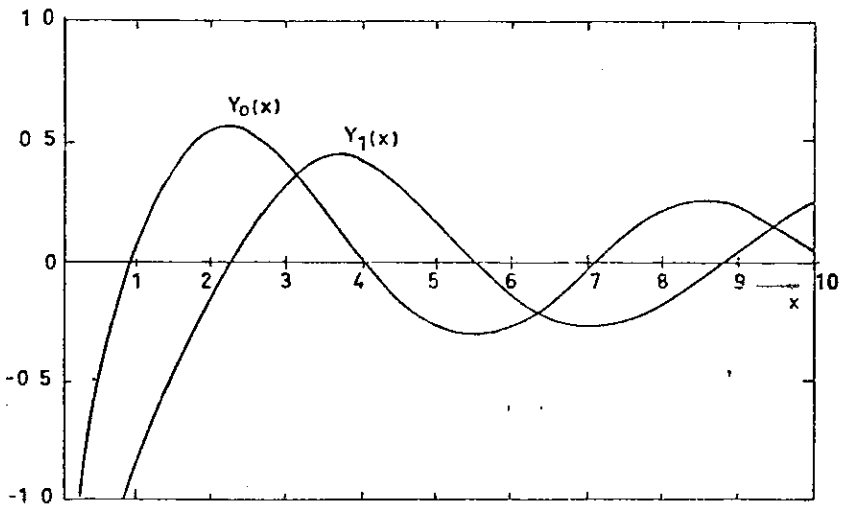


Fig. 4 Variación de  $Y_0(x)$  y  $Y_1(x)$  con  $x$ .

Sustituyendo la serie (3.1.2) en la integral, ésta toma la forma:

$$\int \frac{a^2 x}{x J_n^2(x)} = \int \left( \frac{a_n}{x^{\frac{2n+1}{2}}} + \dots + \frac{a_1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a_0}{x} + b_1 x + b_2 x^3 + b_3 x^5 + \dots \right) a^2 x$$

$$= -\frac{a_n}{2n x^{2n}} - \dots - \frac{a_1}{2x^2} + a_0 \log x + b_0 + \frac{b_1 x^2}{2} + \frac{b_2 x^4}{4} + \dots$$

Sustituyendo esta expresión en (3.3.16), obtenemos una segunda solución de la forma

$$J_n(x)(a_0 \log x + b_0) + \frac{1}{x^n} (c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \dots) \quad (3.3.17)$$

donde  $a_0, c_0, c_1, c_2, \dots$  son constantes definidas; la constante  $b_0$  es arbitraria y su valor puede escogerse de tal manera que nos de la forma más conveniente de la segunda solución. La que generalmente se acepta como la forma usual, se conoce como función de Neumann y se denota por  $Y_n(x)$ . Es suficiente recordar que la segunda solución de la ecuación cuando  $n$  es un entero, se comporta como  $\frac{1}{x^n}$  cuando  $x$  es pequeña y contiene además el término  $\log x$ , por lo tanto  $Y_n(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow +0$ . En términos de  $J_n(x)$  y  $Y_n(x)$  la solución general toma la forma

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x) \quad (3.3.18)$$

### 3.4 Formas Integrales para las Funciones de Bessel $J_n(x)$ .

En la sección 3.1 ecuación (3.1.16), se encontró una forma integral para  $J_n(x)$ , válida si  $n$  es un entero positivo. Ahora deseamos encontrar en esta sección, una segunda fórmula integral.

Sea

$$I = \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt$$

en la que  $n > -\frac{1}{2}$ . Si desarrollamos el término exponencial en potencias crecientes de  $ixt$ , vemos que

$$I = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ix)^s}{s!} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} t^s dt.$$

Las integrales que aparecen en la serie anterior se anulan si  $s$  es un entero impar, mientras que si  $s$  es un entero par  $2r$ , las integrales tienen el valor

$$\int_0^{+1} (1-\mu)^{n-\frac{1}{2}} \mu^{r-\frac{1}{2}} d\mu = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+r+1)}$$

por lo que

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+r+1)},$$

y aplicando la fórmula de duplicación de Legendre para la función gama

(Rainville, 1960: p. 18)  $\Gamma(\frac{1}{2})(2r)! = 2^{2r} r! \Gamma(r+\frac{1}{2})$ , tenemos

mos

$$I = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2}) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{r! \Gamma(n+r+1) 2^{2r}}.$$

Se sigue inmediatamente del desarrollo en serie (3.1.2) para  $J_n(x)$ , que

$$J_n(x) = \frac{(-ix)^n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt, \quad (3.4.1)$$

que es equivalente a la fórmula

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{+1} (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt \quad (3.4.2)$$

y en particular, para  $n=0$ :

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (3.4.3)$$

El resultado (3.4.2) puede expresarse en diferentes formas por simples cambios de variable. Si hacemos  $t = x \cos \theta$ , obtenemos la expresión integral

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad (3.4.4)$$

y si hacemos el cambio  $t = x \sin \theta$ , obtenemos

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) \cos^{2n} \theta d\theta. \quad (3.4.5)$$

Las fórmulas particulares para  $n=0$  son:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta) d\theta. \quad (3.4.6)$$

### 3.5 Fórmulas de Adición para las Funciones de Bessel $J_n(x)$ .

La fórmula de adición para las funciones de Bessel, nos relaciona funciones del tipo  $J_n(x+y)$  con funciones  $J_r(x)$  y  $J_s(y)$ . De la definición de la función generadora (3.1.1), tenemos

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n,$$

en esta ecuación, el término de la izquierda puede escribirse como el producto de dos exponenciales de la forma

$$e^{\frac{1}{2}x(t - \frac{1}{t})} e^{\frac{1}{2}y(t - \frac{1}{t})}$$

sustituyendo en este producto las series apropiadas (3.1.1), encontramos que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y) t^n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_r(x) J_s(y) t^{r+s}$$

igualando coeficientes de  $t^n$ , obtenemos la fórmula de adición

$$J_n(x+y) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(x) J_{n-r}(y). \quad (3.5.1)$$

Para que esta fórmula contenga solamente funciones de Bessel de orden positivo, escribimos el miembro derecho de esta ecuación en la forma

$$\sum_{r=-\infty}^{-1} J_r(x) J_{n-r}(y) + \sum_{r=0}^n J_r(x) J_{n-r}(y) + \sum_{r=n+1}^{\infty} J_r(x) J_{n-r}(y),$$

por (3.1.4) el primer término puede escribirse como

$$\sum_{r=-\infty}^{-1} (-1)^r J_r(x) J_{n-r}(y) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r J_r(x) J_{n+r}(y)$$

similarmente, el tercer término es igual a

$$\sum_{r=1}^{\infty} J_{n+r}(x) J_{-r}(y) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r J_{n+r}(x) J_r(y)$$

y finalmente

$$J_n(x+y) = \sum_{r=0}^n J_r(x) J_{n-r}(y) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[ J_r(x) J_{n+r}(y) + J_{n+r}(x) J_r(y) \right] \quad (3.5.2)$$

### 3.6 Integrales de Funciones de Bessel

En esta sección evaluaremos integrales de funciones de Bessel, que aparecen con mucha frecuencia en aplicaciones prácticas.

De la ecuación (3.1.6) derivamos la relación

$$\int_0^{\alpha} x^n J_{n-1}(x) dx = \left[ x^n J_n(x) \right]_0^{\alpha}$$

si  $n > 0$ ,  $x^n J_n(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow 0$ , así que el límite inferior es cero y obtenemos la integral

$$\int_0^{\alpha} x^n J_{n-1}(x) dx = \alpha^n J_n(\alpha) \quad (n > 0) \quad (3.6.1)$$

la cual, por un simple cambio de variable, da el resultado

$$\int_0^a r^n J_{n-1}(\xi r) dr = \frac{a^n}{\xi} J_n(\xi a) \quad (n > 0) \quad (3.6.1a)$$

donde  $a = \alpha/\xi$ . Un caso particular de esta expresión que es de uso frecuente, se obtiene si hacemos en la ecuación (3.6.1a)  $n=1$ . En esta forma obtenemos la integral

$$\int_0^a r J_0(\xi r) dr = \frac{a}{\xi} J_1(\xi a). \quad (3.6.2)$$

Otros resultados pueden obtenerse a partir de (3.6.1a). Por ejemplo, haciendo uso de la ecuación (3.1.6), podemos escribir que

$$\int_0^a r^3 J_0(\xi r) dr = \int_0^a r^2 \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} [r J_1(\xi r)] dr$$

integrando por partes, el miembro derecho de esta ecuación se transforma en:

$$\frac{a^3}{\xi} J_1(\xi a) - \frac{2}{\xi} \int_0^a r^2 J_1(\xi r) dr$$

la cual se reduce, en virtud de (3.6.1a), en

$$\frac{a^3}{\xi} J_1(\xi a) - \frac{2a^2}{\xi^2} J_2(\xi a);$$

ahora, por la relación de recurrencia (3.2.2), tenemos la expresión

$$J_2(\xi a) = \frac{2}{\xi a} J_1(\xi a) - J_0(\xi a)$$

así que finalmente obtenemos el resultado

$$\int_0^a r^3 J_0(\xi r) dr = \frac{2a^2}{\xi^2} \left[ J_0(\xi a) + \frac{1}{2} \left( 2\xi^2 - \frac{4}{a\xi} \right) J_1(\xi a) \right]. \quad (3.6.3)$$

Combinando (3.6.3) con la ecuación (3.6.2) obtenemos la integral

$$\int_0^a r(a^2 - r^2) J_0(\xi r) dr = \frac{4a}{\xi^{3/2}} J_{3/2}(\xi a) - \frac{2a^2}{\xi^{1/2}} J_1(\xi a). \quad (3.6.4)$$

Evaluaremos ahora integrales de otro tipo. Considere la función

$$\frac{z^n}{bz^2 + 2ia\epsilon z + b},$$

donde  $n$  es cero o un entero positivo,  $a$  y  $b$  son reales y positivos; si la integramos alrededor de un círculo en el plano complejo con el origen como centro y radio unidad, se encuentra que

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta} d\theta}{a - ib\cos\theta} = \frac{2\pi (i)^n}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[ \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b} \right]^n.$$

Pero de (3.1.14)

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi a^{ix\cos\theta} e^{in\theta} d\theta.$$

Entonces, si  $n$  es cero o un entero positivo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a^{-ax} J_n(bx) dx &= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\infty a^{-ax} dx \int_0^\pi a^{ibx\cos\theta} e^{in\theta} d\theta = \\ &= \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{in\theta} d\theta \int_0^\infty a^{-(a - ib\cos\theta)x} dx = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{in\theta}}{a - ib\cos\theta} a^2 d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^\infty a^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[ \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{b} \right]^n \quad (3.6.5)$$

y en particular si  $n=0$

$$\int_0^\infty a^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (3.6.6)$$

Si hacemos que  $a \rightarrow 0$

Si hacemos que  $a \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\infty} J_n(bx) dx = \frac{1}{b} \quad (3.6.7)$$

y en particular, si  $b=1$

$$\int_0^{\infty} J_n(x) dx = 1. \quad (3.6.8)$$

Nuevamente, cambiando en (3.6.5)  $a$  por  $ai$  y si  $a$  y  $b$  son reales y positivas

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_n(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \left[ \frac{\sqrt{b^2 - a^2} - ia}{b} \right]^n. \quad (3.6.9)$$

Si  $b^2 > a^2$ , se sigue de (3.6.7), que debe tomarse el valor positivo de  $\sqrt{b^2 - a^2}$ ; si  $b^2 < a^2$  podemos poner

$$\sqrt{b^2 - a^2} = i\sqrt{a^2 - b^2}$$

la cual se reduce a  $ia$  cuando  $b$  es cero.

De (3.6.9) deducimos los resultados siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(bx) \cos ax dx &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \int_0^{\infty} J_0(bx) \sin ax dx &= 0 \end{aligned} \right\} b^2 > a^2 \quad (3.6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(bx) \cos ax dx &= 0 \\ \int_0^{\infty} J_0(bx) \sin ax dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned} \right\} a^2 > b^2 \quad (3.6.11)$$

Otro conjunto de fórmulas se obtiene como sigue. La integral

$$I \equiv \int_0^{\alpha} x^{m-1} J_n(ax) dx \quad (3.6.12)$$

es convergente si  $m+n > 0$ ,  $m < \frac{3}{2}$ ,  $a$  real y positivo. Con la ayuda de la fórmula integral (3.4.4), se obtiene

$$I = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left[\frac{2}{2}\right]^n \int_0^{\alpha} x^{m+n-1} \int_0^{\pi/2} \cos(axu \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad (3.6.12a)$$

en la cual  $n > -\frac{1}{2}$ . Cambiando el orden de integración y aplicando la fórmula

$$\int_0^{\alpha} \cos t \cdot t^{\lambda-1} dt = \Gamma(\lambda) \cos(\frac{1}{2}\pi\lambda) \quad 0 < \lambda < 1$$

(3.6.12a) se transforma en:

$$I = \frac{2\Gamma(m+n) \cos \frac{1}{2}\pi(m+n)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})2^n a^m} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \cos^{-m-n} \theta d\theta$$

en la que  $m+n < 1$ . Para calcular esta última integral hacemos uso de la ecuación

$$2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \theta \sin^{2n-1} \theta d\theta = B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

resultando

$$I = \frac{\Gamma(m+n) \cos \frac{1}{2}\pi(m+n) \Gamma(\frac{1-m-n}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})2^n a^m \Gamma(1+\frac{n-m}{2})}$$

pero como

$$\Gamma(m+n) = \frac{2^{m+n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma(\frac{m+n}{2}) \Gamma(\frac{1+m+n}{2})$$

y

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi \operatorname{cosec}(p\pi)$$

tenemos finalmente que

$$\int_0^{\infty} x^{m-1} J(ax) dx = \frac{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{a^m \Gamma\left(1 + \frac{n-m}{2}\right)} \quad (3.6.13)$$

donde  $m+n > 0$ ,  $m < \frac{3}{2}$ ,  $a$  real y positiva.

La fórmula (3.6.7) se sigue de (3.6.13) cuando  $m=1$ ; ésta es válida para  $n > -1$ . Si  $m=0$  entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(ax)}{x} dx = \frac{1}{n} \quad (3.6.14)$$

la cual se cumple para  $n > 0$ ,  $a$  real y positiva.

### 3.7 Desarrollo Asintótico de la Función de Bessel

En ciertos problemas físicos, se desea conocer el valor de una función de Bessel para grandes valores de su argumento. En esta sección deduciremos el desarrollo asintótico de la función de Bessel  $J_n(x)$  e indicaremos meramente el resultado para la función  $Y_n(x)$ .

Tomemos la ecuación (3.4.1) como definición de la función  $J_n(x)$ . Aplicando la teoría de funciones de una variable compleja se puede demostrar que esta definición es equivalente a:

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left[ \int_{L_1} (z-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt + \int_{L_2} (z-t^2)^{n-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt \right] \quad (3.7.1)$$

donde  $L_1$  es la línea recta  $\operatorname{Re}(t) = -1$  en el semi-plano superior complejo  $t$  y  $L_2$  es la parte correspondiente de la línea recta  $\operatorname{Re}(t) = +1$ . Cambiando la variable  $t$  por  $\mu = ix(z-t)$  en la primera integral y por  $\mu = -ix(z-t)$  en la segunda integral, vemos que

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ j_n(x) + j_n^*(x) \right] \quad (3.7.2)$$

donde

$$j_n(x) = \frac{1}{2\Gamma(n+\frac{1}{2})} e^{i(x - (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi)} \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{i\mu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} d\mu$$

y  $j_n^*(x)$  denota su complejo conjugado. Desarrollando

$$\left(1 + \frac{i\mu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

por el teorema binomial e integrando términos a término, encontramos que

$$j_n(x) = \frac{1}{2} e^{i(x - (\frac{1}{2}n + \frac{1}{4})\pi)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i)^r (\frac{1}{2} - n)_r (n + \frac{1}{2})_r}{r! (2x)^r} \quad (3.7.3)$$

donde  $(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1) = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$ . Si adaptamos la convención de Hankel de que:

$$\frac{(\frac{1}{2} - n)_r (n + \frac{1}{2})_r}{r!} = (-1)^r (n)_r$$

en la ecuación (3.7.3) y sustituyendo el resultado en la ecuación (3.7.2) encontramos que para grandes valores de  $x$ , el desarrollo asintótico de la función de Bessel  $J_n(x)$  es

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n)_r}{(2x)^{2r}} - \operatorname{Sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n)_r}{(2x)^{2r+1}} \right]. \quad (3.7.4)$$

El correspondiente desarrollo para la función  $Y_n(x)$  es:

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \operatorname{Sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n)_r}{(2x)^{2r}} + \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n)_r}{(2x)^{2r+1}} \right] \quad (3.7.5)$$

En ciertos problemas basta usar las aproximaciones siguientes

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (3.7.6)$$

$$(x \gg n)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (3.7.7)$$

### 3.8 Los Ceros de las Funciones Bessel $J_n(x)$ .

Ahora deduciremos algunos teoremas relacionados con los ceros de las funciones Bessel  $J_n(x)$ .

La función Bessel  $J_n(x)$ , satisface la ecuación diferencial

$$J_n''(x) + \frac{1}{x} J_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n(x) = 0$$

si hacemos

$$x = \xi_1 t, \quad \xi_1 = \text{CONSTANTE} \neq 0,$$

obtenemos

$$J_n''(\xi_1 t) + \frac{1}{\xi_1 t} J_n'(\xi_1 t) + \left(1 - \frac{n^2}{\xi_1^2 t^2}\right) J_n(\xi_1 t) = 0.$$

Similarmente, para

$$x = \xi_2 t, \quad \xi_2 = \text{CONSTANTE} \neq 0,$$

tenemos

$$J_n''(\xi_2 t) + \frac{1}{\xi_2 t} J_n'(\xi_2 t) + \left(1 - \frac{n^2}{\xi_2^2 t^2}\right) J_n(\xi_2 t) = 0.$$

Si multiplicamos la primera de estas ecuaciones por  $\xi_1^2 t J_n(\xi_2 t)$ , la segunda por  $-\xi_2^2 t J_n(\xi_1 t)$  y sumamos las expresiones resultantes, obtenemos

$$\begin{aligned}
& t(\xi_1^z J_n''(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) - \xi_2^z J_n''(\xi_2 t) J_n(\xi_1 t)) + \\
& + \xi_1 J_n'(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) - \xi_2 J_n'(\xi_2 t) J_n(\xi_1 t) + \\
& + (\xi_1^z - \xi_2^z) t J_n(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) = 0.
\end{aligned}$$

Los tres primeros términos juntos, son iguales a la derivada con respecto a  $t$  de la función

$$t \left[ \xi_1 J_n'(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) - \xi_2 J_n'(\xi_2 t) J_n(\xi_1 t) \right]$$

Si esta función existe bajo el intervalo  $(0, 1)$ , obtenemos, integrando esta última ecuación de 0 a 1.

$$\begin{aligned}
& \left[ t \left\{ \xi_1 J_n'(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) - \xi_2 J_n'(\xi_2 t) J_n(\xi_1 t) \right\} \right]_0^1 + \\
& + (\xi_1^z - \xi_2^z) \int_0^1 t J_n(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) dt = 0.
\end{aligned} \tag{3.8.1}$$

El valor del término dentro del paréntesis cuadrado vale cero para el límite inferior y (3.8.1) toma la forma

$$\left[ \xi_1 J_n'(\xi_1) J_n(\xi_2) - \xi_2 J_n'(\xi_2) J_n(\xi_1) + (\xi_1^z - \xi_2^z) \int_0^1 t J_n(\xi_1 t) J_n(\xi_2 t) dt \right] = 0 \tag{3.8.2}$$

De esta ecuación, podemos dar cierta información acerca de la distribución de los ceros de  $J_n(x)$ .

Sea  $\xi$  un cero de  $J_n(x)$ , diferente de cero. Hacemos que  $\xi_1 = \xi$  y que  $\xi_2 = \xi^*$ , donde  $\xi^*$  denota el complejo conjugado de  $\xi$ . Por lo tanto,  $\xi_1$  y  $\xi_2$  coinciden solamente para valores reales de  $\xi$ .

Si  $n$  es real,  $J_n(x)$  toma valores reales para  $x$  real. Los coeficientes de la serie de potencia (3.1.2) son reales; entonces, si  $J_n(\xi)$  se anula,  $J_n(\xi^*)$  también se anula. Si en la ecuación (3.8.2) hacemos

$J_n(\xi_1) = J_n(\xi_2) = 0$  la expresión dentro del paréntesis cuadrado se anula y el segundo término se vuelve

$$(\xi^2 - \xi^{*2}) \int_0^1 t |J_n(\xi t)|^2 dt = 0$$

donde se supone que  $\xi \neq 0$ ; como la función de Bessel no se anula idénticamente,  $\int_0^1 t |J_n(\xi t)|^2 dt \neq 0$ , entonces debe cumplirse que  $\xi^2 - \xi^{*2} = (\xi - \xi^*)(\xi + \xi^*) = 0$ , lo cual implica

$$\xi = \xi^* \quad \gamma \quad \xi = -\xi^*$$

Por lo tanto  $\xi$  es real o puramente imaginario. Para  $n$  real la función de Bessel  $J_n(x)$  tiene solamente ceros reales o puramente imaginarios.

Para investigar los ceros puramente imaginarios de las funciones Bessel, considérese el desarrollo en serie de potencias

$$\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \frac{1}{\Gamma(n+s+1)}$$

la sustitución  $x = a\bar{z}$ ,  $a$  real  $\neq 0$ , nos lleva a

$$\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2s} \frac{1}{\Gamma(n+s+1)}$$

Como  $n$  es real,  $n+s+1$  es positivo para toda  $s$  con un número finito de excepciones y como la función gama toma valores positivos para argumentos positivos, todos los coeficientes de la serie de potencias son positivos, excepto quizá para un número finito al comienzo de la serie. Para grandes  $|a|$ , las potencias altas prevalecen y como  $\left(\frac{a}{2}\right)^{2s} > 0$  para  $a \neq 0$  tenemos  $\frac{J_n(x)}{x^n} > 0$  para valores suficientemente grandes de  $|a|$ . Así los ceros de la función  $\frac{J_n(x)}{x^n}$  pueden ocurrir solamente en un intervalo finito del eje imaginario; entonces, como se trata de una función entera

trascendente,  $\frac{J_n(x)}{x^n}$  puede tener solamente un número finito de ceros puramente imaginarios.  $\frac{J_n(x)}{x^n}$  no tiene ceros puramente imaginarios para  $n > -1$ , ya que en este caso, para toda  $s$

$$\begin{aligned} n+s+1 &> 0 \\ \Gamma(n+s+1) &> 0 \end{aligned}$$

Así, todos los coeficientes de la serie son positivos y el valor de la serie misma es positiva. En particular para  $n=0,1,\dots$  no hay ceros puramente imaginarios.

Hemos obtenido el resultado: Para  $n$  real  $> -1$ ,  $J_n(x)$  tiene solamente ceros reales. Para cualquier valor de  $n$ ,  $J_n(x)$  tiene solamente un número finito de ceros puramente imaginarios.

La función  $J_n(x)$  tiene una infinidad de ceros reales, para todo entero real positivo  $n$ .

Añadiremos unas observaciones acerca de la posición de los ceros reales de las funciones Bessel.

Sea  $n$  real; si hacemos

$$\frac{J_n(x)}{x^n} = v, \quad J_n(x) = v x^n$$

entonces, sustituyendo en la ecuación diferencial de Bessel, obtenemos

$$xv'' + (2n+1)v' + xv = 0 \quad (3.8.3)$$

Si  $\xi$  es un cero positivo de  $v'$ , para  $x=\xi$  la ecuación diferencial toma la forma

$$\xi^2 v''(\xi) + \xi v(\xi) = 0$$

y por lo tanto

$$v''(\xi) + v(\xi) = 0$$

o sea  $v''(\xi_1)$  y  $v''(\xi_2)$  son de signos opuestos.

Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2 (> \xi_1)$  dos ceros positivos sucesivos de  $v'(x)$  así que  $v'(x) \neq 0$  para  $\xi_1 < x < \xi_2$ . Por el teorema de Rolle, debe haber un número impar de ceros de  $v''$  entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ; consecuentemente,  $v''(\xi_1)$  y  $v''(\xi_2)$  así como  $v(\xi_1)$  y  $v(\xi_2)$ , son de signos opuestos. Por lo tanto debe existir un número impar de ceros de  $v$  entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , pero por el teorema de Rolle este puede ser solamente uno, ya que un número impar de ceros de  $v'$  está entre dos ceros adyacentes de  $v''$  y por hipótesis,  $v'$  no tiene ceros entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . En efecto  $v$  tiene precisamente un cero entre  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . En otras palabras, entre dos ceros positivos sucesivos de  $v'$  hay solamente un cero de  $v$ . Los ceros positivos de  $v$  y  $v'$  se alternan; lo mismo es cierto para los ceros negativos.

En la sección (3.1) ecuación (3.1.8) se encontró la relación

$$\frac{d}{dx} \frac{J_n(x)}{x^n} = - \frac{J_{n+1}(x)}{x^n} = v'$$

como los ceros de  $v$  y  $v'$  se alternan y como además

$$v = \frac{J_n(x)}{x^n}, \quad v' = - \frac{J_{n+1}(x)}{x^n},$$

entonces todos los ceros positivos y negativos de  $v$  y  $v'$  son también ceros de  $J_n(x)$  y  $J_{n+1}(x)$ . Además encontramos que los ceros de  $J_n(x)$  y  $J_{n+1}(x)$  están alternados.

Para  $n = -\frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{1}{2}$  encontramos que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

Los ceros de estas funciones son respectivamente:

$$\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots, \pm \frac{(2m+1)\pi}{2}, \dots$$

y

$$0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm m\pi, \dots$$

Para  $n=1$ ,

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Sen}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$$

y los ceros de esta función son:

$$\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \dots, \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi, \dots$$

Para  $n=2$ ,

$$J_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Sen}\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

siendo los ceros de esta función

$$\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \dots, \left(m + \frac{3}{4}\right)\pi, \dots$$

### 3.9 Las Integrales de Fourier-Bessel

Deduciremos ahora un teorema análogo al Teorema de Fourier. Nos referimos al Teorema de Fourier-Bessel y lo enunciaremos como sigue.

Para  $p \leq r \leq q$ , donde  $p$  y  $q$  son reales positivos,  $\phi(r)$  continua excepto para un número finito de discontinuidades y si tiene solamente un número finito de máximos y mínimos y si además  $n > 1$ ; entonces

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\rho^2}^{\rho^2} x \rho \phi(\rho) J_n(x\rho) J_n(xr) x \rho = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(r+0) + \phi(r-0)] & \rho < r < \rho \\ \frac{1}{2} \phi(r+0) & r = \rho \\ \frac{1}{2} \phi(r-0) & r = \rho \\ 0 & 0 < r < \rho \text{ ó } r > \rho \end{cases} \quad (3.9.1)$$

Para demostrar este teorema, considere primeramente  $u = J_n(rx)$  y  $v = J_n(\rho x)$ , que satisfacen respectivamente las ecuaciones

$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(r^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0,$$

$$v'' + \frac{v'}{x} + \left(\rho^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)v = 0.$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por  $xv$ , la segunda por  $xu$ , restándolas e integrando de 0 a  $h$ , se obtiene

$$\int_0^h \left[ x(u''v - uv'') + (u'v - uv') \right] dx + (r^2 - \rho^2) \int_0^h x uv dx = 0$$

es decir

$$\int_0^h \frac{d}{dx} \left[ x(u'v - uv') \right] dx = (\rho^2 - r^2) \int_0^h x uv dx$$

6

$$\int_0^h x J_n(rx) J_n(\rho x) dx = \frac{1}{\rho^2 - r^2} \left[ x r J_n'(rx) J_n(\rho x) - x \rho J_n(rx) J_n'(\rho x) \right]_0^h \quad (3.9.2)$$

Si  $n > 1$ , tenemos que el miembro derecho de la igualdad se anula para  $x=0$ ; entonces

$$\int_0^h x J_n(rx) J_n(px) dx = \frac{1}{p^2 - r^2} \left[ hr J_n'(rh) J_n(ph) - hp J_n(rh) J_n'(ph) \right]. \quad (3.9.3)$$

Usando la fórmula de recurrencia (3.2.4) tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} \int_0^h x J_n(rx) J_n(px) dx &= \\ &= \frac{1}{p^2 - r^2} \left[ ph J_{n+1}(ph) J_n(0) - rh J_{n+1}(rh) J_n(ph) \right]. \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

Si ahora sustituimos en el miembro derecho de (3.9.4) los desarrollos asintóticos de  $J_n(x)$  y  $J_{n+1}(x)$ , resulta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p^2 - r^2} \frac{2}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{p}{r}} \cos\left(rh - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \text{Sen}\left(ph - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{r}{p}} \cos\left(ph - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \text{Sen}\left(rh - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \right] = \\ &= \frac{1}{p^2 - r^2} \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{\frac{p}{r}} \left\{ -\cos[(r+p)h - n\pi] + \text{Sen}(p-r)h \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{r}{p}} \left\{ \cos[(p+r)h - n\pi] + \text{Sen}(p-r)h \right\} \right]. \end{aligned}$$

De la teoría de las Integrales de Dirichlet se tiene que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(x) \frac{\sin(Mx)}{\cos(Mx)} dx = 0$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(x) \frac{\sin[M(x-r)]}{x-r} dx = \frac{\pi}{2} [\phi(r+0) + \phi(r-0)] \quad a < r < b$$

con  $a \leq x \leq b$ ,  $\phi(x)$  finita y continua, excepto para un número finito de discontinuidades finitas y si tiene solamente un número finito de máximos y mínimos.

Entonces, si  $\phi(r)$  satisface estas condiciones para  $p \leq r \leq q$ , multiplicando ambos miembros de (3.9.4) por  $r\phi(r)$ , integrando de  $p$  a  $q$  y tomando el límite cuando  $h$  tiende a infinito.

$$\int_p^q r\phi(r) \int_0^\infty x J_n(pr) J_n(rx) dx dr = \begin{cases} \frac{1}{2} \phi(r+0) + \phi(r-0) & p < r < q \\ \frac{1}{2} \phi(r+0) & r = p \\ \frac{1}{2} \phi(r-0) & r = q \\ 0 & 0 < r < p \text{ ó } r > q \end{cases}$$

Además si  $\phi(r)$  satisface la condición de que

$$\int_p^q r\phi(r) dr$$

sea absolutamente convergente, el orden de integración puede cambiarse y el teorema está probado.

### 3.10 Funciones Hankel

Hemos visto que las funciones  $J_n(x)$  y  $Y_n(x)$  son soluciones linealmente independientes de las ecuaciones de Bessel (3.3.1), pero en ciertas circunstancias es ventajoso definir, en términos de ellas, dos nuevas soluciones independientes y estas son

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i Y_n(x) \quad (3.10.1)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i Y_n(x) \quad (3.10.2)$$

llamadas funciones Hankel de primera o segunda clase respectivamente o funciones Bessel del tercer grupo de orden  $n$ . Ambas funciones satisfacen la ecuación (3.3.1) y por lo tanto, una solución general será

$$y = A H_n^{(1)}(x) + B H_n^{(2)}(x) \quad (3.10.3)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes arbitrarias.

Inversamente, a partir de las funciones Hankel obtenemos que

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)] \quad (3.10.4)$$

$$Y_n(x) = -\frac{i}{2} [H_n^{(1)}(x) - H_n^{(2)}(x)] \quad (3.10.5)$$

Estas funciones están definidas tanto para valores reales como para

valores complejos.

Vimos también que para  $n$  no entero, una solución general de la ecuación (3.3.1) es de la forma

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

En este caso las funciones de Hankel toman la forma

$$H_n^{(1)}(x) = \frac{i}{\operatorname{Sen} n\pi} \left[ e^{-n\pi i} J_n(x) - J_{-n}(x) \right] \quad (3.10.6)$$

$$H_n^{(2)}(x) = -\frac{i}{\operatorname{Sen} n\pi} \left[ e^{n\pi i} J_n(x) - J_{-n}(x) \right] \quad (3.10.7)$$

Inversamente

$$J_n(x) = \frac{1}{2} \left[ H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) \right] \quad (3.10.8)$$

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{2} \left[ e^{n\pi i} H_n^{(1)}(x) + e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(x) \right] \quad (3.10.9)$$

De la relación (3.10.6), tenemos que:

$$H_{-n}^{(1)}(x) = -\frac{i}{\operatorname{Sen} n\pi} \left[ e^{n\pi i} J_{-n}(x) - J_n(x) \right] = \frac{i e^{n\pi i}}{\operatorname{Sen} n\pi} \left[ e^{-n\pi i} J_n(x) - J_{-n}(x) \right]$$

por lo tanto

$$H_{-n}^{(1)}(x) = e^{n\pi i} H_n^{(1)}(x) \quad (3.10.10)$$

y por un cálculo similar, a partir de (3.10.7), obtenemos que

$$H_{-n}^{(2)}(x) = e^{-n\pi i} H_n^{(2)}(x) \quad (3.10.11)$$

Es conveniente tener los desarrollos asintóticos de estas funciones,

ya que son de gran utilidad y los determinaremos en forma directa a partir de los desarrollos asintóticos de las funciones  $J_n(x)$  y  $Y_n(x)$ , que fueron deducidas en la sección 3.7 fórmulas (3.7.6) y (3.7.7)

$$H_n^{(1)}(x) = \left[ J_n(x) + i Y_n(x) \right] = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ Q_n(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi) + i S_n(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi) \right]$$

de donde observamos que el desarrollo asintótico de  $H_n^{(1)}(x)$  es:

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} Q_n(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi) \quad (3.10.12)$$

y en forma similar

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} Q_n^{-1}(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi) \quad (3.10.13)$$

### 3.11 Funciones Esféricas de Bessel

En ciertos problemas físicos, deseamos resolver la ecuación de ondas en coordenadas específicas, la cual tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_r}{\partial t^2}$$

Si suponemos una solución del tipo

$$\Psi_r = Y(\theta, \phi) R(r) e^{i\omega t}$$

encontramos que  $R(r)$  debe satisfacer la ecuación

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R = 0.$$

Si hacemos el cambio de variable  $\rho = \frac{\omega}{c} r$ , ésta se convierte en

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) R = 0 \quad (3.11.1)$$

la cual se conoce como la ecuación esférica de Bessel. Sus soluciones, llamadas funciones esféricas de Bessel, Neumann y Hankel, están ligadas con las funciones Bessel por la relación

$$f_l(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} F_{l+\frac{1}{2}}(\rho) \quad (3.11.2)$$

En analogía con la ecuación de Bessel, tenemos como solución de la ecuación (3.11.1)

$$R(\rho) = A j_l(\rho) + B n_l(\rho) \quad (3.11.3)$$

La función  $j_l(\rho)$  es una solución regular en el origen, llamada función esférica de Bessel, la segunda solución  $n_l(\rho)$ , llamada función esférica de Neumann, tiene una singularidad en  $\rho=0$ .

Las funciones de índices más bajos son:

$$\begin{aligned} j_0(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho} & n_0(\rho) &= -\frac{\cos \rho}{\rho} \\ j_1(\rho) &= \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho} & n_1(\rho) &= -\frac{\cos \rho}{\rho^2} - \frac{\sin \rho}{\rho} \\ j_2(\rho) &= \left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right) \sin \rho - \frac{3}{\rho^2} \cos \rho & n_2(\rho) &= -\left(\frac{3}{\rho^3} - \frac{1}{\rho}\right) \cos \rho - \frac{3}{\rho^2} \sin \rho \end{aligned} \quad (3.11.4)$$

Sus formas asintóticas son respectivamente:

$$\begin{aligned} j_l(\rho) &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \cos \left[ \rho - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right] \\ n_l(\rho) &\xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} \sin \left[ \rho - \frac{1}{2}(l+1)\pi \right]. \end{aligned} \quad (3.11.5)$$

Tenemos también otro tipo de solución, las funciones esféricas de Hankel del primero y segundo grupo, definidas respectivamente como:

$$h_e^{(1)}(\rho) = j_e(\rho) + i n_e(\rho) \quad (3.11.6)$$

$$h_e^{(2)}(\rho) = j_e(\rho) - i n_e(\rho).$$

Para los índices más bajos, las funciones esféricas de Hankel del primer grupo son:

$$h_0^{(1)}(i\rho) = -\frac{1}{\rho} e^{-\rho}$$

$$h_1^{(1)}(i\rho) = i \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) e^{-\rho} \quad (3.11.7)$$

$$h_2^{(1)}(i\rho) = \left( \frac{1}{\rho} + \frac{3}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^3} \right) e^{-\rho}.$$

Los desarrollos asintóticos de (3.11.6) son respectivamente

$$h_e^{(1)}(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} e^{i \left[ \rho - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi \right]} \quad (3.11.8)$$

$$h_e^{(2)}(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho} e^{-i \left[ \rho - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi \right]}$$

Otras propiedades de las funciones esféricas de Bessel, pueden deducirse a partir de la relación (3.11.2), con ayuda de la teoría desarrollada anteriormente para las funciones Bessel.

### 3.12 Funciones Modificadas de Bessel

La sustitución  $x = iz$ , transforma la ecuación de Bessel a

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} - (n^2 + t^2)y = 0 \quad (3.12.1)$$

Una solución de esta ecuación es

$$J_n(it) = i^n \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left[ 1 + \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(n+2)(2n+4)} + \dots \right] \quad (3.12.2)$$

es usual, sin embargo, tomar en vez de ésta la función

$$I_n(t) = i^{-n} J_n(it) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}t^2)^s}{s!(n+1)_s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2s} \quad (3.12.3)$$

la cual se conoce como la función modificada de Bessel del primer grupo.

Si  $n$  es un entero positivo, se sigue de (3.1.4) que

$$I_{-n}(t) = i^n J_{-n}(it) = i^n (-1)^n J_n(it) = i^{-n} J_n(it) = I_n(t) \quad (3.12.4)$$

Similarmente, se deduce de las ecuaciones (3.1.6) y (3.1.8) que

$$\frac{d}{dt} \left[ t^n I_n(t) \right] = t^n I_{n-1}(t) \quad (3.12.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ t^{-n} I_{-n}(t) \right] = t^{-n} I_{n+1}(t). \quad (3.12.6)$$

También se pueden deducir fácilmente, a partir de (3.2.1) a (3.2.5) las relaciones

$$2I_n'(t) = I_{n-1}(t) + I_{n+1}(t) \quad (3.12.7)$$

$$\frac{2n}{t} I_n(t) = I_{n-1}(t) - I_{n+1}(t) \quad (3.12.8)$$

$$t I_n'(t) = t I_{n-1}(t) - n I_n(t) \quad (3.12.9)$$

$$t I_n'(t) = n I_n(t) + t I_{n+1}(t) \quad (3.12.10)$$

$$I_0'(t) = I_1(t) \quad (3.12.11)$$

Si  $n$  no es un entero  $I_{-n}(t)$  es una solución independiente de (3.12.1), es decir la solución es del tipo

$$y = AI_n(t) + BI_{-n}(t), \quad (3.12.12)$$

mientras que si  $n$  es un entero  $I_{-n}(t)$  es un múltiplo de  $I_n(t)$ ; una segunda solución será, por lo tanto,  $Y_n(t)$ . Sin embargo es más usual tomar como segunda solución la función  $K_n(t)$ , definida como:

$$K_n(t) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} n\pi} [I_{-n}(t) - I_n(t)] \quad (3.12.13)$$

cuando  $n$  no es un entero. Esta función, que es una solución de la ecuación diferencial, se conoce como la función modificada de Bessel del segundo grupo, que posee la propiedad de tener un cero al infinito sobre el eje real positivo.

Cuando  $n$  tiende a un valor entero, tanto el numerador como el denominador de (3.12.13) tienden a cero. La función  $K_n(t)$  se define entonces como el límite de esta razón. Ahora de (3.12.3)

$$\frac{\partial}{\partial n} I_n(t) = I_n(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2s} \Psi\Gamma(n+s)$$

donde

$$\Psi\Gamma(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x+1)$$

Nuevamente de (3.12.3) y como

$$\Gamma(-n+s+1)\Gamma(n-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi(n-s)}$$

tenemos que:

$$I_{-n}(t) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s} \Gamma(n-s) \frac{\text{Sen}(n-s)\pi}{\pi} +$$

$$+ \sum_{s=p}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(-n+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(t) = -I_{-n}(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\Gamma'(n-s) \text{Sen}(n-s)\pi + \Gamma(n-s)\pi \cos(n-s)\pi}{\pi \Gamma(s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s}$$

$$+ \sum_{s=p}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(-n+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s} \Psi\Gamma(-n+s).$$

Ahora, tomamos  $n$  entero igual a  $p$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(t) = -I_{-n}(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) + (-1)^n \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s \Gamma(n-s)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s} +$$

$$+ \sum_{s=p}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(s+1)\Gamma(n+s+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2s} \Psi\Gamma(s).$$

Si  $n$  es un entero positivo

$$K_n(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial n} [I_{-n}(t) - I_n(t)]}{2 \cos n\pi}$$

$$= (-1)^{n+1} I_n(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s (n-s-1)!}{s!} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2s} \quad (3.12.14)$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s!(n+s)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2s} [\Psi\Gamma(s) + \Psi\Gamma(n+s)]$$

En particular, cuando  $\gamma$  es un entero positivo

$$\Psi\Gamma(r) = \phi(r) - \gamma$$

donde  $\zeta(r) = 1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \dots + \frac{1}{r^r}$  y  $\delta = 0.5772$  (constante de Euler-Mascheroni).

Entonces

$$K_0(t) = -I_0(t) \left[ \log\left(\frac{t}{2}\right) + \delta \right] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(s!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s} \psi(s). \quad (3.12.15)$$

Una consecuencia de (3.12.13) es:

$$K_{-n}(t) = K_n(t) \quad (3.12.16)$$

Si en (3.12.9) sustituimos  $-n$  por  $n$ , tenemos

$$t I'_{-n}(t) = n I_{-n}(t) + t I_{-n-2}(t)$$

si a esta ecuación le restamos (3.12.10) y lo multiplicamos por  $\frac{\pi}{2.5\pi n \pi}$  resulta

$$t K'_n(t) = n K_n(t) - t K_{n+2}(t) \quad (3.12.17)$$

Si en ésta cambiamos  $n$  por  $-n$  y aplicamos (3.12.16)

$$t K'_n(t) = -n K_n(t) - t K_{n-2}(t). \quad (3.12.18)$$

A partir de (3.12.17) y (3.12.18) se encuentra que

$$2K'_n(t) = -[K_{n+2}(t) + K_{n-2}(t)] \quad (3.12.19)$$

$$K'_0(t) = -K_2(t) \quad (3.12.20)$$

$$\frac{d}{dt} [t^{-n} K_n(t)] = -t^{-n} K_{n+2}(t) \quad (3.12.21)$$

$$\frac{d}{dt} [t^n K_n(t)] = -t^n K_{n-2}(t) \quad (3.12.22)$$

$$\frac{2n}{t} K_n = K_{n+2}(t) - K_{n-2}(t). \quad (3.12.23)$$

### 3.13 Algunas Propiedades de las Funciones Modificadas de Bessel

a) Teorema de Adición para las Funciones Modificadas de Bessel del Primer Grupo

Si en la función generadora para los coeficientes de Bessel, ecuación (3.1.1), cambiamos  $x$  por  $ix$  y  $t$  por  $-it$ , ésta se transforma en

$$e^{\frac{x}{2}(t+t^{-1})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n \quad (3.13.1)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\mu+\nu)t^n &= e^{\frac{\mu+\nu}{2}(t+t^{-1})} \\ &= e^{\frac{\mu}{2}(t+t^{-1})} e^{\frac{\nu}{2}(t+t^{-1})} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(\mu)t^s \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r(\nu)t^r. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de  $t^n$ , obtenemos la fórmula de Adición

$$I_n(\mu+\nu) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} I_s(\mu)I_{n-s}(\nu) \quad (3.13.2)$$

siguiendo el mismo procedimiento usado en la sección 3.5, ésta se escribe como

$$I_n(\mu+\nu) = \sum_{s=0}^n I_s(\mu)I_{n-s}(\nu) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s [I_s(\mu)I_{n+s}(\nu) + I_{n+s}(\mu)I_s(\nu)] \quad (3.13.3)$$

b) Expresiones Integrales para  $I_n(x)$

A partir de la expresión integral (3.4.2) y con ayuda de (3.12.3) tenemos

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} \cosh(xt) dt \quad (3.13.4)$$

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(x \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta \quad (3.13.4a)$$

$$I_n(x) = \frac{x^n}{2^{n-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(x \sin \theta) \cos^{2n} \theta d\theta \quad (3.13.4b)$$

De (3.1.16) y nuevamente con ayuda de (3.12.3), resulta

$$I_n(x) = \frac{(1-i)^n}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(ix \sin \theta - n\theta) d\theta. \quad (3.13.5)$$

### 3.14 Funciones Ber y Bei.

Si en la ecuación diferencial modificada de Bessel (3.12.1), hacemos  $n=0$  y cambiamos  $t$  por  $x\sqrt{i}$ ; la ecuación toma la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - iy = 0 \quad (3.14.1)$$

Dos soluciones independientes de esta solución son  $I_0(x\sqrt{i})$  y  $K_0(x\sqrt{i})$ . Los términos en el desarrollo de  $I_0(x\sqrt{i})$  son alternadamente reales e imaginarios. La parte real y la parte imaginaria de esta expresión se denotan por  $ber x$  y  $bei x$  respectivamente, así que

$$I_0(x\sqrt{i}) = ber x + i bei x \quad (3.14.2)$$

donde

$$\operatorname{ber} x = 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2} x^2\right)^{2s}}{(2s!)^2} \quad (3.14.3)$$

$$\operatorname{bei} x = \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2} x^2\right)^{2s+1}}{\{(2s+1)\}^2} \quad (3.14.4)$$

La expresión análoga para  $K_0(x\sqrt{i})$  es

$$K_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x; \quad (3.14.5)$$

comparando con (3.12.15), se encuentra

$$\operatorname{ker} x = \operatorname{ber} x (\log z - \log x - \gamma) + \frac{i}{4} \pi \operatorname{bei} x - \quad (3.14.6)$$

$$- \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \dots$$

$$\begin{aligned} \operatorname{kei} x &= \operatorname{bei} x (\log z - \log x - \gamma) - \frac{i}{4} \pi \operatorname{ber} x + \\ &+ \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots \end{aligned} \quad (3.14.7)$$

Se puede verificar sin mucha dificultad que

$$\int_0^x x \operatorname{ber} x dx = x \operatorname{bei} x \quad (3.14.8)$$

$$\int_0^x x \operatorname{bei} x dx = -x \operatorname{ber} x \quad (3.14.9)$$

$$\int_0^x x \operatorname{ker} x dx = x \operatorname{kei} x \quad (3.14.10)$$

$$\int_0^x x \operatorname{kei} x dx = -x \operatorname{ker} x. \quad (3.14.11)$$

Desarrollos Asintóticos para las Funciones Ber y Bei.

Si  $0 < \text{amp. } z < \frac{\pi}{2}$ , el desarrollo asintótico de  $I_0(z)$  puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} I_0(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \left[ 1 + \frac{z^2}{1!8z} + \frac{z^2 \cdot 3^2}{2!(8z)^2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp \left[ z + \log \left( 1 + \frac{1}{8z} + \frac{9}{128z^2} + \frac{75}{1024z^3} + \frac{3675}{32768z^4} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \exp \left[ z + \frac{1}{8z} + \frac{1}{16z^2} + \frac{25}{384z^3} + \frac{13}{128z^4} + \dots \right] \end{aligned}$$

Si  $x$  es real positivo, y como  $\sqrt{i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

tenemos que

$$\begin{aligned} I_0(x\sqrt{i}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \exp \left[ -\frac{i\pi}{8} + x \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{8\sqrt{2}x} - \frac{i}{16x^2} - \frac{25(i+1)}{384x^3\sqrt{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{128x^4} + \dots \right] = \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi x}} (\cos \alpha + i \sin \alpha) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}x} - \frac{1}{16x^2} - \frac{25}{384\sqrt{2}x^3} + \dots \\ \beta &= \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}x} - \frac{25}{384\sqrt{2}x^3} - \frac{13}{128x^4} - \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto para estas expresiones para  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\text{ber } x = \frac{e^\beta}{\sqrt{2\pi x}} \cos \alpha \quad (3.14.12)$$

$$h_{ei} x = \frac{Q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \operatorname{Sen} x \quad (3.14.13)$$

Similarmente el desarrollo asintótico de  $K_0(z)$  es

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Q^{-z} \left[ 1 - \frac{1}{1!} \frac{1}{8z} + \frac{1 \cdot 3}{2!} \frac{1}{(8z)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \frac{1}{(8z)^3} + \dots \right]$$

cuando  $x$  es real y positiva

$$k_{ar} x = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Q^{\delta} \operatorname{Cos} x \quad (3.14.14)$$

$$k_{ai} x = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Q^{\delta} \operatorname{Sen} x \quad (3.14.15)$$

donde

$$\gamma = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}x} - \frac{1}{16x^3} + \frac{25}{384\sqrt{2}x^5} - \dots$$

$$\delta = -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8\sqrt{2}x} + \frac{25}{384\sqrt{2}x^3} - \frac{13}{128x^5} + \dots$$

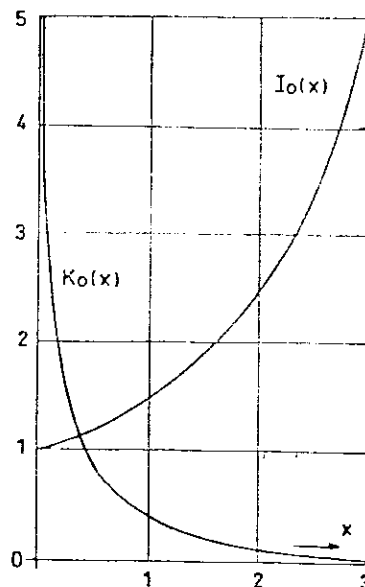


Fig. 5 Variación de  $I_0(x)$  y  $K_0(x)$  con  $x$ .

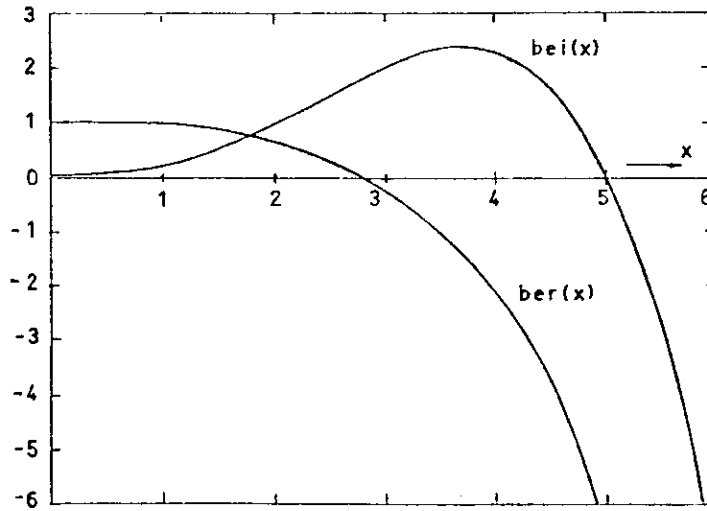


Fig. 6 Variación de  $bei(x)$  y  $ber(x)$  con  $x$ .

estas expresiones de  $\delta$  y  $\delta$  se obtienen de  $\alpha$  y  $\beta$ , cambiando en estas el signo de  $x$ .

#### 4. Funciones de Laguerre

##### 4.1 Polinomios de Laguerre

Los polinomios generalizados o asociados de Laguerre  $L_n^\alpha(x)$  se definen por medio de la ecuación

$$(1-r)^{-1-\alpha} \exp\left(-\frac{xr}{1-r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) r^n \quad (4.1.1)$$

que es la función generadora de los polinomios generalizados o asociados de Laguerre, en la que  $n$  es un entero no negativo y  $x$  real positivo.

Si desarrollamos la función exponencial tenemos

$$(1-r)^{-1-\alpha} \exp\left(-\frac{xr}{1-r}\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^s r^s}{s! (1-r)^{s+\alpha+1}}$$

Expandiendo  $(1-r)^{-1-\alpha}$ , podemos escribir esta expresión como

$$(1-r)^{-1-\alpha} \exp\left(-\frac{\chi r}{1-r}\right) = \sum_{s=0}^{\alpha} \frac{(-1)^s \chi^s r^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\alpha+s)_n r^n}{n!}$$

Usando el producto de Cauchy, la doble serie puede ser escrita como

$$\sum_{n=0}^{\alpha} \left[ \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s \chi^s (1+\alpha+s)_{n-s}}{s! (n-s)!} \right] r^n,$$

y ya que

$$\begin{aligned} (1+\alpha+s)_{n-s} &= (1+\alpha+s)(1+\alpha+s+1)\cdots(1+\alpha+s+n-s-1) \\ &= \frac{(1+\alpha+s)\cdots(\alpha+n)(1+\alpha)_s}{(1+\alpha)_s} = \frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_s}, \end{aligned}$$

tenemos, por comparación de los coeficientes de  $r^n$  en las dos expansiones en serie de la función generadora,

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s (1+\alpha)_n}{s! (n-s)! (1+\alpha)_s} x^s. \quad (4.1.2)$$

Observamos que  $L_n^\alpha(x)$  es claramente un polinomio de grado  $n$  y el coeficiente de  $x^0$  es  $(1+\alpha)_n/n!$  ya que  $(1)_n = n!$ , el término constante para el caso  $\alpha=0$  es 1. Este caso,  $L_n^0(x)$ , es definido como el polinomio de Laguerre de grado  $n$ , y está dado por (4.1.2) con  $\alpha=0$  como

$$L_n(x) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s n!}{(s!)^2 (n-s)!} x^s. \quad (4.1.2a)$$

Una expresión alternativa para  $L_n(x)$ , usando los coeficientes binomiales, es

$$L_n(x) = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{(-1)^s}{s!} x^s. \quad (4.1.2b)$$

De (4.1.2) pueden obtenerse fácilmente los primeros polinomios de Laguerre, que son:

$$\begin{aligned} L_0^\alpha(x) &= 1, \\ L_1^\alpha(x) &= 1 + \alpha - x, \\ L_2^\alpha(x) &= \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha) - (2+\alpha)x + \frac{1}{2}x^2, \\ L_3^\alpha(x) &= \frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha) - \frac{1}{2}(2+\alpha)(3+\alpha)x \\ &\quad + \frac{1}{2}(3+\alpha)x^2 - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Obtenemos además que

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}. \tag{4.1.4}$$

Ahora bien, a partir del Teorema de Leibnitz para la  $n$ -ésima derivada del producto de dos funciones, sabemos que:

$$\frac{x^{-\alpha} e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}] = \frac{x^{-\alpha} e^{-x}}{n!} \sum_{s=0}^n \frac{n!}{s!(n-s)!} \left[ \frac{d^s}{dx^s} e^{-x} \right] \left[ \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} x^{n+\alpha} \right] \tag{4.1.5}$$

Por otra parte, podemos demostrar fácilmente que:

$$x^{-\alpha} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} (x^{n+\alpha}) = \frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_s} x^s, \quad e^{-x} \frac{d^s}{dx^s} e^{-x} = (-1)^s,$$

sustituyendo estas dos relaciones en (4.1.5) resulta

$$\frac{x^{-\alpha} e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) = \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s (1+\alpha)_n}{s!(n-s)!(1+\alpha)_s} x^s,$$

comparando este último resultado con (4.1.2), concluimos que

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^{-x}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \tag{4.1.6}$$

que es la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre.

## 4.2 Fórmulas de Recurrencia

Obtendremos algunas fórmulas de recurrencia para los polinomios de La guerre, a partir de la función generadora (4.1.1). Si derivamos ambos miembros de la ecuación con respecto a  $r$ , resulta

$$(1-r)^{-\beta-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha r}{1-r}\right) [(1+\alpha)(1-r)-\alpha] = \sum_{n=c}^{\infty} n L_n^{\alpha}(x) r^{n-1}$$

la cual puede ser escrita en la forma

$$\left[ (1+\alpha)(1-r)-\alpha \right] \sum_{n=c}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) r^n = (1-r)^2 \sum_{n=c}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^{\alpha}(x) r^n.$$

Igualando coeficientes de  $t^n$ , tenemos la relación de recurrencia pura

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) + (x-1-\alpha-2n)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0 \quad (4.2.1)$$

De una manera similar, derivando (4.1.1) con respecto a  $x$ , obtenemos

$$-r(1-r)^{-2-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha r}{1-r}\right) = -\frac{t}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) r^n = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) r^n.$$

Multiplicando por  $(1-t)$  y comparando coeficientes de  $t^n$ , tenemos

$$L_{n-1}^{\alpha}(x) = \frac{d}{dx} [L_{n-1}^{\alpha}(x) - L_n^{\alpha}(x)]. \quad (4.2.2)$$

Derivando (4.1.1) dos veces con respecto a  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{d^2}{dx^2} L_{n+1}^{\alpha} + (n+\alpha) \frac{d^2}{dx^2} L_{n-1}^{\alpha}(x) + \\ + (x-1-\alpha-2n) \frac{d^2}{dx^2} L_n^{\alpha}(x) + 2 \frac{d}{dx} L_n^{\alpha}(x) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Ahora, derivando (4.2.2) con respecto a  $x$ , resulta

$$\frac{d}{dx} L_{n-1}^{\alpha}(x) = \frac{d^2}{dx^2} L_{n-2}^{\alpha}(x) - \frac{d^2}{dx^2} L_n^{\alpha}(x), \quad (4.2.4)$$

si en esta última ecuación cambiamos  $n$  por  $n+1$  y la sustituimos en (4.2.2) obtenemos que

$$\frac{d^2}{dx^2} L_{n+1}^\alpha(x) = \frac{d^2}{dx^2} L_{n-1}^\alpha(x) - 2 \frac{d}{dx} L_{n-1}^\alpha(x) + L_{n-1}^\alpha(x). \quad (4.2.5)$$

Sustituyendo las relaciones (4.2.2), (4.2.4) y (4.2.5) en (4.2.3) y cambiando  $n-1$  por  $n$  se obtiene la relación

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_n^\alpha(x) + (\alpha+1-x) \frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) + n L_n^\alpha(x) = 0 \quad (4.2.6)$$

#### 4.3 Ecuación Diferencial de Laguerre.

La ecuación (4.2.6), para  $\alpha=c$ , nos muestra que  $y = L_n(x)$  es solución de la ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0 \quad (4.3.1)$$

para  $\beta=n$  (entero no negativo); a esta ecuación se le denomina ecuación diferencial de Laguerre. Ahora deseamos encontrar la solución de esta ecuación en una forma más general, es decir, cuando  $\beta$  no sea necesariamente un entero positivo sino una constante; para esto hacemos un desarrollo en serie, alrededor del punto regular singular  $x=0$ , de la forma

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$$

Sustituyendo esta serie en la ecuación diferencial, obtenemos la relación:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (k+\lambda)^2 a_\lambda x^{k+\lambda-1} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} [\beta - (k+\lambda)] a_\lambda x^{k+\lambda} = 0.$$

Esta ecuación debe cumplirse para todo valor de  $x$  y esto es posible solamente si el coeficiente de toda potencia de  $x$  es igual a cero. Es decir

que debe cumplir con el sistema de ecuaciones

$$k^2 a_0 = 0 \quad (4.3.2a)$$

$$(k+\lambda)^2 a_\lambda + [\beta - (k+\lambda-1)] a_{\lambda-1}$$

o bien si hacemos  $\lambda-1 = j$

$$(k+j+1)^2 a_{j+1} = (k+j-\beta) a_j \quad (4.3.2b)$$

para que la ecuación indicial (4.3.2a) se cumpla, debemos tener  $k=0$ , ya que  $a_0=0$  nos lleva a la solución trivial. Entonces la fórmula de recurrencia (4.3.2b) se reduce a

$$a_{j+1} = \frac{j-\beta}{(j+1)^2} a_j \quad (4.3.3)$$

la cual nos lleva a la solución

$$y = a_0 \left[ 1 - \beta x + \frac{\beta(\beta-1)}{(2!)^2} x^2 - \dots (-1)^r \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-r+1)}{(r!)^2} x^r + \dots \right] \quad (4.3.4a)$$

que puede escribirse como

$$y = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \beta!}{(\beta-r)! (r!)^2} x^r \quad (4.3.4b)$$

Determinaremos la convergencia de la serie (4.3.4b)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| |x| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{j-\beta}{(j+1)^2} \right| |x| = 0$$

y por lo tanto la serie converge para todo valor de  $x$ .

En ciertos problemas físicos nos interesa una solución más particular; cuando  $\beta = n$ , un entero no negativo, la serie se corta, resultando un polinomio y si además hacemos  $a_0 = 1$ , el polinomio resultante es precisamente el polinomio de Laguerre de grado  $n$ .

$$y = L_n(x) \quad (4.3.5)$$

Resumiendo: tenemos que la serie (4.3.4b), que es solución de la ecuación diferencial de Laguerre (4.3.1), se reduce al polinomio de Laguerre de grado  $n$  cuando la constante  $\beta$  se iguala a un entero no negativo  $n$ .

#### 4.4 Propiedades Integrales de los Polinomios de Laguerre.

Mostraremos que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Por la definición de la función generadora, ecuación (4.1.1), tenemos que

$$e^{-\frac{xt}{1-t}} e^{-\frac{xf}{1-r}} = (1-t)(1-r) \sum_{n,m=0}^{\infty} L_n(x) L_m(x) t^n r^m,$$

multiplicando por  $e^{-x}$  e integrando entre los límites  $0$  a  $\infty$ , con respecto a  $x$ , obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{r}{1-r}\right) dx = (1-t)(1-r) \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n r^m \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx, \quad (4.4.2)$$

la integral del miembro izquierdo de esta ecuación se evalúa fácilmente y su resultado es

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{t}{1-t} + \frac{r}{1-r}\right) dx = \frac{(1-t)(1-r)}{(1-tr)} \quad (4.4.3)$$

sustituyendo este valor de la integral en la ecuación (4.4.2)

$$\frac{1}{1-tr} = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n r^m \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx. \quad (4.4.4)$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{1}{1-tr} = \sum_{n=0}^{\infty} (tr)^n = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n r^m \delta_{nm}, \quad (4.4.5)$$

sustituyendolo en (4.4.4), resulta finalmente que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (4.4.6)$$

que es precisamente lo que deseábamos probar.

Las funciones

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{1}{2}x} L_n(x) \quad (4.4.7)$$

cumplen con la condición

$$\int_0^{\infty} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (4.4.8)$$

y forman, por lo tanto, un conjunto de funciones ortonormales.

## 5. Funciones de Hermite

### 5.1 Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite  $H_n(x)$  están definidos para valores enteros de  $n$  y todo valor real de  $x$  y  $r$  por medio de

$$g(x, r) = \exp(2xr - r^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n \quad (5.1.1)$$

que es la función generadora de los polinomios de Hermite.

Podemos usar la función generadora para escribir  $H_n(x)$  en forma sumatoria expandiéndola en una serie de Maclaurin e igualando coeficientes de  $r^n$ . Comenzando por escribir

$$\exp(2xr - r^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n r^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^{2n}}{n!}.$$

Usando el producto de Cauchy, definido como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m t^n,$$

y notando que

$$a_n = \frac{(2x)^n}{n!}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n/2}}{(n/2)!}, \quad n \text{ par},$$

$$b_n = 0, \quad n \text{ impar}$$

tenemos

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \sum_{m=0}^n a_{n-m} b_m = \sum_{\substack{m=0 \\ m \text{ par}}}^N \frac{(-1)^{m/2} (2x)^{n-m}}{(m/2)! (n-m)!},$$

donde  $N$  es el máximo entero par  $\leq n$ . Haciendo  $m=2k$  obtenemos el polinomio de Hermite, de grado  $n$ ,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}. \quad (5.1.2)$$

Examinando la ecuación (5.1.2), vemos que  $H_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $x$ .

Desarrollando esta suma, obtenemos

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} - \dots \quad (5.1.2a)$$

A partir de la fórmula (5.1.2a) podemos determinar fácilmente los primeros polinomios de Hermite, que son

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1 \\
 H_1(x) &= 2x \\
 H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
 H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\
 H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x.
 \end{aligned}
 \tag{5.1.3}$$

Se sigue, ya sea de (5.1.1) o de (5.1.2), que  $H_n(x)$  es una función par de  $x$  para  $n$  par y función impar de  $x$  para  $n$  impar; es decir

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \tag{5.1.4}$$

De (5.1.2) se sigue que

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0, \tag{5.1.5}$$

$$H'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n 2(2n+1)!}{n!}, \quad H'_{2n}(0) = 0. \tag{5.1.6}$$

Si escribimos la función generadora como

$$g(x, t) = \exp(axr - r^2) = \exp[x^2 - (r-x)^2]$$

al derivarla  $n$  veces respecto a  $r$  obtenemos

$$\exp(x^2) \frac{\partial^n}{\partial r^n} \exp[-(r-x)^2] = \exp(x^2) (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp[-(r-x)^2] = \frac{\partial^n}{\partial r^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H_s(x)}{s!} r^s$$

además

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H_s(x)}{s!} r^s = H_n(x) + r H_{n+1}(x) + \frac{r^2}{2!} H_{n+2}(x) + \dots$$

y por lo tanto, haciendo  $r=0$  obtenemos que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (5.1.7)$$

que es la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite.

Los polinomios de Hermite también se pueden expresar en la forma integral

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{(2xr-r^2)}}{r^{n+1}} dr \quad (5.1.8)$$

donde el contorno encierra el origen del plano  $r$  y se integra en sentido positivo. De (5.1.8) obtenemos, usando el contorno  $r = e^{i\theta}$ , la representación integral real,

$$H_n(x) = \frac{n!}{\pi} \int_0^\pi \exp(2x e^{i\theta} - e^{2i\theta}) [\cos(2x \sin \theta - \sin 2\theta - n\theta)] d\theta. \quad (5.1.9)$$

## 5.2 Fórmulas de Recurrencia.

Algunas fórmulas de recurrencia se deducirán directamente de la definición (5.1.1) para la función generadora. Si derivamos ambos miembros de la ecuación respecto a  $x$ , obtenemos la relación:

$$2x \exp(2xr - r^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} r^n,$$

que puede escribirse en la forma

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} r^n,$$

igualando coeficientes de  $r^n$ , obtenemos la fórmula de recurrencia

$$2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) \quad (5.2.1)$$

De una manera similar derivando (5.1.1) respecto a  $r$  e igualando coefi-

cientes de  $r$ , tenemos

$$2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x). \quad (5.2.2)$$

Eliminando  $2nH_{n-1}(x)$  de (5.2.1) y (5.2.2) resulta

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \quad (5.2.3)$$

Derivando esta última relación respecto a  $x$ , se tiene

$$H_n''(x) = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_{n+1}'(x). \quad (5.2.4)$$

Ahora en la ecuación (5.2.1) cambiando  $n$  por  $n+1$  y sustituyéndola en (5.2.4) obtenemos, por último, la relación

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (5.2.5)$$

### 5.3 Ecuación Diferencial de Hermite

En la sección 5.2, ecuación (5.2.5), se demuestra que  $y = H_n(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\alpha y = 0 \quad (5.3.1)$$

cuando  $\alpha$  es un entero no negativo  $n$ . A esta ecuación se le denomina ecuación diferencial de Hermite.

Proponemos como solución de esta ecuación la serie

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\alpha} a_{\lambda} x^{k+\lambda};$$

que al sustituirla en (5.3.1), obtenemos las ecuaciones indicial y auxiliar

$$a) \quad a_0 k(k-1) = 0 \qquad b) \quad a_{\lambda} k(k+1) = 0 \quad (5.3.2)$$

y la fórmula de recurrencia para los coeficientes

$$a_{\lambda+2} = \frac{\lambda(\lambda+2) - 2\alpha}{(\lambda+2)(\lambda+1)} a_{\lambda} \quad (5.3.3)$$

Si en la ecuación indicial (5.3.2a) suponemos que  $a_0 \neq 0$ , entonces claramente los valores que cumplen esta ecuación son

$$k = 0, 1$$

Si  $k=0$  (5.3.2b) se cumple para todo valor de  $a_1$ .

Si  $k=1$  (5.3.2b) se cumple solamente si  $a_1 = 0$ .

Ahora, de la ecuación (5.3.2b), si suponemos que  $a_1 \neq 0$ , la ecuación se cumple para

$$k = 0, -1$$

Si  $k=0$  (5.3.2a) se cumple para todo valor de  $a_0$ .

Si  $k=-1$  (5.3.2a) se cumple solamente si  $a_0 = 0$ .

Por lo tanto tenemos tres casos por resolver  $k=0$ ,  $+1$  y  $-1$ .

1° caso  $k=0$

La fórmula de recurrencia (5.3.3) se reduce a

$$a_{\lambda+2} = \frac{2(\lambda-\alpha)}{(\lambda+2)(\lambda+1)} a_{\lambda} \quad (5.3.4)$$

En este caso la serie contiene tanto potencias pares como potencias impares de  $x$ , esto es:

$$y_1 = (a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2r} x^{2r} + \dots) + (a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{2r+1} x^{2r+1} + \dots)$$

que se reduce con ayuda de la fórmula de recurrencia (5.3.4), a

$$y_1 = a_0 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{2!} x^2 + \frac{2^2 \alpha(\alpha-2)}{4!} x^4 + \dots + (-1)^r \frac{2^r \alpha(\alpha-2)(\alpha-4) \dots (\alpha-2r+2)}{(2r)!} x^{2r} + \dots \right] \\ + a_1 \left[ x - \frac{2(\alpha-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!} x^5 + \dots + (-1)^r \frac{2^r (\alpha-1)(\alpha-3) \dots (\alpha-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} + \dots \right] \quad (5.3.5)$$

2° caso  $k=1$ ,  $a_1=0$

La fórmula de recurrencia es

$$a_{\lambda+2} = \frac{2(\lambda-\alpha+1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)} a_{\lambda}, \quad (5.3.6)$$

si hacemos el cambio de notación

$$a_{2r} \equiv A_{2r+1}$$

la fórmula (5.3.6) se puede escribir como

$$A_{(\lambda+1)+2} = \frac{2(\lambda-\alpha+1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)} A_{(\lambda+1)},$$

ahora si hacemos  $\lambda' = \lambda+1$ , obtenemos

$$A_{\lambda'+2} = \frac{2(\lambda'-\alpha)}{(\lambda'+2)(\lambda'+1)} A_{\lambda'} \quad \lambda' = 1, 3, 5, \dots \quad (5.3.7)$$

que es del mismo tipo que la obtenida con  $k=0$ . Por lo tanto, la solución en este caso es solamente la parte de la solución (5.3.5) en potencias impares de  $\chi$ , diferenciando de esta a lo más por una constante multiplicativa.

3° caso  $k=-1$ ,  $a_0=0$

La fórmula de recurrencia toma ahora la forma

$$a_{\lambda+2} = \frac{2(\lambda-1-\alpha)}{\lambda(\lambda+1)} a_{\lambda} \quad (5.3.8)$$

si hacemos el cambio de notación  $a_{2r+1} \equiv A_{2r}$ , la fórmula (5.3.8) puede escribirse como

$$A_{(\lambda-1)+2} = \frac{2(\lambda-1-\alpha)}{\lambda(\lambda+1)} A_{\lambda-1}$$

haciendo  $\lambda' = \lambda - 1$ , obtenemos

$$A_{\lambda'+2} = \frac{2(\lambda' - \alpha)}{(\lambda'+2)(\lambda'+1)} A_{\lambda'} \quad \lambda' = 0, 2, 4, \dots \quad (5.3.9)$$

que es nuevamente una solución particular de (5.3.5). La solución general es entonces (5.3.5).

Examinemos ahora la convergencia de la serie (5.3.5). Puesto que

$$\left| \frac{a_{\lambda+2}}{a_{\lambda}} \right| x^2 = \frac{2(\lambda - \alpha)}{(\lambda+2)(\lambda+1)} x^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda} x^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

la serie es convergente para todo valor de  $x$ .

Usaremos la notación,

$$y_1(x) = a_0 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{2!} x^2 + \frac{2^2 \alpha(\alpha-2)}{4!} x^4 - \dots (-1)^r \frac{2^r \alpha(\alpha-2)\dots(\alpha-2r+2)}{(2r)!} x^{2r} + \dots \right]$$

$$y_2(x) = a_1 \left[ x - \frac{2(\alpha-1)}{3!} x^3 + \frac{2^2(\alpha-1)(\alpha-3)}{5!} x^5 - \dots (-1)^r \frac{2^r (\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2r+1)}{(2r+1)!} x^{2r+1} + \dots \right]$$

es decir,

$$y_1(x) = a_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\alpha/2 - r + 1)_r}{(2r)!} x^{2r} \quad (5.3.10a)$$

$$y_2(x) = a_1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r [(\alpha-1)/2 - r + 1]_r}{(2r+1)!} x^{2r+1} \quad (5.3.10b)$$

la solución general es, entonces

$$y = y_1(x) + y_2(x)$$

Notamos que si  $\alpha = 2n$ ,  $n$  un entero no negativo, entonces  $y_1(x)$  llega a ser un polinomio de grado  $2n$ , y si  $\alpha = 2n+1$ ,  $y_2(x)$  llega a ser un polinomio de grado  $2n+1$ . Esto es verdad debido a que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{2} - k + 1\right)_k \Big|_{\alpha=2n} &= \left(\frac{\alpha-1}{2} - k + 1\right)_k \Big|_{\alpha=2n+1} = (n+1-k)_k \\ &= (n+1-k)(n+2-k)\cdots(n). \end{aligned}$$

Entonces si  $\alpha$  es un entero no negativo en (5.3.1), una de las dos soluciones,  $y_1$  o  $y_2$ , será un polinomio de grado  $\alpha$  y la otra será una serie infinita.

Si en (5.3.10a),  $\alpha$  es un entero par  $n$  y tomamos

$$a_1 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

y si en la solución (5.3.10b),  $\alpha$  es un entero impar  $n$ , y tomamos

$$a_2 = (-1)^{\frac{(n-1)}{2}} \frac{2n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

la solución polinómica en ambos casos toma la forma

$$y(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{2!} (2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} (2x)^{n-4} + \dots \quad (5.3.11)$$

que es el polinomio de Hermite de grado  $n$  dado en (5.3.2). Por lo tanto,

$$y(x) = H_n(x) \quad (5.3.11a)$$

Una ecuación relacionada con la de Hermite es

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x^2 + 2\alpha)y = 0 \quad (5.3.12)$$

ya que si hacemos

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} v$$

la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - 2x \frac{dv}{dx} + 2\alpha v = 0$$

que es la ecuación diferencial de Hermite. Por lo tanto la solución de la ecuación (5.3.12) es

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x). \quad (5.3.13)$$

Esta solución se conoce como la función (ortogonal) de Hermite y es de gran interés, ya que aparece en ciertos problemas físicos.

#### 5.4 Propiedades Integrales de las Funciones de Hermite.

Demostraremos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & n = m \end{cases} \quad (5.4.1)$$

De la relación (5.1.1) tenemos

$$e^{(2\alpha r - r^2)} e^{(2\alpha t - t^2)} = e^{x^2 - (r-x)^2} e^{x^2 - (t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} r^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} t^m,$$

si multiplicamos por  $e^{-x^2}$  e integramos con respecto a  $x$  entre los límites  $-\infty$  a  $\infty$  en ambos miembros de la ecuación anterior, resulta

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \right] \frac{r^n t^m}{n! m!} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 - (r-x)^2 - (t-x)^2} dx. \quad (5.4.2)$$

Evaluando la integral del miembro derecho de la igualdad

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 - (r-x)^2 - (t-x)^2} dx = e^{2rt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-r-t)^2} dx,$$

si hacemos el cambio de variable

$$\alpha^2 = (x-r-t)^2$$

la integral resulta

$$I = \sqrt{\pi} e^{zrt}$$

o bien

$$I = \sqrt{\pi} e^{zrt} = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zrt)^n}{n!} = \sqrt{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} r^n t^m \delta_{n,m}.$$

Sustituyendo este resultado en (5.4.2), obtenemos:

$$\sum_{\substack{n,m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \right] \frac{r^n t^m}{n! m!} = \sqrt{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} r^n t^m \delta_{n,m}$$

y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = z^n m! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}$$

que es precisamente lo que deseábamos probar.

Otra integral que se utiliza en la física matemática es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \quad (5.4.3)$$

que puede evaluarse en una fórmula similar. Ahora, en lugar de (5.4.2)

podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx \right] \frac{r^n t^m}{n! m!} &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{x^2 - (r-x)^2 - (t-x)^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} (r+t) e^{zrt}. \end{aligned}$$

Desarrollando la exponencial e igualando coeficientes de  $r^n t^m$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} (2^{n-1} n! \delta_{m, n-1} + 2^n (n+1)! \delta_{m, n+1}). \quad (5.4.4)$$

La integral se anula para  $n=m$  y también cuando  $n$  y  $m$  difieren en más de una unidad.



### III. APLICACIONES A LA FISICA

#### 6. Aplicaciones de las Funciones Hipergeométricas

##### 6.1 Trompo simétrico

Deseamos calcular los niveles energéticos de un cuerpo rígido en rotación, que tiene dos de sus momentos de inercia principales iguales y sobre el cual, no actúan fuerzas externas. Su posición en el espacio se describe por los tres ángulos de Euler  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\psi$ , que se muestran en la fig. 7  $\theta$  y  $\phi$ , son las coordenadas polares ordinarias del eje del trompo, mientras  $\psi$ , es el ángulo que mide la rotación alrededor de su eje.

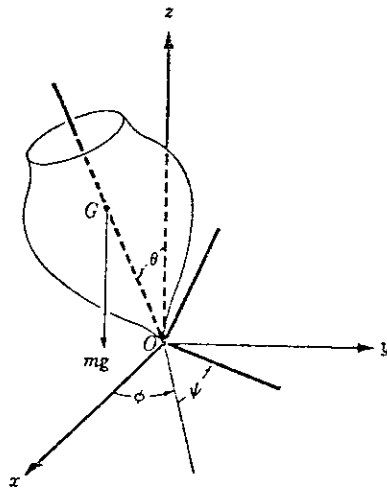


Fig. 7 Diagrama de los ángulos de Euler.

Se demuestra en la mecánica clásica, que la energía cinética del trompo

po simétrico, la cual coincide con la energía total en el caso del movimiento libre de fuerzas, está dada por la expresión (Goldstein, 1950: p. 164)

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \text{SEN}^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \cos \theta \dot{\phi})^2 \quad (6.1.1)$$

en la que  $I_1$  representa los momentos de inercia iguales e  $I_3$  el momento de inercia alrededor del eje de simetría. O bien por

$$T = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \quad \text{con} \quad q^1 \equiv \theta, \quad q^2 \equiv \phi, \quad q^3 \equiv \psi \quad (6.1.2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 \text{SEN}^2 \theta + I_3 \text{COS}^2 \theta & I_3 \text{COS} \theta \\ 0 & I_3 \text{COS} \theta & I_3 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

El determinante de esta matriz tiene el valor

$$g = |g_{\mu\nu}| = I_1^2 I_3 \text{SEN}^2 \theta \quad (6.2.4)$$

Reemplazando en (6.1.1) las derivadas parciales con respecto al tiempo, por sus correspondientes expresiones en función de los momentos canónicos  $P_\mu = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\mu}$ , se obtiene el Hamiltoniano del trompo simétrico libre

$$H = \frac{1}{2I_1} P_\theta^2 + \frac{(P_\phi - P_\psi \text{COS} \theta)^2}{2I_1 \text{SEN}^2 \theta} + \frac{1}{2I_3} P_\psi^2 \quad (6.2.5)$$

o bien

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \quad (6.2.6)$$

con

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2 \sin^2 \theta} & -\frac{\cos \theta}{I_2 \sin^2 \theta} \\ 0 & -\frac{\cos \theta}{I_2 \sin^2 \theta} & \frac{1}{I_3} + \frac{\cos^2 \theta}{I_2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (6.1.7)$$

Podemos verificar por multiplicación directa que  $g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \delta_{\mu\mu}$ , es decir, las matrices (6.1.3) y (6.1.7) son recíprocas una de otra; esto nos permite considerar a  $g_{\mu\nu}$  como un tensor métrico.

Para pasar al problema cuántico, asociamos el Hamiltoniano al operador

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2,$$

en el que el Laplaciano de nuestro problema debe expresarse en el sistema de coordenadas  $\theta, \phi, \psi$ .

La expresión del Laplaciano en coordenadas generalizadas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left( \sqrt{g} g^{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \quad (6.1.8)$$

Tomando  $g$  y  $g^{\mu\nu}$  de las expresiones (6.1.4) y (6.1.7), se encuentra que el operador Hamiltoniano del trompo simétrico libre es

$$H = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left[ \frac{1}{I_2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{I_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( \frac{1}{I_3} + \frac{\cos^2 \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{2 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \psi} \right] \quad (6.1.9)$$

Por lo tanto la ecuación de ondas del trompo simétrico es

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \left( \frac{I_2}{I_3} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi \partial \psi} + \frac{8\pi^2 m I_1 E}{h^2} \Psi = 0 \quad (6.1.10)$$

Los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  no aparecen en esta ecuación, aun cuando aparecen derivadas respecto de ellos; son coordenadas cíclicas y entran en la función de onda en la forma

$$\Psi = \Theta(\theta) e^{iM\phi} e^{iK\psi} \quad (6.1.11)$$

en la que  $M$  y  $K$  tienen valores enteros  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Sustituyendo (6.1.11) en la ecuación de onda (6.1.10), resulta para  $\Theta(\theta)$  la ecuación

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left[ \frac{M^2}{\sin^2 \theta} + \left( \frac{I_2 E}{\sin^2 \theta} + \frac{I_1}{I_3} \right) K^2 - 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} KM - \frac{8\pi^2 m I_1}{h^2} E \right] \Theta = 0 \quad (6.1.12)$$

Tenemos que  $\theta=0$  y  $\theta=\pi$  son puntos singulares en esta ecuación. Para determinar la solución de (6.1.12) Es conveniente hacer el cambio de varia

ble

$$t = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad \text{y} \quad \Theta(\theta) = T(t) \quad (6.1.13)$$

y al mismo tiempo tomar

$$\lambda = \frac{P \bar{u}^2 m I_3 E}{h^2} - \frac{I_1}{I_3} K^2 \quad (6.1.14)$$

resultando la ecuación diferencial

$$t(1-t) \frac{d^2 T}{dt^2} + (1-2t) \frac{dT}{dt} + \left[ \lambda - \frac{\{M+K(2t-1)\}^2}{4t(1-t)} \right] T = 0 \quad (6.1.15)$$

Los puntos singulares están ahora en  $t=0$  y  $t=1$ . Haremos un desarrollo en serie alrededor de cada uno de estos puntos para obtener las ecuaciones indiciales que fijan el mínimo exponente de  $t$  en las series. Si se hace la sustitución  $T(t) = t^S G(t)$  se encuentra que  $S = \frac{1}{2} |K-M|$ ; mientras que la sustitución  $T(t) = (1-t)^{S'} H(1-t)$  da el valor de  $\frac{1}{2} |K+M|$  para  $S'$ . Por lo tanto la solución aceptable para  $T(t)$  es:

$$T(t) = t^{\frac{1}{2} |K-M|} (1-t)^{\frac{1}{2} |K+M|} F(t) \quad (6.1.16)$$

en la que  $F(t)$  debe ser finita en  $t=0$  y  $t=1$ . Sustituyendo (6.1.16) en (6.1.15), se obtiene para  $F(t)$  la ecuación hipergeométrica

$$t(1-t) \frac{d^2 F}{dt^2} + (a-bt) \frac{dF}{dt} + cF = 0 \quad (6.1.17)$$

en la cual

$$a = |K-M| + 1,$$

$$b = |K+M| + |K-M| + 2,$$

$$c = 2 + K^2 - \left( \frac{1}{2} |K+M| + \frac{1}{2} |K-M| \right) \left( \frac{1}{2} |K+M| + \frac{1}{2} |K-M| + 1 \right).$$

Aplicando a (6.1.17) el método de solución en serie, la fórmula de recurrencia para los coeficientes es: [véase ecuación (1.4.4)]

$$a_{j+1} = \frac{j(j-1) + bj - c}{(j+1)(j+a)} a_j \quad (6.1.18)$$

La serie hipergeométrica diverge para  $t=1$  y el único modo de eliminar la divergencia es que la serie se corte en un punto, reduciéndose un polinomio en  $t$  orden  $j$ . La condición para que esto ocurra es según (6.1.18) que

$$c = j(j-1) + bj \quad (6.1.18a)$$

Definiendo

$$J \equiv j + \frac{1}{2}|K+M| + \frac{1}{2}|K-M| \quad (6.1.19)$$

e introduciendo en (6.1.18a) los valores de  $j$  y  $b$ , se llega a la siguiente fórmula para los eigenvalores del Hamiltoniano del trompo simétrico libre

$$E_{JKM} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left[ \frac{J(J+1)}{I_1} + K^2 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \right] \quad (6.1.20)$$

Como  $J$  es igual o mayor que el más grande de los dos números cuánticos  $|K|$  y  $|M|$ , su valor es cero ó un entero positivo; tenemos así los siguientes valores para los tres números cuánticos.

$$\begin{aligned} J &= 0, 1, 2, \dots \\ K &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J \\ M &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

De (6.1.20), observamos que la energía no depende de  $M$  ó del signo de  $K$ ; por lo tanto, dado  $J$ , la degeneración de un nivel es  $2J+1$  ó  $4J+2$ .

dependiendo de si  $K$  es cero ó diferente de cero.

Las funciones de onda en término de las funciones hipergeométricas tienen la forma

$$\Psi_{JKM}(\rho, \phi, \psi) = N_{JKM} t^{\frac{1}{2}|K-M|} (1-t)^{\frac{1}{2}|K+M|} e^{i(M\phi + K\psi)} \cdot {}_2F_1\left(-J + \frac{b}{2} - 1, J + \frac{b}{2}; 1 + |K-M|; t\right) \quad (6.1.22)$$

en la que

$$t = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

y

$$N_{JKM} = \left[ \frac{(2J+1)(J+\frac{1}{2}|K+M|+\frac{1}{2}|K-M|)! (J-\frac{1}{2}|K+M|+\frac{1}{2}|K-M|)!}{8\pi^2 (J-\frac{1}{2}|K+M|-\frac{1}{2}|K-M|)! (K-M)!^2 (J+\frac{1}{2}|K+M|-\frac{1}{2}|K-M|)!} \right] \quad (6.1.23)$$

## 6.2 Niveles Energéticos en un Pozo Potencial.

Se desea determinar los niveles energéticos para una partícula en un campo potencial de la forma: (fig.

$$V = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} \quad (6.2.1)$$

El espectro de energías para eigenvalores positivos es continuo, mientras que el de los valores negativos tienen un espectro discreto, por lo que se considerará solamente este último caso. La ecuación de Schrödinger es para este problema particular.

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} \right) \bar{\Psi} = 0 \quad (6.2.2)$$

Si introducimos  $\omega$  tal que

$$\Psi = \frac{\omega}{\cosh^S \alpha x}, \quad \omega = \omega(x) \quad (6.2.3)$$

donde

$$S = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{32m\hbar^2 V_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right)$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} - 2\alpha s \tanh(\alpha x) \frac{d\omega}{dx} + \left( \alpha^2 S^2 + \frac{E \hbar^2 m E}{\hbar^2} \right) \omega = 0 \quad (6.2.4)$$

Esta ecuación puede reducirse a una ecuación Hipergeométrica, haciendo el cambio de variable

$$\xi = S \cosh^2 \alpha x \quad (6.2.5)$$

y llamando

$$E = \sqrt{-2mE} \frac{2\hbar}{\hbar \alpha}$$

obteniéndose de esta manera la ecuación

$$\xi(1+\xi) \frac{d^2 \omega}{d\xi^2} + \left[ (1-S)\xi + \frac{1}{2} \right] \frac{d\omega}{d\xi} + \frac{1}{4} (S^2 - E^2) \omega = 0 \quad (6.2.6)$$

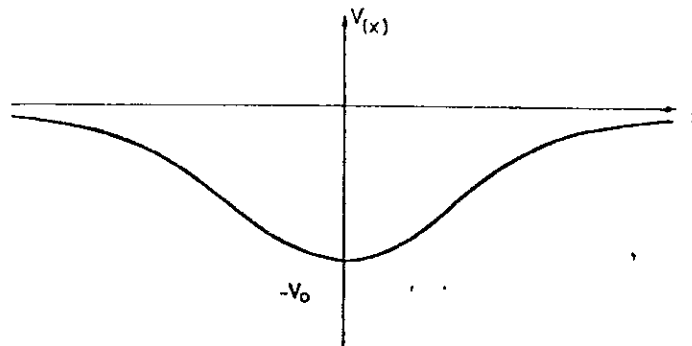


Fig. 8  $V = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$

Se observa en (6.2.1) que la energía potencial  $V(\xi)$  es una función par de la coordenada. Entonces la ecuación de Schrödinger (6.2.2) no cambia cuando se cambia el signo de la coordenada. Se sigue que si  $\Psi(x)$  es una solución de esta ecuación,  $\Psi(-x)$  también es solución y coincide con  $\Psi(x)$  hasta un factor constante:  $\Psi(-x) = c\Psi(x)$ . Cambiando nuevamente el signo de  $x$ , obtenemos  $\Psi(x) = c^2\Psi(x)$ , por lo que  $c = \pm 1$ . Por lo tanto, cuando la energía potencial es simétrica (respecto a  $x=0$ ) la función de onda de los estados estacionarios debe ser par [ $\Psi(x) = \Psi(-x)$ ] o impar [ $\Psi(-x) = -\Psi(x)$ ]. Como  $\cosh \alpha x$  es una función par, la paridad de  $\Psi$  es la misma que la de  $\omega(x)$ . Las soluciones particulares par e impar (en  $x$ ) de la ecuación (6.2.6) son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\epsilon, -\frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\epsilon; \frac{1}{2}; -\xi\right) \\ \omega_2 &= \sqrt{\xi} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\xi\right) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

(cuando  $x$  cambia de signo  $\xi$  permanece igual, mientras  $\sqrt{\xi} = \sinh \alpha x$  cambia de signo). Para que  $\Psi = (1 + \xi)^{-\frac{1}{2}S} \omega_1$  se reduzca a cero cuando  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $\omega_1$  debe ser tal que tienda menos rápidamente a infinito que la función  $(1 + \xi)^{-\frac{1}{2}S}$  cuando  $\xi \rightarrow \infty$ . Esta condición se logra si  $\omega_1$  se corta en un punto reduciéndose a un polinomio, por lo que el parámetro  $-\frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{2}S$  debe ser un entero negativo o cero. Por lo tanto la función hipergeométrica es un polinomio de grado  $\frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\epsilon$  y  $\Psi$  tiende a cero como  $\xi^{-\frac{1}{2}\epsilon}$  cuando  $\xi \rightarrow \infty$ . Similarmente para  $\Psi = (1 + \xi)^{-\frac{1}{2}S}$ , la condición se satisface si  $-\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}$  es un entero negativo.

Los niveles energéticos se determinan por la condición  $S - \epsilon = n$ , resultando

$$E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{32\pi^2 m} \left[ -(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 m V_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right]^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2.8)$$

Existen un número finito de niveles, que se determinan por la condición  $E > 0$ . Es decir la condición

$$2n < \sqrt{1 + \frac{32\pi^2 m V_0}{\alpha^2 \hbar^2}} - 1 \quad (6.2.9)$$

### 6.3 Penetración en una Barrera Potencial por Electrones.

Sea una barrera potencial definida por la ecuación

$$V(x) = -\frac{A\xi}{(1-\xi)} - \frac{B\xi}{(1-\xi)^2}, \quad \xi = -e^{-\frac{2\pi x}{l}} \quad (6.3.1)$$

en la cual  $x$  es la coordenada cartesiana y  $A, B$  y  $l$  son constantes. La gráfica de esta función para varios valores de  $A$  y  $B$  se muestra en la fig. 9. Vemos que para grandes valores negativos de  $x$ , se aproxima a cero y a un valor constante  $A$  para grandes valores positivos. El ancho de la región de transición es, prácticamente,  $2l$ . Cuando  $|B|$  es mayor que  $|A|$ , el potencial posee un valor extremo en

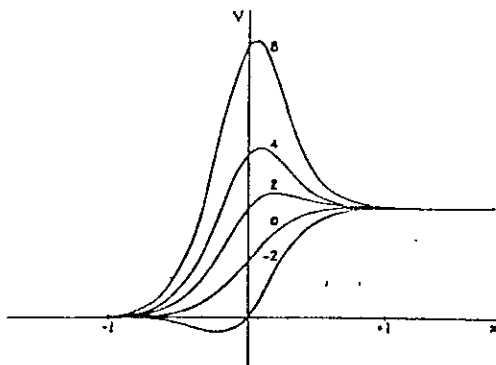


Fig. 9 Gráfica de la función  $V(x)$ . Los números sobre las curvas son valores de  $\frac{B}{A}$ .

$$\chi_m = \frac{\ell}{2\hbar} \log \left[ \frac{B+A}{B-A} \right] \quad (6.3.2)$$

cuya altura es

$$V(\chi_m) = V_m = \frac{(A+B)^2}{4B} \quad (6.3.3)$$

En lo sucesivo se supondrá  $B \geq 0$ , por lo que el valor extremo es un máximo.

La ecuación de Schrödinger, de este problema es

$$\frac{d^2 \psi^-}{dx^2} + \frac{E - V_m}{\hbar^2} \left[ \frac{A\xi}{(1-\xi)} + \frac{B\xi}{(1-\xi)^2} + E \right] \psi^- = 0 \quad (6.3.4)$$

cambiando a la variable  $\xi$ , definida por la ecuación (6.3.1),

$$\xi^2 \frac{d^2 \psi^-}{d\xi^2} + \xi \frac{d\psi^-}{d\xi} + \frac{2m\ell^2}{\hbar^2} \left[ \frac{A\xi}{(1-\xi)} + \frac{B\xi}{(1-\xi)^2} + E \right] \psi^- = 0 \quad (6.3.5)$$

Para estudiar la solución exacta, consideremos primero su comportamiento asintótico para grandes valores positivos y negativos de  $x$ . En ambos casos el potencial es prácticamente constante y por lo tanto su solución deberá ser ondas monocromáticas de De Broglie, a una primera aproximación. Para grandes valores negativos de  $x$ , la longitud de onda será  $\lambda = \hbar / (2mE)^{1/2}$ , para grandes valores positivos  $\lambda' = \hbar / [2m(E-A)]^{1/2}$ . Puede suponerse  $E \geq A$ , pues el caso contrario, no presenta mucho interés. La solución puede especificarse con mayor precisión, si nos limitamos al caso en el cual los electrones inciden sobre la barrera de  $x = -\infty$ ; si es así habrá una simple onda (transmitida),

$$Q \frac{2\pi i x}{\lambda'} = (-\xi)^{i\beta} \quad \beta = \frac{l}{\lambda'} \quad (6.3.6)$$

para grandes valores positivos de  $x$  y dos ondas (incidente y reflejada)  
para grandes valores negativos de  $x$ ,

$$a_1 Q \frac{2\pi i x}{\lambda} + a_2 Q \frac{-2\pi i x}{\lambda'} = a_1 (-\xi)^{i\alpha} + a_2 (-\xi)^{i\alpha}, \quad \alpha = \frac{l}{\lambda} \quad (6.3.7)$$

La solución exacta tendrá que reducirse a estos valores para grandes valores de  $x$ . Proponemos una solución

$$\Psi = (1-\xi)^{i\beta} \left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^{i\alpha} \omega\left(\frac{1}{1-\xi}\right); \quad (6.3.8)$$

sustituyéndola en la ecuación (6.3.5), obtenemos para  $\omega\left(\frac{1}{1-\xi}\right)$  la ecuación

$$\frac{\xi}{(1-\xi)^2} \frac{d^2 \omega}{d\left(\frac{1}{1-\xi}\right)^2} + \left[ \frac{2}{1-\xi} (i\alpha - 2i\beta\xi + 2\xi) + 1 \right] \frac{d\omega}{d\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} + \left[ 2\alpha\beta + i\alpha - i\beta + \frac{2m\ell^2}{h^2} (A+B-2E) \right] \omega\left(\frac{1}{1-\xi}\right) = 0 \quad (6.3.9)$$

y haciendo el cambio de variable  $z = \frac{1}{1-\xi}$ , (6.3.9) se transforma en

$$z(z-1) \frac{d^2 \omega}{dz^2} + \left[ 2z(i\alpha - i\beta + 1) + 2i\beta - 1 \right] \frac{d\omega}{dz} + \left[ 2\alpha\beta + i\alpha - i\beta + \frac{2m\ell^2}{h^2} (A+B-2E) \right] \omega = 0 \quad (6.3.10)$$

que es la ecuación hipergeométrica, donde los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , dados por la ecuación (6.3.6) y (6.3.7) son

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{E}{c} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{E-A}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.3.11)$$

donde

$$e = \frac{\hbar^2}{8m\ell^2}$$

$e$  es la energía de un electrón cuya longitud de onda de De Broglie es  $2\ell$ , el ancho total del potencial. La solución de la ecuación (6.3.10), en términos de las funciones hipergeométricas es

$$\omega\left(\frac{1}{1-\xi}\right) = {}_2F_2\left(\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta + \delta), -\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta - \delta); 1 - 2i\beta, \frac{1}{1-\xi}\right) \quad (6.3.12)$$

donde

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ \frac{E - e}{e} \right]^{\frac{1}{2}}$$

La solución total de la ecuación de onda resulta por lo tanto

$$\Psi^r = (1-\xi)^{i\beta} \left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^{i\alpha} {}_2F_2\left(\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta + \delta), -\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta - \delta); 1 - 2i\beta, \frac{1}{1-\xi}\right) \quad (6.3.13)$$

La función  $\Psi^r$ , se aproxima a  $(-\xi)^{i\beta}$  para grandes valores de  $\xi$ , ya que  ${}_2F_1(a, b; c; 1) = 1$ . Para  $\xi$  pequeña, la función  $\Psi^r$  no puede determinarse al instante, ya que  ${}_2F_1(a, b; c; 1)$  diverge; es necesario recurrir al proceso llamado extensión analítica y expresar  $\Psi^r$  en términos de series que converjan para pequeños valores de  $|\xi|$ . Esto lo podemos realizar con ayuda de nuestra ecuación (6.2.1), resultando

$$\begin{aligned} \Psi^r = & a_1 (1-\xi)^{i\beta} \left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^{i\alpha} {}_2F_2\left(\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta + \delta), -\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta - \delta); 1 + 2i\alpha, \frac{\xi}{\xi-1}\right) + \\ & + a_2 (1-\xi)^{i\beta} \left(\frac{\xi}{\xi-1}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta + \delta), -\frac{1}{2} + i(\alpha - \beta - \delta), 1 - 2i\alpha; \frac{\xi}{\xi-1}\right) \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

donde

$$a_1 = \frac{\Gamma(1-2i\beta)\Gamma(-2i\alpha)}{\Gamma[\frac{1}{2}+i(-\alpha-\beta-\delta)]\Gamma[\frac{1}{2}+i(-\alpha-\beta+\delta)]} \quad (6.3.15)$$

$$a_2 = \frac{\Gamma(1-2i\beta)\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma[\frac{1}{2}+i(\alpha-\beta-\delta)]\Gamma[\frac{1}{2}+i(\alpha-\beta+\delta)]}$$

Las dos series de la parte derecha de la ecuación (6.3.14) convergen cuando  $|\frac{\xi}{\xi-1}| < 1$ , esto es cierto cuando  $|\xi| < \frac{1}{2}$ . Para pequeños valores de  $\xi$ , el valor de  $\bar{\psi}$  puede medirse de (6.3.14) y resulta ser exactamente igual a la ecuación (6.3.7) con  $a_1$  y  $a_2$  definidas por la ecuación (6.3.15). Las ecuaciones (6.3.13) y (6.3.14) definen así a la función  $\bar{\psi}$  para todo valor real de  $x$ ; se puede mostrar de una manera rápida que se ha satisfecho la ecuación (6.3.5) y que es finita, continua y posee derivadas continuas en todo el intervalo; es por lo tanto la función de onda del problema.

El coeficiente de reflexión se define por la relación

$$R = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^2 \quad (6.3.16)$$

y tiene un valor, en nuestro caso, de

$$R = \left| \frac{\Gamma[\frac{1}{2}+i(\delta-\beta-\alpha)]\Gamma[\frac{1}{2}+i(-\delta-\beta-\alpha)]}{\Gamma[\frac{1}{2}+i(\delta-\beta+\alpha)]\Gamma[\frac{1}{2}+i(-\delta-\beta+\alpha)]} \right|^2 \quad (6.3.17)$$

ya que

$$\left| \frac{\Gamma(2i\alpha)}{\Gamma(-2i\alpha)} \right| = 1$$

En la evaluación numérica aparecen dos casos que deben distinguirse,  $\delta$  real y  $\delta$  imaginaria. Estos dos casos son separados por la condición  $\beta = \mathcal{C}$ ; como  $\beta$  es en general del orden de magnitud de  $\mathcal{E}$ , el caso  $\delta$  real

corresponde a una barrera potencial cuya región de inhomogeneidad es ancha comparada a la longitud de onda del electrón incidente, mientras que una  $\delta$  imaginaria corresponde a una región delgada de inhomogeneidad.

Si  $\delta$  es real, los argumentos de todas las funciones gamma tienen la forma  $\frac{1}{2} + iz$ , donde  $z$  es real. Como

$$\begin{aligned} |\Gamma(\mu + iz)| &= \Gamma(\mu) e^{-P(\mu, z)} \\ e^{P(\frac{1}{2}, z)} &= [\cosh(\pi z)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} R &= \frac{\cosh[\pi(\delta - \beta + \alpha)] \cosh[\pi(\delta + \beta - \alpha)]}{\cosh[\pi(\delta - \beta - \alpha)] \cosh[\pi(\delta + \beta + \alpha)]} \\ &= \frac{\cosh[2\pi(\alpha - \beta)] \cosh[2\pi\delta]}{\cosh[2\pi(\alpha + \beta)] \cosh[2\pi\delta]} \end{aligned} \quad (6.3.18)$$

Si  $\delta$  es imaginaria, ambos, el numerador y denominador de la ecuación (6.3.17) tiene la forma

$$|\Gamma(\mu + iz)\Gamma(1 - \mu - iz)|$$

con  $\mu = \frac{1}{2} + |\delta|$ . Como

$$e^{[P(\mu, z) + P(1 - \mu, z)]} = \left[ \frac{\cosh 2\pi z - \cos 2\pi \mu}{2 \sin^2 \pi \mu} \right]^{\frac{1}{2}}$$

entonces

$$R = \frac{\cosh[2\pi(\alpha - \beta)] + \cos[2\pi|\delta|]}{\cosh[2\pi(\alpha + \beta)] + \cos[2\pi|\delta|]} \quad (6.3.19)$$

Las ecuaciones (6.3.18) y (6.3.19) son idénticas si recordamos que

$$\cosh[2\pi\delta] = \cos[2\pi|\delta|]$$

cuando  $\delta$  es imaginaria; la derivación separada de los dos es necesaria, ya que  $|\Gamma(\mu + i\nu)|$  no es una función analítica.

#### 6.4 Coeficiente de Reflexión en una Barrera Potencial.

Como un segundo ejemplo de coeficiente de reflexión, tomaremos un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{-\alpha x}} \quad \text{PARA } E > 0 \quad (6.4.1)$$

que se muestra en la figura 10.

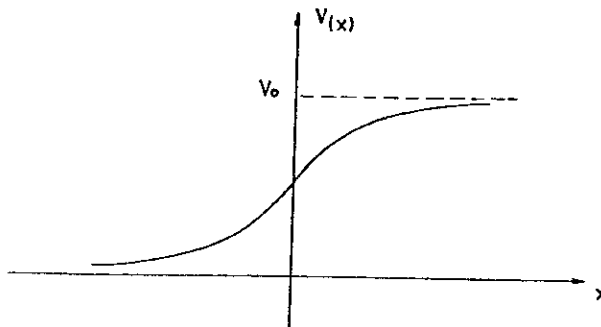


Fig. 10  $V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{-\alpha x}}$

Para este caso la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E - \frac{V_0}{1 + e^{-\alpha x}} \right) \Psi = 0 \quad (6.4.2)$$

Deseamos encontrar una solución que tenga la forma

$$\Psi = A e^{ik_2 x} \quad \text{CUANDO } x \longrightarrow \infty$$

donde

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - V_0)}$$

y  $A$  es una constante.

Introducimos una nueva variable

$$\xi = -e^{-\alpha x}$$

la cual toma valores de  $-\infty$  a  $0$ ; y proponemos una solución

$$\Psi = \xi^{-i\frac{k_2}{\alpha}} \omega(\xi), \quad (6.4.3)$$

donde  $\omega(\xi)$  debe tender a una constante cuando  $\xi \rightarrow 0$  (es decir cuando  $x \rightarrow 0$ ). Haciendo la sustitución de (6.4.3) en (6.4.2), encontramos para  $\omega(\xi)$  la ecuación hipergeométrica

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \omega}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{2ik_2}{\alpha}\right) (1-\xi) \frac{d\omega}{d\xi} + (k_2^2 - k_1^2) / \alpha^2 \omega(\xi) = 0 \quad (6.4.4)$$

donde

$$k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}$$

siendo su solución

$$\omega(\xi) = {}_2F_1\left(\frac{i(k_2 - k_1)}{\alpha}, -\frac{i(k_2 + k_1)}{\alpha}; 1 - \frac{2ik_2}{\alpha}; \xi\right) \quad (6.4.5)$$

cuando  $\xi \rightarrow 0$ , la función tiende a  $1$ , es decir cumple con la condición impuesta.

La forma asintótica de la función  $\Psi$ , cuando  $\xi \rightarrow -\infty$  (es decir cuando  $x \rightarrow -\infty$ ), la deduciremos a partir de la fórmula (6.2.4), resultando

$$\omega(\xi) = a_1 (-\xi)^{i\frac{k_2 - k_1}{\alpha}} + a_2 (-\xi)^{i\frac{k_2 + k_1}{\alpha}} \quad (6.4.6)$$

donde

$$a_1 = \frac{\Gamma\left(-\frac{zik_1}{\alpha}\right)\Gamma\left(-\frac{zik_2}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(-i\frac{(k_1+k_2)}{\alpha}\right)\Gamma\left(-i\frac{k_1+k_2}{\alpha} + 1\right)}$$

$$a_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{zik_1}{\alpha}\right)\Gamma\left(-\frac{zik_2}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(i\frac{k_1-k_2}{\alpha}\right)\Gamma\left(i\frac{k_1-k_2}{\alpha} + 1\right)} \quad (6.4.7)$$

sustituyendo estos valores en la función de onda (6.4.3) obtenemos

$$\Psi = e^{-i\frac{k_2}{\alpha}x} \left[ a_1(-E)^{i\frac{k_2-k_1}{\alpha}} + a_2(-E)^{i\frac{k_1+k_2}{\alpha}} \right]$$

$$= (-1)^{i\frac{k_2}{\alpha}} \left[ a_1 e^{ik_1x} + a_2 e^{-ik_1x} \right] \quad (6.4.8)$$

El coeficiente de reflexión

$$R = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^2$$

lo calculamos con ayuda de las fórmulas

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{Sen } \pi x}$$

obteniéndose que

$$R = \left( \frac{\text{Senh} \left[ \pi \left( \frac{k_1-k_2}{\alpha} \right) \right]}{\text{Senh} \left[ \pi \left( \frac{k_1+k_2}{\alpha} \right) \right]} \right)^2 \quad (6.4.9)$$

## 7. Aplicaciones de las funciones de Legendre

### 7.1 Carga Puntual

Supóngase un elemento de carga  $q$ , localizado en un punto  $z = \zeta$  sobre el eje  $z$  de un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo origen está en  $O$ . Se desea expresar el potencial debido a la carga  $q$  en cualquier otro punto  $P$ , en términos de las coordenadas de  $P$  con respecto al origen  $O$ . Las coordenadas cartesianas de  $P$  son  $x, y, z$ , pero como el campo es si métrico alrededor del eje  $z$ , será suficiente localizar  $P$  en términos de las coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  (fig 11).

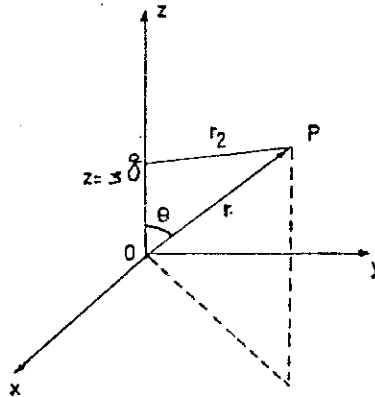


Fig. 11

La distancia de  $q$  a  $P$  es  $r_2$  y por lo tanto el potencial en  $P$  es

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_2}, \quad (7.1.1)$$

suponiendo que el medio es homogéneo e isotrópico

$$r_2 = (r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos\theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.1.2)$$

Se tienen dos casos por considerar:  $r < \xi$  y  $r > \xi$

Primeramente cuando  $r < \xi$ , escribimos (7.1.2) de la forma siguiente:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\xi} \left[ 1 + \left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 2\frac{r}{\xi} \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.1.3)$$

El miembro derecho puede desarrollarse por el teorema binomial cuando:

$$\left| \left(\frac{r}{\xi}\right)^2 - 2\frac{r}{\xi} \cos \theta \right| < 1$$

si además

$$\left| \frac{r}{\xi} \right|^2 + \left| 2\left(\frac{r}{\xi}\right) \cos \theta \right| < 1,$$

la serie que resulta es absolutamente convergente. Si los términos de la serie se ordenan en potencias crecientes de  $\frac{r}{\xi}$ , tenemos que

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\xi} \left[ 1 + \frac{r}{\xi} \cos \theta + \left(\frac{r}{\xi}\right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right] \quad (7.1.4)$$

Comparando este resultado con las ecuaciones (7.1.3), tenemos que los coeficientes de las potencias crecientes de  $\frac{r}{\xi}$  son los polinomios de Legendre y por lo tanto, (7.1.4) puede escribirse en la forma abreviada

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{\xi}\right)^n \quad (r < \xi) \quad (7.1.5)$$

Como el valor absoluto de los coeficientes  $P_n(\cos \theta)$  de  $\left(\frac{r}{\xi}\right)^n$  nunca son mayores que la unidad, entonces el desarrollo converge siempre que  $r < |\xi|$ .

Por lo tanto, el potencial es

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{\xi}\right)^n \quad (r < \xi) \quad (7.1.6)$$

Para  $r > \xi$  el correspondiente desarrollo se obtiene intercambiando

$r$  y  $\xi$  en las ecuaciones (7.1.3) y (7.1.5)

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{\xi}{r} \right)^2 - 2 \frac{\xi}{r} \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.1.7)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left( \frac{\xi}{r} \right)^n \quad (r > \xi) \quad (7.1.8)$$

Así, el potencial resulta

$$\phi(r, \theta) = \frac{\xi}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left( \frac{\xi}{r} \right)^n \quad (r > \xi). \quad (7.1.9)$$

## 7.2 Distribución de Temperaturas en un Casquete Esférico.

Considere una esfera hueca, en la cual la superficie externa  $r=r_1$  debe mantenerse a una temperatura uniforme  $t_1$  y la superficie interna  $r=r_2$  debe mantenerse en alguna distribución arbitraria de temperatura  $t=f(\theta)$  (fig 12). Se desea encontrar la temperatura estacionaria en cualquier punto entre las dos superficies que limitan el casquete esférico.

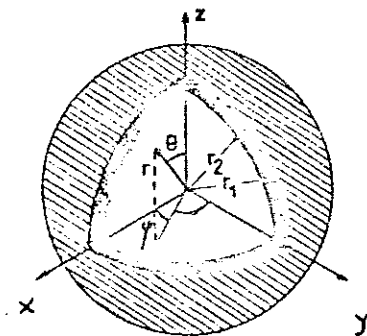


Fig. 12

Esfera hueca

Como  $\varphi$  es el ángulo entre el eje  $x$  y la proyección de  $r$  sobre el plano  $xy$ , debe notarse inmediatamente que el campo de temperaturas en este caso es independiente del ángulo  $\varphi$  y por lo tanto la diferencia de temperaturas  $T(r, \theta) = t - t_1$ , debe satisfacer la ecuación diferencial

$$r \frac{d^2}{dr^2} (rT) + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d}{d\theta} (\operatorname{sen} \theta \frac{dT}{d\theta}) = 0 \quad (7.2.1)$$

y las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} T &= 0 & \text{en} & \quad r = r_1 \\ T &= F(\theta) & \text{en} & \quad r = r_2 \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

donde  $F(\theta) = f(\theta) - t_1$ .

Aplicando el método de separación de variables,  $T = R(r)\Theta(\theta)$  en (7.2.1), resultan las ecuaciones

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\eta}{r^2} R = 0 \quad r > 0 \quad (7.2.3)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + \eta \Theta = 0 \quad (7.2.4)$$

donde  $\eta$  es la constante de separación común.

La ecuación (7.2.3) es una ecuación de Euler, cuya solución es (Ford, 1955: p. 76)

$$R = C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)} \quad (7.2.5)$$

donde  $\eta = m(m+1)$ .

La ecuación (7.2.4) puede reducirse a una forma más conocida por el cambio de variable  $\xi = \cos \theta$ . La ecuación transformada resulta ser

$$(1-\xi^2) \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + m(m+1)\Theta = 0$$

que la identificamos como la ecuación diferencial de Legendre. La solución general de esta ecuación es como sabemos

$$\Theta = P_m(\cos \theta) + Q_m(\cos \theta),$$

pero como la solución debe ser finita en el origen, deseamos el segundo término de la solución y nos quedamos solamente con los polinomios de Legendre. La solución general de la ecuación (7.2.1) es por lo tanto

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}) P_m(\cos \theta) \quad (7.2.6)$$

Aplicando las condiciones en la frontera (7.2.2), notamos primeramente que para  $r=r_3$ , los términos en  $r$  deben anularse.

Entonces

$$B_m = -A_m r_3^{2m+1}$$

y

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left( \frac{r^{2m+1} - r_3^{2m+1}}{r^{m+1}} \right) P_m(\cos \theta)$$

Ahora en  $r=r_2$  los términos en  $r$  deben ser la unidad, para que  $T$  sea solamente función de  $\theta$ , a lo largo del radio interior. Esta condición se logra fácilmente multiplicando  $f(r)$  por  $\frac{1}{f(r)} \Big|_{r=r_2}$ ; es decir

$$\left( \frac{r^{2m+1} - r_3^{2m+1}}{r^{m+1}} \right) \left( \frac{r_2^{m+1}}{r_2^{2m+1} - r_3^{2m+1}} \right),$$

Así que

$$T = \sum_{m=c}^{\infty} A_m \left( \frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}} \right) \left( \frac{r_2}{r} \right)^{m+1} P_m(\cos \theta) \quad (7.2.7)$$

la cual satisface, claramente, (7.2.2).

Si en este problema  $f(\xi)$  es alguna  $f(\cos \theta)$ , entonces la  $A_m$  debe escogerse de tal manera que satisfaga

$$F(\cos \theta) = \sum_{m=c}^{\infty} A_m P_m(\cos \theta)$$

la cual es un desarrollo de la función arbitraria  $F(\cos \theta) = f(\cos \theta) - t_1$ , como una serie de polinomios de Legendre.

El coeficiente  $A_m$  de esta serie, está dado en la ecuación (2.6.3)

como

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_m(\xi) F(\xi) d\xi \quad m=0, 1, 2, \dots$$

ó en términos de la transformación  $\xi = \cos \theta$

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_0^{\pi} P_m(\cos \theta) F(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (7.2.8)$$

De donde nuestra solución final completa es de la forma:

$$t = t_1 + \sum_{m=c}^{\infty} (m + \frac{1}{2}) \left( \frac{r_2^{2m+1} - r_1^{2m+1}}{r_1^{2m+1} - r_2^{2m+1}} \right) \left( \frac{r_2}{r} \right)^{m+1} P_m(\cos \theta) \cdot \int_0^{\pi} P_m(\cos \theta) F(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (7.2.9)$$

Ejemplo.- Calcule el campo de temperatura  $t(r, \theta)$ , en un casquete

esférico donde  $\frac{r_1}{r_2} = 2$ , teniendo una distribución de temperatura a lo largo de la superficie interna de acuerdo a  $f(\cos\theta) = 100\cos^2\theta$  °F y una temperatura uniforme sobre la superficie externa de  $t_2 = 0$  °F.

Solución.- La integral en la solución (7.2.9) en términos de está dado por:

$$I = 100 \int_0^\pi P_m(\cos\theta) \cos^2\theta \sin\theta d\theta = 100 \int_{-1}^{+1} P_m(\xi) \xi^2 d\xi.$$

En la sección 2.2, vimos que este tipo de integrales tienen como solución

$$I = \frac{(-1)^m 100}{2^m m!} \int_{-1}^{+1} (\xi^2 - 1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} \xi^2 d\xi.$$

Para  $m=0$

$$I_0 = 100 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi = \frac{200}{3}$$

Para  $m=1$

$$I_1 = -\frac{100}{2} \int_{-1}^{+1} 2(\xi^2 - 1)\xi d\xi = 0$$

Para  $m=2$

$$I_2 = \frac{100}{4 \times 2!} \int_{-1}^{+1} 2(\xi^2 - 1)^2 d\xi = \frac{400}{15}$$

Para valores mayores que  $m=2$ , las integrales se anulan.

Por lo tanto tenemos como solución

$$t = \frac{400}{3} \left(1 - \frac{r}{r_2}\right) \left(\frac{r_2}{r}\right) + \frac{400}{93} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^5\right] \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 (3\cos^2\theta - 1). \quad (7.2.10)$$

La ilustración del campo de temperatura para este ejemplo está dado en la figura 13.

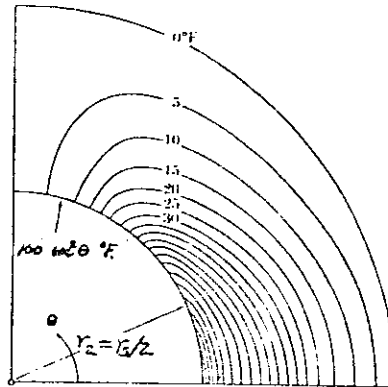


Fig. 13

Campo de temperaturas en un casquete esférico.

### 7.3 Esfera Conductora en el Campo de una Carga Puntual.

Sea una esfera conductora de radio  $r_1$ , cuyo centro está localizado en el origen de un sistema de coordenadas. La esfera está sumergida en un dieléctrico homogéneo e isotrópico, de constante dieléctrica  $\epsilon_2$ . En  $z = \zeta > 1$  está localizada una carga puntual  $q$ . (fig. 14). Deseamos encontrar el potencial y la distribución de carga sobre la esfera. El potencial en cualquier punto fuera de la esfera, es la combinación del potencial  $\phi_0$  debido a la carga  $q$  y el potencial  $\phi_1$ , debido a la carga inducida sobre la esfera, esto es:  $\phi = \phi_0 + \phi_1$ .

El potencial inducido  $\phi_1$ , debe cumplir con la ecuación de Laplace, la cual, en coordenadas esféricas, está dada por:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (7.3.1)$$

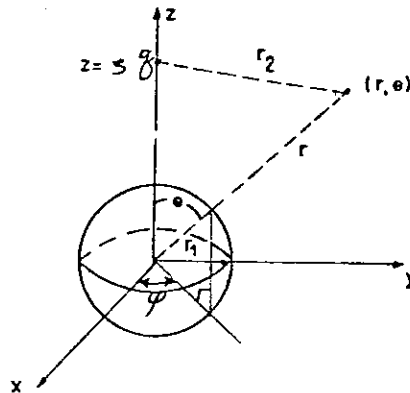


Fig. 14  
Esfera en el campo de una  
carga puntual localizada  
en  $z = s$ .

En este caso, como tenemos simetría alrededor del eje  $z$ , la ecuación (7.3.1) se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \operatorname{sen} \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (7.3.2)$$

La solución de esta ecuación es, como vimos en el ejemplo anterior, sección 7.2, ecuación (7.2.6),

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta); \quad (7.3.3)$$

pero como  $\phi_1$ , debe tener un valor regular al infinito, es necesario que  $a_n = 0$ , entonces el potencial debido a la carga inducida sobre la esfera, está dado por

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (7.3.4)$$

En la sección 7.1, se encontró que para  $r < \xi$ , el desarrollo del potencial  $\phi_0$  en coordenadas esféricas, está dado por

$$\phi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left(\frac{r}{\xi}\right)^n \quad (7.3.5)$$

Por lo tanto, el potencial sobre la superficie de la esfera  $r=r_1$ , es

$$\phi(r_1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\xi} \left(\frac{r_1}{\xi}\right)^n + \frac{b_n}{r_1^{n+1}} \right] P_n(\cos\theta) = \phi_s \quad (7.3.6)$$

Ahora  $\phi_s$  es una constante y como (7.3.6) debe cumplirse para todo valor de  $\theta$ , se sigue que los coeficientes de  $P_n(\cos\theta)$  deben anularse para todo valor de  $n$  mayor que cero. Los coeficientes  $b_n$ , se determinarán así del conjunto de relaciones

$$b_0 = r_1 \phi_s - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{r_1}{\xi}, \quad b_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{r_1^{2n+1}}{\xi^{n+1}} \quad (n > 0) \quad (7.3.7)$$

Para cualquier punto fuera de la esfera

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} + \frac{r_1 \phi_s}{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1}}{\xi^{n+1}} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} \quad (7.3.8)$$

Para determinar la densidad de carga, calculamos la derivada normal sobre la superficie

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{r_1^{n-1}}{\xi^{n+1}} P_n(\cos\theta) - \frac{\phi_s}{r_1}, \quad (7.3.9)$$

de donde la densidad de carga inducida resulta

$$\omega = -\epsilon_2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=r_1} = -\frac{q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{r_1^{n-1}}{\xi^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \frac{\epsilon_2 \phi_s}{r_1} \quad (7.3.10)$$

La carga total sobre la esfera es

$$q_1 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \omega r_1^2 \sin \theta d\theta d\phi = r_1^2 \int_0^{\pi} \omega 2\pi \sin \theta d\theta$$

Ahora, en la expresión para la ortogonalidad de las funciones de Legendre

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

tomamos  $m=0$ ,  $P_0(\cos \theta) = 1$ , resulta que

$$q_1 = -q \frac{r_1}{\xi} + 4\pi \epsilon_2 r_1 \phi_5 \quad (7.3.11)$$

El potencial sobre la esfera, es por lo tanto

$$\phi_5 = \frac{1}{4\pi \epsilon_2} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi \epsilon_2} \frac{q}{\xi}, \quad (7.3.12)$$

$q_1$  representa un exceso de carga que ha sido colocada sobre la esfera aislada. Si la esfera está a tierra,  $\phi_5$  es igual a cero.

## 8. Aplicaciones de las funciones de Bessel.

### 8.1 Solución de la Ecuación de Ondas en Coordenadas Cilíndricas.

En este problema nos interesa encontrar la solución de la ecuación de ondas en coordenadas cilíndricas para un potencial eléctrico escalar  $V$ .

La ecuación de ondas es de la forma

$$\nabla^2 V(r,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2} = 0,$$

que en condiciones estáticas se reduce a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 V = 0$ .

Si suponemos una variación armónica en el tiempo, es decir

$$V(r, t) = V(r) e^{i\omega t},$$

la ecuación se transforma en

$$\nabla^2 V + \beta^2 V = 0 \quad (8.1.1)$$

donde

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\omega = 2\pi f \quad (f = \text{frecuencia})$$

$$c^2 = (\mu \epsilon)^{-1}$$

$\mu$  = permeabilidad magnética del medio

$\epsilon$  = constante dieléctrica

Desarrollando la ecuación de onda (8.1.1) en coordenadas cilíndricas,

tenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\beta^2 V \quad (8.1.2)$$

Usando el método de separación de variables  $V = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ , la ecuación resulta

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \beta^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (8.1.3)$$

El término de la derecha de la igualdad depende únicamente de  $z$ , por lo tanto, se sigue que ambos miembros son constantes, de lo que resultan las dos ecuaciones

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - m^2 Z = 0 \quad (8.1.4)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + r^2(m^2 + \beta^2) = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (8.1.5)$$

donde  $-m^2$  es la constante de separación. Nuevamente en la ecuación (8.1.5), el término de la derecha de la igualdad depende únicamente de  $\varphi$ , mientras el término de la izquierda depende de  $r$ ; por lo tanto, aplicando el mismo argumento anterior, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (8.1.6)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + [(m^2 + \beta^2)r^2 - n^2]R = 0 \quad (8.1.7)$$

donde  $n^2$  es la constante de separación.

Nos resta determinar las soluciones de las ecuaciones diferenciales totales (8.1.4), (8.1.6) y (8.1.7).

La solución de la ecuación (8.1.4) es:

$$Z = c_1 e^{mz} + c_2 e^{-mz} \quad (8.1.8)$$

podemos también ver fácilmente, que la solución de la ecuación (8.1.6) es

$$\Phi = c_3 \cos n\varphi + c_4 \sin n\varphi. \quad (8.1.9)$$

La ecuación (8.1.7) es una forma de la ecuación de Bessel, ya que si hacemos el cambio

$$k^2 = (m^2 + \beta^2) \quad \text{y} \quad \mu = kr \quad (8.1.10)$$

ésta se vuelve

$$\mu^2 \frac{d^2 R}{d\mu^2} + \mu \frac{dR}{d\mu} + (\mu^2 - n^2)R = 0 \quad (8.1.11)$$

que la reconocemos más fácilmente como la ecuación de Bessel, siendo su solución

$$R = C_5 J_n(kr) + C_6 Y_n(kr). \quad (8.1.12)$$

Se sigue que la solución general de la ecuación de ondas (8.1.2) es

$$V = (C_1 e^{mz} + C_2 e^{-mz})(C_3 \cos ny + C_4 \sin ny)[C_5 J_n(kr) + C_6 Y_n(kr)] \quad (8.1.13)$$

Las constantes  $C_1, C_2, C_3$ , etc., así como los valores de  $m$  y  $n$  se determinan para cada problema específico por las condiciones iniciales y por las condiciones en la frontera.

## 8.2 Vibraciones de la Membrana Circular.

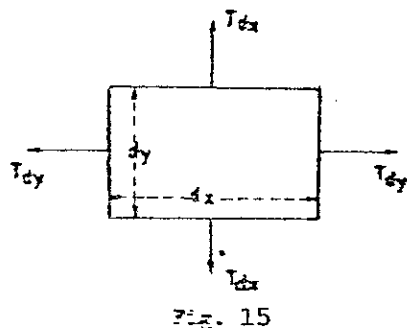
Una de las aplicaciones simples de las funciones Bessel, aparece en la teoría de las vibraciones transversales de una membrana plana circular. Por el término membrana entendemos una lámina delgada perfectamente flexible, de densidad uniforme y supondremos que se mantiene en un estado de tensión uniforme mediante una fuerza conveniente aplicada en su frontera. Cuando la membrana se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se suelta, ésta ejecuta pequeñas oscilaciones. Nuestro propósito es estudiar la naturaleza de estas oscilaciones bajo ciertas suposiciones, con el fin de simplificar el análisis.

Se estudiarán solamente vibraciones transversales y supondremos que la tensión permanece inalterada durante el movimiento; además si  $z=0$  representa el plano que contiene a la membrana en su posición de equilibrio y si

$$z = \varphi(x, y, t)$$

define la forma de la membrana en cualquier instante, supondremos que  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  son tan pequeñas que sus cuadrados pueden despreciarse.

Considérese una sección elemental rectangular de la membrana (fig 15)



Las fuerzas se deben a la tensión uniforme  $T$  (por unidad de longitud) en la posición de reposo. Si la sección elemental se desplaza en la dirección  $z$ , perpendicular al plano  $xy$ , se producirá una fuerza de restitución debida a la componente  $z$  de la tensión en la membrana.

En el punto  $x + dx$  la componente de esta fuerza es

$$T \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x+dx} dy,$$

y sobre el punto  $x$  es

$$-T \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_x dy.$$

La suma de estas fuerzas es:

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$$

En forma análoga, la fuerza de restitución en la dirección  $y$  es:

$$T \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy$$

La fuerza de restitución total es, por lo tanto

$$T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Iguálándolo al producto de su masa por su aceleración, se obtiene como ecuación de movimiento

$$T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy = \sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dx dy$$

donde  $\sigma$  denota la masa de la membrana por unidad de área. Dividiendo entre  $T dx dy$ , resulta finalmente la ecuación de ondas bidimensional:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (8.2.1)$$

donde

$$c^2 = \frac{T}{\sigma}. \quad (8.2.2)$$

Cambiando de coordenadas rectangulares a coordenadas polares la ecuación (8.2.1) se transforma en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) \quad (8.2.3)$$

Ahora suponemos que la membrana es circular y está acotada por el círculo de radio  $r=a$ ; debemos encontrar una solución de (8.2.3) tal que satisfaga las condiciones iniciales

$$z \Big|_{t=0} = f(r, \theta) \quad (8.2.4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi(r, \theta)$$

y que en  $r=a$ ,  $z=0$  para todo valor de  $t$ .

Resolveremos la ecuación por el método de separación de variables; es decir, suponemos que  $z=R(r)\Theta(\theta)T(t)$ , con lo cual resultan las ecuaciones

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (8.2.5)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0 \quad (8.2.6)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (8.2.7)$$

donde  $-\frac{\omega^2}{c^2}$  y  $n^2$  son las constantes de separación y  $k = \frac{\omega}{c}$ ; las soluciones son respectivamente:

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (8.2.8)$$

$$\Theta = C \cos n\theta + D \sin n\theta \quad (8.2.9)$$

$$R = E J_n(kr) + F Y_n(kr) \quad (8.2.10)$$

La solución debe ser uniforme y finita en el origen, esto hace que  $n$  sea entero y  $F=0$ .

Por la condición en la frontera se tiene

$$J_n(ka) = 0 \quad (8.2.11)$$

Esta ecuación tiene un número infinito de raíces reales  $k_1, k_2, k_3$ , etc. Asignando a  $n$  los valores  $0, 1, 2, \dots$  tenemos para cada  $n$  las cantidades asociadas  $k_1^{(n)}, \dots, k_s^{(n)}, \dots$ . Las primeras cuatro raíces de las

primeras cinco funciones de Bessel aparecen en la tabla 8.2.1. De las condiciones anteriores determinamos la solución

$$\begin{aligned} Z = \sum_{n,s} & (A_{n,s} \cos n\theta \cos k_s^{(n)} r + B_{n,s} \sin n\theta \cos k_s^{(n)} r + \\ & + C_{n,s} \cos n\theta \sin k_s^{(n)} r + D_{n,s} \sin n\theta \sin k_s^{(n)} r) J_n(k_s^{(n)} r) \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

donde  $A_{n,s}$ ,  $B_{n,s}$ ,  $C_{n,s}$ ,  $D_{n,s}$  son constantes arbitrarias.

Tabla 8.2.1.

	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4
n = 0	2.404	5.520	8.654	11.792
n = 1	3.832	7.016	10.173	13.323
n = 2	5.135	8.417	11.620	14.796
n = 3	6.379	9.760	13.017	16.224
n = 4	7.586	11.064	14.373	17.616

De la condición inicial  $Z|_{t=c} = f(r, \theta)$ , resulta

$$f(r, \theta) = \sum (A_{n,s} \cos n\theta + B_{n,s} \sin n\theta) J_n(k_s^{(n)} r) \quad (8.2.13)$$

Esto es un desarrollo de Fourier-Bessel (Gray, Mathews y Mac Roberts, 1952: p. 91). Se puede demostrar que los coeficientes están dados por

$$A_{n,s} = \frac{2}{\pi a^2 J_n'^2(k_s a)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r, \theta) \cos n\theta J_n(k_s r) r dr \quad (8.2.14)$$

$$B_{n,s} = \frac{2}{\pi a^2 J_n'^2(k_s a)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r, \theta) \sin n\theta J_n(k_s r) r dr$$

donde hemos escrito por simplicidad  $k_s$  en vez de  $k_s^{(n)}$ .

Como  $J_n(k_s a) = 0$ , se sigue de (3.2.3) que

$$J_n'(k_s a) = J_{n-1}(k_s a)$$

Por lo tanto podemos sustituir  $J_{n-1}^2(k_s a)$  en vez de  $J_n'^2(k_s a)$ , en las expresiones para  $A_{n,s}$  y  $B_{n,s}$ .

Si la condición inicial sobre  $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$  es  $\phi(r, \theta) \equiv 0$ , todos los coeficientes  $C_{n,s}$  y  $D_{n,s}$  son cero. Sin embargo, si suponemos para mayor generalidad que la membrana está inicialmente en movimiento, resulta

$$\phi(r, \theta) = \sum k_s^{(n)} c (C_{n,s} \cos n\theta + D_{n,s} \sin n\theta) J_n(k_s^{(n)} r), \quad (8.2.15)$$

que permite obtener los coeficientes  $C_{n,s}$  y  $D_{n,s}$ .

Ahora estudiaremos un caso particular de vibración en la que las condiciones iniciales son

$$\begin{aligned} z &= A J_n(kr) \cos n\theta \\ \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

Este tipo de oscilaciones tienen como solución

$$z = A_{n,s} J_n(k_s r) \cos n\theta \cos k_s a t \quad (8.2.17)$$

donde  $k_s$  es la  $s$ -ésima raíz de  $J_n(k_s a) = 0$ . Estas oscilaciones reciben el nombre de oscilaciones normales.

Cada elemento de la membrana ejecuta una oscilación armónica simple de período

$$\frac{2\pi}{k_s c} = \frac{2\pi}{k_s} \sqrt{\frac{\sigma}{T}} \quad (8.2.18)$$

y de amplitud

$$J_n(k_s r) \cos n\theta. \quad (8.2.19)$$

La amplitud se anula si

$$J_n(k_s r) = 0 \quad \text{o} \quad \text{si} \quad \cos n\theta = 0 \quad (8.2.20)$$

La primera de estas ecuaciones se satisface no solamente cuando  $r = a$  (en la frontera) sino también para

$$r = \frac{k_1}{k_s} a, \quad r = \frac{k_2}{k_s} a, \dots, \quad r = \frac{k_{s-1}}{k_s} a; \quad (8.2.21)$$

consecuentemente existe un conjunto de  $(s-1)$  círculos nodales, concéntricos con la frontera.

La segunda de las ecuaciones (8.2.20) se satisface cuando

$$\theta = \frac{\pi}{2n}, \quad \theta = \frac{3\pi}{2n}, \dots, \quad \theta = \frac{(4n-1)\pi}{2n}; \quad (8.2.22)$$

por lo tanto hay un conjunto de  $n$  diámetros nodales dividiendo a la membrana en  $2n$  regiones iguales, cada uno de los cuales vibra en la misma forma. Se observará sin embargo, que en cualquier instante particular dos regiones contiguas están en fase opuesta.

Si  $\mu_s = k_s a$  representa la  $s$ -ésima raíz de  $J_n(x) = 0$ , el período puede escribirse en la forma

$$\frac{2\pi a}{\mu_s} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{2}{\mu_s} \sqrt{\frac{\pi M}{T}} \quad (8.2.23)$$

donde  $M$  es la masa total de la membrana. Esto muestra muy claramente como el período crece al aumentar la masa de la membrana, o al disminuir la tensión a la cual está sujeta.

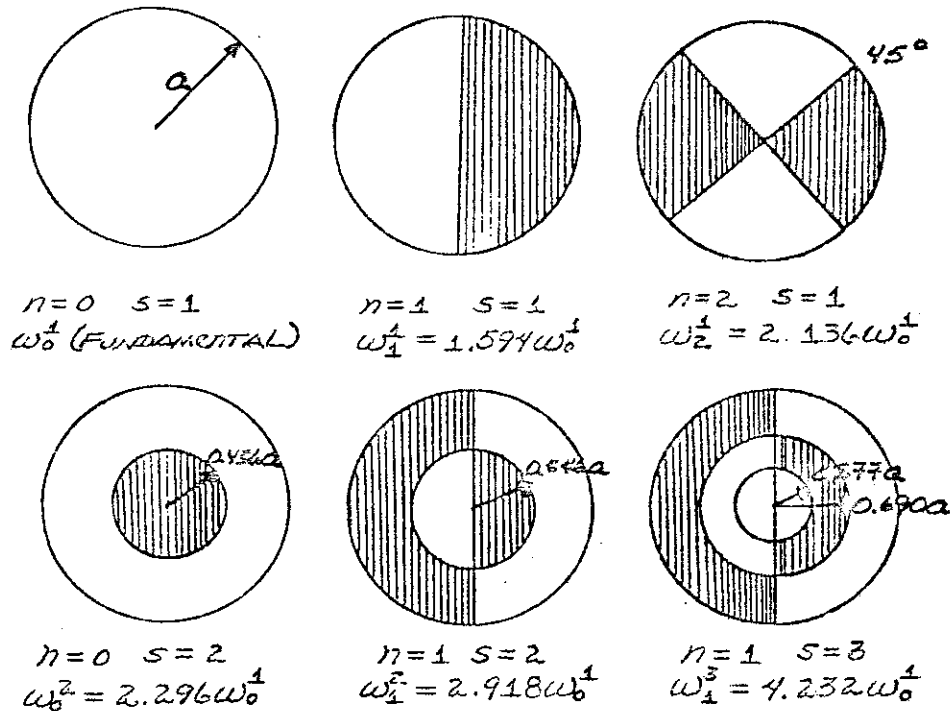


Fig. 16 Nodos (líneas nodales) de una membrana circular y sus frecuencias en términos de la frecuencia fundamental. Los segmentos sombreados están en fase opuesta a los no sombreados.

### 8.3 Ondas en el Agua.

Cuando se lanza una piedra dentro del agua, las ondas que se producen forman una serie de crestas y depresiones circulares concéntricas, en las cuales ni sus amplitudes ni las distancias entre las crestas se mantienen constantes. Lo que se observa es un rápido decrecimiento de la amplitud y un incremento de las distancias entre dos crestas contiguas.

Para analizar este problema, se reemplazará la piedra que golpea a la superficie del agua por un disturbio regular: en  $r=0$  un pistón cilíndrico de radio  $r_0$  se sumerge una distancia  $l$  y se retira súbitamente en el

instante  $t = 0$ .

Suponemos que las ondas son periódicas, de modo que, la dependencia en el tiempo se expresa en la forma  $e^{-i\omega t}$ . Además, el movimiento de la onda se describe con respecto a la superficie de equilibrio.

Introduciendo coordenadas cilíndricas  $r, \varphi, z$  ( $z$  positivo hacia abajo), el potencial  $\Phi$  cumple con la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8.3.1)$$

Si suponemos simetría circular,  $\Phi$  no depende de  $\varphi$  y se puede suponer que

$$\Phi = A f(r) e^{-kz} e^{-i\omega t} \quad (8.3.2)$$

donde  $k$  es el número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (8.3.3)$$

$\lambda$  es la longitud de onda y  $T$  el período.

Sustituyendo (8.3.2) en (8.3.1), obtenemos para  $f(r)$  la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + f = 0 \quad (8.3.4)$$

Si hacemos el cambio de variable  $kr = \rho$ , la ecuación se transforma en

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + f = 0 \quad (8.3.4a)$$

que la identificamos como la ecuación diferencial de Bessel de orden cero.

Como la solución que es regular en  $\rho = 0$  ( $r = 0$ ), es la función de Bessel  $J_0(\rho)$ , tenemos

$$f(r) = J_0(kr) \quad (8.3.5)$$

Sustituyendo (8.3.5) en (8.3.2), obtenemos como función potencial

$$\Phi = A J_0(kr) e^{-kz} e^{-i\omega t} \quad (8.3.6)$$

Esta fórmula satisface la condición de que  $\Phi \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . La representación (8.3.6) contiene tres parámetros  $A$ ,  $\omega$ ,  $k$ , donde  $A$  determina la amplitud de la onda para  $z = 0$ ; tanto  $A$  como la frecuencia  $\omega$  dependen de la forma particular de la excitación. Estas dos cantidades pueden escogerse libremente en tanto que el número de onda  $k$  debe de terminarse por su relación a  $\omega$ ; de acuerdo con (8.3.3)

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = v \quad (8.3.7)$$

que es la velocidad de propagación de la onda.

Para la determinación de  $k$ , usaremos la condición para la superficie libre.

$$p = 0 \quad (8.3.8)$$

o sea que la presión atmosférica se toma como cero. La presión  $p$  y el potencial  $\Phi$  (potencial velocidad) están relacionados por la ecuación de Euler, la cual usaremos en la forma integrada de la ecuación de Bernoulli, (Sommerfeld, 1971: p. 170) correspondiente a este problema particular

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{U}{\rho} \quad (8.3.9)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $U$  representa al potencial gravitatorio por unidad de volumen, tomado en la superficie. Como  $z$  se toma positivo hacia abajo, tenemos en general que

$$U = -\rho g \xi. \quad (8.3.10)$$

Sea  $\xi = \eta$  la ecuación de la onda, donde  $\eta$  es función de  $r$  y  $t$  ( $\eta$  positivo significa una depresión, una  $\eta$  negativa significa elevación de la superficie).

De (8.3.9) y (8.3.10) tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta. \quad (8.3.11)$$

De acuerdo con la ecuación (8.3.6), la forma de  $\eta$  debe ser:

$$\eta = a J_0(kr) e^{-i\omega t}. \quad (8.3.12)$$

La constante  $a$  es en general compleja, ya que incluye amplitud y fase.

Si se suponen desplazamientos pequeños, tanto  $a$  como  $A$  son de magnitud pequeña. Si sustituimos (8.3.6) y (8.3.12) en (8.3.11) se tiene

$$i\omega A e^{-kr} = g a. \quad (8.3.13)$$

Desarrollando  $e^{-kr}$  en potencias de  $kr$  y despreciando productos  $A\eta$ ,  $A\eta^2$ , etc., la ecuación (8.3.13) se simplifica a

$$i\omega A = g a \quad (8.3.14)$$

Esta es una relación entre  $A$  y  $a$ , pero no es la relación requerida entre  $k$  y  $\omega$ . Esta última se obtiene introduciendo una condición cinemática. Estipulamos que la velocidad de un punto dado de la superficie debe, para todo tiempo, ser igual al de las partículas de fluido que llegan a ese punto. Las dos componentes de los dos movimientos, tomados en la dirección normal  $n$  de la superficie, deberán ser iguales ya que un movimiento de la partícula en el plano tangencial, no cambia la fase de la superficie. Si denotamos la velocidad superficial por  $V$  y la velocidad

de la partícula por  $v$ , la condición es:

$$V_n = v_n \quad (8.3.15)$$

La componente  $v_n$ , expresado en función de  $\Phi$  es:

$$v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{n}}$$

Si  $A$  es suficientemente pequeño, se pueden hacer las aproximaciones

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{n}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} \quad (8.3.16)$$

y

$$V_n \text{ por } \frac{\partial n}{\partial t} \quad (8.3.17)$$

entonces, (8.3.15) se transforma en

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{z}} \quad (8.3.18)$$

Sustituyendo  $n$  y  $\Phi$ , de las ecuaciones (8.3.12) y (8.3.6), obtenemos

$$-i\omega a = ka \quad (8.3.19)$$

Ahora, comparando (8.3.14) y (8.3.19), obtenemos la relación

$$\frac{A}{a} = \frac{q}{i\omega} = -\frac{i\omega}{R} = \frac{\omega}{ik} \quad (8.3.20)$$

Se concluye de (8.3.20) que:

a) Hay una diferencia de fase de  $\frac{\pi}{2}$  entre la onda  $a$  y la onda  $A$ .

Si  $A$  se escoge como una cantidad real, lo cual es permisible,  $a$  es puramente imaginario. Tomando la parte real de  $\Phi$  obtenemos

$$\Phi = A \cos \omega t J_0(kr) e^{-kz} \quad (8.3.21)$$

y la ecuación (8.3.12) se reduce, debido a (8.3.20), a

$$\eta = -\frac{\omega}{g} A J_0(kr) \text{Sen } \omega t$$

$$\eta = -\frac{k}{\omega} A J_0(kr) \text{Sen } \omega t \quad (8.3.22)$$

b) La relación entre  $k$  y  $\omega$  es, por (8.3.20)

$$\omega^2 = gk \quad (8.3.23)$$

Introduciendo la velocidad de propagación, obtenemos

$$V^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}, \quad V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (8.3.24)$$

La velocidad de propagación depende de la longitud de onda. Las expresiones finales para  $\eta$  y  $\Phi$ , son así

$$\eta = a J_0(kr) e^{-i\omega t} \quad (8.3.25)$$

$$\Phi = \frac{ag}{i\omega} J_0(kr) e^{-kr - i\omega t} \quad (8.3.26)$$

donde  $\omega = \sqrt{gk}$ .

Las condiciones iniciales sobre la frontera son:

$$\eta = \begin{cases} l & \text{para } 0 < r < r_0 \\ 0 & \text{para } r_0 < r < \infty. \end{cases} \quad (8.3.27)$$

Aplicando la Integral de Fourier-Bessel (ecuación 8.2.1), ésta se puede expresar en la forma

$$\eta_{t=0} = l \int_0^\infty k dk J_0(kr) \int_0^{r_0} \xi d\xi J_0(k\xi). \quad (8.3.28)$$

Para evaluar la integral sobre  $\xi$ , usamos la relación (3.6.2)

$$\int_0^{r_0} J_0(k\xi) d\xi = \frac{r_0}{k} J_1(kr_0),$$

sustituyendo este valor en (8.3.28), tenemos

$$n_{t=0} = kr_0 \int_0^{\infty} J_0(kr) J_1(kr_0) dk. \quad (8.3.29)$$

Los valores de  $n$  y  $\Phi$ , para cualquier instante  $t > 0$  son respectivamente

$$n = kr_0 \int_0^{\infty} J_0(kr) J_1(kr_0) e^{-i\sqrt{gk^3}t} dk$$

$$\Phi = -z \ell g r_0 \int_0^{\infty} J_0(kr) J_1(kr_0) \frac{e^{-kz - i\sqrt{gk^3}t}}{\sqrt{gk^3}} dk.$$

El cálculo de estas integrales, aunque directo, no lo incluiremos aquí por ser demasiado largo. (Sommerfeld, 1971: p. 195).

#### 8.4 Un Pozo de Potencial Cuadrado Tridimensional.

Supóngase un pozo de potencial cuadrado de profundidad finita en el cual el potencial es

$$\begin{aligned} V(r) &= +V_0 & (r > a) \\ V(r) &= 0 & (r < a) \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

Deseamos encontrar los niveles energéticos que corresponden a un determinado momento angular  $\ell$ , los cuales se obtienen resolviendo la ecuación radial que resulta de separar la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas. La ecuación radial que resulta por este método es:

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] (rR). \quad (8.4.2)$$

Momento Angular Cero.- Si  $\ell=0$ , el problema es idéntico al problema unidimensional. Dentro del pozo, la ecuación radial es

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_1) = -\frac{2mE}{\hbar^2}(rR_1) = -k^2(rR_1) \quad (8.4.3)$$

cuya solución es

$$rR_1(r) = A \cos kr + B \sin kr$$

o sea

$$R_1(r) = \frac{A \cos kr}{r} + \frac{B \sin kr}{r}$$

Escribimos  $R_1(r)$  en esta forma en vez de la forma exponencial, porque debe ser finita en  $r=0$ , y podemos asegurar esto al hacer  $A=0$ . Por tanto

$$R_1(r) = \frac{B \sin kr}{r} \quad (r < a) \quad (8.4.4)$$

Fuera del pozo, la ecuación radial es

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR_2) = -\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}(rR_2)$$

Para un estado ligado ( $E-V_0$ ) es negativa, así que la solución debe ser una exponencial que decae, por tanto

$$\begin{aligned} rR_2 &= C e^{-\alpha r} \quad (r > a) \\ R_2(r) &= \frac{C e^{-\alpha r}}{r} \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

con  $\alpha$  definida como  $(2m(V_0-E)/\hbar^2)^{1/2}$ .

Las condiciones de continuidad de la función y su derivada en  $r=a$ ,

requieren que

$$R_1(a) = R_2(a) \quad \text{y} \quad \left. \frac{dR_1(r)}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{dR_2(r)}{dr} \right|_{r=a} \quad (8.4.6)$$

6

$$\frac{B \operatorname{Sen} ka}{a} = \frac{C e^{-\alpha a}}{a} \quad \text{y} \quad -\frac{B \operatorname{Sen} ka}{a^2} + \frac{B k \operatorname{Cos} ka}{a} = -\frac{C e^{-\alpha a}}{a^2} - \frac{\alpha C e^{-\alpha a}}{a}$$

las cuales conducen a

$$k \cot ka = -\alpha \quad (8.4.7)$$

Niveles Energéticos.- Los niveles energéticos se determinan a partir de la ecuación (8.4.7) por métodos numéricos o gráficos. Daremos aquí un método gráfico. Hacemos los cambios de variable  $\xi = ka$ ,  $\eta = \alpha a$  con lo que (8.4.7) se transforma en

$$\xi \cot \xi = -\eta \quad (8.4.8)$$

con

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad (8.4.9)$$

Graficando  $\xi$  contra  $\eta$  y tomando la intersección de las curvas (8.4.8) y (8.4.9) para una  $V_0 a^2$  dada, encontramos los niveles energéticos deseados; como  $\xi$  y  $\eta$  están restringidos a valores positivos, solamente se necesita estudiar las curvas en el primer cuadrante (fig. 17). Es claro que dada una partícula, los niveles energéticos dependen de los parámetros de la energía potencial a través de la combinación  $V_0 a^2$ . Se encuentra que no hay nivel energético a menos que  $V_0 a^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8m}$ ; y que hay un estado ligado si  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} < V_0 a^2 \leq \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8m}$  dos si  $\frac{9\pi^2 \hbar^2}{8m} < V_0 a^2 \leq \frac{25\pi^2 \hbar^2}{8m}$  y así sucesivamente.

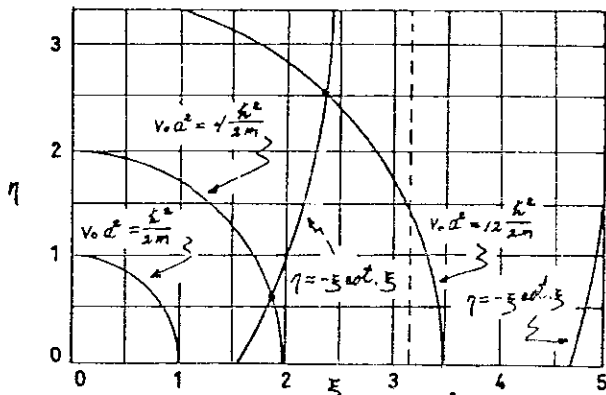


Fig. 17 Solución gráfica de la ecuación 8.4.8 para tres valores de  $V_0 a^2$ . La línea vertical punteada es la primera asíntota de  $\eta = -5 \cos \xi$ .

Solución con  $\ell$  arbitraria dentro del pozo.- Para valores de  $\ell$  diferentes de cero, partiremos de la ecuación radial original (8.4.2). Si hacemos el cambio de variable  $p = kr$ , donde  $k$  está definida por la ecuación (8.4.3), la ecuación para  $r < a$ , toma la forma

$$\frac{d^2 R_1}{dp^2} + \frac{2}{p} \frac{dR_1}{dp} + \left[ 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{p^2} \right] R_1 = 0 \tag{8.4.10}$$

que es la ecuación esférica de Bessel y su solución es

$$R_1 = A j_\ell(p) + B n_\ell(p). \tag{8.4.11}$$

Como la solución debe ser regular en  $p = 0$ , debe tenerse  $B = 0$ , ya que, como sabemos,  $n_\ell(p)$  es irregular en  $p = 0$ , entonces

$$R_1 = A j_\ell(kr). \tag{8.4.12}$$

Solución con  $\ell$  arbitraria fuera del pozo.- La ecuación de ondas para  $r > a$  toma la forma (8.4.10) si hacemos el cambio de variable  $p = i\alpha r$ , donde  $\alpha$  está definida por (8.4.5). En este caso, el dominio de defini-

ción, no se extiende hasta el origen, por lo tanto no hay razón de porque no aparezca  $n_\ell(\rho)$  en nuestra solución. La combinación lineal de  $j_\ell(\rho)$  y de  $n_\ell(\rho)$  se determinará por su forma asintótica, la cual debe decaer exponencialmente para valores grandes de  $\rho$ . Si vemos los desarrollos asintóticos de las funciones esféricas de Hankel (8.3.8), podemos concluir que la solución deseada es la función esférica de Hankel de primera clase, ya que esta da, para grandes valores de  $\rho$ , una exponencial real decreciente. Tenemos por lo tanto que la solución para  $r > a$  es:

$$R_\ell = B h_\ell^{(1)}(i\alpha r) = B [j_\ell(i\alpha r) + i n_\ell(i\alpha r)] \quad (8.4.13)$$

Niveles Energéticos.- Los niveles energéticos se obtienen aplicando las condiciones en la frontera (8.4.6) para las funciones  $R(\rho)$ ; es decir, que las funciones sean uniformes y continuas en  $r=a$ . Con ayuda de las fórmulas (8.3.4) y (8.3.7) con  $\ell=0$ , obtenemos la condición (8.4.7) Para  $\ell=1$ , nuevamente con la ayuda de las fórmulas anteriores y haciendo también las sustituciones  $\xi=ka$ ,  $\eta=\alpha a$ , obtenemos las condiciones

$$\frac{\alpha t \xi}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta^2}; \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad (8.4.14)$$

Las ecuaciones (8.4.14) pueden resolverse gráficamente por los métodos indicados para  $\ell=0$ . En general se encuentra que no hay degeneración entre los eigenvalores obtenidos de las soluciones de las ecuaciones (8.4.8) y (8.4.14) para varios valores de  $\ell$ .

El valor más pequeño de  $V_0 a^2$  para que exista un estado ligado con  $\ell=1$ , es mayor que el correspondiente valor de  $V_0 a^2$  para  $\ell=0$ . Esto es razonable desde un punto de vista físico, ya que la interpretación del término  $\ell$  en la ecuación de ondas radial como una energía potencial, sugiere que

una partícula que posee momento angular, requiera de un potencial atractivo más fuerte del que necesita una partícula que no tiene momento angular. Por lo tanto, la mínima fuerza de pozo potencial cuadrado  $V_0 a^2$  requerida para ligar una partícula de momento angular orbital  $\ell$ , crece monótonamente con  $\ell$ .

### 8.5 Conducción de Calor sobre Superficies Aumentadas.

Con el propósito de facilitar la transferencia de calor entre una superficie y un fluido que lo rodea, se acostumbra aumentar el área de ésta, por medio de salientes; a las superficies así modificadas las llamaremos superficies aumentadas.

Considérese una saliente recta de perfil triangular de área  $A = \delta \omega$  (fig. 18) y de conductividad térmica uniforme  $k$ . Suponemos que tanto el coeficiente de conductividad  $h$ , como la temperatura  $t_g$  del gas ambiente que rodea a esta saliente, son uniformes. Representaremos por  $T$  a la di-

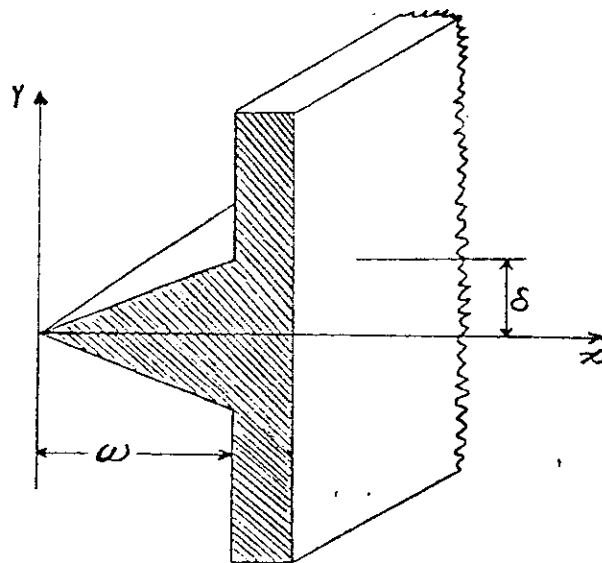


Fig. 18

ferencia de la distribución de temperatura  $t(x)$  y de la temperatura  $t_g$ , es decir

$$T = t - t_g \quad (8.5.1)$$

Se puede demostrar que  $T$  debe satisfacer la ecuación (Schneider, 1957: p. 75)

$$x \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{dT}{dx} - N^2 \omega T = 0 \quad (8.5.2)$$

donde

$$N^2 = \frac{h}{\delta k} \quad (8.5.3)$$

Si hacemos el cambio de variable

$$\mu = \alpha \sqrt{x} \quad (8.5.4)$$

con

$$\alpha = 2N\sqrt{\omega} \quad (8.5.5)$$

la ecuación (8.5.2) se transforma en

$$\mu^2 \frac{d^2 T}{d\mu^2} + \mu \frac{dT}{d\mu} - \mu^2 T = 0 \quad (8.5.6)$$

que es la ecuación diferencial modificada de Bessel de orden cero, cuya solución es:

$$T = AI_0(\mu) = AI_0(2N\sqrt{\omega x}) \quad (8.5.7)$$

La constante  $A$  se determina de tal manera que  $T$  satisfaga la condición en la frontera

$$T = T_0 \quad \text{en } x = \omega; \quad (8.5.8)$$

tenemos entonces que

$$T_0 = AI_0(2N\omega)$$

de donde

$$A = \frac{T_0}{I_c(2N\omega)} = \frac{t_0 - t_g}{I_0(2N\omega)} \quad (8.5.9)$$

y finalmente

$$\frac{t - t_g}{t_0 - t_g} = \frac{I_c(2N\sqrt{\omega x})}{I_0(2N\omega)} \quad (8.5.10)$$

La cantidad de calor disipada, por la superficie de la saliente recta triangular, está dada por

$$q = zh \int_0^\omega T dx = \frac{zhT_0}{I_0(2N\omega)} \int_0^\omega I_0(2N\sqrt{\omega x}) dx \quad (8.5.11)$$

Para calcular esta integral desarrollamos la función  $I_0$  en la forma dada por la ecuación (8.4.3) e integramos término a término

$$\begin{aligned} \int_0^\omega I_0(2N\sqrt{\omega x}) dx &= \int_0^\omega \left(1 + N^2\omega x + \frac{N^4\omega^2 x^2}{4} + \dots\right) dx \\ &= \omega \left(1 + \frac{N^2\omega^2}{2} + \frac{N^4\omega^4}{12} + \dots\right) \end{aligned}$$

Si comparamos este resultado con la serie  $I_1$

$$I_1(2N\omega) = N\omega \left(1 + \frac{N^2\omega^2}{2} + \frac{N^4\omega^4}{12} + \dots\right)$$

tenemos que:

$$\int_0^\omega I_0(2N\sqrt{\omega x}) dx = \frac{1}{N} I_1(2N\omega) \quad (8.5.12)$$

con lo cual obtenemos finalmente

$$q = \frac{zhT_0}{N} \frac{I_1(2N\omega)}{I_0(2N\omega)} \quad (8.5.13)$$

## 9. Aplicación de las funciones de Laguerre.

### 9.1 Respuesta en la Banda de Baja Frecuencia de un Amplificador RC en Cascada.

La figura 19 muestra el circuito de un amplificador RC. En la mayoría de los casos, en particular en el nuestro, la salida del amplificador está conectada a la entrada de otro circuito.

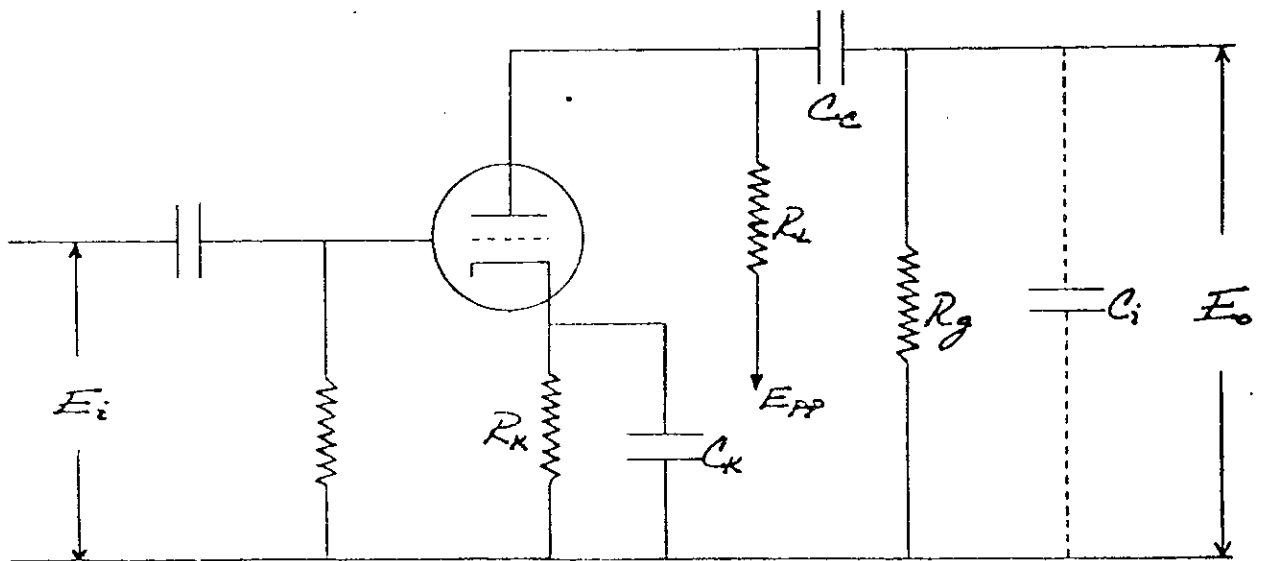


Fig. 19 Amplificador RC

Supondremos que la impedancia de entrada del circuito de carga es predominante capacitiva; esto se muestra esquemáticamente en la figura 19 mediante el condensador  $C_i$ .

El circuito equivalente se muestra en la fig 20 . En éste se incluyen la capacidad distribuida de alambrado  $C_w$ , la capacidad de salida del tubo  $C_o$  y la capacidad del siguiente circuito  $C_i$ . Como deseamos estudiar simplemente la amplificación en la banda de baja frecuencia, los efectos de las capacidades  $C_o$ ,  $C_w$  y  $C_i$  son despreciables en comparación

con los efectos que producen las resistencias, así que pueden considerarse como circuitos abiertos y omitirlos del circuito equivalente; el circuito se reduce entonces a la forma que se muestra en la figura 21.

La amplificación está definida como  $A = -g_m z_m$  (transconductancia o conductancia mutua del tubo por la impedancia mutua de la red del circuito equivalente). La  $g_m$  es característica de cada tubo, por lo que necesitamos calcular  $z_m$  para poder determinar la amplificación.

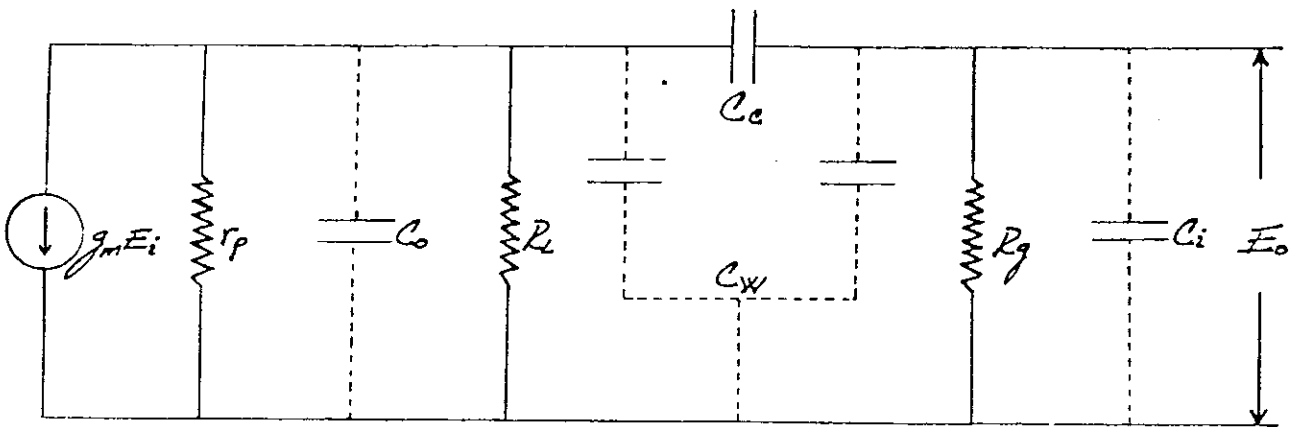


Fig. 20 Circuito equivalente del amplificador RC.

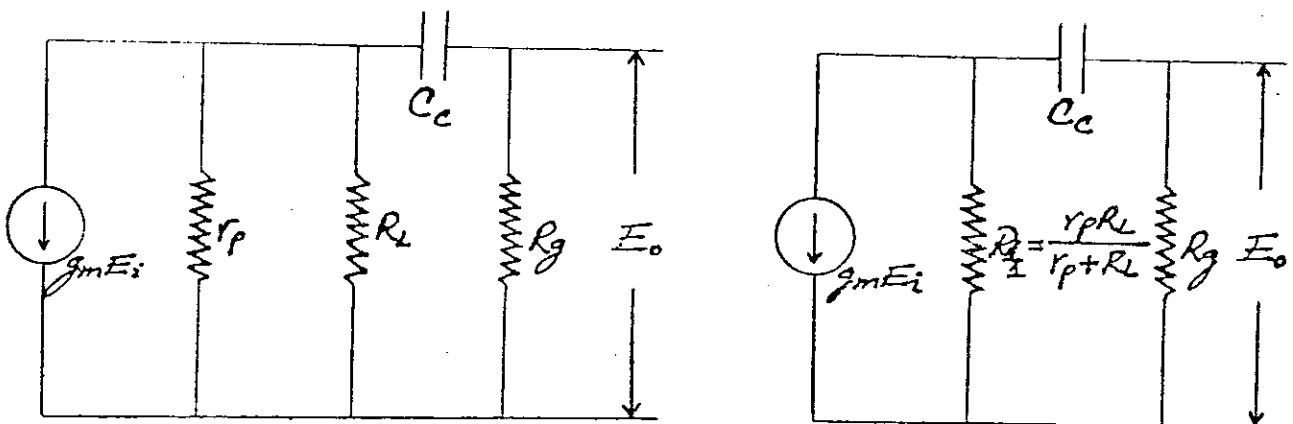


Fig. 21 Circuito equivalente del amplificador RC para bajas frecuencias.

Considérese el circuito  $\pi$  general, que se muestra en la figura 22.

Tenemos que

$$E = I_1 Z_1 = I_2 (Z_2 + Z_3) \quad (9.1.1)$$

$$I = I_1 + I_2 \quad (9.1.2)$$

De acuerdo con la ecuación (9.1.1)

$$I_1 = \frac{E}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{E}{Z_2 + Z_3} \quad (9.1.3)$$

Sustituyendo estos valores de las corrientes en (9.1.2), la corriente total resulta

$$I = E \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2 + Z_3} \right) \quad (9.1.4)$$

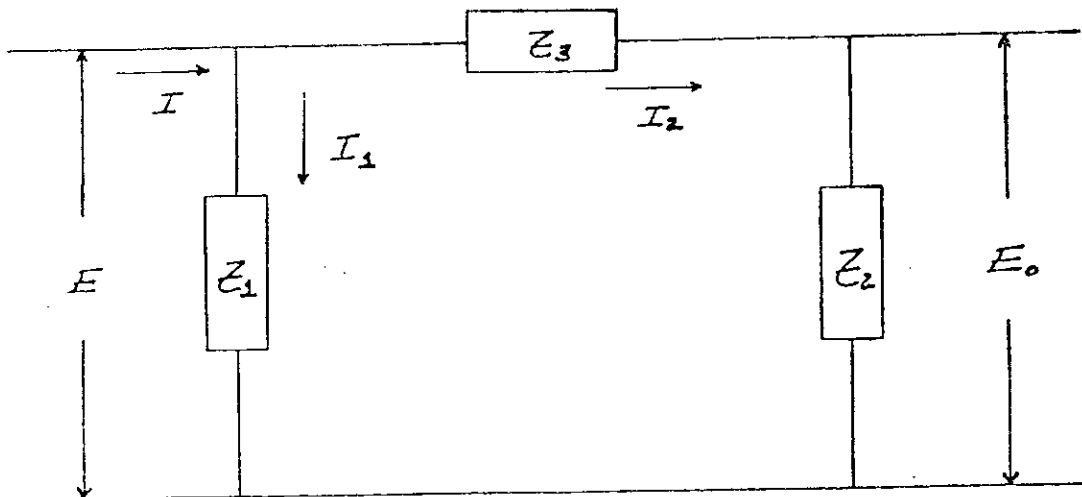


Fig. 22 Circuito  $\pi$ .

El voltaje de salida  $E_c$  es:

$$E_o = I_2 Z_2 = E \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \quad (9.1.5)$$

Por lo tanto la impedancia mutua, que es la razón del voltaje de salida a la corriente total, es

$$\bar{Z}_m = \frac{E_o}{I} = \frac{\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2 + Z_3}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad (9.1.6)$$

En particular, en nuestro problema tenemos que

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = R_g, \quad Z_3 = \frac{1}{j\omega C_c} = \frac{1}{sC_c}$$

por lo tanto

$$\bar{Z}_m(s) = \frac{R_1 R_g}{(R_1 + R_g) + 1/sC_c} = \frac{R_1 R_g s / (R_1 + R_g)}{s + 1/(R_1 + R_g)C_c}$$

Si definimos

$$R = \frac{R_1 R_g}{R_1 + R_g}, \quad \omega_1 = \frac{1}{(R_1 + R_g)C_c} \quad (9.1.7)$$

la impedancia mutua toma la forma sencilla

$$\bar{Z}_m(s) = R \frac{s}{s + \omega_1} \quad (9.1.8)$$

El término  $R$  es la resistencia total que aparece en el circuito y  $\omega_1$  se le denomina frecuencia de corte en la banda baja. Consecuentemente la respuesta en la banda baja es

$$A(s) = -g_m R \frac{s}{s + \omega_1} = A_m \frac{s}{s + \omega_1} \quad (9.1.9)$$

donde  $A_m = -g_m R$  es la respuesta en la banda media.

Si  $n$  amplificadores idénticos se conectan en cascada, la amplificación total es

$$A_T(s) = A_m^n \left( \frac{s}{s + \omega_1} \right)^n \quad (9.1.10)$$

Como la amplificación total es la relación del voltaje de salida entre el voltaje de entrada

$$A_T(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\mathcal{L}Q_o(t)}{\mathcal{L}Q_i(t)}$$

donde  $\mathcal{L}$  significa transformada de Laplace; entonces

$$\mathcal{L}Q_o(t) = A_T(s)\mathcal{L}Q_i(t) \quad (9.1.11)$$

Si el voltaje de entrada  $Q_i(t)$  (como una función de tiempo) se supone que es una función escalón unitario

$$Q_i(t) = 1 \quad \text{para toda } t \geq 0$$

entonces, la transformada de Laplace de esta función es

$$\mathcal{L}Q_i(t) = \frac{1}{s},$$

por lo tanto, el voltaje de salida resulta

$$\mathcal{L}Q_o(t) = A_T(s)\frac{1}{s} = A_m^n \frac{s^{n-1}}{(s+\omega_n)^n}; \quad (9.1.12)$$

aplicando las transformadas de Laplace, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s+\omega_n)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\omega_n t}$$

sustituyendo este resultado en la fórmula (9.1.12) tenemos

$$\mathcal{L}Q_o(t) = A_m^n s^{n-1} \mathcal{L} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\omega_n t} \quad (9.1.13)$$

De la teoría general de las transformadas de Laplace tomamos la fórmula (Jaeger, 1953: p. 14)

$$\mathcal{L} \frac{d^k f(t)}{dt^k} = s^k \mathcal{L} f(t) \quad (9.1.14)$$

La cual es válida si todas las condiciones iniciales son nulas.

En nuestro problema podemos considerar que todas las condiciones iniciales son nulas, por lo tanto, si hacemos

$$f(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\omega_1 t} \quad \text{y} \quad k = n-1$$

obtenemos

$$Q_o(t) = A_m^n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left( \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\omega_1 t} \right) \quad (9.1.15)$$

Ahora, si en la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre (para  $\alpha = 0$ ), fórmula (9.1.6), hacemos el cambio de variable  $x = \omega_1 t$  y sustituimos  $n$  por  $n-1$ , resulta

$$L_{n-1}(\omega_1 t) = \frac{e^{\omega_1 t}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^{n-1} e^{-\omega_1 t})$$

que comparando con el resultado (9.1.15), se observa que,

$$Q_o(t) = A_m^n e^{-\omega_1 t} L_{n-1}(\omega_1 t) \quad (9.1.16)$$

A partir de esta fórmula y con la ayuda de los resultados (4.1.3), podemos conocer el voltaje de salida  $Q_o(t)$  para un número cualquiera de pasos de amplificación.

Para:

$$n=1 \quad Q_o(t) = A_m e^{-\omega_1 t}$$

$$n=2 \quad Q_o(t) = A_m^2 (1 - \omega_1 t) e^{-\omega_1 t} \quad (9.1.17)$$

$$n=3 \quad Q_o(t) = A_m^3 \left[ 1 - 3\omega_1 t + \frac{3}{2}(\omega_1 t)^2 \right] e^{-\omega_1 t}$$

$$n=4 \quad Q_o(t) = A_m^4 \left[ 1 - 3\omega_1 t + \frac{3}{2}(\omega_1 t)^2 - \frac{1}{6}(\omega_1 t)^3 \right]$$

y en general sustituyendo la fórmula (4.1.2a) en la solución (9.1.16)

$$Q_0(t) = A_m^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-1)!}{(n-1-k)! (k!)^2} (\omega_1 t)^k e^{-\omega_1 t} \quad (9.1.18)$$

## 10. Aplicaciones de las Funciones de Hermite

### 10.1 Oscilador Armónico Simple.

En el potencial del oscilador armónico simple la partícula ejecuta pequeñas vibraciones en la vecindad de la posición de equilibrio estable. En esta posición el potencial  $V(x)$  debe tener un mínimo. Para toda  $V(x)$  continua, la forma de la curva en la vecindad del mínimo -que es la que interesa para las vibraciones pequeñas- se puede aproximar a una parábola. Así, si los ceros del eje  $x$  y de la energía se encuentran en el mínimo, se puede escribir

$$V(x) = C \frac{x^2}{2} \quad (10.1.1)$$

donde  $C$  es una constante. Una partícula cuya energía potencial tenga esta forma experimenta una fuerza armónica de restitución  $F = -\partial V / \partial x = -Cx$ . La mecánica clásica predice que si la partícula se desplaza una distancia  $x_0$  del punto de equilibrio, al soltarla oscilará sinusoidalmente alrededor de la posición de equilibrio, con una frecuencia

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (10.1.2)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula. Además, la energía total de la partícula es proporcional a  $x_0^2$  y puede tomar cualquier valor, ya que  $x_0$  es arbitraria. Sin embargo, la antigua teoría cuántica (postulado de Plank) predice que  $E$  sólo puede tomar alguno de los valores

$$E_n = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.1.3)$$

Predicciones de la Mecánica Cuántica:

Especifiquemos el potencial del oscilador armónico simple (10.1.1) en términos de la frecuencia clásica de oscilación (10.1.2). Tenemos que

$$V(x) = 2\pi^2 m \nu^2 x^2 \quad (10.1.4)$$

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo correspondiente es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + 2\pi^2 m \nu^2 x^2 \Psi = E \Psi$$

6

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \left[ \frac{2mE}{\hbar^2} - \left( \frac{2\pi m \nu}{\hbar} \right)^2 x^2 \right] \Psi = 0 \quad (10.1.5)$$

Definamos

$$\alpha = 2\pi m \nu / \hbar, \quad \beta = 2mE / \hbar^2 \quad (10.1.6)$$

y la ecuación se puede escribir como

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2) \Psi = 0 \quad (10.1.7)$$

Es conveniente expresarla en términos de la nueva variable

$$\xi \equiv \sqrt{\alpha} x \quad (10.1.8)$$

para que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo tome la forma

$$\alpha \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + (\beta - \alpha \xi^2) \Psi = 0$$

6

$$\frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \left( \frac{\beta}{\alpha} - \xi^2 \right) \Psi = 0 \quad (10.1.9)$$

Debemos encontrar soluciones  $\Psi_r(\xi)$  que sean continuas y estén acotadas para toda  $\xi$ , desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ . Las soluciones que obtendremos satisfarán automáticamente la primera condición. Por otra parte, se debe tener especial cuidado en que  $\Psi_r(\xi)$  esté acotada cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Para esto es conveniente considerar, en primer lugar, el comportamiento de  $\Psi_r(\xi)$  para valores muy grandes de  $|\xi|$ .

Para cualquier valor finito de la energía total  $E$  y para grandes valores de  $|\xi|$ , la cantidad  $\beta/\alpha$  es despreciable en comparación con  $\xi^2$ . Podemos escribir

$$\frac{d^2 \Psi_r}{d\xi^2} = \xi^2 \Psi_r, \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (10.1.10)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\Psi_r = A e^{\xi^2/2} + B e^{-\xi^2/2} \quad (10.1.11)$$

Ya que la función (10.1.11) debe estar acotada cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ , se debe tomar

$$A = 0$$

Así, para  $|\xi|$  muy grande, la función propia deberá tener la forma

$$\Psi_r(\xi) = B e^{-\xi^2/2}, \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (10.1.12)$$

Lo anterior sugiere la búsqueda de soluciones a la ecuación (10.1.9) de la forma .

$$\Psi_r(\xi) = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \quad (10.1.13)$$

válida para toda  $\xi$ . Cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$  las funciones  $H(\xi)$  deberán variar lentamente en comparación con  $e^{-\xi^2/2}$ .

Sustituyendo (10.1.13) en (10.1.9) obtenemos, para  $H(\alpha)$ , la ecuación

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)H = 0 \quad (10.1.14)$$

que es la ecuación diferencial de Hermite.

Como vimos en la sección 5.3, para un valor arbitrario de  $\beta/\alpha$ , tanto la serie par, ecuación (5.3.10a) como la non, ecuación (5.3.10b), contienen un número infinito de términos. Como veremos en seguida esto conduce a soluciones inaceptables. La fórmula de recurrencia para cualquiera de las dos series (par o non) está dada por (5.3.4), que para nuestro caso debe escribirse

$$a_{k+2} = -\frac{\beta/\alpha - 1 - 2k}{(k+1)(k+2)} a_k.$$

Ahora bien, de la relación anterior puede calcularse el cociente entre coeficientes de potencias sucesivas de  $\xi$  para  $k$  grande, resultando

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} = -\frac{(\beta/\alpha - 1 - 2k)}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{2k}{k^2} = \frac{2}{k}$$

Comparando este cociente con el correspondiente en el desarrollo en serie de la función  $e^{\xi^2}$ , que es

$$e^{\xi^2} = 1 + \xi^2 + \frac{\xi^4}{2!} + \frac{\xi^6}{3!} + \dots + \frac{\xi^k}{(k/2)!} + \frac{\xi^{k+2}}{(k/2+1)!} + \dots$$

Para  $k$  grande, el cociente entre los coeficientes de potencias sucesivas de  $\xi$  es

$$\frac{1/(k/2+1)!}{1/(k/2)!} = \frac{(k/2)!}{(k/2+1)!} = \frac{(k/2)!}{(k/2+1)(k/2)!} = \frac{1}{k/2+1} \sim \frac{1}{k/2} = \frac{2}{k}$$

Observamos que los dos cocientes son iguales. Esto significa que los términos de potencias grandes de  $\xi$  en la serie para  $e^{\xi^2}$  sólo puede diferir de

los términos correspondientes en la serie par de  $H(\xi)$  por una constante  $K$ . En el caso de la serie non para  $H(\xi)$  sólo podrá diferir en  $K'\xi$ , donde  $K'$  es otra constante. Pero cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ , las potencias de orden bajo en  $\xi$  no son importantes para determinar el valor de cualquiera de las series. En consecuencia, concluimos que

$$H(\xi) = a_0 K \xi^{\xi^2} + a_1 K' \xi \xi^{\xi^2}, \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (10.1.13), las soluciones a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo son

$$\Psi^{\pm}(\xi) = e^{-\xi^2/2} H(\xi)$$

de manera que si la serie de  $H(\xi)$  contuviera un número infinito de términos, el comportamiento de estas soluciones para  $|\xi| \rightarrow \infty$  sería

$$e^{-\xi^2/2} H(\xi) = a_0 K e^{\xi^2/2} + a_1 K' \xi e^{\xi^2/2}, \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

Esta solución diverge cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ , comportamiento inaceptable para una función propia.

Sin embargo, se pueden obtener funciones propias aceptables para ciertos valores de  $\beta/\alpha$ . La serie se reduce a un polinomio (véase sección 5.3), si el coeficiente de  $H$  de la ecuación diferencial (10.1.14) es igual a dos veces un número entero no negativo  $n$ , es decir que

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = 2n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

o bien

$$\beta = (2n + 1)\alpha. \quad (10.1.15)$$

Por lo tanto, sólo se pueden aceptar como soluciones de la ecuación (10.1.14), los polinomios de Hermite de grado  $n$

$$H(\xi) = H_n(\xi). \quad (10.1.16)$$

Con una solución de polinomio para la ecuación de Hermite, las funciones propias correspondientes

$$\Psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) \quad (10.1.17)$$

mostrarán el comportamiento aceptable de cancelarse cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ , ya que, para  $|\xi|$  grande, la función  $e^{-\xi^2/2}$  varía mucho más rápidamente que el polinomio  $H_n(\xi)$ , de manera que determina completamente el comportamiento de la función propia.

De hecho

$$\Psi(\xi) \propto e^{-\xi^2/2}, \quad |\xi| \rightarrow \infty$$

en concordancia con la ecuación (10.1.12).

Existen soluciones aceptables a la ecuación de Schrödinger sólo para los valores de  $\beta/\alpha$  dados por la ecuación (10.1.15). De acuerdo con (10.1.6), esta cantidad es igual a

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2mE}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2\pi m \nu} = \frac{2E}{m\nu}$$

o bien

$$E_n = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10.1.18)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia clásica de oscilación de la partícula. Se ha empleado el número cuántico  $n$  para designar los valores propios. Al comparar la ecuación (10.1.18) con el postulado de Plank (10.1.3) sobre la cuantización de la energía, encontramos que los valores propios predichos por la mecánica cuántica están corridos por la cantidad  $\frac{1}{2}h\nu$ . Como consecuencia, la energía total mínima para una partícula ligada en un potencial es  $E_0 = \frac{1}{2}h\nu$ . Esta es la energía del punto cero para este poten-

cial, cuya existencia es requerida por el principio de incertidumbre. Es interesante hacer notar que el postulado de cuantización de Planck para el oscilador armónico simple conducía a resultados erróneos por la constante aditiva  $\frac{1}{2}h\nu$ . Esta constante se cancela en la mayor parte de las aplicaciones del postulado, ya que sólo es necesario conocer la diferencia entre dos valores propios.

La función propia normalizada para nuestro problema es

$$\Psi_n(\xi) = N_N e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (10.1.19)$$

donde  $N_N$  es la constante de normalización. Además  $\Psi_n(\xi)$  debe cumplir con la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(\xi) \Psi_n(\xi) d\xi = 1$$

siendo  $\Psi_n^*(\xi)$  el complejo conjugado de  $\Psi_n(\xi)$  que en este caso es igual a  $\Psi_n(\xi)$ . Por lo tanto, con ayuda de (5.4.1), obtenemos fácilmente el valor de la constante de normalización

$$N_N = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.1.20)$$

resultando entonces:

$$\Psi_n(\xi) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi) \quad (10.1.21)$$

Las funciones propias se pueden expresar en términos de  $x$  mediante la substitución  $\xi = \sqrt{\alpha} x$ , aunque ordinariamente conviene dejarlas tal como están. Ya que  $e^{-\xi^2/2}$  es una función par, la paridad de la función propia coincide con la del polinomio de Hermite: par para  $n$  par y non para  $n$  non. La función propia correspondiente a la mínima energía tiene parí

dad par, como también es el caso para el potencial de pozo cuadrado. En la figura 23 se representan las primeras funciones propias. Las líneas verticales indican, en cada caso, los límites de la región permitida clásicamente. La densidad de probabilidad cuántica para  $n=10$ , así como la

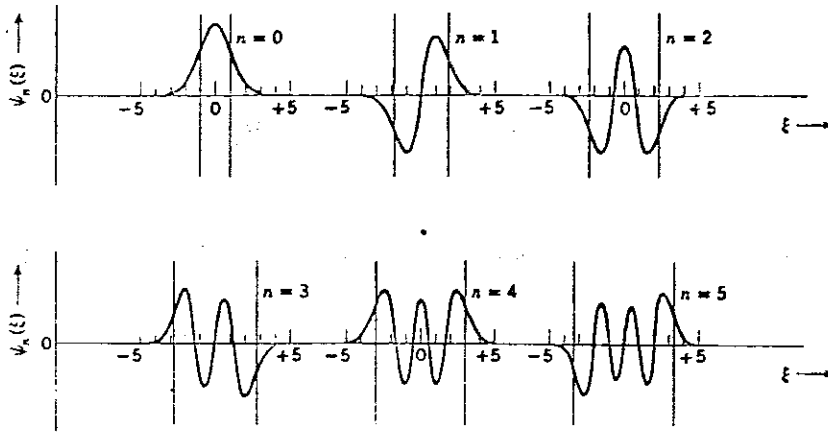


Fig. 23 Las primeras funciones propias para un potencial de oscilador armónico simple.

densidad de probabilidad predicha clásicamente para una partícula con energía total  $E_{10}$  se muestran en la figura 24. De acuerdo con la mecánica clásica, la velocidad de una partícula que efectúa oscilaciones armónicas simples se hace igual a cero en los extremos de su movimiento. En consecuencia, la partícula pasa la mayor parte del tiempo en la vecindad de los límites de la región permitida clásicamente, y la probabilidad clásica de encontrarla en un elemento del eje  $\xi$  se comporta como lo indica la figura. Destaca inmediatamente la naturaleza de la correspondencia entre las probabilidades cuántica y clásica cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Ahora determinaremos la probabilidad de transición de un estado  $n$  a un estado  $m$ . Esto es

$$\chi_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \Psi_m x dx = \frac{N_n N_m}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} H_n H_m Q^{-\frac{1}{2}} \xi^2 d\xi. \quad (10.1.22)$$

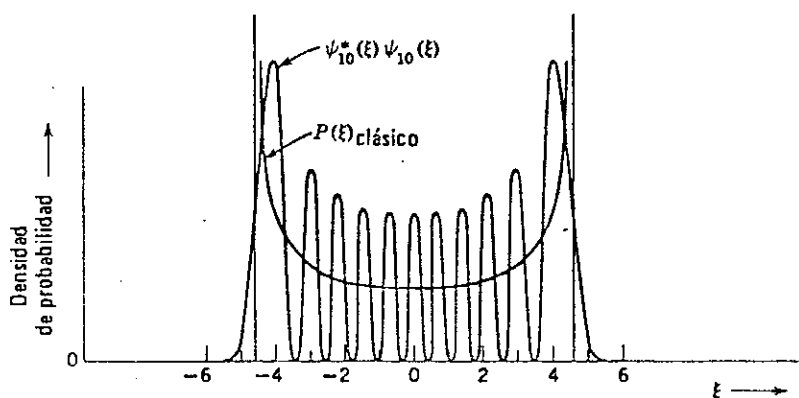


Fig. 24 Ilustración de cómo se acerca al límite clásico la densidad de probabilidad con un potencial de oscilador armónico simple.

El valor de esta integral lo tenemos calculado y está dado por la fórmula (5.4.4), en la que vemos que  $\chi_{l,m}$  es cero excepto para  $m=l+1$ , tenemos así que:

$$\chi_{n,n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{2\alpha}} \quad (10.1.23)$$

$$\chi_{n,n-1} = \sqrt{\frac{n}{2\alpha}} \quad (10.1.24)$$

Lo cual muestra que en el oscilador armónico, las transiciones ocurren solamente entre niveles energéticos contiguos.

## 10.2 Oscilador Armónico Perturbado

Usaremos ahora el método de perturbaciones para resolver un problema ligeramente más complicado.

La ecuación de Schrödinger es:

$$H\bar{\Psi} = E\bar{\Psi} \quad (10.2.1)$$

y suponemos que es posible desarrollar el Hamiltoniano  $H$ , en términos de un cierto parámetro  $\lambda$ , obteniéndose la expresión

$$H = H^0 + \lambda H' + \lambda^2 H'' + \dots$$

Escogemos  $H^0$  de tal forma que

$$H^0 \bar{\Psi}^0 = E^0 \bar{\Psi}^0$$

pueda resolverse directamente. Esta se llama la ecuación de ondas para el sistema no perturbado. Los términos  $\lambda H'$ ,  $\lambda^2 H''$ , ..., son las llamadas perturbaciones a primer orden, a segundo orden, etc.

La Teoría de Perturbaciones a primer orden nos proporciona los siguientes resultados

$$H = H^0 + H' \quad (10.2.2)$$

$$\bar{\Psi}_k = \bar{\Psi}_k^0 + \bar{\Psi}_k'$$

$$E_k = E_k^0 + E_k'$$

en la cual

$$E_k' = \int \bar{\Psi}_k^{0*} H' \bar{\Psi}_k^0 d\tau; \quad (10.2.3)$$

ésta última expresión dice que: la energía de perturbación a primer orden, para un estado no degenerado de un sistema, es el promedio de la función de perturbación a primer orden en el estado no perturbado correspondiente.

Considérese un sistema cuya ecuación de Schrödinger es

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 - ax^3 - bx^4 \right) \bar{\Psi} = 0 \quad (10.2.4)$$

Vemos que si  $a$  y  $b$  son cero, la ecuación de Schrödinger toma la forma del oscilador armónico, cuya solución se encontró anteriormente. Si  $a$  y  $b$  son pequeños, podemos tratarlos como perturbaciones y escribimos

$$H' = ax^3 + bx^4, \quad (10.2.5)$$

necesitamos, entonces, evaluar las integrales

$$E' = a \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{c*} x^3 \psi_n^c dx + b \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{o*} x^4 \psi_n^o dx. \quad (10.2.6)$$

como  $x^3$  es una función impar y  $\psi_n^{o*} \psi_n^o$  son funciones pares, la primera de estas integrales es cero, así que la perturbación a primer orden debido al término  $ax^3$  es igual a cero. Para calcular la segunda integral hacemos uso de los resultados obtenidos para el oscilador armónico simple; si sustituimos para  $\psi_n^o$  la ecuación (10.1.19), obtenemos la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{o*} x^4 \psi_n^o dx = \frac{N_n^2}{2^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) \xi^4 d\xi. \quad (10.2.7)$$

Ahora de la fórmula de recurrencia (5.2.2), tenemos que

$$\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2} H_{n+1}(\xi) + n H_{n-1}(\xi) \quad (10.2.8)$$

así que aplicando esta misma fórmula a  $\xi H_{n+1}$  y a  $\xi H_{n-1}$ , obtenemos la ecuación

$$\xi^2 H_n(\xi) = \frac{1}{4} H_{n+2}(\xi) + (n + \frac{1}{2}) H_n(\xi) + n(n-1) H_{n-2}(\xi). \quad (10.2.9)$$

Por medio de la fórmula de recurrencia (5.2.2), hemos expresado a  $\xi^2 H_n(\xi)$  en términos de polinomios de Hermite con coeficientes constantes. Elevando al cuadrado obtenemos una expresión para  $\xi^4 H_n^2(\xi)$ , la cual nos permite expresar la integral de (10.2.7) en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m},$$

que ya se habfa calculado en la ecuación (5.4.1). Evaluando las integrales por medio de esta fórmula, encontramos para  $I$  la expresión

$$I = \frac{N_N^2 \sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2}} \left[ \frac{1}{16} 2^{n+2} (n+2)! + (n+\frac{1}{2})^2 2^n n! + n^2 (n-1)^2 2^{n-2} (n-2)! \right] \quad (10.2.10)$$

donde  $N_N$  es la constante de normalización para  $\psi_n(x)$ , que al comparar con (10.1.21), se obtiene

$$N_N = \left[ \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10.2.11)$$

Sustituyendo (10.2.11) en (10.2.10), obtenemos

$$I = \frac{3}{4\alpha^2} (2n^2 + 2n + 1).$$

La energía de perturbación a primer orden para este sistema, es por tanto

$$E' = \frac{3b}{4\alpha^2} (2n^2 + 2n + 1) \quad (10.2.12)$$

Así que la energía total (a primer orden), tiene un valor de

$$E = E^0 + E' = (n + \frac{1}{2}) h\nu + \frac{3}{64\pi^4} (2n^2 + 2n + 1) \frac{h^2 b}{m^2 \nu^2} \quad (10.2.13)$$

#### IV. CONCLUSIONES

- 1.- La solución de algunos problemas de la física clásica, así como también de la teoría cuántica, se facilita grandemente con la utilización de las funciones especiales.
- 2.- La postulación de la función generadora para cada una de las funciones especiales, siempre conduce en forma abreviada, a la ecuación diferencial que satisface.
- 3.- La obtención de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de cada una de las funciones especiales que se trató, se hace por medio del método de solución en serie (o método de Frobenius); pues este método conduce por lo menos a una solución particular, si no es que a la solución general.
- 4.- Un método general para desarrollar conjuntos de polinomios ortogonales, está basado en la fórmula general de Rodrigues, de la cual se obtienen relaciones ortogonales generales y ecuaciones diferenciales generales.

## V. BIBLIOGRAFIA

- Bateman, H. Higher transcendental functions. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc. 3 v.  
1953
- Bowman, F. Introduction to Bessel functions. New York, Dover Publications Inc.  
1958
- Butkov, E. Mathematical physics. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.  
1968
- Courant, R. y D. Hilbert. Methods of mathematical physics. New York, Interscience Publishers, Inc.  
1953
- Churchill, R. Introduction to complex variables and applications.  
1948 New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Eckart, C. y K. Compton. "The penetration of a potential barrier by electrons". The physical review (New York); 35 (1): 1303.  
1930
- Eisberg, R. Fundamentos de física moderna. México, Editorial Limusa.  
1978
- Ford, L. Differential equations. 2a. ed. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.  
1955
- Goldstein, H. Classical mechanics. New York, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.  
1950
- Gray, A.; G. Mathews y T. MacRobert. A treatise on Bessel functions and their applications to physics. London, McMillan and Co.  
1952
- Hochstadt, H. The functions of mathematical physics. New York, Wiley-Interscience.  
1971
- Holdeman, J. "Legendre polynomial expansions of hypergeometric functions with applications". Journal of mathematical physics (New York); 11 (1): 114-117.  
1970
- Jackson, J. Classical electrodynamics. 2a ed. New York, John Wiley & Sons, Inc.  
1962
- Jaeger, J. An introduction to the Laplace transformation. London, Mathuen & Co. Ltd.  
1953

- Johnson, D. y J. Johnson. Mathematical methods in engineering and physics. New York, The Ronald Press Company.  
1965
- Kschwendt, H. "Numerical solutions of integral equations using Legendre polynomials". Journal of mathematical physics (New York); 10 (10): 1964-1968.  
1969
- Landau, L. y E. Lifshitz. Quantum mechanics. New York, Pergamon Press Ltd.  
1965
- McGervey, J. Introducción a la física moderna. México, Editorial Trillas.  
1975
- Millman, J. y C. Halkias. Dispositivos y circuitos electrónicos. 7a. ed. Madrid, Ediciones Pirámide, S.A.  
1978
- Pauling, L. y E. Wilson. Introduction to quantum mechanics. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.  
1935
- Rainville, E. Special functions. New York, Chelsea Publishing Company.  
1960
- Schneider, P. Conduction heat transfer. New York, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.  
1957
- Slater, J. y N. Frank. Introduction to theoretical physics. New York y London, McGraw-Hill Book Company, Inc.  
1933
- \_\_\_\_\_ y N. Frank. Electromagnetism. New York y London, McGraw Hill Book Company, Inc.  
1947
- Sneddon, I. Special functions of mathematical physics and chemistry. London, Oliver and Boyd Publishing Company.  
1961
- Sommerfeld, A. Mechanics of deformable bodies. New York, Academic Press Inc. Publishers. 6 v.  
1950
- \_\_\_\_\_ ; Electrodynamics. New York, Academic Press Inc. Publishers. 6 v.  
1964
- Stratton, J. Electromagnetic theory. New York y London, McGraw-Hill Book Company Inc.  
1941
- Watson, G. A treatise on the theory of Bessel functions. 2a. ed. 1966 London, Cambridge at the University Press.

