

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

GRUPOS DE SIMETRIA EN FISICA DE PARTICULAS

GRUPOS DE SIMETRIA EN FISICA DE PARTICULAS

FERNANDO DE LA TRINIDAD QUEVEDO RODRIGUEZ

Trabajo de investigación presentado para optar el grado
de Licenciado en Física


Guatemala

1978

BIBLIOTECA

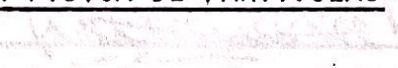
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Vo. Bo. del A UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades


(6) 
Licenciado Oscar Castañeda T.

Tribunales


GRUPOS DE SIMETRIA EN FISICA DE PARTICULAS

(11) 
Licenciado Oscar Castañeda T.

FERNANDO DE LA TRINIDAD QUEVEDO RODRIGUEZ

(11) 
Doctor Sergio Aragón

Trabajo de investigación presentado para optar al grado
académico de Licenciado en Física

(11) 
Licenciada Carlos Casas

Guatemala


1979

Se depositó en el archivo el día 17 de Julio de 1979.

BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Vo. Bo. del Asesor:

(f)

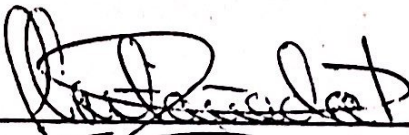


Licenciado Oscar Castañeda T.

A mis padres

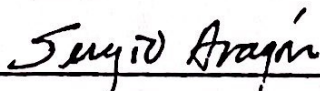
Tribunal:

(f)



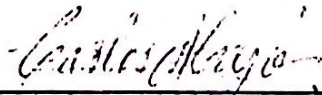
Licenciado Oscar Castañeda T.

(f)



Doctor Sergio Aragón

(f)



Licenciado Carlos Cajas

Mes de aprobación: julio de 1979.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
CONCEPTOS GENERALES	3
1. HISTORIA	3
2. TIPOS DE INTERACCION Y CLASIFICACION GENERAL	7
3. SIMETRIA Y LEYES DE CONSERVACION	15
3.1 SIMETRIAS EXTERNAS	15
3.2 SIMETRIAS INTERNAS	20
3.3 OTRAS SIMETRIAS	24
A mis padres	
4. GRUPOS, ISOESPIN y SU ₃	25
CAPITULO 2	
TEORIA DE GRUPOS	29
1. DEFINICIONES PRELIMINARES	29
2. REPRESENTACION DE GRUPOS	31
2.1 GENERALIDADES	31
2.2 REPRESENTACIONES EQUIVALENTES	31
2.3 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES	33
2.4 PRODUCTO DIRECTO DE REPRESENTACIONES	39
3. GRUPOS DE LIE	41
CAPITULO 3	
GRUPOS DE SIMETRIA Y LEYES DE CONSERVACION	51
1. CONCEPTO DE GRUPO EN FISICA	51
2. REPRESENTACIONES, DEGENERACION Y SIMETRIA	54

I N D I C E

INTRODUCCION	1
CAPITULO 1	
CONCEPTOS GENERALES	3
1. HISTORIA	3
2. TIPOS DE INTERACCION Y CLASIFICACION GENERAL	9
3. SIMETRIA Y LEYES DE CONSERVACION	15
3.1 SIMETRIAS EXTERNAS	15
3.2 SIMETRIAS INTERNAS	20
3.3 OTRAS SIMETRIAS	24
4. GRUPOS, ISOSPIN y SU_3	25
CAPITULO 2	
TEORIA DE GRUPOS	29
1. DEFINICIONES PRELIMINARES	29
2. REPRESENTACION DE GRUPOS	31
2.1 GENERALIDADES	31
2.2 REPRESENTACIONES EQUIVALENTES	33
2.3 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES	35
2.4 PRODUCTO DIRECTO DE REPRESENTACIONES	39
3. GRUPOS DE LIEBSCHEWITZ	41
4. FORMULA DE MASA	43
CAPITULO 3	
GRUPOS DE SIMETRIA Y LEYES DE CONSERVACION	51
1. CONCEPTO DE GRUPO EN FISICA	51
2. REPRESENTACIONES, DEGENERACION Y SIMETRIA	54

APENDICES

3.	GRUPO DE TRASLACIONES EN EL TIEMPO Y LEYES DE CONSERVACION	57
4.	GRUPO DE TRASLACIONES ESPACIALES	66
5.	GRUPO DE ROTACIONES	68
5.1	GENERADORES DE LA MECANICA CUANTICA	68
5.2	REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES	72
5.3	LEYES DE CONSERVACION	77
5.4	SU_2	78
5.5	SERIES DE CLEBSCH-GORDAN	80
5.6	OPERADORES VECTORIALES	84
6.	GRUPO DE ISOSPIN	87
6.1	PROPIEDADES GENERALES	87
6.2	MODELO DE FERMI Y YANG	91

BIBLIOSGRAFIA

CAPITULO 4

	EL CAMINO OCTUPLE	95
1.	INTRODUCCION	95
2.	TENSORES	99
3.	GENERADORES	106
4.	DIAGRAMAS DE EIGENVALORES	111
5.	REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES	115
6.	SERIES DE CLEBSCH-GORDAN	123
7.	FORMULA DE MASA	128

EPILOGO

QUARKS

137

APENDICES

INTRODUCCION

APENDICE A

TABLA DE PARTICULAS

145

APENDICE B

PRINCIPIOS DE LA MECANICA CUANTICA

155

APENDICE C

DESCOMPOSICION EN ISOSPIN HIPERCARGA

157

APENDICE D

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.4

163

BIBLIOGRAFIA

169

Analizando las simetrías de las interacciones se ha logrado explicar muchos de los fenómenos además de caracterizar a las partículas en base a cantidades que se conservan en determinada interacción.

Debido a ciertas simetrías se ha encontrado que la multitud de partículas se puede organizar en patrones regulares o múltiples similares a los niveles espectroscópicos de los átomos y núcleos. Estas regularidades se han explicado luego suponiendo que las partículas que componen un múltiplete son estados excitados de partículas "más elementales". La base matemática para el estudio de estas simetrías es la teoría de grupos de Lie.

En el presente trabajo llegaremos a

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es el de obtener un orden en el creciente número de las llamadas "partículas elementales".

En vista de que en los últimos treinta años, la lista de las partículas ha aumentado considerablemente, se ha dudado de su carácter fundamental (como las últimas componentes de la materia) y se ha hecho necesario un estudio sistemático que persigue:

- i) Explicar el comportamiento de las partículas en determinados procesos que ocurren debido a los diferentes tipos de interacción (fuerte, electromagnética, débil, gravitacional).
- ii) Caracterizar a las partículas.
- iii) Clasificarlas en conjuntos con características comunes.

Analizando las simetrías de las interacciones se ha logrado explicar muchos de los fenómenos además de caracterizar a las partículas en base a cantidades que se conservan en determinada interacción.

Debido a ciertas simetrías se ha encontrado que la multitud de partículas se puede acomodar en patrones regulares o multipletes similar a los niveles espectroscópicos de los átomos y núcleos. Estas regularidades se han explicado luego suponiendo que las partículas que componen un multiplete son estados compuestos de partículas "más elementales". La base matemática para el estudio de estas simetrías es la teoría de grupos de Lie.

En el presente trabajo llegaremos a

estos resultados desarrollando primero las ideas fundamentales de la física de partículas, luego la parte de la teoría de grupos que nos será útil para después relacionarlos y finalmente desarrollar un modelo que ordene las partículas en base a la teoría de grupos. Concluimos con una breve discusión de las implicaciones de este modelo.

En el presente trabajo nos proponemos a través de la teoría de grupos de Lie, estudiar las simetrías de las interacciones de las partículas en base a ciertos principios de simetría. En primer lugar se han explicado los conceptos de simetría y sus aplicaciones en física. Estas regularidades se han explicado luego señalando que las partículas que componen un multiplete son estados compuestos de partículas "elementales". En base a esto se ha estudiado el estudio de estas simetrías en los fenómenos de interacción de las partículas en base a ciertos principios de simetría. En segundo lugar se ha logrado explicar muchos detalles de las simetrías de las interacciones de las partículas en base a ciertos principios de simetría. En tercer lugar se han explicado los conceptos de simetría y sus aplicaciones en física. Estas regularidades se han explicado luego señalando que las partículas que componen un multiplete son estados compuestos de partículas "elementales". En base a esto se ha estudiado el estudio de estas simetrías en los fenómenos de interacción de las partículas en base a ciertos principios de simetría.

1. HISTORIA (1)(2)(3)

En la historia de la humanidad (desde que tenemos informes), el pensamiento sobre la composición de la materia ha oscilado entre las teorías de la composición continua y discreta.

Una de las primeras referencias que tenemos en apoyo a la segunda hipótesis es debida a

los griegos: Demócrito en 400 a. de J.C., postuló que la materia estaba constituida por unidades indivisibles que denominó ATOMOS.

Esta idea fue atacada durante mucho tiempo por los principales hombres de ciencia de la época, seguidores de Aristóteles.

Fue hasta el siglo XVII que Pierre Gassendi resucitó la idea de los átomos apoyada luego por varios científicos, entre los que se cuenta a Isaac Newton.

Después de ese tiempo, la opinión de los filósofos y científicos variaba entre ambas hipótesis.

En el siglo XIX, la Física dio fuertes razones para la aceptación de la hipótesis atómica. El descubrimiento por Brown e interpretación por Gouy del movimiento browniano, las leyes de Dalton para las combinaciones químicas y los trabajos de Loschmidt sobre la teoría cinética de los gases (quien midió las dimensiones atómicas y determinó el número (finito) de moléculas en un centímetro cúbico de gas a determinadas condiciones de temperatura y presión) mostraron la fuerza de esta hipótesis.

Maxwell y Boltzmann, al desarrollar la teoría cinética de los gases obtuvieron las leyes de la Termodinámica Clásica, mostrando así el carácter fundamental de la hipótesis atómica.

La hipótesis atómica se llegó "casi" a confirmar* a principios de nuestro siglo por los trabajos de Einstein y Perrin sobre el movimiento browniano y por las diferentes formas en que se midió el número de Avogadro (número de moléculas en un mol de cualquier sustancia) resultando un número grande pero finito $N = 6.02 \times 10^{23}$ moléculas/mol.

Mientras se aceptaba la hipótesis del átomo, ya mucha gente dudaba de su indivisibilidad. Especialmente por los trabajos de Faraday en 1834 al estudiar la Electrólisis, fenómeno que se explica muy bien si existe una unidad elemental de carga dentro del átomo y fuera de él. Luego, en 1859, Kirchoff demostró que cada elemento tiene un espectro de rayas único, de lo que Lockyer concluyó que los átomos tienen estructura.

A finales del siglo XIX, Plucker descubrió los rayos catódicos y Crookes concluyó que esos rayos eran "materia radiante"; se llegó a pensar que esta "materia" era de naturaleza corpuscular y finalmente, en 1897 J.J.Thomson logró determinar la relación carga-masa de estas partículas de carga negativa, que denominó "corpúsculos". A su carga la llamaban ya ELECTRON que es el nombre con que actualmente conocemos a la primer "partícula elemental" que se descubrió (representare-

* Este éxito de la hipótesis atómica no resolvió el problema de la naturaleza continua o discreta de la materia: aún se podía pensar en la divisibilidad de los átomos. Actualmente, según algunas teorías, la pregunta de la divisibilidad de las partículas elementales se considera resuelta. (4)

mos esta partícula con el símbolo e^-). Es realmente con este experimento que empieza el estudio de la Física de Partículas.

Años después

(1904), Thomson propuso un modelo para la estructura atómica, en el cual el átomo se supone compuesto por un número Z de electrones con carga " $-e$ " dentro de una distribución continua de carga positiva " $+Ze$ ".

El descubrimiento de la radioactividad por Becquerel en 1896, fue de mucha ayuda para el estudio del átomo. Se descubrió que determinados elementos emiten "rayos" de tres tipos: positivos (α), negativos (β) y neutros (γ). Al encontrar la relación carga-masa, se demostró que los rayos β eran haces de electrones, los rayos α átomos de helio doblemente ionizados y los rayos γ ondas electromagnéticas.

En 1911, Rutherford, trabajando con la dispersión de partículas por materia, propuso un modelo en el cual el átomo consistía de un pequeño grupo (radio 10^{-13} cm.) de carga positiva $+Ze$ rodeado por Z electrones que orbitaban a su alrededor.

El hecho de que ciertos núcleos de materiales radioactivos emitieran espontáneamente partículas α o

β , sugirió la idea de que el núcleo está constituido por partículas "más elementales". Basándose en que el peso atómico de los isótopos de los elementos es aproximadamente un múltiplo entero del peso atómico del hidrógeno, Aston en 1919, propuso al núcleo del hidrógeno como constituyente fundamental de todos los demás núcleos, llamándole a esta nueva "partícula elemental" PROTON (p). Esta partícula tiene una masa del orden de 10^{-24} gramos (aproximadamente 2,000 veces mayor que la del electrón).

Sin embargo había un problema: como el peso atómico A es por lo general casi el doble de Z , el núcleo no podía estar formado sólo por protones. En 1920, Rutherford, propuso la existencia de una partícula neutra NEUTRON (n) con una masa aproximadamente igual a la del protón. En 1932, Chadwick descubrió experimentalmente esta partícula. De esta manera, se consideró al átomo con Z protones, Z electrones y $A-Z$ neutrones, quedando así resuelto el problema.

Fermi, en 1934, siguiendo con una gran idea de Pauli, propuso la existencia de una nueva partícula neutra, sin masa en reposo, que llamó NEUTRINO (ν) con el fin de que se cumpliera la ley de conservación de la energía y el momentum angular en el decaimiento β ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$). En 1942 J.S. Allen la detectó experimentalmente.

En base a la Mecánica Cuántica Relativista, desarrollada especialmente por Dirac en 1928, a cada partícula le corresponde una "antipartícula" con la misma masa pero de carga opuesta; por lo tanto, además de las cuatro "partículas elementales" que llevamos hasta el momento, tenemos sus correspondientes antipartículas; POSITRON (e^+), ANTIPROTON (\bar{p}), ANTINEUTRON (\bar{n}), ANTINEUTRINO ($\bar{\nu}$). Estas partículas han sido detectadas experimentalmente; por ejemplo, Anderson en 1932 detectó el positrón.

A esta lista de partículas hay que añadirle el FOTON (γ), tomado como partícula desde que Planck (1901) explicó la radiación del cuerpo negro y Einstein (1905) dió la explicación del efecto fotoeléctrico, postulando que las

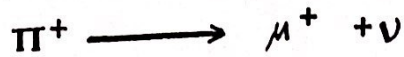
ondas electromagnéticas tienen carácter corpuscular.

Según la Teoría Cuántica de Campos, el fotón es el mediador de las interacciones electromagnéticas; la interacción entre dos electrones, por ejemplo, es un intercambio de fotones virtuales.

Hideki Yukawa postuló en 1935 la existencia de un mediador del campo de fuerzas nucleares. Experimentando con rayos cósmicos, Anderson y Neddermeyer en 1936, y Street y Stevenson en 1937, detectaron la existencia del MUON (μ) (que llamaron μ -meson), una partícula con masa intermedia entre la del electrón y la del protón, aproximadamente igual a la masa de la partícula predicha por Yukawa; otros análisis mostraron que ésta no era dicha partícula.

Marshak y Bethe en 1947, sugirieron que las partículas de Yukawa eran creadas por las partículas primarias de los rayos cósmicos (en general protones), en colisiones nucleares al atravesar la atmósfera. Los PIONES o π -MESONES, como llamaron a estas partículas, decaían en los muones y eran éstos los que llegaban a la superficie de la tierra. En ese mismo año, Lattes y otros verificaron esta hipótesis. Se encontró la existencia de tres piones: π^+ , π^0 , π^- con una masa aproximadamente igual a 270 veces la del electrón.

Estas últimas partículas detectadas tienen la particularidad de ser inestables (al igual que el neutrón), es decir, que en un tiempo muy pequeño decaen en algunas de las partículas ya conocidas; por ejemplo



con tiempos de vida de 2×10^{-6} segundos para el muón y 10^{-8} segundos para el pión.

En esos mismos años (1947-53), siempre por medio de experimentos con rayos cósmicos, se detectaron otras partículas inestables: los HIPERONES Λ , Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^+ , Ξ^- ; que son partículas más pesadas que los nucleones (protones y neutrones) y los KAONES o K - MESONES K^0 , K^+ , que son partículas con masa intermedia entre la de los piones y nucleones. A los hiperones y kaones se les llamó partículas extrañas.

Con la instalación de grandes aceleradores de partículas, desde 1948 se logró corroborar los resultados obtenidos en base a los rayos cósmicos y hacer medidas más precisas de las masas y tiempos de vida de las partículas; además, en 1942, Enrico Fermi y otros, experimentando con el "scattering" de piones de alta energía con protones, detectaron un pico en la gráfica de la energía del sistema en el centro de masa contra la sección efectiva de choque; se interpretó este resultado admitiendo la existencia de nuevas partículas llamadas RESONANCIAS, estas partículas son inestables con un tiempo de vida extremadamente corto (del orden de 10^{-23} segundos). Desde ese tiempo se han encontrado muchas resonancias (y también otras partículas) con lo cual el cuadro de las partículas "elementales" ha crecido enormemente.

En el apéndice A damos una lista de las partículas y sus principales propiedades; estas propiedades se explicarán más adelante.

2. TIPOS DE INTERACCION Y CLASIFICACION GENERAL (3) (5) (6)

Debido a la gran proliferación de partículas (hecho que nos hace dudar de su carácter fundamental), se hace necesario estudiarlas sistemáticamente, de tal forma que se pueda establecer algún orden y además comprender su comportamiento en determinados procesos (reacciones y decaimientos).

Para estudiar su comportamiento, debemos conocer primero de qué formas pueden interactuar las partículas. Para buscar un orden debemos tratar de caracterizar completamente a cada partícula y poder así clasificarlas en grupos con características comunes. Por lo tanto, empezaremos con una breve descripción de los diferentes tipos de interacción y luego daremos una clasificación general de las partículas.

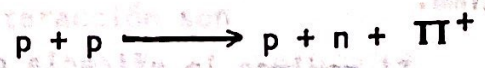
En la naturaleza conocemos cuatro diferentes formas de interacción, * a saber:

1. INTERACCION FUERTE

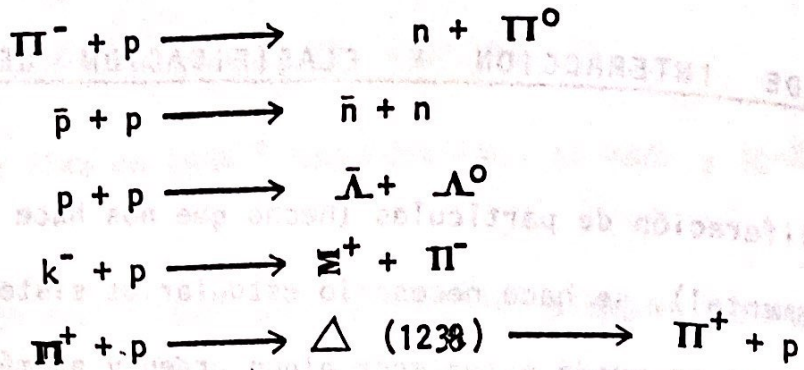
Es la interacción de mayor intensidad que conocemos; tiene un alcance muy pequeño (10^{-13} cm. aproximadamente).

Es la responsable de mantener ligados a los nucleones (neutrones y protones) para formar el núcleo. Según la hipótesis de Yukawa, los π -mesones son los mediadores de este tipo de fuerza.

Algunos procesos característicos de esta interacción son

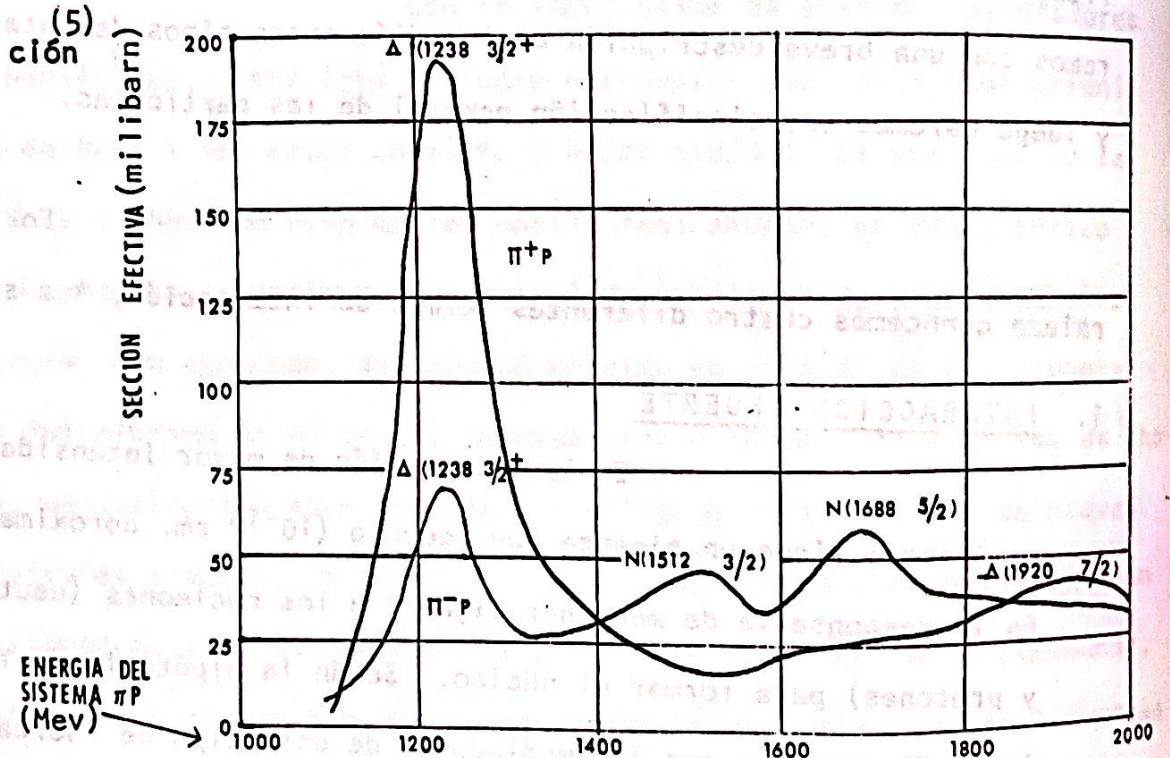


* Ultimamente se ha pensado en la posible existencia de otras interacciones. (3)



El último proceso muestra la creación y decaimiento de la resonancia $\Delta(1238)$, la partícula descubierta por Fermi en el scattering de piones por protones que mencionamos anteriormente.

La gráfica de la sección efectiva de choque para la interacción π^+p contra la energía del sistema en el centro de masa * se muestra a continuación



Vemos que a una energía de 1238 Mev, la posibilidad de que ocurra el scattering es máxima.

Si medimos la eficacia de un átomo como

* El scattering está relacionado con el cambio de dirección de las partículas que colisionan. La sección efectiva de choque es una medida de la probabilidad de que el scattering ocurra.

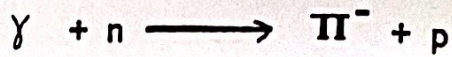
dispersor de luz en función de la frecuencia (energía) de ésta, encontraremos máximos pronunciados en las frecuencias que corresponden a las diferencias de energía entre los estados excitados y el estado fundamental (energías de resonancia). Este fenómeno no está restringido a la dispersión de la luz: también lo encontramos en el scattering de partículas materiales.

Así como en la colisión de un fotón con un átomo se forma un nuevo sistema (el átomo excitado), cuando la energía del fotón tiene un valor determinado, podemos considerar que en la colisión π^+p se forma una nueva partícula, cuando la energía del sistema en el centro de masa tiene un valor de 1238 Mev, la resonancia Δ (1238) que puede decaer nuevamente en π^+p (así como el átomo excitado puede decaer en fotones de la misma energía y el átomo en su estado fundamental).

2. INTERACCION ELECTROMAGNETICA

Es la fuerza que existe entre partículas debido a su carga eléctrica. Su intensidad es aproximadamente cien veces menor que la de la interacción fuerte, tiene un rango supuestamente infinito (fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) y es la responsable de tener ligados núcleos y electrones para formar un átomo, como dijimos anteriormente, es mediada por fotones. Algunos procesos característicos de esta interacción son

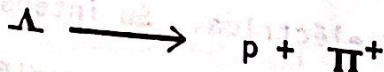
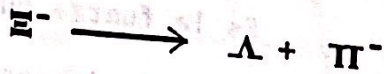




Los tiempos de vida involucrados en estos procesos son del orden de 10^{-16} segundos.

3. INTERACCION DEBIL

Es responsable del decaimiento β y otros efectos relacionados (decaimiento del pión, muón, etc.). No se conoce algo que este unido por esta fuerza. A sus mediadores se les ha llamado W - bosones, partículas que aún no han sido detectadas por lo que el rango y otras características de la interacción se desconocen. Entre los procesos característicos podemos nombrar:



Los tiempos de vida involucrados en estos procesos varían de 10^{-6} segundos a miles de años para el decaimiento β y de 10^{-10} a 10^{-8} segundos para el decaimiento de piones, kaones e hiperones.

4. INTERACCION GRAVITACIONAL

Esta fuerza existe entre todas las partículas debido a su masa. Es la dominante a escala cósmica, pero no es importante para el estudio de los fenómenos que ocurren entre partículas pues su intensidad es 10^{-39} veces la intensidad de la interacción fuerte. Su energía de interacción es inversamente proporcional a la distancia y por lo tanto su rango es infinito. Se ha postulado la existencia del "gravitón" como partícula mediadora de esta interacción, pero hasta ahora no se ha podido detectar.

Observando los procesos que aparecen en cada una de las interacciones, vemos que éstas están relacionadas no sólo con la atracción y repulsión entre partículas, sino también con su decaimiento, creación y aniquilación. Los tipos de interacción están muy relacionados con las partículas en sí, por ejemplo, las interacciones electromagnéticas sólo ocurren entre partículas cargadas eléctricamente. Las interacciones fuertes separan las partículas conocidas (exceptuando al fotón) en dos grupos:

HADRONES : (hadros = fuerte)

Partículas que interactúan por medio de interacción fuerte.

LEPTONES : Partículas que no experimentan tal interacción.

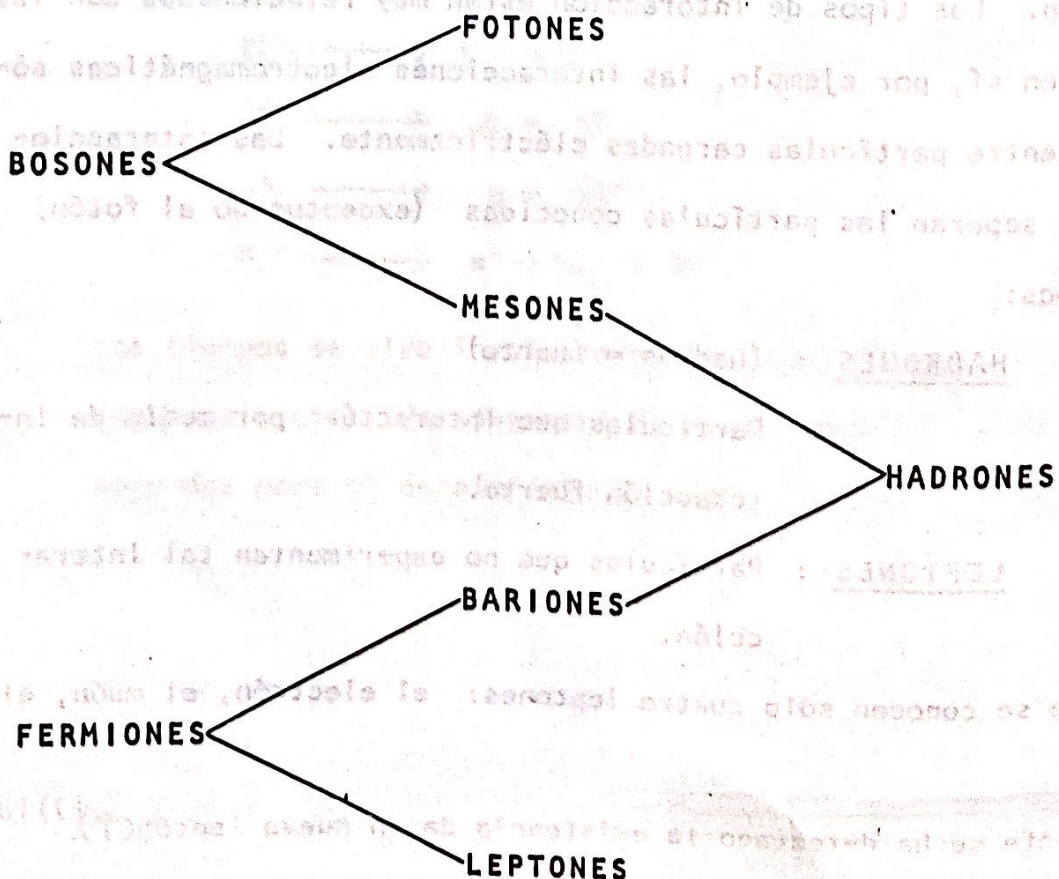
Actualmente se conocen sólo cuatro leptones: el electrón, el muón, el

* Ultimamente se ha detectado la existencia de un nuevo leptón (T)⁽⁷⁾ (8)

neutrino ν_e (asociado al electrón) y el neutrino ν_μ (asociado al muón).
 O sea que, exceptuando sólo cinco partículas (fotones y leptones) y
 sus antipartículas, todas las partículas conocidas son hadrones. Es
 entonces, en el conjunto de todos los hadrones donde necesitamos encontrar un orden.

Cada partícula tiene un momentum angular intrínseco o spin; debido a la relación spin - estadística se sabe que todas las partículas de spin semientero obedecen la estadística de Fermi-Dirac y las de spin entero, la de Bose-Einstein; por esta razón podemos dividir a las partículas en FERMIONES y BOSONES respectivamente.

Se le da el nombre de BARIONES a los fermiones-hadrones y MESONES a los bosones-hadrones, quedando el esquema de clasificación de la siguiente forma



3. SIMETRÍAS Y LEYES DE CONSERVACION

Hemos dividido a los hadrones en mesones y bariones. Para lograr una clasificación "más precisa", es necesario caracterizar más detalladamente a cada partícula. Veremos a continuación como asociarle un conjunto de números cuánticos a las partículas (los cuales las caracterizan completamente) en base a las simetrías de cada interacción y las leyes de conservación asociadas a las mismas.

Debido al desconocimiento de la forma de algunas interacciones (y por lo tanto de sus simetrías inherentes) se procede, en realidad, asumiendo determinada simetría, asignándole los respectivos números cuánticos a las partículas y verificando luego experimentalmente la consistencia de esta asignación.

3.1 SIMETRÍAS EXTERNAS

1. HOMOGENEIDAD DEL TIEMPO

En la sección anterior hemos visto varios ejemplos de decaimientos y reacciones entre las partículas. Nos podríamos preguntar si cualquier proceso que nos imaginásemos es posible, o si solamente ocurren ciertas reacciones o decaimientos; y si es así, ¿por qué?

De hecho, nunca podríamos esperar que un pión decaiga, por ejemplo, como



* Esta interacción sucede cuando las partículas en reposo, sin embargo en algún marco de referencia el momento inicial es cero, luego debe ser cero al final, prohibiendo así a π^+ . Por el principio de relatividad, esta debe cumplirse para cualquier marco de referencia.

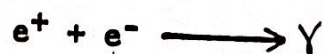
Esto se debe a que la naturaleza tiene sus leyes y en este caso se estaría pasando sobre la ley de la conservación de la energía: la energía al inicio de un proceso tiene que ser igual a la energía final del proceso. Utilizando la relación masa-energía de Einstein ($E=mc^2$) vemos que este decaimiento es imposible, pues la masa del pión es menor que la suma de las masas del neutrón y protón.

La ley de conservación de la energía restringe el número de procesos posibles. Como veremos en el capítulo 3, esta ley se debe a que el "comportamiento" de cualquier sistema físico es independiente del origen de tiempo. Esta simetría se conoce como homogeneidad del tiempo.

Tenemos entonces que en base a la simetría de los sistemas físicos ante traslaciones en el tiempo, se llega a la ley de conservación de la energía y ésta establece reglas de selección, evitando que muchos procesos sucedan. Es necesario asignarle a cada partícula un número llamado "masa en reposo" que le da una energía intrínseca para que se cumpla esta ley.

2. HOMOGENEIDAD DEL ESPACIO

Existen ciertos procesos que no violan la ley de conservación de la energía y sin embargo no ocurren; por ejemplo



En este caso, si se hace un análisis de energías, es posible que esta reacción ocurra; sin embargo, se viola la ley de conservación del momentum lineal.- El electrón y el positrón interactúan cuando están casi en reposo y por lo tanto, el momentum inicial es (aproximadamente) cero; si se conservara el momentum, éste debiera ser cero al final, pero el fotón γ tiene un momentum distinto de cero.

Para que exista conservación del momentum lineal, la reacción debe ser



con cada uno de los fotones en direcciones opuestas, para que la suma de sus momenta sea cero.

La ley de conservación del momentum lineal se debe también a una simetría: la invariancia de los sistemas físicos ante traslaciones espaciales (homogeneidad del espacio).

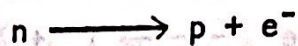
En este caso, no hay necesidad de asignarle alguna cantidad intrínseca a las partículas para que se cumpla esta ley.

3. ISOTROPIA DEL ESPACIO

Además de las anteriores, existe una tercer ley de conservación que se debe a la isotropía del espacio, es decir, a la simetría del sistema ante rotaciones espaciales; ésta es la ley de conservación del momen-

* Esta interacción puede ocurrir sin estar las partículas en reposo, sin embargo en algún marco de referencia el momentum inicial es cero, luego debe ser cero al final, prohibiendo así $e^+ + e^-$. Por el principio de relatividad, esto debe cumplirse para cualquier marco de referencia.

tum angular. Es necesario asignarle a cada partícula un número cuántico de spin o momentum angular intrínseco para que se cumpla esta ley en todos los procesos. Un electrón, por ejemplo, tiene un spin total $S = 1/2$ con dos estados posibles de spin: para arriba ($S_z = 1/2$) y para abajo ($S_z = -1/2$). Un ejemplo de un proceso que no ocurre pues viola esta ley de conservación es



en el que se observa experimentalmente que tampoco se conserva la energía. Como en el decaimiento del neutrón se observaban el protón y el electrón, se postuló la existencia del neutrino (para que se cumplieran ambas leyes) llegándose a que el decaimiento correcto (llamado decaimiento β) es



Vemos la gran fuerza que tienen las leyes de conservación, ya que basándose solamente en ellas se postuló la existencia de una nueva partícula que se detectó varios años después.

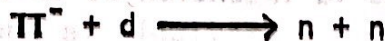
4. INVERSION ESPACIAL Y TEMPORAL (3)

En Mecánica Cuántica

cada estado de un sistema físico está descrito por una función; algunas de estas funciones tienen comportamientos definidos cuando hacemos una inversión de las coordenadas espaciales: o permanecen invariantes o cambian de signo. Decl-

mos que las primeras tienen una "paridad" +1 (par) y las segundas una paridad -1 (impar). Por ejemplo, las funciones que describen a una partícula que se mueve en un potencial central, tienen una paridad $(-1)^{\ell}$ donde ℓ es el momentum angular orbital de la partícula.

En la siguiente reacción (absorción de piones lentos por deuterio) que procede por interacción fuerte



se encuentra experimentalmente que el momentum angular orbital es 0 al inicio y 1 al final de la reacción; la paridad del sistema inicial sería entonces +1 y la del sistema final -1. Por lo tanto, si queremos que la interacción sea simétrica respecto a la operación de paridad (esto es, que la paridad se conserve) debemos asociarle a cada partícula un número cuántico multiplicativo, su paridad intrínseca $P = \pm 1$. Se ha encontrado que la paridad se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas pero no en interacciones débiles.

Algo similar sucede si consideramos una inversión de la coordenada temporal; existe también una ley de conservación asociada a esta operación, la ley de conservación de $T = \pm 1$.

También aquí se ha encontrado que T se conserva en interacciones fuertes y (dudosamente)

electromagnéticas; últimamente se ha observado que en el decaimiento débil del mesón K^0 se viola esta ley de conservación.

3.2 SIMETRÍAS INTERNAS (8) (3)

Existen leyes de conservación relacionadas con ciertas simetrías "internas": simetrías ante transformaciones gauge (de escala). El estudio de este tipo de transformaciones esta fuera de la intención de este trabajo. Nos limitaremos a decir que si a cada partícula se le asigna un campo complejo ϕ , donde la cantidad observable es $\phi\phi^*$ y si efectuamos la transformación $\phi' = e^{i\delta}\phi$ (con δ real) tendremos que $\phi'\phi'^* = \phi\phi^*$ en otras palabras, el sistema será invariante ante esta transformación.

Estas leyes de conservación nos llevan a asociarle un número cuántico aditivo a cada partícula.

1. CARGA ELECTRICA

A cada partícula se le asigna una carga eléctrica (+e, -e ó 0) de acuerdo a su comportamiento en las interacciones electromagnéticas. Si analizamos las reacciones y decaimientos que ocurren, vemos que siempre se cumple que la suma de las cargas de las partículas al inicio del proceso, es igual que la suma de las cargas de las partículas al final.

Esta es una ley de conservación y por lo tanto establece reglas de selección, prohibiendo procesos tales como



Podemos notar que esta ley de conservación difiere de las anteriores ya que se refiere a una propiedad totalmente intrínseca de las partículas, cosa que no sucede por ejemplo con la energía o el momentum angular, pues no podemos decir que la suma de las masas o espines al comienzo del proceso sea igual que su suma al final.

2. NUMERO BARIONICO

Sabemos que a los núcleos se les asigna un número de masa A igual a la suma de protones y neutrones; luego, $A = 1$ para el neutrón y el protón. Podemos generalizar el concepto de número de masa a todos los bariones; así le asignamos "número bariónico" $B = 1$ a los bariones, $B = -1$ a los antibariones y $B = 0$ a las demás partículas.

Se ha observado que cada una de las interacciones que ocurren en la naturaleza satisfacen la ley de conservación siguiente: la suma de números bariónicos de las partículas es igual al inicio y al final de una interacción. Procesos



$p \longrightarrow \pi^+ + \gamma$, por ejemplo, no ocurren pues violan esta ley.

3. NUMERO. LEPTONICO

En todos los procesos observados se cumple la ley de conservación del número leptónico L . Es decir, si asignamos $L = 1$ a los leptones, $L = -1$ a los antileptones y $L = 0$ a las demás partículas, y definimos el número leptónico total de un conjunto de partículas como la suma de números leptónicos de cada una de ellas, se puede establecer que este número es igual al inicio y al final de una interacción.

Esta ley de conservación prohíbe procesos tales como



pues en el lado izquierdo $L = -1$ y en el derecho $L = +1$.

Sin embargo, el decaimiento



es permitido por la conservación de L y no ocurre. Se ha

sugerido entonces la existencia del "número electrónico"

L_e y del "número muónico" L_μ que se conservan independientemente, de tal forma que:

$$L_e = 1 \text{ para el electrón y su neutrino}$$

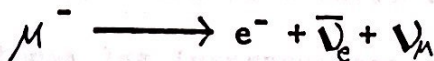
$$L_e = 0 \text{ para el muón y su neutrino}$$

con una definición opuesta para L_μ . De esta manera tenemos que

$$L = L_e + L_\mu$$

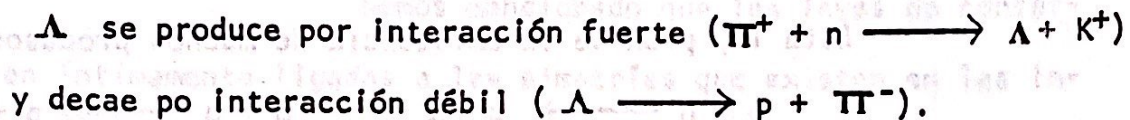
El decaimiento anterior no sucede pues $L_e = 0$ ($L_\mu = 1$) al inicio y $L_e = 1$ ($L_\mu = 0$) al final. El decaimiento correcto

es



4. EXTRAÑEZA

El caso de la extrañeza es diferente a los anteriores. Históricamente nos referimos al descubrimiento de los hiperones y kaones a los que se les llamó "partículas extrañas" pues se producían rápidamente por interacción fuerte (siempre en pares) y extrañamente decaían en un tiempo característico de las interacciones débiles. Por ejemplo,



No hay nada que prohíba que este decaimiento sea por interacción fuerte y sin embargo no ocurre así. Esto sugiere la existencia de una nueva simetría de las interacciones fuertes, la cual tendría asociada una ley de conservación de tal forma que el decaimiento mencionado no ocurra, pues violaría esta ley.

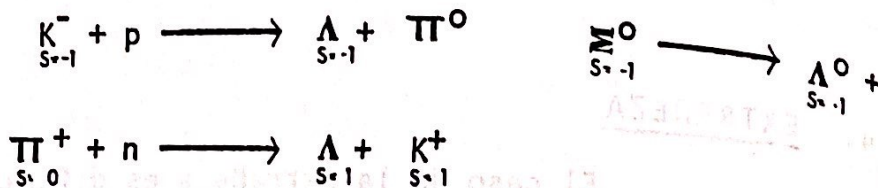
Gell-Mann y Nishijima en 1955 introdujeron el número cuántico de extrañeza S , asignándole $S = 0$ a las partículas no extrañas y

$$S(K^+) = S(K^0) = -S(\Lambda) = -S(K^-) = -S(K^0)$$

$$= -S(\bar{K}^-) = -S(\bar{K}^0) = -S(\bar{K}^+) = 1$$

$$S(\Xi^-) = S(\Xi^0) = -2$$

de forma tal que S se conserva en interacciones fuertes y electromagnéticas:

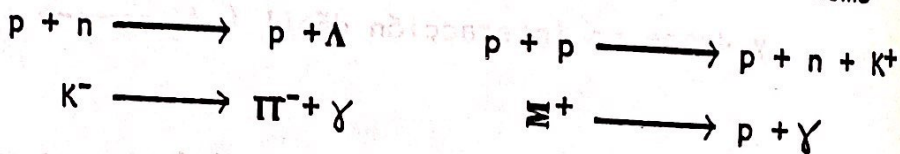


pero no en las interacciones débiles



quedando de esta forma resuelto, el problema en la rápida producción y el lento decaimiento de las partículas extrañas.

Esta ley prohíbe la existencia de muchos procesos como



3.3 OTRAS SIMETRÍAS

CONJUGACION DE CARGA Y G-PARIDAD

Si en un proceso cambiamos partículas por antipartículas, el proceso que resulta también es permitido, es decir, si ocurre $\pi^- + p \longrightarrow n + \pi^0$ también debe ocurrir $\pi^+ + \bar{p} \longrightarrow \bar{n} + \pi^0$. Esta simetría se llama "conjugación de carga" y conduce a la conservación del número C (que está definido sólo para ciertas partículas neutras) en las interacciones fuertes y electromagnéticas pero no en las débiles.

Es interesante hacer notar que si un proceso lo invertí-

mos en el tiempo, luego en el espacio y, finalmente, cambiamos partículas por antipartículas tenemos una cantidad que se conserva en todas las interacciones: CPT.

Con el fin de extender la conjugación de carga a partículas cargadas se introdujo el número cuántico de "G-Paridad", definido sólo para partículas con $B=S=0^*$. Este número se conserva sólo en las interacciones fuertes.

4. GRUPOS, ISOSPIN Y SU₃

Hemos mencionado que las leyes de conservación están íntimamente ligadas a las simetrías que existen en las interacciones. A cada simetría le corresponde una ley de conservación y por lo tanto, cada número cuántico está determinado por la existencia de una simetría.

Matemáticamente hablando, cada conjunto de estas transformaciones de simetría forma una estructura algebraica de grupo; de allí la importancia de la teoría de grupos para el estudio de las simetrías existentes en las partículas "elementales", siendo una de las principales herramientas para estudiar sus características y su comportamiento.

En base a dicha teoría, se han podido comprender muchos de los fenómenos que ocurren entre las partículas; nos puede mostrar por ejemplo, la equivalencia que existe entre simetría y ley de conservación (capítulo 3).

* La operación de G-Paridad es la composición de $e^{i\pi C}$ donde C es la conjugación de carga y $e^{i\pi I_y}$ es una rotación de 180° alrededor del eje "y" del isoespacio (concepto que desarrollaremos más adelante).

Por lo tanto, gracias a los Grupos de Simetría comprendemos mucho sobre el comportamiento de las partículas y hemos podido caracterizarla por los diversos números cuánticos y hacer una primera clasificación en base a uno de estos números (spin).

Sin embargo, la situación no es aún satisfactoria pues, como vimos al principio del capítulo, el número de mesones y bariones es muy grande y no los tenemos ordenados. En vista de la importancia que las simetrías han tenido para su caracterización y clasificación, los físicos han tratado de hallar un orden en los hadrones en base a nuevas simetrías. El primer paso en este sentido lo dió Heisenberg en 1932⁽¹⁰⁾(11) cuando introdujo el número cuántico de "isospín" (I) basándose en la teoría de Independencia de carga de las fuerzas nucleares. Heisenberg sugirió que el neutrón y el protón deberían ser tratados como diferentes estados de "spin" de una sola partícula, el nucleón, precisamente de la misma forma como un electrón con spin $1/2$ y un electrón con spin $-1/2$ son diferentes estados de spin de una sola partícula; de aquí el nombre de isospín. Al nucleón se le asignó entonces un número cuántico de isospín $I = 1/2$ con componentes de carga $I_3 = -1/2$ para el estado neutrón, $I_3 = 1/2$ para el estado protón.

A cada hadrón se le asignó un número cuántico I_3 que se conserva en las interacciones fuertes.

El número de isospín I permitió ordenar a los hadrones en grupos o isomultipletes (partículas con el mismo número de isospín). Los miembros de cada isomultiplete

te tienen aproximadamente la misma masa, pero difieren en carga, pudiéndose decir que si no hubiera interacción electromagnética (solamente interacción fuerte), entonces cada isomultiplete sería como "una sola partícula", "reduciéndose" así el número de hadrones. La fuerza electromagnética es la causante de la diferencia de masa: esta interacción rompe la simetría del grupo de isospín (grupo de rotaciones en el isoespacio) o del SU_2 (grupo especial unitario de matrices 2×2) creando así esta diferencia.

Una teoría debida a Fermi y Yang ⁽¹²⁾ sugirió que en base a este ordenamiento se podía pensar que todos los hadrones estan formados por combinaciones nucleón-antinucleón (en el capítulo 3 se expondrá este modelo). Pero este modelo falla al no tomar en cuenta a las partículas extrañas.

Buscando una mayor simetría se han construído otros modelos para ordenar o clasificar hadrones. El más exitoso ha sido EL CAMINO OCTUPLE. ⁽¹³⁾ ⁽¹⁴⁾

El camino octuple o modelo del Octeto, es una teoría basada en el rompimiento de Simetría del grupo SU_3 (grupo unitario especial de matrices 3×3) debido a las propias interacciones fuertes o una interacción semifuerte desconocida (ver capítulo 4). En base a este modelo, Gell-Mann ⁽¹⁵⁾ y Zweig ⁽¹⁶⁾ en 1964, propusieron la teoría de los QUARKS, partículas de carga fraccionaria, como constituyentes de todos los hadrones. Aunque estas partículas no se han detectado todavía, el modelo parece funcionar muy bien, sin embargo, a través de los años se le ha tenido que hacer varias modificaciones. ⁽⁴⁾ ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾

C A P I T U L O 2

TEORIA DE GRUPOS

En este capítulo trataremos todos los aspectos básicos de la Teoría de Grupos que nos serán útiles para su aplicación a las simetrías de las "partículas elementales". Estableceremos las principales ideas, dándole mayor importancia a la interpretación física que al formalismo matemático para evitar que la matemática sea un obstáculo para algún lector principiante interesado en penetrar al tema.

Primero recordaremos algunas definiciones y resultados elementales de la Teoría de Grupos, que nos serán útiles más adelante.

1. DEFINICIONES PRELIMINARES

DEFINICION 2.1:

Sea (G, \cdot) una estructura algebraica, siendo G un conjunto y \cdot una operación definida en G . Se dice que (G, \cdot) es un grupo si se cumple que:

$$i) \forall a, b \in G \Rightarrow a \cdot b \in G \quad (\text{cerradura})$$

$$ii) \forall a, b, c \in G \Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (\text{asociativa})$$

$$iii) \exists e \in G, a \cdot e = a \forall a \in G \quad (e: \text{elemento neutro})$$

$$iv) \forall a \in G \exists a^{-1} \in G, a \cdot a^{-1} = e \quad (a^{-1} \text{ elemento inverso de } a)$$

Si además, $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b \in G$ (conmutatividad)

se dice que (G, \cdot) es un grupo conmutativo o abeliano.

De aquí en ade-

lante representaremos al grupo (G, \cdot) solamente por G .

DEFINICION 2.2

Sea G un grupo. Si:

$$i) A \subseteq G \text{ y}$$

$$ii) A \text{ es un grupo}$$

entonces a A se le llama subgrupo de G .

DEFINICION 2.3

El orden de un grupo es el número de elementos que dicho grupo posee.

Por su orden podemos clasificar los grupos en finitos e infinitos. Al igual que para cualquier conjunto, un grupo infinito puede ser denumerable (si sus elementos pueden ponerse en correspondencia 1 a 1 con los naturales) o no denumerables.

DEFINICION 2.4

Sean G y F dos grupos. Si $T: G \xrightarrow{\quad} F$
 $\xrightarrow{\quad} T(g)=f$

es un mapeo tal que preserve la operación del grupo, es decir, tal que $T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2)$ se dice que T es un homomorfismo y que F y G son grupos homomorfos. Si además T es 1 a 1, es un isomorfismo y los grupos F y G son isomorfos.

DEFINICION 2.5

Sean G y F dos grupos con la misma operación tales que los elementos de G conmutan con los de F ($fg = gf \forall g \in G, f \in F$). Llamaremos producto directo de F y G y lo denotaremos como $G \otimes F$, al grupo cuyos elementos son de la forma: gf con $g \in G$ y $f \in F$.

Pasaremos ahora a tratar de una forma breve la teoría de representación de grupos, para luego ampliarla en nuestro estudio sobre grupos de Lie.

2. REPRESENTACION DE GRUPOS (17)**2.1 GENERALIDADES****DEFINICION 2.6**

Sea G un grupo, V un espacio vectorial y 0 un grupo de operadores lineales que actúan sobre V .

Si $T: G \longrightarrow 0$ es un homomorfismo

se dice que T es una representación del grupo G en el espacio V .

La dimensión de la representación se define como la dimensión del espacio V .

Si en el espacio V escogemos una base $\{y_1, y_2, \dots\}$, podemos dar una representación matricial de cada uno de los operadores $T(g)$;

este conjunto de matrices formará también un grupo homomorfo a G .

De esta forma, podemos siempre representar un grupo por medio de un conjunto de matrices.

Un ejemplo de una representación es el siguiente:

T es el mapeo que le asigna a cada elemento $g \in G$ el operador cero sobre el espacio vectorial V ($T(g)x = 0 \forall x \in V$).

Esta representación se llama representación trivial.

TEOREMA 2.1:

Sea $T: G \longrightarrow 0$ una representación no trivial de G . La imagen bajo T del elemento neutro de G , es el operador identidad.

DEMOSTRACION

$\forall g \in G: T(g) = T(ge) = T(g)T(e)$ pues T es una representación; entonces, puesto que $T(g)$ no puede ser 0 para todo g ya que la representación es no trivial, $T(e) = E$ siendo E el operador identidad.

Como otro ejemplo de representación podemos considerar el caso en que V es el espacio tal que sus vectores base sean los elementos del grupo G . En este caso tendremos una representación de dimensión n igual al orden de G , llamada representación regular. Los operadores de esta representación son matrices $n \times n$. Por ejemplo:

$$\text{sea } G = \{e, a\} \quad \begin{aligned} ee &= aa = e \\ ea &= ae = a \end{aligned}$$

Podemos tomar a V como el espacio generado por la base $B = \{|e\rangle, |a\rangle\}$

y la representación regular estaría dada por:

$$T(a)|e\rangle = ae = a = |a\rangle = 0|e\rangle + 1|a\rangle$$

$$T(a)|a\rangle = aa = e = |e\rangle = 1|e\rangle + 0|a\rangle$$

de donde

$$T(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ de igual manera tenemos que } T(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como vemos, un solo grupo puede tener varias representaciones.

Uno de los principales problemas en la Teoría de Grupos es el de encontrar todas las representaciones de un grupo dado.

2.2 REPRESENTACIONES EQUIVALENTES

TEOREMA 2.2

Sea T_1 una representación de un grupo G sobre V . Si $T_2(g) = ST_1(g)S^{-1}$ y S un operador lineal invertible que actúa de V en V' , donde V' tiene la misma dimensión que V , entonces T_2 es una representación de G en V' . T_1 y T_2 se denominan representaciones equivalentes de G .

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned} T_2(g_1 g_2) &= ST_1(g_1 g_2)S^{-1} = ST_1(g_1)T_1(g_2)S^{-1} \\ &= ST_1(g_1)S^{-1}ST_1(g_2)S^{-1} = T_2(g_1)T_2(g_2) \end{aligned}$$

De esta forma, si conocemos una representación, podemos obtener todas las representaciones equivalentes por medio de la transfor-

mación de semejanza $T'(g) = ST(g)S^{-1}$ y el problema de encontrar las representaciones de un grupo se ha reducido al de encontrar las representaciones no equivalentes.

DEFINICION 2.7

Si T es una representación de G en V , el carácter $\chi(g)$ del operador $T(g)$, $g \in G$, es la suma de los elementos diagonales (traza) de la matriz $T_{ij}(g)$ que corresponde al operador $T(g)$ en una base de V .

TEOREMA 2.3

Los caracteres de representaciones equivalentes son iguales.

DEMOSTRACION

Sean T_1 y T_2 dos representaciones equivalentes, es decir, $T_2(g) = ST_1(g)S^{-1}$; entonces el carácter de $T_2(g)$ es;

$$\begin{aligned} \chi_2(g) &= \sum_i [T_2(g)]_{ii} = \sum_{i,j} S_{ij} [T_1(g)]_{jk} S_{ki}^{-1} = \sum_j \left(\sum_i S_{ki}^{-1} S_{ij} \right) [T_1(g)]_{jk} \\ &= \sum_j \delta_{kj} [T_1(g)]_{jk} = \sum_k [T_1(g)]_{kk} = \chi_1(g) \end{aligned}$$

Se puede decir entonces que los caracteres "caracterizan" a un conjunto (clase) de representaciones equivalentes, pues tienen un valor común para todos sus elementos. Además, su valor no depende de qué base se escoja para la representación matricial de T .

2.3 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES

Podemos simplificar aún más el problema de encontrar todas las representaciones de un grupo introduciendo el concepto de irreducibilidad.

DEFINICION 2.8

Sea V un espacio vectorial, $M \subseteq V$ un subespacio y A un operador que actúa sobre V ($A: V \longrightarrow V$). Se dice que M es un subespacio invariante con respecto a A si:

$$Ax \in M \text{ para todo } x \in M$$

DEFINICION 2.9

Sea T una representación de un grupo G en el espacio V . Si existe un subespacio no trivial $M \subseteq V$ invariante respecto a todos los operadores $T(g)$, $g \in G$, se dice que la representación T es reducible. Si no existe tal subespacio, entonces T es irreducible y V es un espacio mínimo invariante o múltiplete.

Si T es una representación reducible en V , entonces, si M es un subespacio invariante de V , cada vector en M se transforma en un vector en este mismo espacio y por lo tanto, para cada $g \in G$, podemos definir el operador $T_1(g): M \longrightarrow M$ de forma tal que:

$$T_1(g)x = T(g)x \quad \forall x \in M$$

Es decir, que $T_1(g)$ es una restricción del operador $T(g)$ al subespacio M . T_1 es una representación del grupo G en M .

LEMA 2.1

Sea T una representación reducible del grupo G en el espacio V y sea V_1 un subespacio invariante. Si T es unitaria ($T^+(g) = T^{-1}(g) \forall g \in G$) entonces, el subespacio V_2 -complemento ortogonal de V_1 - también es invariante.

DEMOSTRACION

Sea $y \in V_1$ y $x \in V_2$; entonces $\forall g \in G$ $T^{-1}(g)y \in V_1$ (pues V_1 es invariante y $\langle T^{-1}(g)y | x \rangle = 0$ (pues V_1 y V_2 son ortogonales). Por ser T unitaria, tenemos que $\langle T^+(g)y | x \rangle = 0 \implies \langle y | T(g)x \rangle = 0$, es decir, que $T(g)x$ es ortogonal a " y " y por lo tanto pertenece a V_2 .

En base a este lema podemos decir que V se descompone en una suma directa de subespacios (no necesariamente mínimos) invariantes: $V = V_1 \oplus V_2$; todo $z \in V$ se puede escribir como $z = x + y$ con $x \in V_2$, $y \in V_1$.

Por esta razón, si T_1 y T_2 son las restricciones de T a los subespacios V_1 y V_2 respectivamente, tenemos que:

$$T(g)z = T_2(g)x + T_1(g)y \quad \forall g \in G$$

y decimos que la representación T se descompone en T_1 y T_2 .

Con estos resultados podemos demostrar el siguiente teorema fundamental:

TEOREMA 2.4

Sea T una representación unitaria reducible del grupo G , en un espacio V de dimensión finita. Entonces T se puede descomponer en representaciones irreducibles.

DEMOSTRACION

Como T es reducible, existen al menos dos subespacios invariantes V_1 y su complemento ortogonal V_2 , tal que $V = V_1 \oplus V_2$. T se descompone entonces en T_1 y T_2 actuando sobre V_1 y V_2 respectivamente. Si T_1 y/o T_2 son a su vez reducibles, se pueden descomponer en representaciones actuando sobre subespacios de menor dimensión. Continuando con este proceso

y basándonos en la hipótesis de que V es de dimensión finita, llegamos a que:

$$V = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \dots \oplus M_n$$

siendo los M_i subespacios mínimos invariantes.

Por lo tanto, la representación T se puede descomponer en representaciones irreducibles.

DEMOSTRACION

2.4 PRODUCTO DIRECTO DE REPRESENTACIONES

Podemos notar que si escogemos como base para la representación T el conjunto de los vectores base de los subespacios mínimos invariantes, entonces las matrices correspondientes a los operadores

$T(g)$ tienen la forma:

Sea G un grupo, T_1 y T_2 dos representaciones

de G sobre los espacios V_1 y V_2 . Sean $\{v_i\}$ los elementos

$$[T(g)] = \begin{bmatrix} [T_a(g)] & & & \\ & [T_b(g)] & & \\ & & \circ & \\ & & & \dots \\ & & & & [T_r(g)] \end{bmatrix}$$

Hemos reducido el problema de encontrar todas las representaciones (no equivalentes) de un grupo, al de encontrar solamente las representaciones irreducibles.

Continuaremos ahora con una propiedad de las representaciones irreducibles que en muchos casos simplifica su búsqueda y además nos será de mucha utilidad (físicamente hablando) en el desarrollo posterior del trabajo.

LEMA 2.2
(DE SCHUR)

Si T es una representación irreducible de G y si existe un operador H tal que:

$$T(g)H = HT(g) \quad \forall g \in G,$$

entonces H debe ser un múltiplo del operador identidad ($H = \lambda E$).

DEMOSTRACION

Consideremos la ecuación de eigenvalores para el operador H : $Hx = \lambda x$.

Sea $M \subseteq V$ el subespacio generado por los eigenvectores del eigenvalor λ . $M \neq \phi$,

pues la ecuación característica $\text{Det}(H - \lambda E) = 0$ siempre tiene solución en el plano complejo.

Por hipótesis

$$HT(g)x = T(g)Hx = T(g)\lambda x = \lambda(T(g)x),$$

esto quiere decir que el vector $T(g)x$ es eigenvector de H con eigenvalor λ .

Por lo tanto, $T(g)x \in M$. Luego

M es un subespacio invariante de V . Sin embargo, como la representación T es irreducible, M debe ser un subespacio trivial; como $M \neq \emptyset$, $M = V$. Esto implica que $Hx = \lambda x \forall x \in V$ o sea que $H = \lambda E$.

Este lema simplifica la búsqueda de representaciones irreducibles, ya que, si conocemos el centro del grupo (conjunto de elementos de G que conmutan con todos los demás), el problema de encontrar las representaciones irreducibles se limita al problema de diagonalizar los operadores correspondientes.

2.4 PRODUCTO DIRECTO DE REPRESENTACIONES (17) (18)

Trataremos ahora con una operación entre representaciones que nos será de gran utilidad más adelante.

Sea G un grupo, T_1 y T_2 dos representaciones de G sobre los espacios V_1 y V_2 . Sean $[T_1(g)]_{k\ell}^n$ los elementos ma-

triciales de $T_1(g)$ en la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V_1 y $[T_2(g)]_{k,l}^m$ los elementos matriciales de $T_2(g)$ en la base $\{f_k\}_{k=1}^m$ de V_2 .

Consideremos el espacio abstracto V -"producto" de V_1 y V_2 - de dimensión mn , cuya base consiste de todos los productos:

$$e_i f_k \quad i = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Podemos definir el operador $T(g)$ actuando sobre V de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T(g)e_i f_k &= (T_1(g)e_i)(T_2(g)f_k) = \left(\sum_{i'} T_{i'i}(g) e_{i'} \right) \left(\sum_{k'} T_{k'k}(g) f_{k'} \right) \\ &= \sum_{i', k'} T_{i'i}(g) T_{k'k}(g) e_{i'} f_{k'} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Los elementos matriciales de $T(g)$ en la base $e_i f_k$ serán entonces

$$[T(g)]_{\alpha\beta}^{n \times m} = [T_1(g)]_{\alpha_i}^n [T_2(g)]_{\beta_k}^m \quad (2.2)$$

TEOREMA 2.5

La correspondencia $T: G \longrightarrow T^0(g)$ donde $T(g)$ está definido según la ecuación (2.1); es una representación de G de dimensión mn , llamada el producto directo de las representaciones T_1 y T_2 y se representa como

$$T(g) = T_1(g) \otimes T_2(g).$$

DEMOSTRACION

Consideremos

$$\begin{aligned} [T(g_1 g_2)]_{\alpha\beta}^{n \times m} &= [T_1(g_1 g_2)]_{\alpha_i}^n [T_2(g_1 g_2)]_{\beta_k}^m \\ &= \sum_{j_1} [T_1(g_1)]_{\alpha_j}^n [T_1(g_2)]_{j_1}^n [T_2(g_1)]_{\beta_1}^m [T_2(g_2)]_{\beta_k}^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j} [T_1(g_1)]_{ij} [T_2(g_1)]_{ji} [T_1(g_2)]_{ik} [T_2(g_2)]_{ki} \\
 &= \sum_{i,j,k} [T(g_1)]_{ij} [T(g_2)]_{jk} = [T(g_1)T(g_2)]_{ik} \\
 &\longrightarrow T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)
 \end{aligned}$$

Un resultado importante que se deduce de la ecuación (2.2) es que el carácter de la representación producto es igual que el producto de los caracteres de las representaciones originales:

$$\chi^{nm}(g) = [T(g)]_{\alpha\beta}^{n \times m} = [T(g)]_{\alpha\alpha}^n [T(g)]_{\beta\beta}^m = \chi^n(g) \chi^m(g)$$

La representación producto por lo general será reducible y por el teorema 2.4 se puede descomponer en

$$T_1 \otimes T_2 = T_a \oplus T_b \oplus T_c \oplus \dots \oplus T_d$$

que es la llamada serie de Clebsch-Gordan y será de suma importancia al tratar sistemas acoplados.

3. GRUPOS DE LIE ^{(17) (19) (20)}

Hasta ahora no hemos hecho alguna restricción sobre el grupo G . Debido a que los grupos de simetría que nos interesan pertenecen a una clase especial, grupos de Lie. Nos limitaremos de aquí en adelante al estudio de estos grupos.

DEFINICION 2.10

Sea G un grupo infinito no denumerable; diremos que G es un Grupo Local de Lie* de dimensión m si:

* De aquí en adelante a un Grupo Local de Lie lo llamaremos simplemente Grupo de Lie.

- i) Cada uno de sus elementos se puede caracterizar completamente por un número finito de parámetros reales: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$
- ii) Los parámetros que caracterizan al elemento neutro e de G son iguales a 0 (si $g=e \Rightarrow \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bar{0}$)
- iii) Para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$ tal que $g_1 g_2 = g_3$, si $\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^m, \{\gamma_i\}_{i=1}^m$ son los parámetros de g_1, g_2 y g_3 respectivamente, entonces:

$$\gamma_i = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

siendo las ϕ_i funciones continuas y diferenciables en una vecindad suficientemente pequeña de $\bar{\alpha} = 0$.

- iv) Sean $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_2 = g_1^{-1}$. Si $\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^m$ son los parámetros de g_1 y g_2 respectivamente, entonces:

$$\beta_i = \xi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

con las ξ_i funciones continuas y diferenciables en una vecindad suficientemente pequeña de $\bar{\alpha} = 0$.

Como ejemplo de un grupo de Lie, consideremos el grupo de rotaciones en el espacio por un ángulo α alrededor del eje Z . Podemos representar cada operador de rotación por una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ +\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, cada elemento del grupo se puede caracterizar por un parámetro que es el ángulo de rotación α (número real). Cuando $\alpha = 0$, la matriz de rotación es la matriz unidad (elemento neutro del grupo). Si R es la composición de las rotaciones R_1 y R_2 con parámetros α_1 y α_2 respectivamente, entonces, el parámetro de R será $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

(función continua y diferenciable); por último, el elemento inverso de la rotación R (en un ángulo α) es una rotación con parámetro $\beta = -\alpha$.

Al hablar de parámetros nos referiremos siempre a parámetros esenciales, es decir, al número mínimo de parámetros capaces de caracterizar completamente a un elemento.

Consideremos ahora las representaciones T de un grupo de Lie G . Como un elemento $g \in G$ está totalmente determinado por parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, podemos decir que el operador $T(g)$ es una función de los parámetros $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$.

$$T(g) = T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \equiv T(\vec{\alpha})$$

Si T es una representación matricial, entonces cada elemento $T_{ik}(g)$ de la matriz es función de los parámetros α_i (como en el caso de las rotaciones).

DEFINICION 2.11

Si T es una representación de G y $T_{ik}(g)$ son los elementos matriciales de $T(g)$ en una base dada, diremos que T es diferenciable si cada elemento $T_{ik}(\vec{\alpha})$ es diferenciable en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, siendo los α_i los parámetros del elemento g .

Podemos ahora hablar de las derivadas del operador $T(\vec{\alpha})$: $\partial T(\vec{\alpha}) / \partial \alpha_j$ es el operador cuyos elementos matriciales en una base dada están dados por

$$\frac{\partial T_{ik}(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_j}$$

DEFINICION 2.12

Sea T una representación diferenciable de un grupo de Lie G de dimensión m , con parámetros $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$. A los m operadores:

$$i \frac{\partial T(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \Big|_{\bar{\alpha}=0} = I_j$$

les llamaremos Operadores Infinitesimales o Generadores del grupo G .

Como veremos más adelante, estos operadores juegan un papel fundamental por su significado físico. Por ejemplo, si el grupo G es el grupo de rotaciones en el espacio, los generadores serán los operadores de Momentum Angular. Por ahora, mostraremos la gran importancia que tienen estos operadores en el desarrollo de la teoría de representaciones de grupos de Lie.

TEOREMA 2.6

Sea G un grupo de Lie de dimensión m . Una representación T de G en un espacio V está determinada en forma única por los operadores infinitesimales.

DEMOSTRACION

Para un vector arbitrario x en V , sea

$$y(g) = T(g)x, \quad \forall g \in G \quad (2.3)$$

entonces

$$y(g^{-1}) = T(g^{-1})x$$

Multiplicando ambos lados por $T(h)$, $h \in G$ tenemos,

$$T(h)y(g^{-1}) = T(h)T(g^{-1})x = T(hg^{-1})x$$

Si hacemos $hg^{-1} = f$ tenemos:

$$T(fg)y(g^{-1}) = T(f)x = y(f) \quad (2.4)$$

Sean $\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^m$ los parámetros de f y g respectivamente;

entonces por la definición de grupo de Lie, los parámetros de

fg son $\delta_i = \phi_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, funciones

continuas y diferenciables (independientes de la representación).

Derivando la ecuación (2.4) con respecto a α_j ; (g fijo):

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (T(fg)y(g^{-1})) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial T(fg)}{\partial \delta_i} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_j} y(g^{-1})$$

Si ahora hacemos $g = f^{-1}$, entonces $fg = e$ y $\delta_i = 0 \forall i=1, \dots, m$.

Por lo tanto,

$$i \frac{\partial T(fg)}{\partial \delta_i} \Big|_{g=f^{-1}} = I_i \quad (\text{operador infinitesimal})$$

de donde "y" cumple con el sistema de ecuaciones de primer or-

den

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m I_i S_{i,j}(f) y(f) \quad (2.5)$$

con

$$S_{i,j}(f) = \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_j} \Big|_{g=f^{-1}} \quad (2.6)$$

La ecuación (2.5) con $j=1, \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^m I_i S_{i,1} y(\alpha_1, 0, 0, \dots, 0)$$

y la condición inicial

$$y(e) \equiv y(0, 0, \dots, 0) = x \quad (2.7)$$

determinan en forma única la función $y(\alpha_1, 0, \dots, 0)$. Tomando

ahora $j=2; \alpha_3 = \alpha_4 = \dots = \alpha_m = 0$ tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^m I_i S_{i,2} y(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0)$$

DEFINICIÓN 2.7. Con esta ecuación y el valor de $y(\alpha_1, 0, \dots, 0)$ como condición inicial, se puede determinar unívocamente a la función $y(\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, \dots, 0)$. Continuando este proceso hasta $j = m$, llegamos a la determinación unívoca de $y(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = y(f)$.

Pero, por definición (ecuación (2.3)) $y(f) = T(f)x$; como x es arbitraria, determinar $y(f)$ es equivalente a determinar $T(f)$. $T(f)$ depende sólo de las ecuaciones (2.5) y la condición inicial (2.7). Como las S_{ij} son independientes de la representación, entonces, dados los I_j se puede encontrar de forma única una representación T , con lo que termina la demostración del teorema.

Este teorema muestra la gran importancia de los operadores infinitesimales, ya que el problema de encontrar una representación de un grupo de Lie G , se reduce al de encontrar los generadores (nótese, que en la demostración del teorema se mostró como encontrar T dados los I_j). Este último problema se simplificará por el uso de los teoremas siguientes.

TEOREMA 2.7

Los operadores infinitesimales $I_j, j = 1, 2, \dots, m$ correspondientes a una representación T de un grupo de Lie G de dimensión m , satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[I_j, I_k] = I_j I_k - I_k I_j = \sum_{l=1}^m C_{jkl} I_l \quad (2.8)$$

donde las constantes C_{jkl} no dependen de la representación

T. A las C_{ijk} se les llama Constantes Estructurales.

DEMOSTRACION

Sabemos que para una representación T, la ecuación (2.5) tiene una solución. La condición necesaria y suficiente

para que esta ecuación tenga solución es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} \quad (2.8)$$

En base a ésto -como condición necesaria- demostraremos que (2.9) implica (2.8).

Del sistema

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^m S_{ij} l_i y(f)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_k \partial \alpha_j} &= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_k} l_i y(f) + S_{ij}(f) l_i \frac{\partial y}{\partial \alpha_k} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{ij}(f)}{\partial \alpha_k} l_i y(f) + \sum_{i,l=1}^m S_{ij}(f) l_i S_{lk}(f) l_l y(f) \end{aligned}$$

de la misma forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_j \partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial S_{ik}(f)}{\partial \alpha_j} l_i y(f) + \sum_{i,l=1}^m S_{ik}(f) S_{lj}(f) l_l l_i y(f)$$

Igualando las expresiones anteriores

$$\sum_{i,l=1}^m S_{lk}(f) S_{ij}(f) [l_i l_l - l_l l_i] y(f) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial S_{ik}}{\partial \alpha_j} \right) l_i y(f)$$

Haciendo $f = e$ y usando:

$$S_{ij}(e) = \delta_{ij}$$

(directo de (2.6))

$$y(e) = x$$

(2.10)

se tiene que

$$(l_j l_k - l_k l_j) x = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial S_{ik}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_k} \right)_{f=e} l_i x$$

Como el vector x es arbitrario, se cumple

$$[l_j, l_k] = l_j l_k - l_k l_j = \sum_{i=1}^m C_{ijk} l_i$$

con

$$C_{ijk} = \left(\frac{\partial S_{ik}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_k} \right)_{f=e} \quad (2.11)$$

Independientes de la representación T .

También se cumple el siguiente teorema que daremos sin demostración. (17)

TEOREMA 2.8

Si cualquier conjunto de operadores lineales A_1, A_2, \dots, A_m definidos en un espacio V , satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los operadores infinitesimales l_1, l_2, \dots, l_m :

$$[A_j, A_k] = \sum_{i=1}^m C_{ijk} A_i$$

entonces, los operadores A_i son los generadores de una cierta representación T del grupo de Lie G en el espacio V .

(7) Estos teoremas muestran el papel fundamental que juegan las constantes estructurales en la búsqueda de las representaciones de un grupo de Lie: conocidas estas constantes se pueden determinar las relaciones de

conmutación entre los generadores y el problema de encontrar una representación se reduce al de encontrar un conjunto de operadores que satisfagan estas relaciones.

El espacio generado por los operadores infinitesimales forma una estructura de álgebra con el conmutador como producto. Esta álgebra es conocida como Álgebra de Lie. Con estos teoremas, hemos mostrado la íntima relación que existe entre los grupos y las álgebras de Lie.

Algunas propiedades del "producto de Lie":

$$[A, B] = -[B, A] \quad (2.13)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \quad (2.14)$$

$$[A, B C] = [A, B] C + B [A, C] \quad (2.15)$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \text{ (identidad de Jacobi)} \quad (2.16)$$

con A, B y C operadores lineales cualesquiera.

En base a las relaciones

(2.13) y (2.16) podemos obtener que las constantes estructurales satisfacen

$$C_{ijk} = -C_{jik} \quad (2.17)$$

$$C_{jkm} C_{imn} + C_{kim} C_{jmn} + C_{ijm} C_{kmn} = 0 \quad (2.18)$$

Usando (2.17), la ecuación (2.18) se puede escribir como

$$C_{ikm} C_{jmn} - C_{jkm} C_{imn} = -C_{ijm} C_{mkn} \quad (2.19)$$

Si ahora definimos un conjunto de m matrices R_i mediante

$$(R_i)_{jk} = -C_{ijk}$$

la ecuación (2.19) puede ser escrita como

$$(R_i)_{km} (R_j)_{mn} - (R_j)_{km} (R_i)_{mn} = C_{ijm} (R_m)_{kn}$$

$$\delta [R_i, R_j] = C_{ijm} R_m$$

Por lo tanto, según el teorema (2.8), las matrices R_i son los generadores de una representación de dimensión m del grupo G . A esta representación se le llama representación regular ^{*} del grupo de Lie G .

$$(2.13) \quad [A, B] = -[B, A]$$

$$(2.14) \quad [A, B + C] = [A, B] + [A, C]$$

$$(2.15) \quad [A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

* La representación regular es irreducible si y solo si el grupo es simple (no tiene subgrupos invariantes). Los grupos SU_2 y SU_3 son simples.

Veremos en este capítulo la importancia que tiene la Teoría de Grupos para tratar las simetrías existentes en los sistemas físicos. Estableceremos la importante relación entre simetrías y leyes de conservación. Consideraremos las simetrías de un sistema aislado ante rotaciones en el espacio y traslaciones en el espacio y tiempo (cada una de estas transformaciones define un grupo de Lie). Desarrollaremos más en detalle el grupo de rotaciones en el espacio, debido a su isomorfismo con el grupo de isospín. Este último grupo nos será muy útil para la clasificación de partículas y nos introducirá al grupo de mayor simetría SU_3 , que trataremos en el capítulo siguiente.

1. CONCEPTO DE GRUPO EN FÍSICA

La física, para estudiar un evento en el Universo, lo localiza en el espacio y en el tiempo; y su interés principal es estudiar el cambio que ocurre en el arreglo materia-energía dentro del espacio-tiempo.

El cambio al que nos referimos, puede ser el de un estado de un sistema físico en otro estado del mismo sistema (por ejemplo, una rotación de un sistema de partículas elementales); para estudiarlo se utiliza un modelo matemático, asignándole a cada es-

tado una función de onda, elemento de un espacio vectorial, y representando el cambio por un operador o transformación que actúa en este espacio.

Matemáticamente hablando, un operador actúa sobre los elementos de un conjunto dado, transformándolos en los elementos de algún otro conjunto. Nos interesa, en Física, relacionar estados de un mismo sistema, por lo que tomaremos solamente operadores que relacionen elementos de un mismo conjunto.

Trataremos de caracterizar estos operadores en base a ideas físicas:

Sean $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ diferentes estados, y $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ operadores sobre este conjunto de estados. Si podemos transformar el estado ψ_1 en el estado ψ_2 y éste último en el estado ψ_3 , podemos también transformar el estado ψ_1 en el estado ψ_3 . Matemáticamente, si $\psi_2 = \mathcal{U}_1 \psi_1$ y $\psi_3 = \mathcal{U}_2 \psi_2$ tenemos que $\psi_3 = \mathcal{U}_2 (\mathcal{U}_1 \psi_1)$; podemos escribir ésto como $(\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1) \psi_1 = \psi_3$, o sea que existe un operador $\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1$ que tiene el mismo efecto de aplicar sucesivamente \mathcal{U}_2 y \mathcal{U}_1 . (propiedad de cerradura). Si tenemos tres transformaciones sucesivas;

$$\psi_2 = \mathcal{U}_1 \psi_1, \quad \psi_3 = \mathcal{U}_2 \psi_2, \quad \psi_4 = \mathcal{U}_3 \psi_3$$

y queremos transformar el estado ψ_1 en el ψ_4 ; lo podemos hacer de varias formas:

i) transformando el estado ψ_1 en el ψ_3 y luego el ψ_3 en el ψ_4 :

$$\psi_4 = \mathcal{U}_3 (\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1) \psi_1$$

ii) transformando el estado ψ_1 en el ψ_2 y éste en el ψ_4 :

$$\psi_4 = (\mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2) \mathcal{U}_1 \psi_1$$

Entonces $(\mathcal{U}_3 \mathcal{U}_2) \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_3 (\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1)$

(asociatividad)

Podemos dejar el sistema físico en el mismo estado, lo que matemáticamente estaría representado por la existencia del operador identidad E (elemento neutro).

Por último, si $\psi_2 = \mathcal{U}\psi_1$, debe existir \mathcal{U}^{-1} tal que

$$\psi_1 = \mathcal{U}^{-1}\psi_2 :$$

$$\psi_2 = \mathcal{U}\psi_1 \implies \exists \mathcal{U}^{-1} \rightarrow \mathcal{U}^{-1}\psi_2 = \psi_1 \implies \mathcal{U}\mathcal{U}^{-1} = E$$

Comparando los resultados de este análisis con la Definición 2.1, concluimos que este conjunto de transformaciones tiene una estructura de grupo.

Por esta razón, podemos aplicar los resultados de la teoría de grupos al conjunto de transformaciones que relacionan estados de sistemas físicos entre sí. Es más, ya que los elementos de este grupo son operadores que actúan sobre un espacio vectorial, el grupo es imágen de sí mismo ante una representación: la representación identidad (se puede hablar entonces de los generadores del grupo, de los subespacios invariantes ante el grupo, etc.)

La Teoría de Grupos se empezó a aplicar en física, y en especial en Mecánica Cuántica por H. Weyl y E.P. Wigner en 1925. Desde entonces, ha tenido un papel muy importante, especialmente debido a la introducción de los grupos de simetría (grupos de transformaciones que dejan invariante un sistema). Las simetrías se han usado, por ejemplo, para la clasificación de cristales; y en nuestro caso las utilizaremos para la clasificación de partículas.

2. REPRESENTACIONES, DEGENERANCIA Y SIMETRIA ^{(19) (22) (23)}

Los principales grupos que se trabajan en física son grupos de transformaciones que actúan sobre las variables tiempo y posición (por ejemplo, traslaciones en el espacio: $U(\bar{a})\bar{r} = \bar{r} - \bar{a}$).

En Mecánica Cuántica, para un sistema físico dado, existe una función de estado $\psi(\bar{r}, t)$ que resume todo lo que podemos saber acerca de este sistema. Además, cada observable se representa por un operador hermítico A que actúa sobre estas funciones. Es interesante entonces preguntarse cómo se transforman $\psi(\bar{r}, t)$ y A si sabemos cómo se transforman \bar{r} y t ante un grupo de transformaciones.

Para simplificar, llamemos " x " a una de las variables \bar{r} ó t .

Analizaremos primero cómo se transforman las funciones $\psi(x)$.

Sea $\{U_i\}$ un grupo de operadores actuando sobre x ($x' = U x$). Si sustituimos $x = U^{-1}x'$ en $\psi(x)$ obtenemos $\psi(U^{-1}x') = \phi(x')$ donde ϕ es una nueva función. Así podemos asociar a cada transformación U un operador lineal \mathcal{U} que transforma la función ψ en la función ϕ :

$$\mathcal{U}\psi(x) = \phi(x) = \psi(U^{-1}x). \quad (3.1)$$

TEOREMA 3.1

$\mathcal{G} = \{\mathcal{U}_i\}$ es un grupo isomorfo a $G = \{U_i\}$

DEMOSTRACION

Por su definición, es directo que la relación entre \mathcal{G} y G es uno a uno. Sólo nos resta demostrar que la operación del grupo se preserva, es decir que $U_i U_j = U_k \implies U_i U_j = U_k$; ésto es claro pues:

$$\begin{aligned} U_i U_j \psi(x) &= U_i \psi(U_j^{-1}x) = U_i \phi(x) = \phi(U_i^{-1}x) = \psi(U_j^{-1}U_i^{-1}x) \\ &= \psi((U_i U_j)^{-1}x) = \psi(U_k^{-1}x) = U_k \psi(x) \end{aligned}$$

Veremos ahora como se transforman los operadores A .

Sean las funciones ψ_1 y ψ_2 elementos de un espacio vectorial \mathcal{X} y A_x un operador lineal que actúa sobre este espacio, tal que:

$$A_x \psi_1(x) = \psi_2(x)$$

(el subíndice "x" indica que A es un operador cuya acción depende del punto en el cual la función es evaluada).

Si al efectuar la transforma-

ción $x' = Ux$ las funciones $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ se transforman en

$\phi_1(x) = U \psi_1(x)$ y $\phi_2(x) = U \psi_2(x)$ respectivamente, el operador

A debe transformarse en el operador B_x tal que:

$$B_x \phi_1(x) = \phi_2(x)$$

Podemos ver que $B_x = A_{U^{-1}x}$ pues:

$$A_x \psi_1(x) = \psi_2(x) \implies A_{U^{-1}x'} \psi_1(U^{-1}x') = \psi_2(U^{-1}x')$$

$$\implies A_{U^{-1}x'} \phi_1(x') = \phi_2(x')$$

$$\longrightarrow A_{U^{-1}x} \phi_1(x) = \phi_2(x)$$

TEOREMA 3.2

Para todo $U \in G$, $U \in G$:

$$U A_x U^{-1} = B_x$$

DEMOSTRACION

Consideremos

$$U A_x \psi(x) = U \phi(x) = \phi(U^{-1}x); U \in G$$

entonces

$$U A_x U^{-1} U \psi(x) = \phi(U^{-1}x)$$

$$U A_x U^{-1} \psi(U^{-1}x) = \phi(U^{-1}x)$$

Sabemos que.

$$A_{U^{-1}x} \psi(U^{-1}x) = \phi(U^{-1}x)$$

entonces

$$U A_x U^{-1} \psi(U^{-1}x) = A_{U^{-1}x} \psi(U^{-1}x) \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

o sea

$$U A_x U^{-1} = A_{U^{-1}x} = B_x \quad (3.2)$$

DEFINICION 3.1

Si $A_x = B_x \quad \forall U \in G$ se dice que A_x es un operador invariante del grupo G . Además si $\phi(x) = \psi(U^{-1}x) = \psi(x)$ se dice que ψ es una función invariante ante G .

Si A_x es invariante, tenemos que $U A_x U^{-1} = A_x \Rightarrow U A_x = A_x U$; entonces podemos decir que un operador es invariante bajo la acción de un grupo si conmuta con todos los operadores del grupo.

Consideremos ahora el problema de eigenvalores:

$$A_x \psi(x) = \lambda \psi(x) ; \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

con A_x operador Hermítico ($A = A^\dagger$) invariante bajo \mathcal{G} ; es claro que

$$A_x \mathcal{U} \psi(x) = \mathcal{U} A_x \psi(x) = \lambda \mathcal{U} \psi(x)$$

o sea que $\mathcal{U} \psi(x)$ es un eigenvector de A_x con eigenvalor λ .

Si λ es

no degenerado entonces $\mathcal{U} \psi(x) = T(U) \psi(x)$, donde el coeficiente escalar T depende del elemento U del grupo \mathcal{G} que se esté considerando. Si

λ es degenerado con multiplicidad μ ;

$$A_x \psi_i(x) = \lambda \psi_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, \mu$$

donde las ψ_i son linealmente independientes. Como

$$A_x \mathcal{U} \psi_i(x) = \lambda \mathcal{U} \psi_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, \mu$$

Luego

$$\mathcal{U} \psi_i(x) = \sum_{j=1}^{\mu} T_{ji}(U) \psi_j(x)$$

Vemos entonces que el espacio generado por las ψ_i es invariante bajo la acción de \mathcal{G} .

Además

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \psi_i(x) &= \mathcal{U}_1 \sum_{j=1}^{\mu} T_{ji}(U_2) \psi_j(x) = \sum_{j=1}^{\mu} T_{ji}(U_2) \mathcal{U}_1 \psi_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} T_{kj}(U_1) T_{ji}(U_2) \psi_k(x) \quad (\text{por ser } \mathcal{U}_1 \text{ lineal}); \end{aligned}$$

pero

$$\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \psi_i(x) = \sum_{k=1}^{\mu} T_{ki}(U_1 U_2) \psi_k(x)$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\mu} \left\{ T_{ki}(U_1 U_2) - \sum_{j=1}^{\mu} T_{kj}(U_1) T_{ji}(U_2) \right\} \psi_k(x) = 0$$

y como las ψ_k son linealmente independientes

$$T_{ki}(U_1 U_2) = \sum_{j=1}^{\mu} T_{kj}(U_1) T_{ji}(U_2) \quad \forall i, k=1, \dots, \mu$$

por lo que el conjunto de matrices $T(U_\lambda)$ es un grupo homomorfo a G y a \mathcal{G} y la correspondencia $U \longrightarrow T(U)$ es una representación del grupo G . Si el subespacio generado por las ψ_k , $k=1, \dots, m$ es mínimo invariante o multiplete, tenemos una representación irreducible. Si éste es el caso, hemos mostrado que un operador invariante puede dividir un espacio en subespacios mínimos invariantes, cuya suma directa nos reproduciría el espacio original (teorema 2.4), y cada subespacio está caracterizado por un eigenvalor del operador.

El lema de Schur (Lema 2.2) se podría escribir entonces:

"Cualquier operador invariante ante un grupo \mathcal{G} tiene cada vector en un multiplete de \mathcal{G} como eigenvector y es completamente degenerado sobre cada multiplete".

Esta relación entre representaciones y degenerancia será sumamente útil en el desarrollo posterior del trabajo.

Ciertas transformaciones $U(x' = Ux)$ dejan invariante la forma de la interacción; éstas inducen un grupo de transformaciones \mathcal{U} que actúan sobre las funciones ψ y dejan invariante al hamiltoniano H . Como el hamiltoniano es un operador que contiene toda la información referente al movimiento del sistema ($H\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}$), la invariancia del hamiltoniano ante alguna transformación es equivalente a la invariancia de las leyes del movimiento del sistema.

DEFINICION 3.2

Sea G un grupo de transformaciones; diremos que G es un Grupo de Simetría, si el hamiltoniano H es un operador invariante de G .

Un conjunto completo de eigenfunciones degeneradas del hamiltoniano servirá de base para representaciones irreducibles del grupo G ; o si no, en el caso de degenerancia accidental, éstas serán base para representaciones reducibles de G , que se pueden descomponer (por el teorema 2.4) en una suma de representaciones irreducibles.

Este resultado nos hace suponer que si conocemos un conjunto de partículas con la misma masa (funciones de onda degeneradas), debe de existir un grupo de simetría tal, que estas funciones sean base para un múltiplete de dicho grupo. Este hecho es de suma importancia en la introducción del grupo SU_3 .

3. GRUPO DE TRASLACIONES EN EL TIEMPO Y LEYES DE CONSERVACION (17) (24)

Consideremos un sistema físico sujeto a una traslación en el tiempo $U(\tau)$. Los operadores $U(\tau)$, actúan sobre la variable tiempo:

$$U(\tau)t = t - \tau$$

y forman una estructura de grupo de Lie con parámetro τ . Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, las funciones de onda se transforman según los operadores $U(\tau)$ como

$$U(\tau)\psi(r, t) = \psi(r, t + \tau).$$

Por otro lado, si el hamiltoniano es independiente del tiempo* podemos integrar formalmente la ecuación de Schroedinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

y obtenemos

$$\psi(r, t) = e^{-itH} \psi(\vec{r}, 0)$$

luego

$$\begin{aligned} \psi(r, t+\tau) &= e^{-i\tau H} e^{-itH} \psi(\vec{r}, 0) \\ &= e^{-i\tau H} \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Es claro entonces que

$$U(\tau) = e^{-i\tau H}$$

(como H es hermítico, U es unitario).

Derivando la ecuación anterior con respecto a τ y valuando en $\tau = 0$ tenemos

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} = H e^{-i\tau H} \Rightarrow i \left. \frac{\partial U}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = H$$

Entonces, H es el generador del grupo monoparamétrico (parámetro τ) de traslaciones temporales.

Podemos ver a los operadores $U = e^{-i\tau H}$ como operadores de evolución temporal del sistema en el tiempo $t = 0$ ($\psi(\vec{r}, 0)$), y si lo dejamos evolucionar libremente (sin algún agente externo que lo perturbe), sabremos que en el tiempo τ el sistema estará en el estado $e^{-i\tau H} \psi(\vec{r}, 0)$.

Basándonos en estas ideas definiremos lo que es una cantidad que se conserva.

* Si H depende de t, la ecuación de Schroedinger no se puede integrar directamente y se obtiene un resultado diferente (24)

DEFINICION 3.3

Se dice que una observable física representada por un operador hermítico A se conserva si A es un operador invariante del grupo de traslaciones temporales: $A = e^{-i\tau H} A e^{i\tau H}$.

El hecho de que exista una cantidad física que se conserva es llamado Ley de Conservación para dicha cantidad.

El siguiente teorema le da mayor significado físico a la definición anterior.

TEOREMA 3.3

Si el operador A representa una cantidad que se conserva entonces, si en un tiempo $t = t_0$, el valor esperado del operador A es

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi(r, t_0) | A | \psi(r, t_0) \rangle$$

entonces, el valor esperado de A para cualquier otro tiempo es también $\langle A \rangle$.

DEMOSTRACION

$$\langle A \rangle_{t=t_0} = \langle \psi(\vec{r}, t_0) | A | \psi(\vec{r}, t_0) \rangle$$

$$\langle A \rangle_{t=t} = \langle \psi(\vec{r}, t) | A | \psi(\vec{r}, t) \rangle$$

$$= \langle \psi(r, t_0) | e^{i(t-t_0)H} A e^{-i(t-t_0)H} | \psi(\vec{r}, t_0) \rangle$$

Pero por hipótesis

$$e^{i(t-t_0)H} A e^{-i(t-t_0)H} = A$$

entonces

$$\langle A \rangle_{t=t} = \langle \psi(r, t_0) | A | \psi(r, t_0) \rangle = \langle A \rangle$$

TEOREMA 3.4

El operador A representa una cantidad física que se conserva $\Leftrightarrow [A, H] = 0$

DEMOSTRACION

SI

$$\begin{aligned}
 [A, H] = 0 &\Rightarrow AH = HA \Rightarrow AH^n = H^n A \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \\
 &\Rightarrow A(E + (i\hbar H) + \frac{(i\hbar H)^2}{2!} + \dots) = (E + i\hbar H + \frac{(i\hbar H)^2}{2!} + \dots)A \\
 &\Rightarrow Ae^{i\hbar H} = e^{i\hbar H} A \Rightarrow A = e^{-i\hbar H} A e^{i\hbar H} \Rightarrow A \text{ representa una cantidad que se conserva.}
 \end{aligned}$$

SI

$$\begin{aligned}
 A = e^{-i\hbar H} A e^{i\hbar H} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} e^{i\hbar H} A = \frac{\partial}{\partial t} A e^{i\hbar H} \\
 i\hbar e^{i\hbar H} A + e^{i\hbar H} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial t} e^{i\hbar H} + i\hbar A e^{i\hbar H}
 \end{aligned}$$

Valuando la ecuación anterior en $t = 0$ tenemos que

$$HA = AH$$

Este teorema es de suma importancia pues nos dará la relación entre simetría y ley de conservación.

Si un sistema es simétrico con respecto a un grupo de transformaciones \mathcal{G} , cada uno de los elementos \mathcal{U} de \mathcal{G} conmuta con el hamiltoniano H del sistema:

$$\mathcal{U}H = H\mathcal{U}$$

Es claro entonces que $H\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^\dagger H$. Por lo tanto los operadores hermíticos $A = \frac{1}{2}(\mathcal{U}^\dagger + \mathcal{U})$ y $B = \frac{1}{2i}(\mathcal{U} - \mathcal{U}^\dagger)$ conmutan con

H y representan cantidades físicas que se conservan.

A cada elemento del grupo \mathcal{G} le corresponde entonces una ley de conservación: la ley de conservación de la cantidad física "compleja" $A + iB$. No todas estas leyes son independientes, pues la ley de conservación asociada al operador $U_1 = U_2 U_3$, por ejemplo, se sigue de las leyes asociadas a U_2 y U_3 (ver ecuación 2.15)

Nos podemos preguntar si existen ciertas leyes de conservación fundamentales de las cuales se derivan todas las demás. Esta cuestión es especialmente importante para grupos continuos, que nos dan un continuo de leyes de conservación. Por lo tanto estableceremos el siguiente teorema para grupos de Lie.

TEOREMA 3.5

Sea \mathcal{G} un grupo de Lie de dimensión m , con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ los parámetros del grupo e l_1, l_2, \dots, l_m los operadores infinitesimales correspondientes. Si \mathcal{G} es un grupo de simetría, entonces:

i) Cada operador infinitesimal corresponde a una cantidad física que se conserva.

ii) Todas las leyes de conservación relacionadas con los elementos del grupo \mathcal{G} se siguen de las m leyes de conservación relacionadas con los m generadores.

DEMOSTRACION

I) Como G es un grupo de simetría, entonces

$$U H = H U \quad \forall U \in G \quad (3.3)$$

Diferenciando con respecto al parámetro α_j del elemento U y haciendo $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=0} H = H \frac{\partial U}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=0} &\Rightarrow [I_j, H] = 0 \\ \Rightarrow [I_j, H] &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

II) Demostraremos que (3.4) implica (3.3). Podemos escribir la ecuación (2.5) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} U \psi = \sum_{l=1}^M s_{lj}(\alpha) I_l U \psi \quad U \in G \quad (3.5)$$

donde ψ es una función arbitraria. Reemplazando ψ por $H\psi$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} U H \psi = \sum_{l=1}^M s_{lj}(\alpha) I_l U H \psi \quad (3.6)$$

Si operamos con H en ambos lados de la ecuación (3.5) y usamos las relaciones de conmutación (3.4) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} H U \psi = \sum_{l=1}^M s_{lj}(\alpha) I_l H U \psi$$

Restando esta ecuación de la ecuación (3.6) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} (U H - H U) \psi = \sum_{l=1}^M s_{lj}(\alpha) I_l (U H - H U) \psi$$

Entonces la función $\Gamma(U) \equiv (U H - H U) \psi$ satisface el sistema de ecuaciones diferenciales (2.5) con la condición inicial:

$$\Gamma(E) = (E H - H E) \psi = 0$$

Pero, por definición, las soluciones de la ecuación (2.5) son de la forma

$$\Gamma(\mathcal{U}) = T(\mathcal{U})\psi$$

con ψ arbitrario y $T(\mathcal{U})$ la imagen de \mathcal{U} ante una representación T . Si $\Gamma(E) = 0$ entonces

$T(E) = 0$, y como demostramos anteriormente (teorema 2.1) que para cualquier representación no trivial la imagen del elemento neutro es el operador

identidad, concluimos que T es la representación trivial; es decir,

trivial; es decir,

trivial; es decir,

$T(\mathcal{U}) = 0 \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{G}$. Esto implica que

$\Gamma(\mathcal{U}) = 0 \quad \forall \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ y por lo tanto $[\mathcal{U}, \bar{H}] = 0$

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{G}$ que es lo que queríamos demostrar.

En base a este teorema, para un grupo de Lie de dimensión m , tenemos m leyes de conservación dadas por la conservación de sus m generadores.

Como un primer ejemplo de la relación entre simetría y ley de Conservación, podemos considerar el grupo monoparamétrico de traslaciones

en el tiempo.

Si un sistema está sujeto a condiciones externas constantes en el tiempo, todos los instantes de tiempo son físicamente equivalentes: el tiempo es homogéneo; entonces, si $\psi(t)$ es una solución de

la ecuación de Schroedinger:

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(t)\psi(t)$$

$\psi(t + \tau) = U(\tau)\psi(t)$ será solución de la misma ecuación

$$i \frac{\partial \psi(t + \tau)}{\partial t} = H(t)\psi(t + \tau)$$

(Nótese la dependencia temporal del hamiltoniano)

Comparando la ecuación de Schroedinger para el tiempo

$t + \tau$: $i \frac{\partial \psi(t + \tau)}{\partial t} = H(t + \tau)\psi(t + \tau)$; con la ecuación anterior podemos concluir que $H(t) = H(t + \tau)$. Luego H es independiente del tiempo.

Como vimos al principio de esta sección, podemos escribir entonces

$$U(\tau) = e^{-i\tau H}$$

Por lo tanto, como

$$H = e^{-i\tau H} H e^{i\tau H}$$

Las transformaciones $U(\tau)$ forman un grupo de simetría con generador H . Por el teorema 3.5, concluimos que existe la ley de conservación de H .

En otras palabras, homogeneidad del tiempo (simetría ante traslaciones temporales) implica conservación de la energía.

4. GRUPO DE TRASLACIONES ESPACIALES

Como un segundo ejemplo de la relación entre simetría y ley de conservación, consideraremos un sistema físico sujeto a una traslación en el espacio $U(\vec{a})$ con

$$U(\vec{a})\vec{r} = \vec{r} - \vec{a}$$

Es claro que el conjunto de estas transformaciones define un grupo de Lie, siendo $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ los parámetros del grupo.

Las funciones de onda se transformarán como

$$\mathcal{U}(\bar{a})\psi(\vec{r}) = \psi(U^{-1}(\bar{a})\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \bar{a})$$

Desarrollando en serie de Taylor alrededor de $\vec{r} = \bar{a}$

$$\psi(\vec{r} + \bar{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\bar{a} \cdot \nabla]^n \psi(\vec{r}) = e^{\bar{a} \cdot \nabla} \psi(\vec{r})$$

Por lo tanto

$$\mathcal{U} = e^{\bar{a} \cdot \nabla}$$

Pero en Mecánica Cuántica $-i\nabla$ se identifica con el operador de momento lineal \vec{p} , entonces

$$\mathcal{U} = e^{i\bar{a} \cdot \vec{p}} \quad (\text{como } \vec{p} \text{ es hermítico, } \mathcal{U} \text{ es unitario})$$

Además

$$i \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial a_i} \right|_{\bar{a}=0} = -p_i e^{i\bar{a} \cdot \vec{p}} \Big|_{\bar{a}=0} = -p_i$$

Entonces esencialmente, p_1, p_2, p_3 son los generadores del grupo de traslaciones espaciales. Como el grupo es abeliano tenemos que

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (3.7)$$

Consideremos ahora un grupo sujeto a condiciones externas constantes en el espacio. Todos los puntos del espacio son entonces físicamente equivalentes: el espacio es homogéneo. Siguiendo un razonamiento similar al de la sección anterior, es claro que H es independiente de la posición. Por lo tanto, $e^{i\bar{a} \cdot \vec{p}} H e^{-i\bar{a} \cdot \vec{p}} = H$ y el grupo de traslaciones en el espacio es un grupo de simetría. Luego, los generadores p se conservan. En otras palabras, la homogeneidad del espacio

Implica la conservación del momentum lineal.

5. GRUPO DE ROTACIONES

5.1 GENERADORES (19) (25)

Consideremos un sistema físico sujeto a una rotación en el espacio en un ángulo infinitesimal ξ alrededor de un eje en la dirección \hat{n} . El vector posición \vec{r} se transforma entonces como

$$U(\xi)\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} \times \xi$$

donde $\xi = \xi \hat{n}$. Por lo tanto, las funciones de onda se transformarán como

$$U(\xi)\psi(\vec{r}, t) = \psi(U^{-1}\vec{r}, t) = \psi(\vec{r} + \vec{r} \times \xi, t)$$

Si desarrollamos $\psi(\vec{r} + \vec{r} \times \xi, t)$ en serie de Taylor alrededor de $\vec{r} \times \xi$ y despreciamos términos de orden superior al primero, obtenemos

$$\begin{aligned} U(\xi)\psi(\vec{r}, t) &= \psi(\vec{r}, t) + \vec{r} \times \xi \cdot \nabla \psi(\vec{r}, t) = \\ &= \psi(\vec{r}, t) - \xi \cdot (\vec{r} \times \nabla) \psi(\vec{r}, t) \\ &= \psi(\vec{r}, t) - \xi \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Pero $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}$ (momentum angular)

Luego

$$U(\xi) = E - i \xi \cdot \vec{L} \quad (3.8)$$

Como una rotación en un ángulo finito α se puede obtener como el producto de un número infinito de rotaciones infinitesimales, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{U}\left(\frac{\vec{\alpha}}{N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (E - i\frac{\vec{\alpha}}{N} \cdot \vec{L})^N = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{L}}$$

donde $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es el vector con magnitud igual a la del ángulo de rotación α y con la dirección del eje de rotación. Es claro que las transformaciones $\mathcal{U}(\vec{\alpha})$ forman un grupo de Lie con parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Los generadores

de este grupo son:

$$i \frac{\partial \mathcal{U}(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_j} \Big|_{\vec{\alpha}=0} = i(-iL_j) = +L_j$$

Luego, las componentes del momentum angular \vec{L} son los generadores del grupo de rotaciones.

TEOREMA 3.6

Los generadores del grupo de rotaciones L_1, L_2, L_3 , satisfacen las relaciones de conmutación

$$[L_i, L_j] = i \varepsilon_{ijk} L_k \quad (3.9)$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ es permutación cíclica de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es permutación cíclica de } 213 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

DEMOSTRACION

Nos basamos en el hecho de que el grupo G de elementos U es isomorfo al grupo \mathcal{G} de elementos \mathcal{U} (teorema 3.1). Por lo tanto \mathcal{G} es una represen-

tación de G y podemos decir que los operadores $L_i = i \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha=0}$ satisfacen las mismas relaciones de conmutación que los L_i . (Teorema 2.8)

Por ser U una función continua de los parámetros, podemos concluir que

$$\frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_j} \Big|_{\alpha=0} = \frac{dU(0, \dots, \alpha_j, 0, 0)}{d\alpha_j} \Big|_{\alpha_j=0} = \frac{dU(\alpha_j)}{d\alpha_j}$$

Por lo tanto, como

$$U(\alpha, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & +\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$U(0, 0, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U(0, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operando con estas tres matrices obtenemos

$$[L_1, L_2] = iL_3 ; [L_2, L_3] = iL_1 ; [L_3, L_1] = iL_2$$

y de aquí, el resultado que queríamos. En nues-

$$\text{tra notación: } [L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k$$

Por el teorema

2.7, todos los operadores infinitesimales de cual-

quier representación satisfacen la misma álgebra.

Por lo general, es más cómodo trabajar con los operadores L_3 , L_+ , L_- , donde los L_+ y L_- están definidos por

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2 \quad (3.11)$$

y satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[L_+, L_-] = 2L_3 \quad (3.12)$$

$$[L_3, L_+] = L_+ \quad (3.13)$$

$$[L_3, L_-] = -L_- \quad (3.14)$$

El operador L^2 , definido por

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \frac{1}{2} (L_+L_- + L_-L_+) + L_3^2 \quad (3.15)$$

es de suma importancia debido al siguiente teorema.

TEOREMA 3.7

El operador L^2 satisface las relaciones de conmutación:

$$[L^2, L_i] = 0 \quad (3.16)$$

DEMOSTRACION

Nos basamos en la propiedad (2.15) del conmutador:

$$[ABC] = [A, B]C + B[A, C].$$

Entonces

$$\begin{aligned} [L_1, L_2^2] &= [L_1, L_2] L_2 + L_2 [L_1, L_2] = iL_3 L_2 + iL_2 L_3 \\ &= i(L_3 L_2 + L_2 L_3) \end{aligned}$$

$$[L_1, L_3^2] = [L_1, L_3] L_3 + L_3 [L_1, L_3] = -i(L_2 L_3 + L_3 L_2)$$

$$[L_1, L_1^2] = 0$$

Aplicando la propiedad de linealidad (ecuación (2.14)) sumamos los resultados anteriores y obtenemos

$$[L_1, L_2^2 + L_3^2 + L_2^2] = [L_1, L^2] = 0$$

De manera similar se obtiene

$$[L_2, L^2] = 0 \quad \text{y} \quad [L_3, L^2] = 0$$

Como los operadores L_+ y L_- son combinaciones lineales de L_1 y L_2 , es claro que

$$[L_+, L^2] = [L_-, L^2] = 0 \quad (3.17)$$

Como L^2 conmuta con los generadores del grupo, concluimos que L^2 conmuta con todos los elementos del grupo. A L^2 se le llama operador de Casimir para el grupo de rotaciones.

5.2 REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES ^{(25) (26)}

Sea $\{|a\rangle\}$ un conjunto de funciones base para una representación irreducible del grupo de rotaciones G , siendo J_1, J_2 y J_3 sus operadores infinitesimales*.

El operador $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ es un operador invariante del grupo y por lo tanto, debido al lema de Schur, $J^2 = \lambda E$, es decir: $J^2|a\rangle = \lambda|a\rangle$; $\lambda \in \mathbb{R}^{+**}$ (J^2 es completamente degenerado en el multiplete $\{|a\rangle\}$). Como $\lambda \in \mathbb{R}^+$ lo podemos escribir en la forma

* De aquí en adelante, denotaremos por \vec{J} al operador de momento angular. Diremos que un operador $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ es un operador de momento angular si sus componentes satisfacen $[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$

** $\lambda \in \mathbb{R}^+$ pues $\langle \mu | J_2^2 | \mu \rangle \geq 0$ ya que es la norma del vector $J_2 | \mu \rangle$.

$\lambda = J(J + 1)$ con $J \in \mathbb{R}$; entonces

$$J^2 |a\rangle = J(J + 1) |a\rangle$$

Como J^2 y J_3 conmutan entre sí, tienen un conjunto común de eigenfunciones. Estas no son eigenfunciones de J_1 y J_2 pues J_3 no conmuta con ellos.*

Luego, existe una base $\{ |Jm\rangle \}$ tal que

$$J^2 |Jm\rangle = J(J + 1) |Jm\rangle$$

$$J_3 |Jm\rangle = m |Jm\rangle$$

El siguiente teorema nos permitirá hallar los valores que pueden tomar J y m y además el grado de degenerancia de J^2 (o sea la dimensión de la representación irreducible).

TEOREMA 3.8

Si $|Jm\rangle$ es una eigenfunción de J_3 y J^2 , entonces:

$$i) J_+ |Jm\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m+1)} |Jm+1\rangle$$

$$\text{Si } m < J; J_+ |Jm\rangle = 0 \text{ si } m = J.$$

$$J_- |Jm\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m-1)} |Jm-1\rangle$$

$$\text{Si } m > -J; J_- |Jm\rangle = 0 \text{ si } m = -J$$

$$ii) J^2 |Jm\rangle = J(J+1) |Jm\rangle \quad \text{con } J=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

$$iii) J_3 |Jm\rangle = m |Jm\rangle \quad \text{con } m = -J, -J+1, \dots, J-1, J.$$

DEMOSTRACION

De la relación (3.13), $J_3 J_+ = J_+(J_3 + 1)$, tenemos

que

$$J_3 J_+ |Jm\rangle = J_+(J_3 + 1) |Jm\rangle = (m + 1) J_+ |Jm\rangle$$

* En general, al número de generadores que conmutan entre sí se le llama el rango del grupo. El rango del grupo de rotaciones es igual a uno. Si el rango de un grupo semisimple (no tiene subgrupos abelianos invariantes) es λ , existirán λ operadores de Casimir.

De la ecuación (3.17)

$$J^2 J_+ |jm\rangle = J_+ J^2 |jm\rangle = j(j+1) J_+ |jm\rangle$$

Entonces $J_+ |jm\rangle$ es eigenfunción de J_3 y J^2 con eigenvalores $(m+1)$ y $j(j+1)$ respectivamente. Por lo tanto, $J_+ |jm\rangle$ es un múltiplo del vector de la base $|jm+1\rangle$

$$J_+ |jm\rangle = A_{jm} |jm+1\rangle$$

De la misma forma

$$J_- |jm\rangle = B_{jm} |jm-1\rangle$$

De la ecuación (3.12) y (3.15) concluimos que

$$J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3$$

y de aquí

$$J_- J_+ |jm\rangle = [j(j+1) - m(m+1)] |jm\rangle$$

Pero $J_- = (J_+)^+$; entonces

$$|A_{jm}|^2 = ||J_+ |jm\rangle||^2 = \langle jm | J_- J_+ |jm\rangle$$
 y

$$|A_{jm}|^2 = j(j+1) - m(m+1)$$

De forma análoga

$$|B_{jm}|^2 = j(j+1) - m(m-1)$$

Siguiendo la convención de Condon y Shortley ⁽²⁷⁾ escogemos la fase de A y B igual a cero, o sea A y B reales. Luego,

$$J_+ |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |jm+1\rangle$$

$$J_- |jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |jm-1\rangle$$

Demostraremos que $j(j+1) \geq m^2$.

Sabemos que

$$J^2 |jm\rangle = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) |jm\rangle$$

Multiplicando escalarmente por $\langle jm|$

$$j(j+1) = \langle jm|J_1^2|jm\rangle + \langle jm|J_2^2|jm\rangle + m^2.$$

Pero $\langle jm|J_1^2|jm\rangle$ es la norma del vector $J_1|jm\rangle$

(J_k Hermítico) y por lo tanto es positiva o cero,

al igual que $\langle jm|J_2^2|jm\rangle$.

Entonces concluimos que

$$j(j+1) \geq m^2.$$

Sea k el mayor valor de m , entonces

$$J_+ |jk\rangle = 0$$

pues

$$J_3 J_+ |jk\rangle = (k+1) J_+ |jk\rangle \quad \text{y} \quad k+1 > k.$$

Luego

$$0 = J_- J_+ |jk\rangle = j(j+1) - k(k+1) |jk\rangle \Rightarrow j(j+1) = k(k+1)$$

$$\Rightarrow k = j \quad \text{o} \quad -(k+1) = j$$

Pero como $j(j+1) \geq m^2$, $\forall m$, tenemos que $k(k+1) \geq k^2$.

Si

$$k = j, \quad j \geq 0$$

Si

$$-(k+1) = j, \quad k = -(j+1) \quad \text{y} \quad -(j+1)(-j) \geq +(+j+1)^2$$

o sea que $j \geq j+1$, lo que es imposible.

Luego

$$k = j \quad (3.18)$$

De la misma forma se puede demostrar que el menor

valor de m es $-j$. Por lo tanto, m varía entre los

valores: $-j \leq m \leq j$.

Ahora, si $m = \lambda < j$, tenemos que para la sucesión

$$J_+ |j\lambda\rangle, J_+^2 |j\lambda\rangle, J_+^3 |j\lambda\rangle, \dots$$

existe un entero $p \geq 0$, tal que

$$J_+^p |j\lambda\rangle = A_{j,m}^p |j\lambda+p\rangle \text{ y}$$

$$J_+^{p+1} |j\lambda\rangle = 0$$

Por lo tanto, $\lambda + p$ es el mayor valor de m y por (3.18) se tiene que $\lambda + p = j$.

Esto implica que $j - \lambda$ es un entero no negativo; en particular, si $\lambda = -j$, $2j$ es un entero no negativo y j puede tomar los valores

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Para cada valor de j existirán $2j+1$ valores de m

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j.$$

En conclusión, notamos que para cada semientero no negativo j , existe una representación irreducible del grupo de rotaciones, de dimensión $2j+1$. Cada una de las $2j+1$ funciones base $|jm\rangle$ de esta representación está determinada por el eigenvalor m del operador de momentum angular J_z . El operador invariante J^2 puede entonces dividir el espacio generado por todas las funciones de onda $|jm\rangle$ ($j=0, \frac{1}{2}, \dots$), en subespacios mínimos invariantes cuya suma directa nos reproduce el espacio (teorema 2.4).

En general, dada

una representación del grupo de rotaciones en un espacio vectorial, podemos tomar como base del espacio, eigenfunciones comunes de J^2 y J_3 . El operador J^2 separa dicho espacio en subespacios mínimos invariantes (dimensión $2j+1$) o en subespacios "isotópicos" (con el mismo valor de j y dimensión $n(2j+1)$). Los subespacios isotópicos se pueden romper en n subespacios mínimos invariantes, tomando un vector de la base y aplicándole sucesivamente J_+ y/o J_- . Es claro entonces la importancia que tienen los operadores J^2, J_3, J_+ y J_- para reducir completamente una representación.

5.3 LEYES DE CONSERVACION (17) (19)

Consideremos ahora un sistema mecánico cuántico localizado en un campo con simetría esférica. Todas las posiciones angulares son físicamente equivalentes: el espacio es isotrópico. El hamiltoniano es entonces independiente de la posición angular del sistema y por lo tanto conmuta con todos los operadores del grupo de rotaciones. Luego, los operadores infinitesimales J_1, J_2, J_3 correspondientes a las tres componentes del momentum angular, son cantidades físicas que se conservan.

En otras palabras, la isotropía del espacio implica la conservación del momentum angular.

Mas aún, el operador de Casimir $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ conmuta con el hamiltoniano y por lo tanto es también una cantidad que se conserva. Su eigenvalor $j(j+1)$ etiquetará los multi-

pletos del grupo en todo momento y es un "buen número cuántico" del sistema, conservado en todo proceso. Además, como el hamiltoniano conmuta con todos los elementos del grupo, $H = \lambda E$ en cada subespacio mínimo invariante; es decir, que en cada multiplete, H será totalmente degenerado y las funciones base de este subespacio serán eigenfunciones del hamiltoniano con el mismo eigenvalor (masa).

Por esta razón, el conjunto de todas las funciones correspondientes a un sólo nivel de energía del sistema formarán un multiplete o una suma de multipletes (si varios multipletes tienen el mismo eigenvalor H).

5.4 $SU_2^{(20)}$

Consideremos la representación irreducible (excluyendo la elemental correspondiente a $j=0$) de menor dimensión del grupo de rotaciones, es decir, la representación de dimensión $2(j=\frac{1}{2})$.

Los elementos matriciales de los generadores en la base $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ se determinan usando el teorema 3.8

$$J_3 \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle = \pm \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$J_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

$$J_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

$$J_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$J_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Las matrices correspondientes a estos operadores son

$$J_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_3$$

$$J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y debido a la definición de J_+ y J_- (3.11)

$$J_1 = \frac{1}{2} (J_+ + J_-)$$

$$J_2 = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-)$$

Las matrices correspondientes a J_1 y J_2 son

$$J_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_1$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sigma_2$$

Donde las $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las matrices de Pauli.

Fácilmente se puede verificar que estas matrices cumplen con la propiedad

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{n})^2 = E \quad (3.19)$$

Donde \hat{n} es un vector unitario cualquiera.

En función de las matrices de Pauli, el operador \mathcal{U} de la representación bidimensional

se puede escribir como

$$\mathcal{U}(\alpha) = e^{-i\frac{\alpha}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = E - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\alpha}{2} - \frac{(\alpha)^2}{2!} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 + i(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^3 \frac{(\alpha)^3}{3!} + \frac{(\alpha)^4}{4!} (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^4 + \dots$$

Usando (3.19)

$$\mathcal{U}(\alpha) = E - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{\alpha}{2} - \frac{(\alpha)^2}{2!} \frac{1}{2!} + i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \frac{(\alpha)^3}{3!} + \frac{(\alpha)^4}{4!} \frac{1}{4!} - \dots$$

$$= E \left(1 - \frac{(\alpha)^2}{2!} + \frac{(\alpha)^4}{4!} - \dots \right) - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \left(\frac{(\alpha)}{2} - \frac{(\alpha)^3}{2! \cdot 3!} + \frac{(\alpha)^5}{2! \cdot 5!} - \dots \right)$$

$$= E \cos \frac{\alpha}{2} - i\hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Notamos que

$$\mathcal{U}(\alpha + 2\pi) = -\mathcal{U}(\alpha)$$

$$\mathcal{U}(\alpha + 4\pi) = \mathcal{U}(\alpha)$$

Es decir, que a rotaciones físicamente equivalentes como α y $\alpha + 2\pi$ les corresponde $+U(\alpha)$ y $-U(\alpha)$, por lo tanto, esta representación es una representación bivaluada del grupo de rotaciones.

Además, usando el conocido resultado del Algebra Lineal ⁽²²⁾

$$A = e^B \Rightarrow \det A = e^{\text{Tr} B} \quad (\text{Tr} \rightarrow \text{Traza})$$

vemos que, como la traza de las matrices σ_1, σ_2 y σ_3 es igual a cero,

$$\det U = 1$$

Evidentemente, el conjunto de matrices 2×2 de esta representación, forman un grupo llamado SU_2 (grupo unitario especial (determinante = 1) de matrices 2×2).

Por lo tanto, podemos hablar de las representaciones de SU_2 , que coincidirán con las del grupo de rotaciones, debido al homomorfismo que existe entre ellos.

A las funciones del espacio sobre el que actúan las matrices de SU_2 se les llama spinors. Físicamente representan, por ejemplo, funciones de onda de una partícula con dos estados posibles de spin, "arriba" ($m = \frac{1}{2}$) y "abajo" ($m = -\frac{1}{2}$).

5.5 SERIES DE CLEBSCH-GORDAN (18) (25)

Sean A_1 y A_2 dos sistemas de momento angular j_1 y j_2 respectivamente. Las funciones que los caracterizan están en multipletes de dimensión $2j_1 + 1$ y $2j_2 + 1$ con fun-

ciones base ψ_{m_1} y ϕ_{m_2} .

Si consideramos el sistema compuesto, tendremos $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ funciones de la forma $\psi_{m_1} \phi_{m_2}$, que formarán una base para una representación reducible del grupo de rotaciones. Por definición, esta representación es el producto directo de las dos representaciones irreducibles anteriores.

Nuestro interés en esta sección es descomponer dicha representación reducible en una suma de irreducibles (garantizada por el teorema 2.4) y encontrar las dimensiones de estas últimas representaciones. Esto es equivalente a descomponer el espacio producto en una suma directa de multipletes.

El operador vectorial de momentum angular del sistema compuesto \bar{J} , es la suma de los momenta de los dos sistemas:

$$\bar{J} = \bar{J}_1 + \bar{J}_2. \quad \text{Entonces, } J_3 = J_{31} + J_{32}, \text{ y} \\ m = m_1 + m_2 \dots \quad (3.20)$$

Como los operadores J_1 y J_2 actúan sobre funciones de diferentes variables, es claro entonces que $[\bar{J}_1, \bar{J}_2] = 0$.

Además sus componentes satisfacen las relaciones de conmutación (3.9) y por lo tanto

J_1, J_2, J_3 también las satisfacen.

Para encontrar la descomposición del producto directo de representaciones, es necesario demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 3.9

El carácter de una representación irreducible T del grupo de rotaciones, $\chi(\alpha)$ viene dado por:

$$\chi^{(j)}(\alpha) = \sum_{m=-j}^j e^{-im\alpha}$$

DEMOSTRACION

Sabemos que $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = e^{-i\vec{\alpha} \cdot \vec{J}}$

Consideremos una rotación alrededor del eje z ,

$$T(0,0,\alpha) = e^{-i\alpha J_z},$$

siendo J_z una matriz diagonal de dimensión $2j+1$,

con los elementos diagonales m ($-j \leq m \leq j$). Entonces

$$\begin{aligned} \chi^{(j)}(\alpha) &= \text{Tr} T(0,0,\alpha) = \text{Tr} \left(E - i\alpha J_z + \frac{(i\alpha J_z)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= 2j+1 - i\alpha \sum_{m=-j}^j m + (i\alpha)^2 \sum_{m=-j}^j \frac{m^2}{2!} + \dots \\ &= \sum_{m=-j}^j \left(1 - i\alpha m + \frac{(im\alpha)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \sum_{m=-j}^j e^{-im\alpha} \end{aligned}$$

Vemos que el carácter depende sólo del ángulo de rotación α y no de la dirección del eje (de m en este caso).

Por lo tanto, $\chi^{(j)}(\alpha) = \sum_{m=-j}^j e^{-im\alpha}$ para

una rotación alrededor de un eje cualquiera.

En base a este teorema, podemos escribir el carácter del producto directo de las representaciones $T^{(j_1)}$ y $T^{(j_2)}$, $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ como (ver ecuación (2.2a))

$$\chi^{(j_1, j_2)}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} e^{-im_1\alpha_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} e^{-im_2\alpha_2}$$

Al rotar el sistema compuesto en un ángulo α , cada uno de los sistemas rota en α , por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ entonces si j_1, j_2

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1, j_2)}(\alpha) &= e^{-i(j_1 + j_2)\alpha} + e^{-i(j_1 + j_2 - 1)\alpha} + \dots + e^{i(j_1 - j_2)\alpha} + e^{-i(j_1 - 1 + j_2)\alpha} + \dots \\ &\quad + e^{-i(j_1 - 1 - j_2)\alpha} + e^{-i(-j_1 + j_2)\alpha} + \dots + e^{-i(-j_1 - j_2)\alpha} \\ &= \sum_{M=j_1-j_2}^{j_1+j_2} e^{-iM\alpha} + \sum_{M=j_2-j_1}^{j_2+j_1} e^{-iM\alpha} + \dots + \sum_{M=j_1-j_2}^{j_1+j_2} e^{-iM\alpha} \\ &= \sum_{M=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \sum_{M=-j_2}^j e^{-iM\alpha} \end{aligned}$$

De forma análoga, si $j_2 > j_1$: $\chi^{(j_1, j_2)}(\alpha) = \sum_{M=j_2-j_1}^{j_2+j_1} \sum_{M=-j_1}^j e^{-iM\alpha}$

Entonces, en general

$$\chi^{(j_1, j_2)}(\alpha) = \sum_{M=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-j}^j e^{-iM\alpha} = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi^J(\alpha)$$

Es decir

$$\text{Tr}(T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) = \sum \text{Tr}(T^J)$$

Por lo tanto, existe una transformación de semejanza (la traza es invariante ante estas transformaciones) que lleve a $T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}$ a la forma de bloques

$$A (T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)}) A^{-1} = M \quad \text{con } M = \begin{bmatrix} T^{(|j_1 - j_2|)} & & & \\ & \bigcirc & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bigcirc \\ & \bigcirc & & & T^{(j_1 + j_2)} \end{bmatrix}$$

Expresado simbólicamente (salvo una transformación de semejanza):

$$T^{(j_1)} \otimes T^{(j_2)} = T^{(j_1+j_2)} \oplus T^{(j_1+j_2-1)} \oplus \dots \oplus T^{(|j_1-j_2|)} \quad (3.21)$$

Esta descomposición se llama serie de Clebsch-Gordan para el grupo de rotaciones o teorema de la suma vectorial de momentum angular.

Las funciones base de esta representación, vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_M^J &= \sum_{m_1, m_2} A_{m_1, m_2, M}^{-1} \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2} && \text{o equivalentemente} \\ \psi_{m_1}^{j_1} \psi_{m_2}^{j_2} &= \sum_{JM} \psi_M^J A_{JM, m_1 m_2} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que, si combinamos dos sistemas de momentum angular j_1 y j_2 , el estado resultante es tal que permite cualquier

valor de momentum angular J entre $|J_1 - J_2|$ y $J_1 + J_2$.

La matriz A "diagonaliza" la representación y nos da sus vectores base. Sus elementos son los llamados Coeficientes de Clebsch-Gordan.

5.6 OPERADORES VECTORIALES (28)

Hemos visto la importancia que tienen los operadores invariantes para el estudio de las simetrías de un sistema ante un grupo de transformaciones. Algunas veces son importantes los operadores que tienen propiedades de transformación simples.

Consideremos la representación elemental del grupo de rotaciones $j=0$. Para este caso, el espacio vectorial de la representación es un espacio de dimensión $2j+1=1$. El operador U correspondiente a esta representación es el operador identidad, entonces los elementos del espacio vectorial permanecerán invariantes ante una rotación y son cantidades escalares. En general, podemos definir un escalar como una cantidad que se transforma ante una rotación de la misma forma que los elementos de la base de la representación $j=0$. Podemos extender el concepto de cantidad escalar a operadores. Decimos que un operador A es un operador escalar si permanece invariante ante una rotación (se transforma de acuerdo a la representación $j=0$)

$$U A U^\dagger = A.$$

De manera similar se define una cantidad vectorial, como una cantidad que se transforma bajo una rotación de acuerdo a la representación tridimensional ($J=1$) del grupo de rotaciones (el vector de posición es un ejemplo). Esta representación es equivalente a la representación regular del grupo de rotaciones (ver sección 5, capítulo 2), es decir, la representación en la que

$$(J_1)_{jk} = -i \epsilon_{ijk}$$

o sea

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Un vector ψ_i de la base de esta representación se transforma como

$$U \psi_i = R_{ji} \psi_j$$

Luego, un conjunto de tres operadores A_1, A_2, A_3 será un operador vectorial si

$$U A_i U^\dagger = \sum_{j=1}^3 A_j R_{ji}$$

Consideremos una rotación infinitesimal

$$U = E - i \alpha_\kappa J_\kappa$$

Si usamos este resultado en la ecuación anterior y despreciamos

términos de segundo orden en α_κ , obtenemos

$$[J_\kappa A_i] = \sum_{j=1}^3 (J_\kappa)_{ji} A_j = \sum_{j=1}^3 (-i \epsilon_{\kappa ji} A_j) = - \sum_{j=1}^3 i \epsilon_{\kappa ij} A_j$$

$$\text{ó } [J_\kappa A_i] = i \epsilon_{\kappa ij} A_j \quad (3.22)$$

Entonces, podemos decir que un conjunto de operadores A_1, A_2, A_3 es un operador vectorial o "tensorial regular" si satisfacen la ecua-

ción (3.22). En particular (teorema 3.6) los operadores de momento angular satisfacen estas relaciones y $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ es un operador vectorial.

El concepto de operador tensorial regular se puede extender a cualquier grupo de Lie. Es decir, que un operador A es un operador tensorial regular bajo la acción de un grupo de Lie \mathfrak{g} , si se transforma según la representación regular del grupo, es decir

$$[J_j, A_k] = C_{ijk} A_i$$

siendo los J_j los generadores del grupo y C_{ijk} las constantes estructurales.

Como mencionamos anteriormente, nos hemos extendido en el tratamiento del grupo de rotaciones pues como veremos en la siguiente sección, este grupo es isomorfo al grupo de isospín.

Luego, aprovechando nuestro conocimiento sobre el grupo de rotaciones, se nos facilitará el manejo del grupo de isospín y el de SU_3 , donde se trabaja con ideas más abstractas.

6. GRUPO DE ISOSPÍN

6.1 PROPIEDADES GENERALES

Basaremos esta discusión en la hipótesis de independencia de carga en las fuerzas nucleares; es decir, que las interacciones fuertes entre protón-protón, neutrón-neutrón y neutrón-protón no dependen de la carga de las partículas.

Esta hipótesis se ha verificado, con buena aproximación, al analizar las energías de enlace de núcleos especulares (núcleos con el mismo peso atómico y cuyos números atómicos difieren en una unidad) y otros núcleos con números cercanos de protones y neutrones. (2) (3)

Además, debido a que la masa del neutrón es muy cercana a la del protón, se puede sospechar que si "desconectamos" las fuerzas eléctricas y dejamos que actúen sólo las interacciones fuertes, entonces estas partículas tendrían la misma masa y serían miembros de un doblete de algún grupo de simetría.

Heisenberg⁽¹⁰⁾ en 1932, propuso que el neutrón y el protón son estados distintos de una sola partícula: el nucleón. En analogía, con el hecho de que muchas partículas (spin $J=\frac{1}{2}$) tienen dos estados de spin, "arriba" ($m=\frac{1}{2}$) y "abajo" ($m=-\frac{1}{2}$), se introduce para el nucleón el número cuántico de isospín $i=\frac{1}{2}$ (análogo a j) con componentes $t=\frac{1}{2}$ para el estado protón y $t=-\frac{1}{2}$ para el estado neutrón. La idea básica en lenguaje informal es que uno puede

visualizar un isoespacio representando el isospín de un estado por un vector $\vec{T} = (I_1, I_2, I_3)$ en este espacio análogo al vector \vec{L} de momentum angular en R^3 .

Así como los dos estados de spin sirven como base para la representación bidimensional del grupo de rotaciones en el espacio (SU_2), los dos estados de isospín (las funciones de onda del protón y el neutrón) forman una base para la representación irreducible de dimensión 2 del grupo de rotaciones en el isoespacio (grupo de isospín).

Siguiendo la analogía con el grupo de rotaciones, definimos los operadores (generadores de esta representación bidimensional) como

$$I_k = \frac{1}{2} \sigma_k \quad k=1,2,3$$

siendo σ_1, σ_2 y σ_3 las matrices de Pauli. Las funciones de onda de los nucleones (sin tomar en cuenta posición y spin) se pueden escribir

$$p = \left| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$n = \left| \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle$$

y en general $|It\rangle$ (análogo a $|Jm\rangle$).

Por lo tanto

$$I_3 p = \frac{1}{2} p$$

$$I_3 n = -\frac{1}{2} n$$

En base a estas últimas relaciones, podemos definir un operador de carga

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}$$

donde $B(=1)$ es el número bariónico, tal que

$$Qp = p, \quad p \text{ es eigenvector de } Q \text{ con eigenvalor } q = 1$$

$$Qn = 0, \quad n \text{ es eigenvector de } Q \text{ con eigenvalor } q = 0$$

Definimos además los operadores

$$I_{\pm} = I_1 \pm \lambda I_2 \quad (3.24)$$

que satisfacen

$$I_{\pm} |t\rangle = \sqrt{t(t \pm 1)} |t \pm 1\rangle \quad (3.25)$$

y cumplen las relaciones de conmutación

$$[I_1, I_3] = i \epsilon_{ijk} I_k$$

$$[I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}$$

$$[I_+, I_-] = 2I_3 \quad (3.26)$$

Por lo tanto, hemos formado un grupo isomorfo al grupo de rotaciones: el grupo de los operadores

$$U = e^{-i\alpha \cdot T}$$

que se pueden interpretar como operadores que realizan una rotación en el espacio vectorial de las funciones de onda cuando efectuamos una rotación en el isoespacio.

Al igual que en el grupo de rotaciones, el operador $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$ es un operador invariante de Casimir cuyos eigenvectores degenerados son las funciones base para las representaciones irreducibles de este grupo.

Los multipletes de isospín (llamados isomultipletes) están determinados por los eigenvalores $i(i+1)$, $i=0, \frac{1}{2}, \dots$

Así como las fun-

ciones de onda del protón y el neutrón forman una base para un isomultiplete (el doblete p-n), podemos pensar que las funciones de onda de otros grupos de partículas con aproximadamente la misma masa y otras características similares (spín, paridad, número bariónico, extrañeza) forman una base para otros isomultipletes y por lo tanto les podemos asociar un número cuántico de isospín. Por ejemplo, se encontró que π^+ , π^0 , π^- forman un triplete de isospín con $i=1$.

La idea fundamental es asumir que las interacciones fuertes son invariantes ante las transformaciones del grupo de isospín. Luego, las funciones base de cada isomultiplete serían eigenfunciones degeneradas de la energía (partículas con la misma masa). Esta simetría se rompe por la interacción electromagnética causando la diferencia de masa entre las partículas.

La fuerza de esta hipótesis es clara. Por un lado, nos muestra que ciertos grupos de partículas son esencialmente distintos estados de una sola partícula. Por el otro, si se conoce* un miembro de un isomultiplete, se puede predecir la existencia de los otros miembros.

En la asignación del número de isospín a partículas extrañas, se tuvo que hacer una generalización de la fórmula de carga en un multiplete

$$Q = I + \frac{B+S}{2} \quad (3.27)$$

* Se conocía que $i(\pi^{\pm})=1$, $i(p)=\frac{1}{2}$, $i(k^{\pm})=\frac{1}{2}$, luego mediante las reacciones (que ocurren por interacción fuerte) $\pi^{\pm} + p \rightarrow \Sigma^{\pm} + k^{\pm}$ se concluye que $i(\Sigma^{\pm})=1$, luego debía existir un tercer miembro de la familia, Σ^0 , que fue identificado años después (195

Donde B es el número bariónico y S la extrañeza.

Entonces, debido a que Q y B se conservan en toda Interacción y S sólo en interacciones fuertes y electromagnéticas, el operador I_3 representa una cantidad que se conserva sólo en interacciones fuertes y electromagnéticas. Su eigenvalor t identifica cada miembro dentro de un isomultiplete.

A continuación expondremos un modelo debido a Fermi y Yang (1949) (12) que, basándose en las propiedades de este grupo, intenta interpretar a ciertas partículas como estados compuestos de partículas más elementales, nucleones y antinucleones.

6.2 MODELO DE FERMI Y YANG (3).

Como dijimos en la sección anterior, las funciones de onda del protón y del neutrón forman una base para la representación de dimensión 2 del grupo de isospín, con

$$p = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

$$n = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

siendo $B=1$

Podemos formar otra representación equivalente de SU_2 escogiendo la base

$$\bar{p} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

$$\bar{n} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\rangle$$

siendo $B=-1$

Si le aplicamos el operador de carga a esta última base, tenemos

$$Q\bar{n} = (I_3 - \frac{1}{2})\bar{n} = 0\bar{n}$$

$$Q\bar{p} = (I_3 - \frac{1}{2})\bar{p} = -\bar{p}$$

Por lo tanto, \bar{n} y \bar{p} son antibariones con carga 0 y -1 respectivamente y los identificamos como

$$\bar{n} \longrightarrow \text{antineutrón}$$

$$\bar{p} \longrightarrow \text{antiprotón}$$

Entonces tenemos dos sistemas de isospín $i = \frac{1}{2}$, los cuales pueden ser combinados para formar un sistema compuesto, que se puede descomponer en una serie de Clebsch-Gordan según el resultado

(3.21) *

$$T^{(\frac{1}{2})} \otimes T^{(\frac{1}{2})} = T^{(0)} \oplus T^{(1)}$$

o sea que el sistema compuesto se descompone en un singlete $(2(0)+1)$ y un triplete $(2(1)+1 = 3)$.

Las funciones base de estas representaciones irreducibles son

$$\text{para el triplete : } \psi(1,1), \psi(1,-1), \psi(1,0)$$

$$\text{para el singlete : } \psi(0,0).$$

Las funciones de onda de los nucleones y antinucleones se pueden escribir como

$$p = \phi_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$n = \phi_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$\bar{n} = \phi_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\bar{p} = -\phi_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

* Todas las representaciones irreducibles de SU_2 se pueden obtener por medio de productos de la representación $i=1/2$ con ella misma. Se dice que SU_2 tiene un multiplete fundamental. En general un grupo simple de Li_6 de rango l (ver notas pags. 50 y 73) tendrá m -multipletes fundamentales. (19) (11)

Sabemos que las funciones $\psi(l, t)$ son combinaciones lineales de los productos $\phi_1(l_1, t_1) \phi_2(l_2, t_2)$ y que los coeficientes de la combinación son los coeficientes de Clebsch-Gordan; además, por (3.20) $t = t_1 + t_2$.

Por lo tanto, la única combinación posible para $t = \pm 1$ es

$$\psi(1, 1) = \phi_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = p\bar{n} \quad (3.28)$$

$$\psi(1, -1) = \phi_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -n\bar{p} \quad (3.29)$$

Para encontrar los coeficientes de Clebsch-Gordan de las siguientes funciones le aplicamos I_- a la ecuación (3.28)*

$$\begin{aligned} I_- \psi(1, 1) &= I_- \left[\phi_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] = \phi_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) I_- \phi_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \phi_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) I_- \phi_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \phi_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \phi_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= n\bar{n} - p\bar{p} \end{aligned}$$

Pero como

$$I_- \phi(l, t) = \sqrt{l(l+1) - t(t-1)} \phi(l, t-1)$$

entonces

$$I_- \psi(1, 1) = \sqrt{2} \psi(1, 0)$$

y por lo tanto

$$\psi(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (n\bar{n} - p\bar{p}) \quad (3.30)$$

* Recordemos que una "rotación" aplicada a $\psi \phi$ es igual a una rotación del mismo ángulo aplicada a cada una de ellas

$\mathcal{U}(\psi \phi) = \mathcal{U}\psi \mathcal{U}\phi$; es decir $e^{-i\vec{I} \cdot \vec{\alpha}} \psi e^{-i\vec{I} \cdot \vec{\alpha}} \phi$
Derivando con respecto a α_i y valuando en $\vec{\alpha} = 0$ tenemos

$$I_i(\psi \phi) = (I_i \psi) \phi + (\psi I_i \phi)$$

y por lo tanto

$$I_{\pm}(\psi \phi) = (I_{\pm} \psi) \phi + (\psi I_{\pm} \phi)$$

Para $\psi(0,0)$ sabemos que $1 + \phi(1,t) = \sqrt{1(1+1)-t(t+1)} \phi(1,t+1)$
 y que $\psi(0,0) = a \phi_1(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \phi_2(\frac{1}{2} -\frac{1}{2}) + b \phi_1(\frac{1}{2} -\frac{1}{2}) \phi_2(\frac{1}{2} \frac{1}{2})$

con

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

(por normalización)

$$1 + \psi(0,0) = 0 = a \phi_1(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \phi_2(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) + b \phi_1(\frac{1}{2} \frac{1}{2}) \phi_2(\frac{1}{2} \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \psi(0,0) = \frac{n\bar{n} + p\bar{p}}{2}$$

(3.31)

Los cuatro estados de ψ son combinaciones de bariones y antibariones no extraños, por lo tanto, todos tienen $B=S=0$ por ser B y S aditivos. Luego, son mesones.

Si se le asigna un valor al momentum angular \mathcal{Q} del sistema compuesto ($\mathcal{Q}=0$), así como una dirección a los spines de los nucleones y antinucleones (antiparalelos), se puede llegar a la asignación de los otros números cuánticos, como spin, paridad, G -paridad a los estados compuestos, y por lo tanto, se puede hacer la identificación

$$\left. \begin{array}{l} p\bar{n} \longrightarrow \pi^+ \\ n\bar{p} \longrightarrow \pi^- \\ \frac{n\bar{n} - p\bar{p}}{\sqrt{2}} \longrightarrow \pi^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{para el} \\ \text{triplete} \\ \text{(Piones)} \end{array}$$

$$\frac{n\bar{n} + p\bar{p}}{\sqrt{2}} \longrightarrow \eta \quad \begin{array}{l} \text{para el} \\ \text{singlete} \\ \text{(\eta -mesón)} \end{array}$$

1. INTRODUCCION

Hemos visto la importancia que tiene la búsqueda de nuevas simetrías en las interacciones fuertes. La simetría de isospín nos permitió agrupar a los hadrones en isomultipletes, considerar cada isomultiplete como una sola partícula con varios estados y "reducir" así, el número de partículas.

Además, basándose en esta simetría (SU_2), la idea de buscar un orden entre las partículas se extendió al suponer que los hadrones eran estados compuestos de partículas más elementales, lo cual reduciría aún más la gran lista de partículas. En el capítulo anterior expusimos un modelo debido a Fermi y Yang, en el cual se consideró a los piones como estados ligados de parejas nucleón-antinucleón; se podía pensar en reducir el número de partículas elementales a sólo fotones, leptones, nucleones y sus antipartículas, siendo los nucleones (antinucleones) los componentes fundamentales de los demás hadrones. Pero debido a que nucleones y antinucleones tienen extrañeza S igual a cero ($S=0$), no se podían formar estados con S distinto de cero (partículas extrañas), lo cual limitaba mucho el modelo.

(29) S. Sakata,
en 1956, trató de resolver este problema proponiendo agregar al doblete básico de isospín (p, n), una partícula con extrañeza diferente de cero y propuso un triplete básico (p, n, Λ), siendo escogida Λ , por

* El nombre hace alusión a que el octeto juega un papel central en el modelo y se tomó de la doctrina Budista: las Cuatro Nobles Verdades son la noble verdad del dolor, la noble verdad de la causa del dolor, la noble verdad de la cesación del dolor, la cuarta noble verdad es El Camino Octuple que conduce hacia las anteriores.

ser un barión con spin $\frac{1}{2}$ (al igual que el p y n) y un isosinglete con extrañeza $S=-1$. Por esta razón, se cambió el grupo de simetría de SU_2 a SU_3 (grupo unitario especial de matrices 3×3). Pero, aunque los mesones podrían ser formados por combinaciones como $p\bar{p}$, $n\bar{n}$, $\Lambda\bar{\Lambda}$, el modelo no funcionó para construir bariónes; combinaciones tales como $pn\Lambda$ dan $B=3$ y tales estados no han sido observados, aunque se puede formar el estado $p\bar{n}\Lambda$ no hay razón para excluir $pn\bar{\Lambda}$ que sería un barión con extrañeza $S=+1$ y tampoco había sido observado en la naturaleza*.

Siguiendo la idea del isospín (ésto es, buscando nuevas simetrías de las interacciones fuertes), se han propuesto varios esquemas de mayor simetría en los que, además del isospín se conserva la extrañeza o equivalentemente, la hipercarga $Y = B+S$. Un modelo muy interesante y el más exitoso es el modelo del octeto o Camino Octuple, propuesto independientemente por Murray Gell-Mann ⁽¹³⁾ y Yuval Ne'eman ⁽¹⁴⁾ en 1961. En el presente capítulo nos dedicaremos a desarrollar este modelo.

Empezaremos comparando partículas que difieren en isospín e hipercarga (y en los demás números directamente relacionados con éstos como extrañeza, G-Paridad y carga) pero de otra forma idénticas (mismo spin, paridad, número bariónico). Al representar los distintos isomultipletes en diagramas bidimensionales, como los de la figura 4.1, se refleja un alto grado de organización.

* Ultimamente se han detectado partículas con $S=+1$ (ver apéndice A).

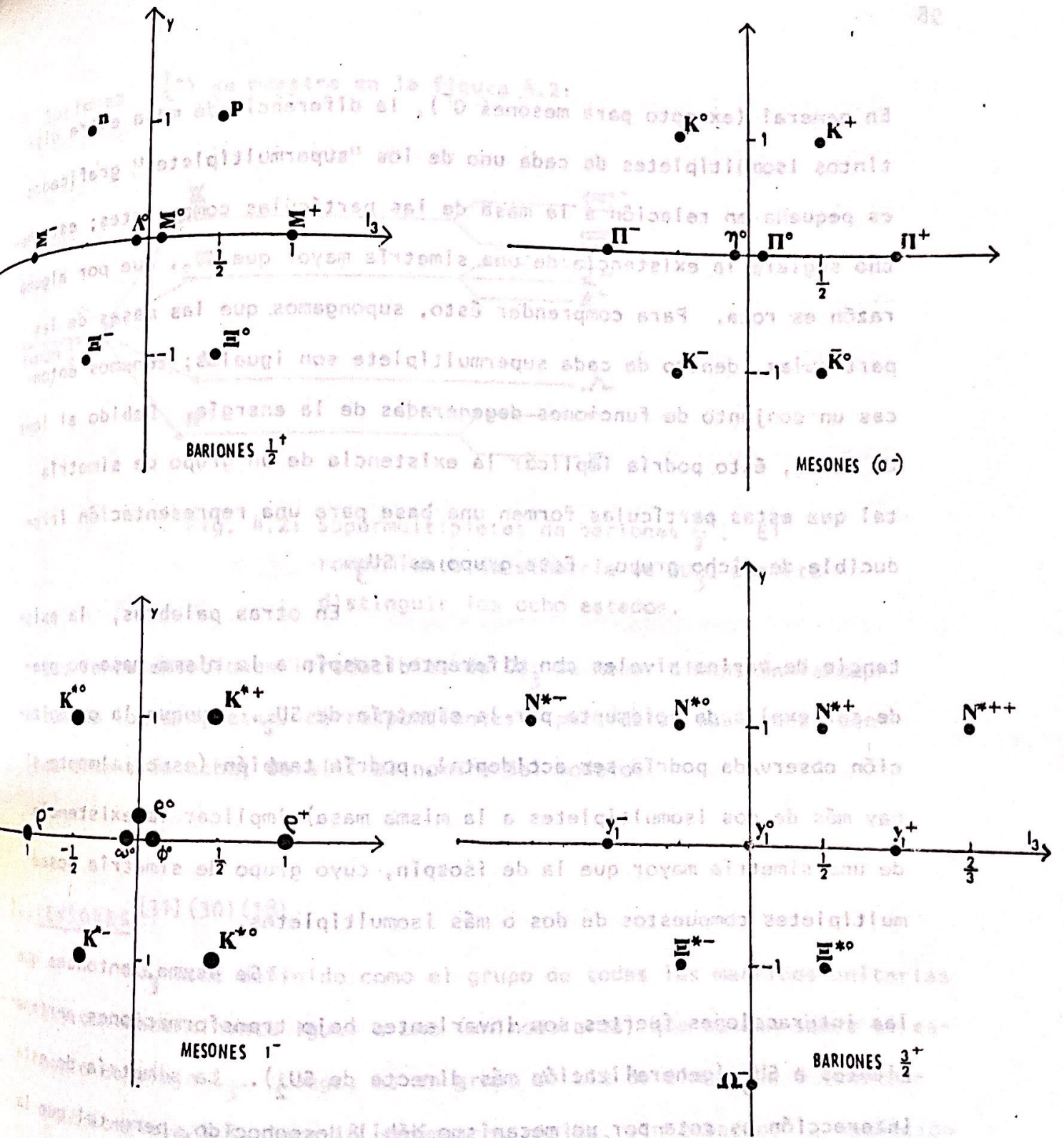


Fig 4.1: Supermultipletes de hadrones. Cada supermultiplete está compuesto de varios isomultipletes que difieren en hipercarga.

En general (excepto para mesones 0^-), la diferencia de masa entre distintos isomultipletes de cada uno de los "supermultipletes" graficados es pequeña en relación a la masa de las partículas componentes; este hecho sugiere la existencia de una simetría mayor que SU_2 , que por alguna razón es rota. Para comprender ésto, supongamos que las masas de las partículas, dentro de cada supermultiplete son iguales; tenemos entonces un conjunto de funciones degeneradas de la energía. Debido al lema de Schur, ésto podría implicar la existencia de un grupo de simetría tal que estas partículas formen una base para una representación irreducible de dicho grupo. Este grupo es SU_3 .

En otras palabras, la existencia de varios niveles con diferente isospín a la misma masa no puede ser explicada solamente por la simetría de SU_2 . Aunque la organización observada podría ser accidental, podría también (especialmente si hay más de dos isomultipletes a la misma masa) implicar la existencia de una simetría mayor que la de isospín, cuyo grupo de simetría posee multipletes compuestos de dos o más isomultipletes.

Se asume, entonces que las interacciones fuertes son invariantes bajo transformaciones pertenecientes a SU_3 (generalización más directa de SU_2). La simetría de esta interacción es rota por un mecanismo débil desconocido, pero tal que la hipercarga y el isospín aún se conservan. La interacción electromagnética (aún más débil que la anterior) rompe esta menor simetría.

Una representación gráfica de este rompimiento de simetría para el octeto de

bariones $(\frac{1}{2}^+)$ se muestra en la figura 4.2:

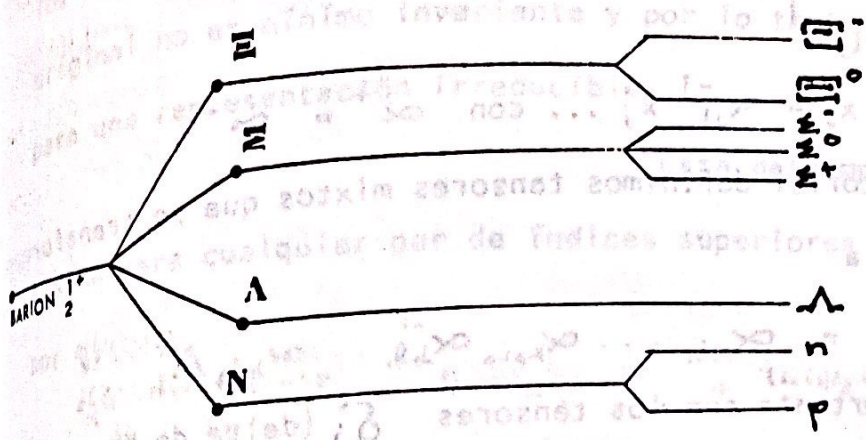


Fig. 4.2: Supermultipletes de bariones $\frac{1}{2}^+$. El rompimiento de simetría de SU_3 , permite distinguir los ocho estados.

Las representaciones irreducibles de SU_3 de menor dimensión (exceptuando los singletes) correspondientes a partículas observadas son de dimensión ocho, de allí el nombre del modelo.

2. TENSORES (31) (30) (18)

SU_3 está definido como el grupo de todas las matrices unitarias 3×3 con determinante igual a uno (unimodulares) que actúan sobre el espacio complejo C_3 . Luego, es un grupo de Lie de dimensión 8 (una matriz compleja 3×3 tiene 18 parámetros reales, sin embargo, la condición de unitaridad nos dá 9 relaciones y la de unimodularidad nos dá una más, por lo tanto hay sólo 8 parámetros independientes). Esta definición nos dá directamente una representación del grupo.

Sea x_i un elemento del

espacio vectorial C_3 y $x_i = (x^i)^*$ su conjugado complejo. Bajo una transformación α del grupo SU_3 , x^i y x_i se transforman en

$$\bar{x}^i = \alpha_{ij} x^j$$

$$\bar{x}_i = \alpha_{ij}^* x_j = \alpha_{ji}^{-1} x_j \dots \text{con } \alpha^+ = \alpha^{-1}$$

En este espacio vectorial definimos tensores mixtos que se transforman ante SU_3 de acuerdo a

$$\bar{A}_{i_1 \dots i_q}^{k_1 \dots k_p} = \alpha_{k_1 i_1} \dots \alpha_{k_p i_p} \alpha_{j_1 i_1}^{-1} \dots \alpha_{j_q i_q}^{-1} A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

Particularmente importante son los tensores δ_j^i (delta de Kronecker) y ϵ_{ijk} y ϵ^{ijk} pues son invariantes ante transformaciones del grupo:

$$\bar{\delta}_j^i = \alpha_{ik} \alpha_{kj}^{-1} \delta_k^i = \alpha_{ik} \alpha_{kj}^{-1} \delta_j^i$$

$$\bar{\epsilon}^{ijk} = \alpha_{i\alpha} \alpha_{j\beta} \alpha_{k\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \det \alpha \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk} \quad (4.1)$$

Consideremos los monomios $M(p,q)$:

$$x^{i_1} y^{i_2} \dots z^{i_p} u_{j_1} v_{j_2} \dots w_{j_q}$$

con p índices superiores y q índices inferiores. Si le aplicamos una transformación del grupo a uno de estos monomios, obtenemos una combinación lineal de monomios de la misma forma. Luego, el espacio generado por esos monomios es invariante ante SU_3 y puede ser el espacio "soporte" para una representación de este grupo. Sin embargo, esta representación es, en general, reducible. Para encontrar las representaciones irreducibles, necesitamos descomponer este espacio en subespacios mínimos invariantes. Si A_{ij} es un tensor de rango dos (por ejemplo una combinación lineal de monomios $x_i y_j$), lo podemos dividir en la suma de un tensor simétrico con uno antisimétrico

$$A_{ij} = S A_{ij} + A_{ij}$$

Podemos ver directamente que esta separación es invariante bajo la

acción del grupo, por lo que hemos dividido el espacio generado por los A_{ij} en dos subespacios invariantes. Esto implica que el espacio original no es mínimo invariante y por lo tanto A_{ij} no puede ser base para una representación irreducible.

Esta descomposición se puede extender para cualquier par de índices superiores o inferiores de un tensor mixto.

$$A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_p} = (i_r i_s)_s A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + (i_r i_s) A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_r \dots i_s \dots i_p} \quad (4.2a)$$

$$A_{j_1 \dots j_m \dots j_n \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = (j_m j_n)_s A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + (j_m j_n) A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (4.2b)$$

$(i_r i_s)_s A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tensor simétrico respecto de los índices i_r, i_s etc.)

Además, un tensor arbitrario A, permite otro tipo de descomposición.

TEOREMA 4.1

Todo tensor $A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ se puede descomponer de una forma única como

$$A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \hat{A}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (4.3)$$

siendo \hat{A} un tensor con todas sus trazas* iguales a cero y ϕ un tensor de la forma

$$\phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \delta_{j_1}^{i_1} B_{j_2 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} + \dots + \delta_{j_s}^{i_s} B_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_p} + \dots + \delta_{j_q}^{i_q} B_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_p} \quad (pq \text{ terminos})$$

con B arbitrarios.

Esta descomposición es invariante ante las transformaciones de SU_3 .

* Un tensor $A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ tiene varias trazas; estas son el resultado de contraer el tensor para cada par de índices, uno superior y uno inferior. Por ejemplo, la traza (i_r, j_s) de A es $A_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_r \dots i_p}$

DEMOSTRACION

Consideremos el subespacio Σ de todos los tensores ϕ .
Sea \hat{A} un tensor ortogonal a Σ , esto es

$$\langle \hat{A} | \phi \rangle = \hat{A}_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \phi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = 0 \quad \forall \phi \in \Sigma \quad (4.4)$$

Escojamos las ϕ tal que sólo $B_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p}$ sea distinto de cero, entonces (4.4) implica que $\hat{A}_{i_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = 0$

Pero como las componentes de B son arbitrarias, debemos tener $\hat{A}_{i_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = 0$ (es decir que la traza (i_1, j_1) de \hat{A} es cero). Haciendo el mismo análisis para cada traza, llegamos a la misma conclusión. Por lo tanto, el conjunto de tensores sin traza forma un subespacio ortogonal a Σ y el espacio total es la suma de estos subespacios, o sea que podemos escribir

$$A_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = \hat{A}_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} + \phi_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p}$$

Para demostrar que esta descomposición es invariante, sea

$F_{j_2 \dots j_p}^{i_2 \dots i_p}$ la traza (i_1, j_1) de A , o sea

$$F_{j_2 \dots j_p}^{i_2 \dots i_p} = \sum_{i_1} A_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} = A_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p}$$

entonces

$$\begin{aligned} \bar{F}_{j_2 \dots j_p}^{i_2 \dots i_p} &= \alpha_{i_1 l_1} \dots \alpha_{i_p l_p} \alpha_{k_1 i_1}^{-1} \alpha_{k_2 i_2}^{-1} \dots \alpha_{k_p i_p}^{-1} A_{j_1 \dots j_p}^{l_1 \dots l_p} \\ &= \alpha_{i_2 l_2} \dots \alpha_{i_p l_p} \alpha_{k_1 j_1}^{-1} \dots \alpha_{k_p j_p}^{-1} A_{j_1 \dots j_p}^{l_1 \dots l_p} \\ &= \alpha_{i_2 l_2} \dots \alpha_{i_p l_p} \alpha_{k_1 j_1}^{-1} \dots \alpha_{k_p j_p}^{-1} F_{j_1 \dots j_p}^{l_1 \dots l_p} \end{aligned}$$

Por lo que si la traza (l_1, k_1) de A es cero, también lo será la traza (i_1, j_1) de \bar{A} . Es decir, que el espacio de tensores de traza cero es invariante. Por lo tanto, la descomposición (4.4) es invariante ante transformaciones de SU_3 .

Nos interesa encontrar las representaciones irreducibles de SU_3 ; para lograrlo, podemos proceder de la siguiente manera:

- i) Considerar el conjunto de todos los tensores con un número dado de índices superiores e inferiores.
- ii) Dividir este conjunto en tantas partes invariables como podamos.
- iii) Descartar las partes que llevan a representaciones equivalentes a las obtenidas con tensores de menor rango.
- iv) Identificar las partes que quedan con nuevas representaciones irreducibles.

Ya tenemos dos formas de dividir invariante a los tensores (4.2) y (4.3). Analicemos la parte antisimétrica de la descomposición (4.2a).

Esta la podemos escribir en función de un tensor de menor rango como

$$(\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_p} A_{j_1 \dots j_q}) = \sum_{k_1 \dots k_r} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r} B_{k_1 \dots k_r} \epsilon_{i_{r+1} \dots i_p} A_{j_1 \dots j_q}$$

pues $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r}$ es antisimétrico en i_r e i_s , además es invariante ante SU_3 (por lo que al transformar $(\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r})_A$, $(\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_r})_{\bar{A}}$ se podrá escribir de la misma forma).

Por lo tanto, la representación inducida por la parte antisimétrica de A es equivalente a una representación inducida por un tensor de menor rango entonces, la descartamos. De la misma forma se puede proceder para cualquier par de índices superiores e inferiores (usando $\epsilon_{i j k}$). Por esta razón, descartamos todos los tensores antisimétricos y escogemos sólo aquellos que sean simétricos en sus p índices superiores y en sus q índices inferiores.

Debido a los reducidos de i) y ii), todas las partes son lineales, por lo tanto existe sólo una traza.

Además, en la descomposición (4.3) vemos que los tensores ϕ se expresan en función de tensores de menor rango por medio de δ_j^i ; que también es invariante ante SU_3 y por lo tanto sólo nos interesan los tensores de traza cero.

Ahora podemos escoger como base para las representaciones irreducibles de SU_3 , los polinomios $P(p,q)$, combinaciones lineales de los $M(p,q)$ de tal forma que sean

- i) Totalmente simétricos en los p índices superiores
- ii) Totalmente simétricos en los q índices inferiores
- iii) Traza igual a cero*.

Demostraremos la representación inducida por cada uno de estos conjuntos de polinomios como $T(p,q)$ o simplemente (p,q) . Notemos que una simple consecuencia de nuestras definiciones es

$$(p,q) = (q,p)^* \quad (*: \text{conjugado})$$

Encontramos ahora la dimensión de una representación $T(p,q)$.

TEOREMA 4.2

Sea $T(p,q)$ una representación irreducible de SU_3 ; la dimensión N de $T(p,q)$ es

$$N = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2)$$

DEMOSTRACION

En base al teorema 4.1, podemos decir que el espacio de tensores completamente simétricos con p índices superiores

* Debido a los requerimientos de i) y ii), todas las trazas son iguales, por lo tanto existe sólo una traza.

res y q índices inferiores, se puede descomponer en la suma de los subespacios

i) El subespacio de la representación irreducible

$T(p,q)$ (tensores simétricos con traza cero).

ii) El subespacio Σ de tensores ϕ equivalente

a un espacio de tensores simétricos con $p-1$

índices superiores y $q-1$ índices inferiores.

En lenguaje de representaciones

$$(p,0) \otimes (0,q) = (p,q) \oplus [(p-1,0) \otimes (0,q-1)] \quad (4.5)$$

Por lo tanto,

$$N = \dim(p,q) = \dim(p,0)\dim(0,q) - \dim(p-1,0)\dim(0,q-1) \quad (4.6)$$

Encontramos a qué es igual la dimensión de $(p,0)$ ($\dim(p,0)$), o sea el número de componentes independientes de un tensor con p índices superiores y cero inferiores. Debido a que el tensor es totalmente simétrico, el orden de los índices no es importante; podríamos arreglarlos de tal forma que tengamos primero todos los 1's, luego los 2's y 3's.

Asumamos que tenemos α 1's, (α toma valores desde el cero hasta p); para cada α hay $p-\alpha$ 2's y 3's y entonces hay $(p-\alpha+1)$ formas diferentes de combinar estos números para un α dado. Luego

$$\dim(p,0) = \sum_{\alpha=0}^p (p-\alpha+1) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2).$$

De la misma forma

$$\dim(0,q) = \frac{1}{2}(q+1)(q+2)$$

Sustituyendo estos valores en (4.6), obtenemos

$$N = \dim(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Otra forma de denotar una representación irreducible (aunque no la determina unívocamente) es por su dimensión $(p, q) \longleftrightarrow \{N\}$. Finalmente

notamos que una representación en general reducible con base x^i, x^j, \dots, x^k se puede obtener como el producto directo de p veces la representación con base x^i con q veces la representación con base x^j .

Por lo tanto, podemos pensar en la existencia de dos triplete^{*}s básicos:

$$x^1 = (x^1, x^2, x^3)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

de los cuales se pueden obtener todos los demás multipletes. En el modelo de Sakata, éstos corresponden a los triplete^s $(p, n, \bar{\lambda})$ y $(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\lambda})$.

El modelo del octeto relaciona un grupo de partículas con un multiplete de SU_3 . Como veremos más adelante, no todos los multipletes corresponden a grupos de partículas. En especial, en el modelo original no se suponía la existencia de los triplete^s fundamentales. Sin embargo, tener en mente su posible existencia simplifica y clarifica mucho el trabajo. Es más, luego los identificaremos con los triplete^s de quarks y antiquarks.

3. GENERADORES⁽³¹⁾

Hemos visto que los N polinomios $P(p, q)$ forman una base para las representaciones irreducibles de SU_3 . Estos polinomios generan un espacio vectorial V_N y las transformaciones α que actúan

* SU_3 es un grupo de rango dos, luego posee dos multipletes fundamentales (ver nota en página 92).

sobre C_3 les corresponde transformaciones unitarias U con $\det U=1$, que actúan sobre V_N .

Estas transformaciones se pueden escribir (análogo al grupo de rotaciones) en la forma $U = e^{-i \Theta \cdot \bar{F}}$ donde los Θ_i son los 8 parámetros de SU_3 y los operadores hermíticos, F_i , sus generadores.

Como los U son unimodulares ($\det U = e^{-i \text{tr} \Theta \cdot \bar{F}} = 1$) tenemos que $\text{Tr} \Theta \cdot \bar{F} = 0$. Esta última condición se satisface para todos los valores de los parámetros sólo si $\text{Tr} F_i = 0$.

Para obtener las relaciones de conmutación de los F_i es conveniente introducir los nuevos operadores sin traza A^j_k cuya representación en C_3 está dada por

$$(A^j_k)_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \delta_{k\mu} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

$(j, k, \mu, \nu = 1, 2 \text{ ó } 3)$

es decir

$$A^1_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^2_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

No todas las A^j_k son independientes, pues

$$A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 = 0 \quad (4.8)$$

Es fácil verificar que las matrices A^j_k satisfacen las relaciones de conmutación

$$[A^i_k, A^j_l] = \delta^i_l A^j_k - \delta^j_k A^i_l \quad (4.9)$$

A éstas nueve matrices en C_3 les corresponden 9 operadores en cada espacio V_N que satisfacen las relaciones (4.9), por supuesto estos ope-

radores ya no son matrices 3×3 sino que $N \times N$.

Introduciremos la siguiente notación para los operadores A^i_k , $k \neq i$

$$\begin{aligned} I_+ &= A^2_1 & U_+ &= A^1_2 & V_+ &= A^1_3 \\ I_- &= A^1_2 & U_- &= A^2_3 & V_- &= A^2_1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Además definiremos los operadores diagonales

$$I_3 = \frac{1}{2} [A^1_1 - A^2_2] ; \quad U_3 = \frac{1}{2} [A^2_2 - A^3_3] ; \quad -V_3 = \frac{1}{2} [A^3_3 - A^1_1]$$

Notamos que $I_3 + V_3 + U_3 = 0$ y por lo tanto sólo hay ocho operadores

I, U, V independientes.

Podemos escribir las relaciones de conmutación para

estos nueve operadores en base a las obtenidas para los A^i_k

$$\begin{aligned} [I_3, I_{\pm}] &= \pm I_{\pm} & [I_+, I_-] &= 2I_3 \\ [U_3, U_{\pm}] &= \pm U_{\pm} & [U_+, U_-] &= 2U_3 \\ [V_3, V_{\pm}] &= \pm V_{\pm} & [V_+, V_-] &= 2V_3 \end{aligned} \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} [I_3, U_3] &= 0 & [I_3, V_3] &= 0 \\ [I_3, U_+] &= -\frac{1}{2}U_+ & [I_3, V_+] &= -\frac{1}{2}V_+ \\ [I_3, U_-] &= \frac{1}{2}U_- & [I_3, V_-] &= \frac{1}{2}V_- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I_+, U_3] &= \frac{1}{2}I_+ & [I_+, V_3] &= \frac{1}{2}I_+ \\ [I_+, U_+] &= V_- & [I_+, V_+] &= -U_- \\ [I_+, U_-] &= 0 & [I_+, V_-] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I_-, U_3] &= -\frac{1}{2}I_- & [I_-, V_3] &= -\frac{1}{2}I_- \\ [I_-, U_+] &= 0 & [I_-, V_+] &= 0 \\ [I_-, U_-] &= -V_+ & [I_-, V_-] &= +U_+ \end{aligned} \quad (4.11b)$$

$$[U_3, V_3] = 0$$

$$[U_3, V_+] = \frac{1}{2}V_+$$

$$[U_3, V_-] = \frac{1}{2}V_-$$

$$[U_+, V_3] = \frac{1}{2}U_+$$

$$[U_+, V_+] = I_-$$

$$[U_+, V_-] = 0$$

$$[U_-, V_3] = -\frac{1}{2}U_-$$

$$[U_-, V_+] = 0$$

$$[U_-, V_-] = -I_+$$

Analizando las relaciones anteriores, se observan varios hechos interesantes.

- i) En base a (4.11a), notamos que las I 's las U 's y las V 's, tienen la misma álgebra que SU_2 ; por ésto se les llama I -spín (isospín) U -spín y V -spín respectivamente; ésto es muy importante porque nos podemos basar en resultados de SU_2 para analizar las representaciones irreducibles de SU_3 .

Podemos escribir

cribir

$$I_{\pm} = I_1 \pm iI_2$$

$$U_{\pm} = U_1 \pm iU_2$$

$$V_{\pm} = V_1 \pm iV_2$$

donde I_1, I_2, V_1, V_2, U_1 y U_2 son operadores hermíticos sin traza y linealmente independientes. Estos son seis de los ocho generadores F_i de SU_3 .

- ii) Existe un máximo de dos operadores independientes que conmutan entre sí (I_3, V_3, U_3 son dependientes). Por lo tanto sólo pue-

den ser diagonalizados simultáneamente dos operadores. Escogemos como uno de ellos a I_3 , pues su representación sobre C_3

$$I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Si pensamos en el múltiplete fundamental p, n, Λ , éste operador corresponde precisamente al isospín (de allí su designación). Escogemos el segundo operador de tal forma que éste esté directamente relacionado con la hipercarga. Este debe ser una combinación lineal de los restantes operadores diagonales U_3 y V_3 , tomamos:

$$Y = \frac{2}{3}(U_3 - V_3) \quad (4.12)$$

En C_3

$$Y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

I_3 y Y son los restantes generadores de SU_3 .

Un conjunto de generadores para SU_3 es entonces

$$F_1 = I_1$$

$$F_2 = I_2$$

$$F_3 = I_3$$

$$F_4 = U_1$$

$$F_5 = U_2$$

$$F_6 = V_1$$

$$F_7 = V_2$$

$$F_8 = Y$$

Las relaciones de conmutación para los F_i se obtienen fácilmente a

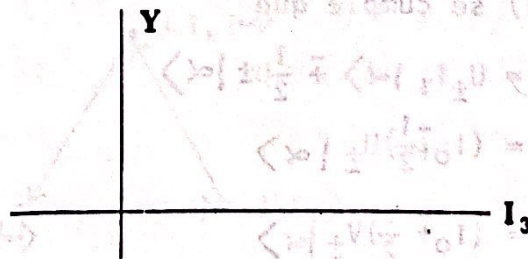
partir de las relaciones 4.11.

Veremos después que para las representaciones que tienen como base partículas observadas, esta escogencia para el isospín y la hipercarga es la correcta.

Tenemos pues, dos generadores (I_3 y Y) que conmutan entre sí y por lo tanto tienen un conjunto común de eigenestados. Cada eigenestado base de una representación irreducible estará caracterizado entonces por un par de números cuánticos (eigenvalores de I_3 y Y). Nuestro interés es encontrar las funciones base para una representación irreducible dada. Esto lo lograremos analizando los diagramas de eigenvalores.

4. DIAGRAMAS DE EIGENVALORES ^{(31) (32) (20)}

Como cada miembro de un multiplete de SU_3 está caracterizado por dos números (I_3, Y), es conveniente representarlo como un punto en un diagrama bidimensional con ejes I_3 y Y . (llamado diagrama de eigenvalores).



Los resultados de SU_2 son muy útiles para elaborar un diagrama de este tipo, pues si conocemos un miembro de un isomultiplete, podemos encontrar los demás aplicando I_+ y/o I_- . Como los operadores \bar{U} y \bar{V} tienen

la misma álgebra, es útil trazar los ejes (dependientes) U_3 y V_3 de tal forma que si conocemos, por ejemplo, el elemento de mayor U_3 de un U_3 multiplete, entonces podemos (siguiendo la dirección decreciente de U_3) encontrar las demás funciones de este multiplete. Por esta razón, encontraremos las direcciones de los ejes U_3 y V_3 en el diagrama de eigenvalores.

Sea $|\alpha\rangle$ un eigenestado de I_3, U_3 y V_3 con eigenvalores l_0, U_0, V_0 .

$$I_3 |\alpha\rangle = l_0 |\alpha\rangle$$

$$U_3 |\alpha\rangle = U_0 |\alpha\rangle$$

$$V_3 |\alpha\rangle = V_0 |\alpha\rangle$$

Sabemos por las relaciones de conmutación (teorema 3.8) que I_+, U_+ y V_+ son operadores que aumentan en 1 el eigenvalor de $|\alpha\rangle$

$$I_3 I_+ |\alpha\rangle = (l_0 + 1) I_+ |\alpha\rangle$$

$$U_3 U_+ |\alpha\rangle = (U_0 + 1) U_+ |\alpha\rangle$$

$$V_3 V_+ |\alpha\rangle = (V_0 + 1) V_+ |\alpha\rangle$$

(4.13a)

De la misma forma, I_-, V_- y U_- disminuyen en 1 dicho eigenvalor.

Además,

en base a (4.11) se cumple que

$$\begin{aligned} I_3 U_{\pm} |\alpha\rangle &= U_{\pm} I_3 |\alpha\rangle \mp \frac{1}{2} U_{\pm} |\alpha\rangle \\ &= (l_0 \mp \frac{1}{2}) U_{\pm} |\alpha\rangle \end{aligned}$$

(4.13b)

$$I_3 V_{\pm} |\alpha\rangle = (l_0 \mp \frac{1}{2}) V_{\pm} |\alpha\rangle$$

Lo que muestra que U_+ y V_+ disminuyen en $\frac{1}{2}$ el número cuántico l_0 y U_- y V_- lo aumentan en $\frac{1}{2}$.

Consideremos el efecto del operador $V_+ U_+ I_+$

sobre el eigenestado $|\alpha\rangle$.

$$|\beta\rangle = V_+ U_+ I_+ |\alpha\rangle$$

Sea

entonces

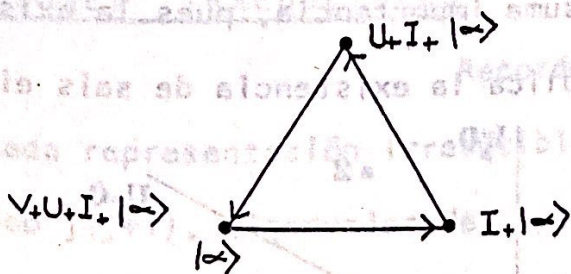
$$\begin{aligned} I_3 |\beta\rangle &= I_3 V_+ U_+ I_+ |\alpha\rangle \\ &= V_+ I_3 U_+ I_+ |\alpha\rangle - \frac{1}{2} |\beta\rangle \\ &= V_+ U_+ I_3 I_+ |\alpha\rangle - |\beta\rangle \\ &= V_+ U_+ I_+ I_3 |\alpha\rangle = I_0 |\beta\rangle \end{aligned}$$

De la misma forma obtenemos

$$U_3 |\beta\rangle = U_0 |\beta\rangle$$

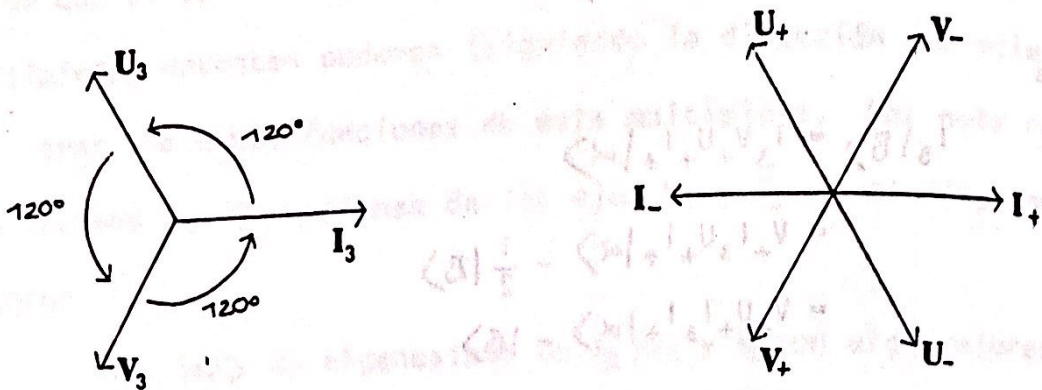
$$V_3 |\beta\rangle = V_0 |\beta\rangle$$

Entonces $|\beta\rangle$ debe aparecer en la misma posición que $|\alpha\rangle$ en el diagrama de eigenvalores (no tienen por qué ser el mismo estado). Al aplicar $V_+ U_+ I_+$ a $|\alpha\rangle$ lo que hicimos fue avanzar en la dirección creciente de I_3 luego en la de U_3 y finalmente en la de V_3 ; si dimos tres pasos de igual longitud y llegamos a la posición de partida quiere decir que nos movimos sobre los vértices de un triángulo equilátero



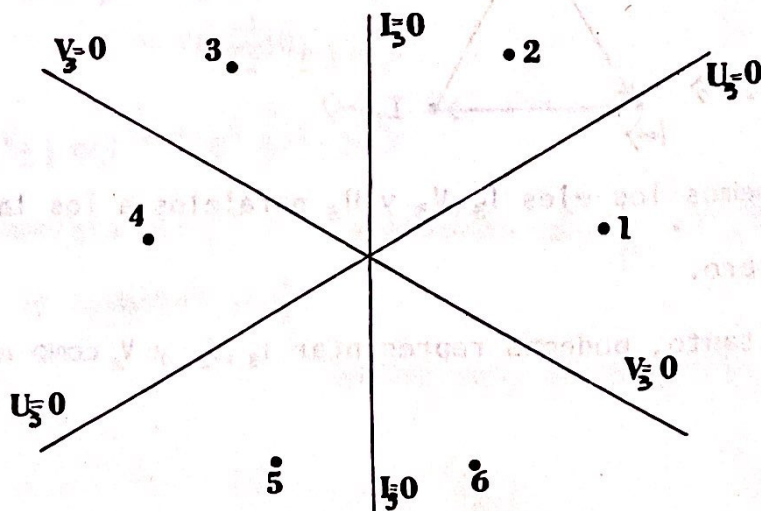
Esto sugiere que tomemos los ejes I_3, V_3 y U_3 paralelos a los lados de un triángulo equilátero.

Por lo tanto, podemos representar I_3, U_3 y V_3 como ejes a

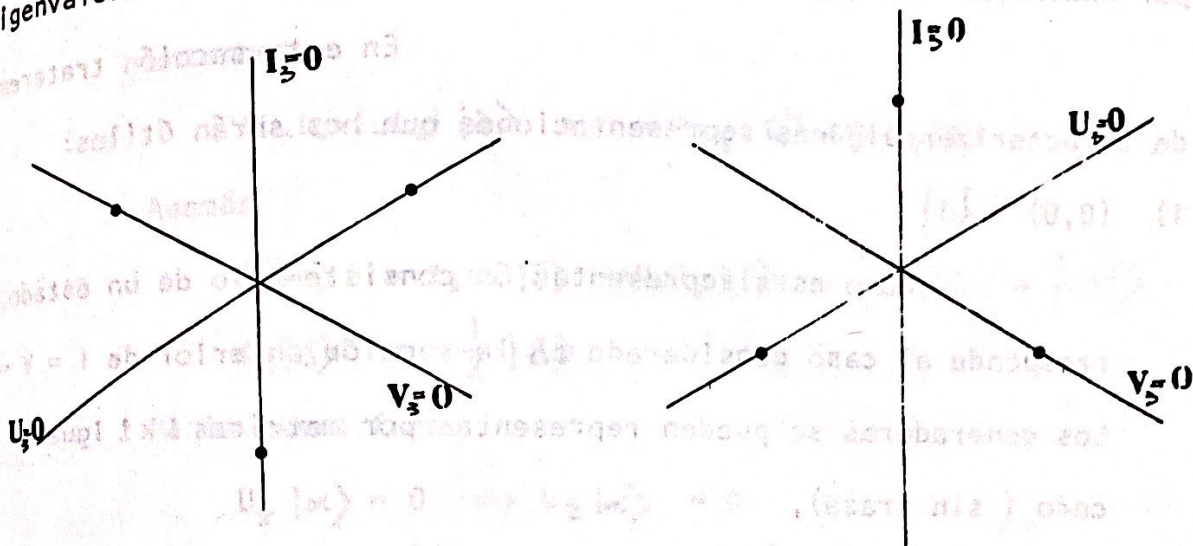


DIRECCIONES DE AVANCE PARA
LOS OPERADORES $I_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$

Recordemos (teorema 3.8) que para el álgebra de SU_2 , los eigenvalores del operador momentum angular J_3 tomaban valores desde j hasta $-j$ ($m = -j, -j+1, \dots, j$). Es decir, que eran simétricos respecto a $m = 0$ (si existe $m = 1$, por ejemplo, debe existir $m = -1$). Como nuestros operadores U, V, I satisfacen la misma álgebra, tendremos la misma simetría, para cada uno de los casos. Es decir, que el diagrama de eigenvalores debe ser simétrico respecto a las rectas $I_3 = 0, U_3 = 0, V_3 = 0$. Este es un resultado de suma importancia, pues la existencia de un eigenvalor, en general, implica la existencia de seis eigenvalores:



Hay dos excepciones. La primera es cuando el eigenvalor I_0 pertenece a una de las líneas de reflexión ($I_3 = 0, U_3 = 0, V_3 = 0$). En este caso, la existencia de un eigenvalor solamente implica la existencia de tres eigenvalores.



La segunda excepción es cuando el eigenvalor está en el centro del diagrama ($I_0 = Y = 0$). En este caso, la existencia de ningún otro eigenvalor es implicada.

5. REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES ^{(31) (20) (33)}

Recordemos que para el grupo de rotaciones cada representación irreducible está determinada por un número cuántico $j(j+1)$, eigenvalor del operador invariante de Casimir J^2 . En este caso existen dos operadores de Casimir:

$$M_2 = \langle A \cdot A \rangle = A_\nu^\mu A_\mu^\nu$$

$$M_3 = \langle A \cdot A \cdot A \rangle = A_\nu^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu$$

En base a las relaciones (4.9) se puede ver que estos operadores con-

mutan con los generadores A_j^{\pm} y entre sí*. Sus eigenvalores etiquetarán cada representación. Como hemos visto, una representación está determinada por los números p y q . Por lo tanto, no nos preocuparemos por encontrar los eigenvalores de M_2 y M_3 .

En esta sección trataremos de caracterizar algunas representaciones que nos serán útiles:

1) $(0,0) = \{1\}$

Como esta representación consiste solo de un estado, corresponde al caso considerado en la sección anterior de $l = Y = 0$. Los generadores se pueden representar por matrices 1×1 iguales a cero (sin traza).

2) $(1,0) = \{3\}$

Para esta representación hay tres arreglos posibles:

i) Tres estados degenerados en el origen $l=Y=0$. Los generadores son iguales a cero y como son matrices 3×3 , este caso es reducible.

ii) Tres estados colocados como en la figura 4.4

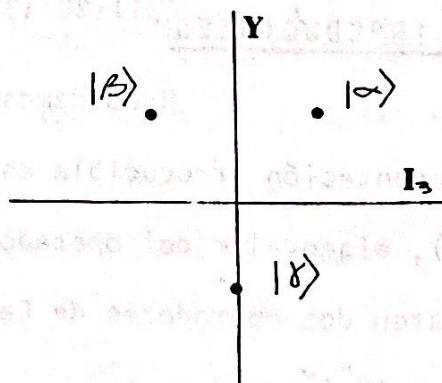


Fig. 4.4

Determinemos los eigenvalores de los tres estados $|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\delta\rangle$.

* Debido a que podemos escribir los operadores A_j^{\pm} como combinaciones sencillas de los generadores F_i (por ejemplo $A_1^{\pm} = I_{\pm}, A_2^{\pm}$ etc.) les llamaremos de aquí en adelante "generadores" de SU_3 .

según la figura 4.4:

$$I_{\pm} |\chi\rangle = 0 \quad (|\chi\rangle \text{ isosinglete})$$

$$V_{-} |\chi\rangle = |\alpha\rangle \quad (V\text{-spin doblete})$$

$$U_{+} |\chi\rangle = |\beta\rangle \quad (U\text{-spin doblete})$$

entonces

$$(I_{+} I_{-} - I_{z}^2) |\chi\rangle = 0 = 2I_{z} |\chi\rangle \Rightarrow I_{z} |\chi\rangle = 0$$

Además

$$I_{z} |\alpha\rangle = I_{z} V_{-} |\chi\rangle = V_{-} I_{z} |\chi\rangle + \frac{1}{2} V_{-} |\chi\rangle = \frac{1}{2} |\alpha\rangle$$

$$I_{z} |\beta\rangle = -\frac{1}{2} |\beta\rangle$$

De la misma forma

$$U_{\pm} |\alpha\rangle = 0 \Rightarrow U_{z} |\alpha\rangle = 0$$

$$U_{z} |\beta\rangle = \frac{1}{2} |\beta\rangle \quad U_{z} |\chi\rangle = -\frac{1}{2} |\chi\rangle$$

$$V_{\pm} |\beta\rangle = 0 \quad V_{z} |\beta\rangle = 0$$

$$V_{z} |\alpha\rangle = -\frac{1}{2} |\alpha\rangle \quad V_{z} |\chi\rangle = \frac{1}{2} |\chi\rangle$$

Identificando los estados por su isospín I_3 e hipercarga

$Y = \frac{2}{3}(U_3 - V_3)$ ($|I_3, Y\rangle$) tenemos el diagrama:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$Y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad I_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

luego, esta es la representación sobre C_3 con la que partimos,

con base x^1, x^2, x^3 .

Observemos en el diagrama anterior que U_{\pm} y V_{\pm} cambian la hipercarga en una unidad, lo cual justifica el factor $\frac{2}{3}$ en la definición de Y . Además, la escala de Y difiere de la de I_3 por un factor de $\frac{3}{2}$.

iii) Tres estados como en la figura 4.5:

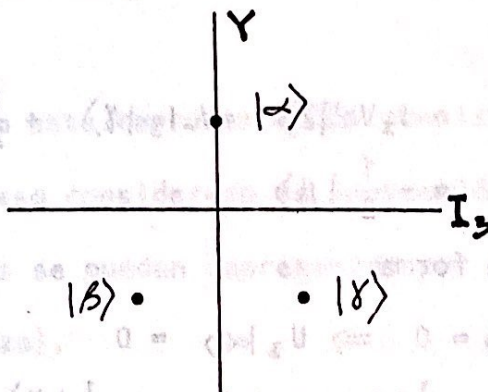


Fig. 4.5

Por convención ésta se ha tomado como base para la representación $(0,1) = (1,0)^* = 3^*$

3) $(0,1) = \{3^*\}$ (Representación conjugada de $(1,0)$)

Al igual que en el caso anterior, existen tres posibilidades. Escogeremos la última que se trató en 2) (figura 4.5).

Tenemos

$$I_{\pm} |\alpha\rangle = 0 \Rightarrow I_3 |\alpha\rangle = 0$$

Además

$$V_- |\beta\rangle = |\alpha\rangle ; U_+ |\gamma\rangle = |\alpha\rangle ; V_+ |\alpha\rangle = |\beta\rangle ; I_- |\gamma\rangle =$$

Entonces

$$I_3 |\beta\rangle = I_3 V_+ |\alpha\rangle = V_+ I_3 |\alpha\rangle - \frac{1}{2} V_+ |\alpha\rangle = -\frac{1}{2} |\beta\rangle$$

$$I_3 |\gamma\rangle = \frac{1}{2} |\gamma\rangle$$

$$U_{\pm} |\beta\rangle = 0 \Rightarrow U_3 |\beta\rangle = 0 \Rightarrow U_3 |\alpha\rangle = U_3 V_- |\beta\rangle = \frac{1}{2} |\alpha\rangle$$

$$U_3 |\gamma\rangle = -\frac{1}{2} |\gamma\rangle ; V_3 |\gamma\rangle = 0 ; V_3 |\beta\rangle = \frac{1}{2} |\beta\rangle ; V_3 |\alpha\rangle =$$

luego

$$\cdot |0 \frac{2}{3}\rangle$$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle \cdot |\frac{1}{2} -\frac{1}{3}\rangle$$

y por lo tanto en la base x_1, x_2, x_3 ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$),

$$I_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Como dijimos anteriormente las representaciones (p,q) pueden ser formadas por el producto directo de p veces $(1,0)$ con q veces $(0,1)$.

$$(p,0) \times (0,q) = (p,q) \oplus [(p-1,0) \otimes (0,q-1)]$$

(por supuesto este producto es "más grande" que (p,q)). Las funciones

base de (p,q) son entonces combinaciones lineales de los monomios $x^i y^h \dots z^p u_j, v_{j_2} \dots w_{j_2}$. Sin embargo, el eigenestado de mayor eigenvalor de isospín puede formarse de una sola forma.

$$\underbrace{x^1 y^1 \dots z^1}_{p \text{ factores}} \underbrace{u_2 v_2 \dots w_2}_{q \text{ factores}}$$

Esto es debido a que en $(1,0)$ el eigenestado de mayor eigenvalor de isospín es x^1 ($I_3 = \frac{1}{2}$) y en $(0,1)$ es x_2 ($I_3 = \frac{1}{2}$).

De esta forma el mayor

eigenvalor I_0 es.

$$I_0 = \frac{p+q}{2}$$

Este eigenestado tendrá hipercarga

$$Y = \frac{p-q}{3}$$

Para las partículas observadas la hipercarga es un entero. Entonces,

en este modelo, no todas las representaciones irreducibles de SU_3 son interesantes; las únicas realizables en la naturaleza son aquellas para las que: $p-q = 3n \quad n \in \mathbb{Z}$.

En base a estos resultados, podemos darnos una idea de la forma que tendrá la "frontera" o parte externa de un diagrama de eigenvalores de una representación (p,q) .

Sea $|\alpha\rangle$ el estado de mayor eigenvalor de I_3

$$I_3 |\alpha\rangle = \frac{1}{2}(p+q) |\alpha\rangle$$

$$Y |\alpha\rangle = \frac{1}{3}(p-q) |\alpha\rangle$$

entonces

$$\frac{2}{3}(U_3 - V_3) |\alpha\rangle = \frac{2}{3}(U_3 + V_3 + I_3) |\alpha\rangle = \frac{2}{3}(2U_3 + I_3) |\alpha\rangle = \frac{1}{3}(p-q) |\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow U_3 |\alpha\rangle = \frac{q}{2} |\alpha\rangle \quad \text{y} \quad V_3 |\alpha\rangle = \frac{p}{2} |\alpha\rangle$$

Como $|\alpha\rangle$ es el estado de mayor eigenvalor de I_+ tenemos

$$I_+ |\alpha\rangle = 0$$

y por las ecuaciones (4.14b): $U_- |\alpha\rangle = 0; \quad V_- |\alpha\rangle = 0$

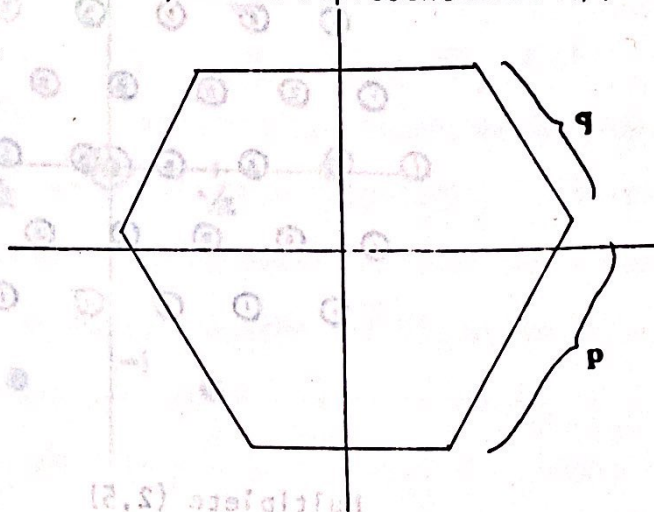
Por lo tanto $|\alpha\rangle$ es el miembro "menor" de un U-spin multiplete de dimensión $2\left(\frac{q}{2}\right)+1 = q+1$; y también el menor de un V-spin multiplete de dimensión $p+1$. Para encontrar los restantes miembros del U-spin multiplete aplicamos a $|\alpha\rangle$ el operador U_+ , q veces hasta obtener el elemento mayor del multiplete. Nótese que este multiplete debe estar en la frontera ya que cada uno de sus elementos es el estado de mayor isospín en un isomultiplete $(I_+(U_+ |\alpha\rangle)) = U_+ I_+ |\alpha\rangle + V_- |\alpha\rangle = 0$;

$$I_+(U_+ U_+ |\alpha\rangle) = U_+(I_+ U_+ |\alpha\rangle) + V_- U_+ |\alpha\rangle = U_+ V_- |\alpha\rangle = 0$$

y así sucesivamente)

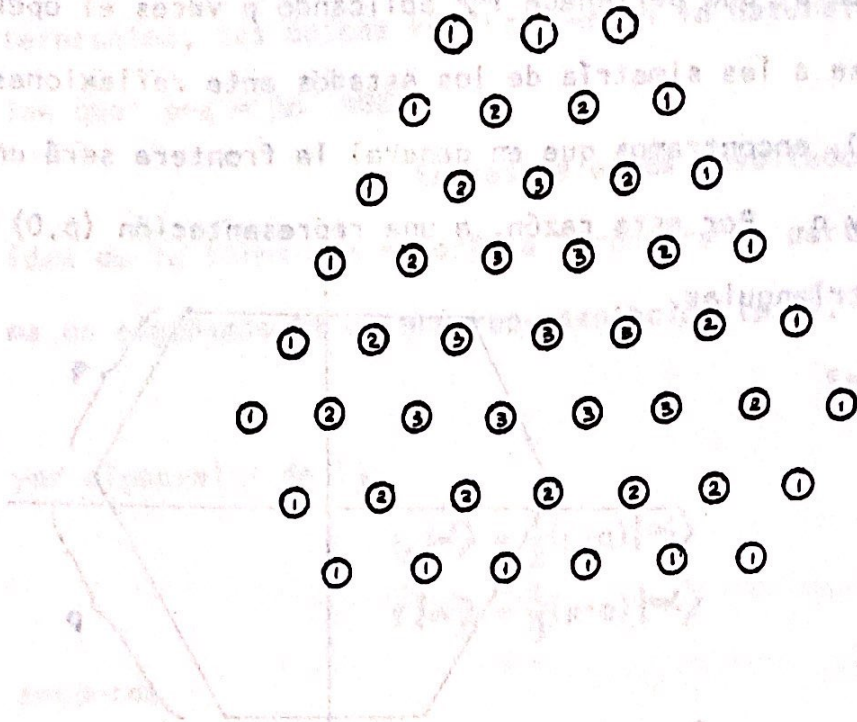
De manera análoga se encuentra

el V-spin multiplete al que pertenece $|\alpha\rangle$ aplicando p veces el operador V_+ . Además, en base a la simetría de los estados ante reflexiones sobre $I_3 = 0$, $U_3 = 0$, $V_3 = 0$, encontramos que en general la frontera será un hexágono de lados p y q . Por esta razón, a una representación $(p, 0)$ o $(0, q)$ se le llama triangular.



Conclusiones generales acerca del grado de degeneración de los estados de un multiplete (p, q) se pueden obtener haciendo un análisis más completo. En el apéndice C llegamos a los siguientes resultados

- i) Los puntos en la frontera del diagrama de eigenvalores de un multiplete (p, q) corresponden a eigenestados no degenerados.
- ii) Avanzando de la frontera hacia el centro del diagrama, se formará un nuevo hexágono de lados $p-1$ y $q-1$ pero con eigenestados doblemente degenerados. Siguiendo hacia el centro la degenerancia seguirá aumentando en uno hasta encontrar un punto o un triángulo.
- iii) Una vez se haya encontrado un triángulo, la degenerancia de cada estado dentro del triángulo es la misma que la de un estado en el perímetro de éste.



Multiplete (2,5).

Además es interesante observar que en base a la pendiente del eje de U-spin en un diagrama, podemos decir que en un U-multiplete la cantidad $Y-U_3$ (recordando la diferencia de escala de $\sqrt{\frac{3}{2}}$) es una constante. Usando las ecuaciones $I_3 + U_3 + V_3 = 0$, $Y = \frac{2}{3}(U_3 - V_3)$, $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ llegamos a que Q es igual que $2(Y-U_3)$ o sea

$$Y = U_3 + \frac{1}{2}Q$$

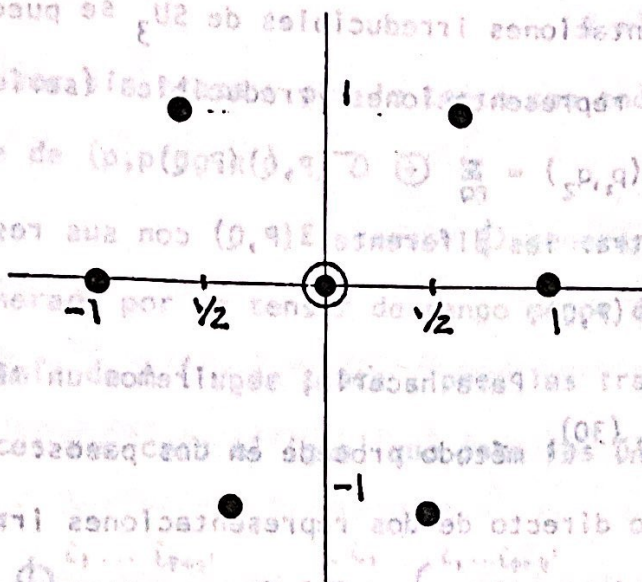
luego la carga Q es constante en un U-multiplete, así como Y lo es para un isomultiplete.

Utilizando los resultados anteriores podemos continuar analizando otras representaciones irreducibles.

$$(1,1) = \left\{ 8 \right\}$$

La frontera será un hexágono de lados 1 y 1. El mayor el-

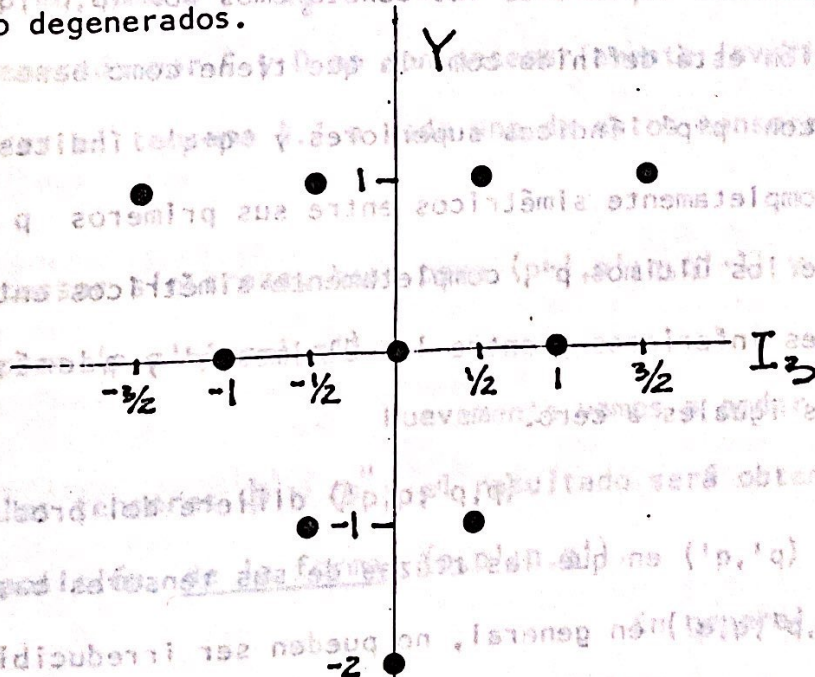
genvalor corresponde a $I_3=1, Y=0$. El origen tendrá degenerancia 2, un miembro del isotriplete ($I=1$) y un isosinglete.



$$(3,0) = \{ 10 \}$$

Esta es una representación triangular ($q=0$), el mayor

eigenvalor corresponde a $I = \frac{3}{2}, Y=1$. Por ser triangular todos los estados son no degenerados.



6. SERIES DE CLEBSCH-GORDAN ⁽³⁰⁾

Al igual que en SU_2 el producto directo de dos representaciones irreducibles de SU_3 se puede descomponer en una suma de varias representaciones irreducibles (serie de Clebsch-Gordan).

$$(p_1, q_1) \otimes (p_2, q_2) = \sum_{P, Q} \oplus \sigma(P, Q) (P, Q)$$

Queremos encontrar los diferentes (P, Q) con sus respectivas multiplicidades $\sigma(P, Q)$.

Para hacerlo, seguiremos un método tensorial debido a S. Coleman.⁽³⁰⁾ El método procede en dos pasos: primero descomponemos el producto directo de dos representaciones irreducibles en una suma directa de cierto tipo especial de representaciones reducibles que definiremos más adelante; luego descomponemos estas representaciones especiales en una suma directa de representaciones irreducibles.

A las representaciones especiales las denotaremos por $(p, p'; q, q')$; esta representación está definida como la que tiene como base el conjunto de tensores con $p+p'$ índices superiores y $q+q'$ índices inferiores, que son completamente simétricos entre sus primeros p índices superiores, entre los últimos p' , completamente simétricos entre sus q primeros índices inferiores y entre los últimos q' y además con todas sus trazas iguales a cero.

$(p, p'; q, q')$ difiere del producto directo de (p, q) con (p', q') en que las trazas de sus tensores base son iguales a cero. $(p, p'; q, q')$ en general, no pueden ser irreducibles ya que sus tensores base no son completamente simétricos.

Sea $A_{j_1 \dots j_{p+q}}$ un tensor base del producto directo $(p, q) \times (p', q')$.
 según el teorema 4.1, A se puede descomponer en

$$A = \hat{A} + \Phi$$

siendo \hat{A} un tensor sin traza y por lo tanto con todas las propiedades de un tensor base de $(p, p'; q, q')$.

El tensor Φ generará un espacio equivalente al generado por un tensor de rango menor en 2. Por las condiciones de simetría de A (y de traza , pues las trazas entre los primeros p y q índices son cero al igual que para los últimos p' y q'); se puede escribir

$$\Phi_{j_1 \dots j_{p+q}}^{i_1 \dots i_{p+q}} = \sum_{j_{q+1}}^{i_1} C_{j_1 \dots j_{q+2} \dots j_{p+q}}^{i_1 \dots i_{p+q}} + \sum_{j_1}^{i_{p+1}} D_{j_1 \dots j_{q+q}}^{i_1 \dots i_{p+q}}$$

siendo ésta, una descomposición invariante.

Llamamos Φ_1 al primer término de esta suma y Φ_2 al segundo

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

Φ_1 se transforma como C y Φ_2 como D.

El espacio generado por C y D no son necesariamente invariantes. Luego, podemos aplicar el teorema 4.1 a cada uno de estos tensores:

$$C = \hat{C} + \Phi'$$

Siendo C un tensor sin traza, base para $(p-1, p'; q, q'-1)$ y $D = \hat{D} + \Phi''$ con D, base para $(p, p'-1; q-1, q')$.

Nuevamente vamos a poder descomponer

cada uno de los tensores Φ' y Φ'' y el resultado será obtener un término en la descomposición, de la forma $(p, p'; q, q')$.

En general, obtendremos

la descomposición $(p, q) \otimes (p', q')$ separando todos los tensores que pue-

den ser obtenidos contrayendo, en todas las formas posibles, índices del conjunto de p con índices del conjunto de p' , e índices del conjunto de p' con los de q .

$$(p, q) \otimes (p', q') = (p, p'; q, q') \oplus (p-1, p'; q, q'-1) \oplus (p, p'-1; q-1, q') \oplus (p-1, p'-1; q-1, q'-1) \oplus (p-2, p'-1; q-1, q'-2) \oplus \dots$$

El proceso terminará cuando ya no se pueda seguir contrayendo, por lo tanto podemos escribir

$$(p, q) \otimes (p', q') = \sum_{i=0}^{\min(p, q)} \sum_{j=0}^{\min(p', q')} (p-i, p'-j; q-j, q'-i)$$

Ahora descompondremos una de las representaciones especiales en irreducibles. En el lenguaje de tensores, queremos descomponer un tensor arbitrario de la base $(p, p'; q, q')$ en una suma de tensores completamente simétricos y sin traza.

Consideremos primero, los índices superiores.

Sea

$$T_{i_1 \dots i_p \dots i_{p+1} \dots i_{p+p'}} \quad \text{un tensor de la base de } (p, p'; q, q').$$

Podemos escribir T como la suma de un tensor simétrico y uno antisimétrico en un par de índices superiores cualesquiera. Si tomamos por ejemplo los índices i_1, i_{p+1} tenemos

$$T = (i_1, i_{p+1})^S + (i_1, i_{p+1})^A$$

La parte antisimétrica la podemos escribir en base a un tensor de menor rango

$$\sum_{k, l} \epsilon_{k, l} \hat{T} = \sum_{k, l} \epsilon_{k, l} i_1 \dots i_{p-1} i_{p+2} \dots i_{p+p'}$$

La reducción se simplifica debido al siguiente resultado:

TEOREMA 4.3

\hat{T} es simétrico en sus índices inferiores.

DEMOSTRACION

Tomemos los índices de J_1 y J_{q+1} , por ejemplo, probaremos que el tensor es simétrico, demostrando que su contracción con $\epsilon^{rj_1 j_{q+1}}$ es igual a cero.

$$\begin{aligned} \epsilon^{rj_1 j_{q+1}} S_{\kappa \dots}^{i_2 \dots} &= \epsilon^{rj_1 j_{q+1}} \epsilon_{\kappa i_1 i_{p+1}} A_{j_1 \dots}^{i_1 \dots} \\ &= (\delta_{\kappa}^r \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_{p+1}}^{j_{q+1}} - \delta_{\kappa}^{j_1} \delta_{i_1}^{i_{p+1}} + \text{permutaciones cíclicas}) \\ &\quad \cdot A_{j_1 \dots}^{i_1 \dots} \end{aligned}$$

Como la traza de A es igual a cero, el lado derecho de la ecuación es cero.

Entonces $\epsilon^{rj_1 j_{q+1}} S_{\kappa \dots}^{i_2 \dots} = 0 \Rightarrow S$

es simétrico respecto a J_1 y J_{q+1} .

De la misma forma se

demuestra para cualquier par de índices inferiores.

Este teorema simplifica mucho la simetrización pues como S es totalmente simétrica en sus índices inferiores, sólo habrá que simetrizarlo en los superiores. Siguiendo el mismo camino ("Eliminando" dos índices superiores (uno en p otro en p') y "añadiendo" un inferior). Encontramos los demás terminos en la descomposición. El proceso termina cuando los índices superiores sean totalmente simétricos; es decir, hasta que hallamos eliminado el menor entre p y p' .

De la misma manera se ha-

ce para los índices inferiores de T .

La descomposición de $(p, p'; q, q')$

* El lector puede verificar directamente la igualdad

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{\alpha\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha}^i & \delta_{\alpha}^j & \delta_{\alpha}^k \\ \delta_{\mu}^i & \delta_{\mu}^j & \delta_{\mu}^k \\ \delta_{\nu}^i & \delta_{\nu}^j & \delta_{\nu}^k \end{vmatrix}$$

en representaciones irreducibles queda entonces

$$(p, p'; q, q') = (p+p', q+q') \oplus \bigoplus_{l=1}^{\min(p, p')} (p+p'-2l, q+q'+l) \oplus \bigoplus_{j=1}^{\min(q, q')} (p+p'+j, q+q'-2j)$$

Ejemplos:

$$1) (1, 0) \times (0, 1) = (1, 0; 0, 1) + (0, 0; 0, 0)$$

$$(1, 0; 0, 1) = (1, 1)$$

$$(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$$

$$(1, 0) \times (0, 1) = (1, 1) + (0, 0)$$

$$\text{o } \{3\} \otimes \{3^*\} = \{8\} \oplus \{1\}$$

$$2) (1, 0) \times (1, 0) = (1, 1; 0, 0)$$

$$(1, 1; 0, 0) = (2, 0) + (0, 1) \text{ luego}$$

$$\{3\} \otimes \{3\} = \{6\} \oplus \{3^*\}$$

$$3) (1, 0) \times (2, 0) = (1, 2; 0, 0)$$

$$(1, 2; 0, 0) = (3, 0) + (1, 1)$$

$$\{3\} \otimes \{6\} = \{10\} + \{8\}$$

$$4) (1, 1) \times (1, 1) = (1, 1; 1, 1) + (0, 1; 1, 0) + (1, 0; 0, 1) + (0, 0; 0, 0)$$

$$(1, 1; 1, 1) = (2, 2) + (0, 3) + (3, 0)$$

$$(0, 1; 1, 0) = (1, 1)$$

$$(1, 0; 0, 1) = (1, 1)$$

$$(0, 0; 0, 0) = (0, 0)$$

$$\{8\} \otimes \{8\} = \{27\} \oplus \{10^*\} \oplus \{10\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. FORMULA DE MASA

(34) (20)

Todo lo que hemos hecho hasta ahora es acomodar las partículas conocidas en multipletes, en lo que la teoría se ajusta bastante bien a la realidad experimental (aunque con tantas partículas existentes, no sería sorprendente que muchas coincidencias se debieran a la casualidad). Sin embargo, para que una teoría sea aceptable, tiene que ser capaz de predecir y así tener pruebas más convincentes de su efectividad. Supongamos que el hamiltoniano de los hadrones se puede separar en

$$H = H_{MF} + H_{SF} + H_{ED} + H_D$$

donde H_{MF} es el hamiltoniano de las interacciones "muy fuertes" (las cuales presumiblemente son invariantes ante SU_3), H_{SF} es el hamiltoniano de las interacciones "semifuertes" que rompen la simetría y H_{ED} y H_D se refieren a las interacciones electromagnéticas y débiles que

por ahora, las despreciaremos. En la ausencia de la interacción semifuerte, las partículas pertenecientes a la misma representación irreducible de SU_3 deben tener la misma masa. Sin embargo, esta simetría se rompe debido a un mecanismo desconocido (interacción semifuerte) causando una diferencia de masa entre distintos isomultipletes.

La existencia de H_{MF} y H_{SF} puede no ser real; se puede pensar que la simetría es rota espontáneamente por las interacciones fuertes. Sin embargo, esta separación es conveniente para el análisis. Encontraremos ahora una expresión para la masa de un isomultiplete perteneciente a un multiplete de SU_3 .

Al despreciar las interacciones electromagnéti-

cas, estamos suponiendo que todas las partículas de cada isomultiplete tienen la misma masa. La masa del isomultiplete se puede escribir como $M = M'_0 + \Delta M$ donde M'_0 , la masa debido a H_{MF} , es constante en el multiplete de SU_3 y ΔM , masa debida a H_{SF} , es la que causa la diferencia de masa entre los isomultipletes. Luego H_{SF} provoca una diferencia de masa entre partículas (isomultipletes) con distinta hipercarga. Se espera pues que H_{SF} dependa de Y .

La interacción electromagnética causa la diferencia de masa entre partículas de un isomultiplete al romper la simetría de isospín. Esta violación de simetría no es al azar, sino que está descrita totalmente por la relación $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Luego el operador de carga, fuente de las interacciones electromagnéticas, se transforma como la suma de la tercera componente del operador vectorial de isospín \bar{I} y un escalar $(\frac{1}{2}Y)$.

La interacción semifuerte causa la diferencia de masa entre miembros de un multiplete de U-spin. Luego esperamos que el operador H_{SF} se transforme como la suma de la tercera componente del operador vectorial \bar{U} y un escalar. Sabemos que en un multiplete de U-spin se cumple que $Y = U_3 + \frac{1}{2}Q$ con Q constante. El generador de hipercarga Y se transforma entonces de la forma descrita anteriormente. Luego se supone que H_{SF} tiene las mismas propiedades de transformación que el operador Y .

Para obtener la fórmula de masa a partir de la suposición anterior, recordemos el concepto de operador tensorial regular (sección 5.6, capítulo 3). Para SU_3 los com-

ponentes T de estos operadores estan determinados por las relaciones de conmutación

$$[A^M, T^a] = \delta^M_a T^a - \delta^a_M T^M \quad (4.14)$$

donde los operadores A son los "generadores" del grupo. Luego, según (4.9), los operadores A^M son los componentes de un operador tensorial regular. Como el operador de hipercarga coincide esencialmente con la componente A^3 de este operador tensorial ($Y = -A^3$), decir que H_{3F} se transforma de la misma forma que Y es equivalente a decir que H_{3F} es la componente T^3 de un operador tensorial regular, luego la masa

$$\Delta M \text{ es el valor esperado de } T^3 \text{ en cada isomultiplete de } SU_3 \quad M = \langle \psi | T^3 | \psi \rangle$$

Para encontrar la fórmula de masa, necesitamos usar el siguiente teorema (debido a Okubo) que demostraremos en el apéndice D.

TEOREMA 4.4

En cualquier representación irreducible de SU_3 , un operador tensorial regular se puede expresar como*

$$T^M = a S^M + b A^M + c (A \cdot A)^M$$

donde

$$(A \cdot A)^M = A^N A^N \quad \text{y } a, b \text{ y } c \text{ son constantes.}$$

Para demostrar que este teorema nos lleva a la fórmula de masa, probaremos antes el siguiente teorema.

* Esta igualdad es cierta cuando se refiere a elementos matriciales del operador en un multiplete.

TEOREMA 4.5

$$(A \cdot A)_3^3 = \frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle + \frac{1}{4} Y^2 + \frac{3}{2} Y - I^2$$

donde $\langle A \cdot A \rangle$ es el operador de Casimir $\langle A \cdot A \rangle = A_{\mu}^{\nu} A_{\nu}^{\mu}$

$Y = -A^3$ (hipercarga)

$$I^2 = (I_3)^2 + \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+) \text{ (isospín)}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} (A_1^1 - A_2^2); \quad I_+ = A_1^2; \quad I_- = A_2^1$$

DEMOSTRACION

Desarrollaremos el operador de Casimir :

$$\frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle = \frac{1}{2} A_{\mu}^{\nu} A_{\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \{ (A_1^1)^2 + (A_2^2)^2 + (A_3^3)^2 + (A_2^1 A_1^2 + A_1^2 A_2^1) \\ + (A_3^1 A_1^3 + A_3^3 A_1^1) + (A_3^2 A_2^3 + A_2^3 A_3^2) \}$$

pero $(A \cdot A)_3^3 = A_3^{\nu} A_{\nu}^3 = A_1^1 A_3^3 + A_2^2 A_3^3 + (A_3^3)^2$

luego $\frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle = (A \cdot A)_3^3 + \frac{1}{2} (A_1^1)^2 + \frac{1}{2} (A_2^2)^2 - \frac{1}{2} (A_3^3)^2 + \frac{1}{2} (A_2^1 A_1^2 + A_1^2 A_2^1)$

$$+ \frac{1}{2} (A_3^1 A_1^3 - A_3^3 A_1^1) + \frac{1}{2} (A_3^2 A_2^3 - A_3^3 A_2^2)$$

$$= (A \cdot A)_3^3 + I_3^2 + \frac{1}{4} [(A_1^1)^2 + (A_2^2)^2 + 2A_1^2 A_2^1]$$

$$+ \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+) + \frac{1}{2} (A_3^3 - A_1^1)$$

$$+ \frac{1}{2} (A_3^3 - A_2^2) - \frac{1}{2} (A_3^3)^2$$

(usando las definiciones de I_+ y I_- y las relaciones de

conmutación para los A_{μ}^{ν}).

$$\frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle = (A \cdot A)_3^3 + I^2 - \frac{1}{2} (A_3^3)^2 + \frac{1}{4} [A_1^1 + A_2^2]^2 + A_3^3 - \frac{1}{2} [A_1^1 + A_2^2]$$

$$= (A \cdot A)_3^3 + I^2 - \frac{1}{4} Y^2 - \frac{3}{2} Y$$

(usando $Y = -A_3^3 = A_1^1 + A_2^2$)

entonces $(A \cdot A)_3^3 = \frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle + \frac{1}{4} Y^2 + \frac{3}{2} Y - I^2$

Utilizando estos últimos teoremas podemos escribir

$$\begin{aligned}
 T_3^3 &= a + bA_3^3 + c(A \cdot A)_3^3 = \\
 &= a - bY + \frac{c}{2} \langle A \cdot A \rangle + \frac{c}{4} Y^2 + \frac{3c}{4} Y - cI^2 \\
 &= \left(a + \frac{c}{2} \langle A \cdot A \rangle \right) + dY + c \left(\frac{1}{4} Y^2 - I^2 \right)
 \end{aligned}$$

luego

$$\Delta M = \langle I | T_3^3 | I \rangle = k + dY + c \left(\frac{1}{4} Y^2 - I(I+1) \right)$$

pues $\langle A \cdot A \rangle$ es constante en una representación irreducible. De esta forma, llegamos a la fórmula de Masa.

La masa para un multiplete

$$M = M_0' + \Delta M \quad (M_0' = \text{constante}).$$

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2 \left(\frac{1}{4} Y^2 - I(I+1) \right) \tag{4.15}$$

siendo M_0, M_1 y M_2 constantes en una representación irreducible.

Esta

fórmula ha resultado válida sólo para bariones. Para mesones la fórmula es

$$M^2 = m_0 + m_1 Y + m_2 \left(\frac{1}{4} Y^2 - I(I+1) \right) \tag{4.16}$$

La fórmula (4.15) predice para el octeto de bariones $\left(\frac{1}{2}\right)^+$

$$\frac{M_N + M_{\Xi}}{2} = \frac{M_{\Sigma} + 3M_{\Lambda}}{4}$$

pues en base a los valores de I y Y para estas partículas (apéndice A)

$$M_N = m_0 + m_1 + \frac{1}{2} m_2$$

$$M_{\Xi} = m_0 - m_1 + \frac{1}{2} m_2$$

$$M_{\Sigma} = m_0 + 2m_2$$

$$M_{\Lambda} = m_0$$

donde cada una de las M_i representa la masa promedio de los isomultipletes N, Ξ, Σ, Λ . Usando masas promedio en cada multiplete, el

lado izquierdo es 1128 Mev comparado con 1134 Mev del lado derecho por lo que es una muy buena aproximación.

Para una representación triangular, la relación entre I y Y es simple, pues a partir del multiplete de mayor isospín, el isospín decrece en $\frac{1}{2}$ conforme la hipercarga aumenta o disminuye (dependiendo si la representación es $(0,q)$ o $(p,0)$) en 1. Luego $Y = -\frac{1}{2} I + K_1$ para una representación $(p,0)$ y $Y = \frac{1}{2} I + K_2$ para una representación $(0,q)$. (El valor de las constantes K cambia para cada multiplete de U-spin). Por esta razón se simplifica la formula de masa a

$$M = m_0 + m_1 Y + m_2 \left[\frac{1}{4} (I + K)^2 - I(I + 1) \right]$$

$$= m_0' + m_1' Y$$

Luego las diferencias de masa entre los multipletes adyacentes son iguales. Para el decuplete de bariones $\left(\frac{3}{2}^+\right)$

$$M_{N^*} - M_{Y^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Omega}$$

entonces

$$M_{\Omega} = M_{\Xi^*} + M_{Y^*} - M_{N^*}$$

$$= 1529 + 1382 - 1236 = 1675 \text{ Mev.}$$

Lo interesante de este resultado es que en el tiempo que se propuso el camino octuple, sólo se conocían los isomultipletes N^* y Y^* , luego, no se notaba la existencia del decuplete; cuando se descubrieron las partículas Ξ^* , Gell-Mann notó que se podía formar el decuplete, pero faltaba la partícula con $I=0$ $Y=-2$, Ω^- . En base a la fórmula de masa se predijo su masa (forma un Isosinglete) y en 1964 Barnes⁽³⁵⁾ y otros en Brookhaven, detectaron la existencia de esta partícula con la masa correcta;

efectuándose de esta forma, el mayor triunfo de este modelo.

Se puede considerar también el rompimiento de simetría debido a Interacción electromagnética, llevando a relaciones de masa entre partículas de un mismo isomultiplete, con resultados también aceptables.⁽²⁰⁾

Las mesones se conocen sólo en multipletes de dimensión 1 y 8 y los bariones en multipletes de dimensión 1, 8 y 10. Sin embargo, las partículas de spin octuple paritas, además de los anteriores, la existencia de multipletes (p,q) con dimensiones 27, 35, etc., además no existe una justificación para no tomar en cuenta representaciones de SU₃ como (1,0) y (1,1) de las cuales $\frac{2}{3}B$ no es un entero. Luego surge la necesidad de clasificar por qué sólo tres representaciones existen en la naturaleza.

En 1964 M. Gell-Mann y S. Zweig, basándose en que todas las representaciones irreducibles de SU₃ se pueden obtener como productos de las representaciones fundamentales

$(1,1)$ y $(1,0)$, propusieron (Independientemente) que los triplete de bariones corresponden a tres partículas y sus respectivos antipartículas. A estas partículas M. Gell-Mann les dio el nombre de *quarks* (y *antiquarks*) y los designó por u, d y s (up, down, sideways y strange) y \bar{u}, \bar{d} y \bar{s} a los antiquarks. Luego, en base a esta teoría, los quarks y antiquarks forman las partículas fundamentales de los cuales están compuestas las mesones y bariones.

Según viene en el capítulo anterior los quarks u y d forman un doblete isospínico $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y s es un isomultiplete $(\frac{1}{2}, 0)$. Las tres partículas

La palabra quark viene de un fragmento del libro "Finnegan's Wake" de James Joyce "Three quarks for Master Mark".

...de esta forma, el mayor número de este material...

se puede

...considerar también el cumplimiento de ciertos deberes...

...factores, llevados a relaciones de una serie particular de un

...también aceptables.

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

(4) (7) (8) (36)

Hemos visto que los hadrones pueden ser clasificados de acuerdo a la simetrías del grupo SU_3 . El orden encontrado en estas partículas es satisfactorio y el modelo ha sido capaz de predecir exitosamente algunos resultados.

Los mesones se conocen sólo en multipletes de dimensión 1 y 8 y los bariones en multipletes de dimensión 1, 8 y 10. Sin embargo, las simetrías del camino octuple permite, además de las anteriores, la existencia de multipletes (p,q) con dimensiones 27, 35, etc.. Además no existe una justificación para no tomar en cuenta representaciones de SU_3 como $(1,0)$ y $(2,0)$ para los cuales $\frac{p-q}{3}$ no es un entero. Luego surge la necesidad de explicar por qué sólo tres representaciones existen en la naturaleza.

En 1964 M. Gell-

Mann⁽¹⁵⁾ y G. Zweig⁽¹⁶⁾, basándose en que todas las representaciones irreducibles de SU_3 se pueden obtener como productos de las representaciones fundamentales $\{3\}$ y $\{3^*\}$, propusieron (independientemente) que los triplete base de estas representaciones corresponden a tres partículas y sus respectivas anti-partículas. A estas partículas M. Gell-Mann les dió el nombre de Quarks (y antiquarks) y los designó por u, d y s (up, down, sideways o strange) y \bar{u}, \bar{d} y \bar{s} a los antiquarks. Luego, en base a esta teoría, los quarks y antiquarks serían las partículas fundamentales de las cuales están compuestos los hadrones.

Según vimos en el capítulo anterior los quarks u y d forman un doblete de isospín ($I = \frac{1}{2}$) y s es un isosinglete ($I_3 = I = 0$). Las tres partículas

* La palabra quark viene de un fragmento del libro "Finnegan's Wake" de James Joyce: "Three quarks for master Mark".

tienen hipercarga fraccionaria $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, y por lo tanto, su carga (dada por $Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$) es también fraccionaria $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. Nótese que el d y el s forman un doblete de U-spin y luego tienen la misma carga.

El modelo de

los quarks se basa en tres simples reglas:

- I) Tres quarks forman un barión.
- II) Tres antiquarks forman un antibarión.
- III) Un par quark-antiquark forman un mesón.

En base a estas reglas podemos decir que todos los hadrones resultan de los productos:

$$\{3\} \otimes \{3^*\} = \{8\} \oplus \{1\}$$

$$\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{10\}$$

$$\{3^*\} \otimes \{3^*\} \otimes \{3^*\} = \{1\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{10^*\}$$

es decir que los únicos multipletes que pueden ocurrir son precisamente los de dimensión 1, 8 y 10. Este modelo explica entonces por qué sólo algunas de las representaciones posibles de SU_3 se encuentran en la naturaleza como multipletes de hadrones.

Si le asociamos número bariónico $B = \frac{1}{3}$ a los quarks y $B = -\frac{1}{3}$ a los antiquarks, la combinación de tres quarks nos dá $B = 1$, tres antiquarks $B = -1$, un par quark-antiquark, $B = 0$. Luego, los quarks u y d son no extraños ($Y = B = \frac{1}{3}$) y el quark s tiene extrañeza $S = -1$ ($S = Y - B = -1$) por lo tanto, s es el responsable de la construcción de todas las partículas extrañas. Al triplete de antiquarks se les asigna valores opuestos de Q, B y S . Además, si le asignamos spin $\frac{1}{2}$ a los quarks y antiquarks, notamos que una partícula compuesta de un número impar de quarks, como un barión, tendrá

spin semientero y un mesón tendrá spin entero. Esta asociación de números cuánticos a los quarks le da consistencia a las reglas de combinación.

"Las reglas de los quarks proveen una explicación notablemente económica para la formación de las familias observadas de hadrones. ¿Qué principios, sin embargo, pueden explicar estas reglas que parecen completamente arbitrarias? ¿Por qué es posible unir tres quarks pero no dos o cuatro? ¿Por qué no podemos crear un quark aislado? Una línea de pensamiento que

lleva a posibles respuestas a estas preguntas apareció al principio como un defecto en la teoría de los quarks." (4).

Mencionamos anteriormente que los quarks tienen spin $\frac{1}{2}$, por lo tanto son fermiones y deben satisfacer la estadística de Fermi-Dirac, es decir que, en un sistema dado, dos quarks no pueden tener los mismo números cuánticos. Sin embargo para formar la partícula Ω^- , por ejemplo, se necesitan tres quarks s ocupando el mismo estado. Luego aparentemente, los quarks no cumplen con la relación spin-estadística.

Para resolver este problema se le asignó una propiedad adicional a los quarks, el "color" y los quarks u, d, s pasaron a ser multipletes de color (así como un electrón es un doblete de spin) cada uno de dimensión tres. Se dice que los quarks existen en tres distintos "sabores" u, d y s , cada sabor con tres posibles estados de color (azul, amarillo y rojo). De esta forma se resuelve el problema de la estadística, pues los tres quarks s necesarios para formar la partícula Ω^- son idénticos en todo (mismo sabor)

pero difieren en color, y no están en el mismo estado, luego satisfacen la estadística de Fermi-Dírac.

Luego los multipletes de color corresponden a la simetría del grupo SU_3 , al igual que los multipletes de sabor. Pero la simetría de color no es aproximada como la anterior y sus triplete fundamentales tienen la misma masa. Es una simetría perfecta.

El número cuántico de color triplica el número de quarks y además introduce la posibilidad de que existan muchas partículas nuevas, no observadas, correspondientes a hadrones de distintos colores. Para resolver esta dificultad se postuló que todos los hadrones deben estar representados por singletes de color, ningún otro multiplete es permitido; luego "la naturaleza es ciega al color". Una explicación de porqué la naturaleza es ciega al color es fundamentalmente para tener una teoría completa de los quarks. En este sentido se ha propuesto una teoría sobre la dinámica de los quarks: la "cromodinámica".

Según la cromodinámica los quarks interactúan por medio de una interacción muy fuerte. De la misma forma que las interacciones electromagnéticas se deben al número cuántico de carga que tiene cada partícula, estas interacciones se deben al número cuántico de color. Así como los fotones son los mediadores de la interacción electromagnética, se postula un octeto de partículas llamadas "gluones" como los mediadores de la interacción entre quarks. Los gluones serían partículas sin masa pero cargados. Al igual que los quarks, los gluones no han sido detectados.

Sabemos

que la fuerza electromagnética entre dos partículas cargadas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas, luego a grandes distancias su efecto es despreciable. Esto permite que un electrón de valencia, por ejemplo, pueda ser separado de un átomo con relativa facilidad. Se ha supuesto, sin embargo, que la fuerza entre dos quarks con color es (casi) independiente de la distancia entre ellos y por lo tanto, para separar un quark de un hadrón se necesitaría una gran cantidad de energía, suficiente para crear un par quark-antiquark. El nuevo quark reemplazaría al que se quiere aislar del hadrón y podría volver a formar dicha partícula. El nuevo antiquark se uniría al quark que se quería aislar para formar un mesón. Luego, en vez de aislar un quark (con color) de un hadrón lo que se logró fue crear un nuevo mesón (sin color).

En base a esta teoría, se explica por qué la naturaleza es ciega al color. Además se puede pensar que los quarks realmente son los últimos constituyentes de la materia hadrónica pues es difícil imaginar como una partícula pueda tener una estructura interna si esta partícula no puede existir aislada.

En lo que respecta a la física de partículas, uno de los sucesos más importantes que han ocurrido en los últimos años, fue el descubrimiento de la resonancia J/ψ . En 1974 en el BNL (Brookhaven National Laboratory) y simultáneamente en el SLAC⁽³⁷⁾ (Stanford Linear Accelerator Center) se descubrió una nueva partícula, el mesón J/ψ , una resonancia de masa 3.1 GeV. Esta partícula tiene un tiempo de vida de 10^{-20} seg. aproximadamente, 1,000 veces mayor que el tiempo esperado para que decaiga una partícula con esa masa. La explicación de este tiempo de vida tan largo fue mo-

tivo de controversias en la comunidad científica. Una explicación satisfactoria fue suponer que el mesón J/ψ es un estado compuesto de un nuevo quark, llamado quark de "encanto" c (Charm), y su antiquark. Este cuarto sabor de quark sería el responsable de la formación de nuevas partículas que tendrían la propiedad de encanto.

La existencia del quark de encanto había sido predicha diez años antes del descubrimiento de J/ψ por S.L. Glashow y J. Bjorken⁽³⁸⁾, en base a un cierto paralelismo entre quarks y leptones.

A partir de este descubrimiento se han detectado partículas con propiedades de encanto. Estos descubrimientos llevaron a la confirmación de la existencia del cuarto quark c y la nueva propiedad de las partículas, encanto c ($c=0$ para las partículas conocidas anteriormente). Luego hasta esos tiempos se había aceptado la existencia de doce quarks (cuatro sabores con tres colores cada uno) y sus respectivos antiquarks.

En 1977, en el Fermilab, se encontró otro hadrón más masivo que los demás ($M = 9.5$ Gev.) llamado "upsilon" con un tiempo de vida largo, sugiriendo la existencia de un quinto quark (y antiquark) el quark b ("belleza"). Con la instalación de aceleradores más poderosos, los físicos buscan la comprobación de la existencia de un sexto quark, el quark de "verdad" (truth). Luego tendríamos seis sabores de quarks cada uno con sus tres colores, resultando 18 quarks.

Debería bastarnos que se descubrieran dos nuevos quarks en un período de cuatro años pero los físicos han descubierto también un nuevo leptón pesado, la partícula T , de una masa cercana a 2

Gev. Con el tiempo se sabrá si también tiene su propio neutrino, a semejanza del muón y el electrón.

"Como avanzan las técnicas de los aceleradores, los físicos indudablemente continuarán descubriendo nuevas entidades subatómicas. La proliferación ocasionará incabables y profundas preguntas. ¿Están los tipos de quark limitados en número? Si hay 6 ¿por qué no 12?, si hay 12 ¿por qué no 24? y si el número de quarks es grande ¿tiene sentido llamar elementales a los quarks?. La historia de la ciencia sugiere que la proliferación de entidades físicas es una señal de que las entidades no son elementales... ¿Serán propuestas pronto nuevas estructuras de las cuales son hechas los quarks? ¿Es posible que no hayan partículas elementales, que toda entidad en la naturaleza tiene partes constituyentes?. ¿O la simplicidad fundamental en lo que la mayor parte de los físicos creen, estará basada en los grupos matemáticos que ordenan las partículas, más que en objetos elementales reales?." (36)

A continuación presentamos una tabla de partículas basada en "Review of Particle Properties" por N. Barash-Schmidt, A. Bárbaro-Galtieri, C. Bricman, V. Chaloupka, R.J. Hemingway, R.L. Kelly, M.J. Losty, A. Rittemberg, M. Roos, A.H. Rosenfeld, T.G. Trippe, G.P. Yost. Reviews of Modern Physics, 48, No.2 parte II, 1976.

J^P se refiere al spin y la paridad de la partícula.

I^G se refiere al isospín y G-Paridad.

C_n se refiere al número C (conjugación de carga) de la partícula neutra del isomultiplete al que pertenece la partícula.

Partícula	Spin-Paridad (J ^P)	Isospín (I)	G-Paridad (G)	C _n
π ⁺	0 ⁻	1	+	0
π ⁰	0 ⁻	1	+	0
π ⁻	0 ⁻	1	+	0
η	0 ⁻	0	+	0
ρ ⁺	1 ⁺	1	-	0
ρ ⁰	1 ⁺	1	-	0
ρ ⁻	1 ⁺	1	-	0
ω	0 ⁻	0	+	0
φ	0 ⁻	0	+	0
η'	0 ⁻	0	+	0
η(1300)	0 ⁻	0	+	0
η(541)	0 ⁻	0	+	0
η(958)	0 ⁻	0	+	0
η(1300)	0 ⁻	0	+	0
η(1405)	0 ⁻	0	+	0
η(1764)	0 ⁻	0	+	0
η(2204)	0 ⁻	0	+	0
η(2950)	0 ⁻	0	+	0
η(3526)	0 ⁻	0	+	0
η(4440)	0 ⁻	0	+	0
η(5041)	0 ⁻	0	+	0
η(5582)	0 ⁻	0	+	0
η(6040)	0 ⁻	0	+	0
η(6500)	0 ⁻	0	+	0
η(7030)	0 ⁻	0	+	0
η(7530)	0 ⁻	0	+	0
η(8000)	0 ⁻	0	+	0
η(8500)	0 ⁻	0	+	0
η(9000)	0 ⁻	0	+	0
η(9400)	0 ⁻	0	+	0
η(9800)	0 ⁻	0	+	0
η(10200)	0 ⁻	0	+	0
η(10600)	0 ⁻	0	+	0
η(11000)	0 ⁻	0	+	0
η(11400)	0 ⁻	0	+	0
η(11800)	0 ⁻	0	+	0
η(12200)	0 ⁻	0	+	0
η(12600)	0 ⁻	0	+	0
η(13000)	0 ⁻	0	+	0
η(13400)	0 ⁻	0	+	0
η(13800)	0 ⁻	0	+	0
η(14200)	0 ⁻	0	+	0
η(14600)	0 ⁻	0	+	0
η(15000)	0 ⁻	0	+	0
η(15400)	0 ⁻	0	+	0
η(15800)	0 ⁻	0	+	0
η(16200)	0 ⁻	0	+	0
η(16600)	0 ⁻	0	+	0
η(17000)	0 ⁻	0	+	0
η(17400)	0 ⁻	0	+	0
η(17800)	0 ⁻	0	+	0
η(18200)	0 ⁻	0	+	0
η(18600)	0 ⁻	0	+	0
η(19000)	0 ⁻	0	+	0
η(19400)	0 ⁻	0	+	0
η(19800)	0 ⁻	0	+	0
η(20200)	0 ⁻	0	+	0
η(20600)	0 ⁻	0	+	0
η(21000)	0 ⁻	0	+	0
η(21400)	0 ⁻	0	+	0
η(21800)	0 ⁻	0	+	0
η(22200)	0 ⁻	0	+	0
η(22600)	0 ⁻	0	+	0
η(23000)	0 ⁻	0	+	0
η(23400)	0 ⁻	0	+	0
η(23800)	0 ⁻	0	+	0
η(24200)	0 ⁻	0	+	0
η(24600)	0 ⁻	0	+	0
η(25000)	0 ⁻	0	+	0
η(25400)	0 ⁻	0	+	0
η(25800)	0 ⁻	0	+	0
η(26200)	0 ⁻	0	+	0
η(26600)	0 ⁻	0	+	0
η(27000)	0 ⁻	0	+	0
η(27400)	0 ⁻	0	+	0
η(27800)	0 ⁻	0	+	0
η(28200)	0 ⁻	0	+	0
η(28600)	0 ⁻	0	+	0
η(29000)	0 ⁻	0	+	0
η(29400)	0 ⁻	0	+	0
η(29800)	0 ⁻	0	+	0
η(30200)	0 ⁻	0	+	0
η(30600)	0 ⁻	0	+	0
η(31000)	0 ⁻	0	+	0
η(31400)	0 ⁻	0	+	0
η(31800)	0 ⁻	0	+	0
η(32200)	0 ⁻	0	+	0
η(32600)	0 ⁻	0	+	0
η(33000)	0 ⁻	0	+	0
η(33400)	0 ⁻	0	+	0
η(33800)	0 ⁻	0	+	0
η(34200)	0 ⁻	0	+	0
η(34600)	0 ⁻	0	+	0
η(35000)	0 ⁻	0	+	0
η(35400)	0 ⁻	0	+	0
η(35800)	0 ⁻	0	+	0
η(36200)	0 ⁻	0	+	0
η(36600)	0 ⁻	0	+	0
η(37000)	0 ⁻	0	+	0
η(37400)	0 ⁻	0	+	0
η(37800)	0 ⁻	0	+	0
η(38200)	0 ⁻	0	+	0
η(38600)	0 ⁻	0	+	0
η(39000)	0 ⁻	0	+	0
η(39400)	0 ⁻	0	+	0
η(39800)	0 ⁻	0	+	0
η(40200)	0 ⁻	0	+	0
η(40600)	0 ⁻	0	+	0
η(41000)	0 ⁻	0	+	0
η(41400)	0 ⁻	0	+	0
η(41800)	0 ⁻	0	+	0
η(42200)	0 ⁻	0	+	0
η(42600)	0 ⁻	0	+	0
η(43000)	0 ⁻	0	+	0
η(43400)	0 ⁻	0	+	0
η(43800)	0 ⁻	0	+	0
η(44200)	0 ⁻	0	+	0
η(44600)	0 ⁻	0	+	0
η(45000)	0 ⁻	0	+	0
η(45400)	0 ⁻	0	+	0
η(45800)	0 ⁻	0	+	0
η(46200)	0 ⁻	0	+	0
η(46600)	0 ⁻	0	+	0
η(47000)	0 ⁻	0	+	0
η(47400)	0 ⁻	0	+	0
η(47800)	0 ⁻	0	+	0
η(48200)	0 ⁻	0	+	0
η(48600)	0 ⁻	0	+	0
η(49000)	0 ⁻	0	+	0
η(49400)	0 ⁻	0	+	0
η(49800)	0 ⁻	0	+	0
η(50200)	0 ⁻	0	+	0
η(50600)	0 ⁻	0	+	0
η(51000)	0 ⁻	0	+	0
η(51400)	0 ⁻	0	+	0
η(51800)	0 ⁻	0	+	0
η(52200)	0 ⁻	0	+	0
η(52600)	0 ⁻	0	+	0
η(53000)	0 ⁻	0	+	0
η(53400)	0 ⁻	0	+	0
η(53800)	0 ⁻	0	+	0
η(54200)	0 ⁻	0	+	0
η(54600)	0 ⁻	0	+	0
η(55000)	0 ⁻	0	+	0
η(55400)	0 ⁻	0	+	0
η(55800)	0 ⁻	0	+	0
η(56200)	0 ⁻	0	+	0
η(56600)	0 ⁻	0	+	0
η(57000)	0 ⁻	0	+	0
η(57400)	0 ⁻	0	+	0
η(57800)	0 ⁻	0	+	0
η(58200)	0 ⁻	0	+	0
η(58600)	0 ⁻	0	+	0
η(59000)	0 ⁻	0	+	0
η(59400)	0 ⁻	0	+	0
η(59800)	0 ⁻	0	+	0
η(60200)	0 ⁻	0	+	0
η(60600)	0 ⁻	0	+	0
η(61000)	0 ⁻	0	+	0
η(61400)	0 ⁻	0	+	0
η(61800)	0 ⁻	0	+	0
η(62200)	0 ⁻	0	+	0
η(62600)	0 ⁻	0	+	0
η(63000)	0 ⁻	0	+	0
η(63400)	0 ⁻	0	+	0
η(63800)	0 ⁻	0	+	0
η(64200)	0 ⁻	0	+	0
η(64600)	0 ⁻	0	+	0
η(65000)	0 ⁻	0	+	0
η(65400)	0 ⁻	0	+	0
η(65800)	0 ⁻	0	+	0
η(66200)	0 ⁻	0	+	0
η(66600)	0 ⁻	0	+	0
η(67000)	0 ⁻	0	+	0
η(67400)	0 ⁻	0	+	0
η(67800)	0 ⁻	0	+	0
η(68200)	0 ⁻	0	+	0
η(68600)	0 ⁻	0	+	0
η(69000)	0 ⁻	0	+	0
η(69400)	0 ⁻	0	+	0
η(69800)	0 ⁻	0	+	0
η(70200)	0 ⁻	0	+	0
η(70600)	0 ⁻	0	+	0
η(71000)	0 ⁻	0	+	0
η(71400)	0 ⁻	0	+	0
η(71800)	0 ⁻	0	+	0
η(72200)	0 ⁻	0	+	0
η(72600)	0 ⁻	0	+	0
η(73000)	0 ⁻	0	+	0
η(73400)	0 ⁻	0	+	0
η(73800)	0 ⁻	0	+	0
η(74200)	0 ⁻	0	+	0
η(74600)	0 ⁻	0	+	0
η(75000)	0 ⁻	0	+	0
η(75400)	0 ⁻	0	+	0
η(75800)	0 ⁻	0	+	0
η(76200)	0 ⁻	0	+	0
η(76600)	0 ⁻	0	+	0
η(77000)	0 ⁻	0	+	0
η(77400)	0 ⁻	0	+	0
η(77800)	0 ⁻	0	+	0
η(78200)	0 ⁻	0	+	0
η(78600)	0 ⁻	0	+	0
η(79000)	0 ⁻	0	+	0
η(79400)	0 ⁻	0	+	0
η(79800)	0 ⁻	0	+	0
η(80200)	0 ⁻	0	+	0
η(80600)	0 ⁻	0	+	0
η(81000)	0 ⁻	0	+	0
η(81400)	0 ⁻	0	+	0
η(81800)	0 ⁻	0	+	0
η(82200)	0 ⁻	0	+	0
η(82600)	0 ⁻	0	+	0
η(83000)	0 ⁻	0	+	0
η(83400)	0 ⁻	0	+	0
η(83800)	0 ⁻	0	+	0
η(84200)	0 ⁻	0	+	0
η(84600)	0 ⁻	0	+	0
η(85000)	0 ⁻	0	+	0
η(85400)	0 ⁻	0	+	0
η(85800)	0 ⁻	0	+	0
η(86200)	0 ⁻	0	+	0
η(86600)	0 ⁻	0	+	0
η(87000)	0 ⁻	0	+	0
η(87400)	0 ⁻	0	+	0
η(87800)	0 ⁻	0	+	0
η(88200)	0 ⁻	0	+	0
η(88600)	0 ⁻	0	+	0
η(89000)	0 ⁻	0	+	0

TABLA DE PARTICULAS DE VIDA MEDIA LARGA, ESTABLES O QUE DECAEN POR INTERACCION DEBIL O ELECTROMAGNETICA

PARTICULA	J ^P	(I ^G)C _n	MASA (Mev)	VIDA MEDIA (seg.)	MODO DE DECAIMIENTO
γ	1 ⁻	—	0 (7×10^{-22})	estable	estable
ν	1/2	—	0 (0.00006) 0 (0.65)	estable	estable
e	1/2	—	0.5110034 $\pm .0000014$	estable (5×10^{21} y)	estable
μ	1/2	—	105.65948 $\pm .0035$	2.197134×10^{-6} $\pm .000077$	e $\bar{\nu}$
π^{\pm}	0 ⁻	1 ⁻	139.5688 $\pm .0064$	2.6030×10^{-8} $\pm .0023$	$\mu \nu$ e ν $\mu \nu \gamma$ $\pi^0 e \nu$ e $\nu \gamma$
π^0	0 ⁻	(1 ⁻) ⁺	134.9645 $\pm .0074$	0.828×10^{-16} $\pm .057$ S=1.8*	$\gamma \gamma$ $\gamma e^+ e^-$
K^{\pm}	0 ⁻	1/2	493.707 ± 0.037	1.2371×10^{-8} $\pm .0026$ S=1.9*	$\mu^+ \nu$ $\pi^+ \pi^0$ $\pi^+ \pi^+ \pi^-$ $\pi^+ \pi^0 \pi^0$ $\mu^+ \pi^0 \nu$ e $^+ \pi^0 \nu$ e $^+ \nu$
K^0	0 ⁻	1/2	497.70 ± 0.13	50% K _S , 50% K _L	
K_S^0	0 ⁻	1/2		0.8930×10^{-10} $\pm .0023$	$\pi^+ \pi^-$ $\pi^0 \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \gamma$

PARTICULA	J ^P	(I ^G)C _n	MASA (Mev)	VIDA MEDIA (seg)	MODO DE DECAIMIENTO
K⁰_L	0 ⁻	1/2		5.181x10 ⁻⁸ ±.040	π ⁰ π ⁰ π ⁰ π ⁺ π ⁰ π ⁰ πμν πeν π ⁺ π ⁻
η	0 ⁻	(0 ⁺) ₊	548.8 ±.6	=(0.85±0.12)kev (i)	γγ π ⁰ γγ 3π ⁰ π ⁺ π ⁻ π ⁰ π ⁺ π ⁻ γ
p	1/2 ⁺	1/2	938.2796 ±.0027	estable (2x10 ³⁰ y)	
n	1/2 ⁺	1/2	939.5731 ±.0027	918±14 CT=2.75x10 ¹³	pe ⁻ ν
Λ	1/2 ⁺	0	1115.60 ±.05	2.578x10 ⁻¹⁰ ±.021 S=1.6*	pp ⁻ nπ ⁰ peν pμν
M⁺	1/2 ⁺	1	1189.37 ±.06	0.800x10 ⁻¹⁰ ±.006	pp ⁰ nπ ⁺ Λe ⁺ ν pγ nπ ⁺ γ
M⁰	1/2 ⁺	1	1192.47 ±.08	1.0x10 ⁻¹⁴	Λγ
M⁻	1/2 ⁺	1	1197.35 ±.06	1.482x10 ⁻¹⁰ ±.017 S=1.5*	nπ ⁻ Λe ⁻ ν ne ⁻ ν pμ ⁻ ν nπ ⁻ γ
H⁰	1/2 ⁺	1/2 (j)	1314.9 ±.6	2.96x10 ⁻¹⁰ ±.12	Λπ ⁰
H⁻	1/2 ⁺	1/2 (j)	1321.29 ±.14	1.652x10 ⁻¹⁰ ±.023 S=1.1*	Λπ ⁻
Ω⁻	3/2 ⁺	0 (j)	1672.2 ±.4	1.3 ^{+0.3} _{-0.2} x10 ⁻¹⁰	Ξ ⁰ π ⁻ Ξ ⁻ π ⁰

TABLA DE RESONANCIAS MESONES
RESONANCIAS NO EXTRAÑAS (S=0)

PARTICULA	J^P	$(I^G)C_P$	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENT
ρ	1^-	$(1^+)-$	773 ± 3	152 ± 3	$\pi\pi$ e^+e^- $\mu^+\mu^-$
ω	1^-	$(0^-)-$	782.7 ± 3	10.0 ± 4	$\pi^+\pi^-\pi^0$ $\pi^0\gamma$ $\pi^+\pi^-$ e^+e^-
η	0^-	0^+	958 ± 1	(ancho 4 Mev)	$n\pi\pi$ $\rho^0\gamma$ $\gamma\gamma$
δ	0^+	$(1^-)+$	$976^{(h)} \pm 10$	$50^{(h)} \pm 20$	$n\pi$
S^*	0^+	$(0^+)+$	$993^{(c)} \pm 5$	$40^{(c)} \pm 8$	$K\bar{K}$ $\pi\pi$
ϕ	1^-	$(0^-)-$	1019.7 ± 3	4.1 ± 2	K^+K^- K_1, K_2 $\pi^+\pi^-\pi^0$ e^+e^- $\mu^+\mu^-$
A_1	1^+	$(1^-)+$	1100	300	$\rho\pi$
ϵ	0^+	$(0^+)+$	1100 a 1300	600	$\pi\pi$
B	1^+	$(1^+)-$	1228 ± 10	125 ± 10	$\omega\pi$
f	2^+	$(0^+)+$	1271 ± 5	180 ± 20	$\pi\pi$

PARTICULA	J^P	$(1G)C_n$	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
D	A	$(0^+)_{+}$	1286 ± 10	30 ± 20	$K\bar{K}\pi$
A_2	2^+	$(1^-)_{+}$	1310 ± 5	102 ± 5	$P\pi$ $K\bar{K}$
E	A	$(0^+)_{+}$	1416 ± 10	60 ± 20	$K\bar{K}\pi$
f'	2^+	$(0^+)_{+}$	1516 ± 3	40 ± 10	$K\bar{K}$ $K\bar{K}\pi$ $\eta\pi\pi$
F_1	A	1	1540 ± 5	40 ± 15	$K^*\bar{K} + \bar{K}^*K$ 3π
f'	1^-	$(1^+)_{-}$	1600	200-800	4π
A_3	2^-	$(1^-)_{+}$	1640	300	$f\pi$
ω (1675)	3^-	$(0^-)_{-}$	1667 ± 10	150 ± 20	$P\pi$ 3π 5π
ϕ	3^-	$(1^+)_{-}$	1690 ± 20	180 ± 30	2π
h	4^+	$(0^+)_{+}$	2040 ± 20	193 ± 50	$\pi\pi$ $K\bar{K}$

RESONANCIAS EXTRAÑAS ($s=\pm 1$)

K^*	1^-	$1/2$	892.2 ± 5	49.4 ± 1.8	$K\pi$ $K\pi\pi$
κ	0^+	$1/2$	1250 ± 100	450	$K\pi$

PARTICULA	J^P	$(I^G)C_n$	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
Q region	A	1/2	1200 a 1400		$K\pi\pi$ $K^*\pi$ $K\rho$ $K(\pi\pi)_{\ell=0}$

La contribución dominante es una resonancia no bien establecida con $J^P = 1^+$.

K^* (1420)	2^+	1/2	1421 ± 3	108 ± 10	$K\pi$ $K^*\pi$ $K\rho$ $K\omega$ $K\eta$
L	A	1/2	1765 ± 10	140 ± 50	$K\pi\pi$ $K\pi\pi\pi$

NUEVOS MESONES PESADOS

J/ψ (3100)	1^-	$(0^-)^-$	3098 ± 3	0.067 $\pm .012$	e^+e^- $\mu^+\mu^-$
ψ (3700)	1^-	$(0^-)^-$	3684 ± 4	0.228 $\pm .056$	e^+e^- $\mu^+\mu^-$
ψ (4100)	1^-	-	4100	200	
ψ (4400)	1^-	-	4414 ± 7	33 ± 10	e^+e^-

TABLA DE RESONANCIAS BARIONES RESONANCIAS NO EXTRANAS (S=0)

RESONANCIA	J^P	I	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
N(1470)	$1/2^+$	1/2	1390 a 1470	180 a 220	$N\pi$ $N\pi\pi$
N(1520)	$3/2^-$	1/2	1510 a 1530	110 a 150	$N\pi$ $N\pi\pi$

RESONANCIA	JP (var) I	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
N(1535)	1/2 ⁻ 1/2	1500 a 1530	50 a 120	Nπ Nη
N(1670)	5/2 ⁻ 1/2	1660 a 1685	145 a 165	Nπ Nππ
N(1688)	5/2 ⁺ 1/2	1670 a 1690	120 a 145	Nπ Nππ
N(1700)	1/2 ⁻ 1/2	1660 a 1690	100 a 200	Nπ Λ K
N(1780)	1/2 ⁺ 1/2	1700 a 1800	100 a 250	Nπ Nη
N(1810)	3/2 ⁺ 1/2	1700 a 1850	100 a 300	Nπ Nππ
N(2190)	7/2 ⁻ 1/2	2100 a 2250	150 a 300	Nπ Nππ
N(2220)	9/2 ⁺ 1/2	2200 a 2250	250 a 350	Nπ
N(2650)	? ⁻ 1/2	2650	350	Nπ
N(3030)	? 1/2	3030	400	Nπ
Δ(1232)	3/2 ⁺ 3/2	1230 a 1234	110 a 120	Nπ Nγ
Δ(1650)	1/2 ⁻ 3/2	1615 a 1695	140 a 200	Nπ Nππ
Δ(1670)	3/2 ⁻ 3/2	1650 a 1720	190 a 260	Nπ Nππ
Δ(1890)	5/2 ⁺ 3/2	1860 a 1900	150 a 300	Nπ Nππ
Δ(1910)	1/2 ⁺ 3/2	1780 a 1950	160 a 230	Nπ Nππ

RESONANCIA	J ^P	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
$\Delta(1950)$	$7/2^+$ $3/2$	1910 a 1940	200 a 240	$N\pi$ $\Delta(1236)\pi$ ΣK
$\Delta(2420)$	$11/2^+$ $3/2$	2380 a 2450	300 a 500	$N\pi$
$\Delta(2850)$	7^+ $3/2$	2800 a 2900	400	$N\pi$
$\Delta(3230)$? $3/2$	3200 a 3350	440	$N\pi$
$\Lambda(1405)$	$1/2^-$ 0	1405 ± 5	40 ± 10	$\Sigma\pi$
$\Lambda(1520)$	$3/2^-$ 0	1519 ± 2	15 ± 2	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$ $\Lambda\pi\pi$
$\Lambda(1670)$	$1/2^-$ 0	1660 a 1680	2.79 $\pm .07$	$N\bar{K}$ $\Lambda\eta$ $\Sigma\pi$
$\Lambda(1690)$	$3/2^-$ 0	1690 ± 10	30 a 80	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$ $\Lambda\pi\pi$ $\Sigma\pi\pi$
$\Lambda(1815)$	$5/2^+$ 0	1820 ± 5	70 a 100	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$
$\Lambda(1830)$	$5/2^-$ 0	1810 a 1840	60 a 110	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$
$\Lambda(1860)$	$1/2^+$ 0	1860 a 1910	40 a 110	$N\bar{K}$ $\Sigma\pi$
$\Lambda(2100)$	$7/2^-$ 0	2100 a 2120	150 a 300	$N\bar{K}$
$\Lambda(2350)$? 0	2340 a 2360	100 a 200	$N\bar{K}$
$\Lambda(2585)$? 0	2585	300	$N\bar{K}$

RESONANCIA	J ^P	I	MASA (Mev)	ANCHO (Mev)	MODO DE DECAIMIENTO
$\Xi(1385)$	$3/2^+$	1	(+) 1382.5 ± 0.5 (-) 1386.6 ± 1.2	(+) 35 ± 2 (-) 42 ± 4	$\Lambda \pi$ $\Sigma \pi$
$\Xi(1670)^n$	$3/2^-$	1	1670 ± 10	35 a 70	$\Sigma \pi$ $\Lambda \pi$
$\Xi(1750)$	$1/2^-$	1	1700 a 1790	50 a 120	$N \bar{K}$ $\Lambda \pi$
$\Xi(1765)$	$5/2^-$	1	1723 ± 7	110 a 150	$N \bar{K}$ $\Lambda \pi$ $\Lambda (1520) \pi$ $\Sigma (1385) \pi$
$\Xi(1915)^g$	$5/2^+$	1	1905 a 1930	70 a 140	$N \bar{K}$ $\Lambda \pi$
$\Xi(1940)^l$	$3/2^-$	1	1900 a 1960	110 a 280	$N \bar{K}$ $\Lambda \pi$ $\Sigma \pi$
$\Xi(2030)^g$	$7/2^+$	1	2020 a 2040	120 a 200	$N \bar{K}$ $\Lambda \pi$ $\Sigma \pi$
$\Xi(2250)$?	1	2200 a 2300	50 a 200	$N \bar{K}$
$\Xi(2455)$?	1	2455	120	$N \bar{K}$
$\Xi(2620)$?	1	2600	200	$N \bar{K}$
$\Xi(1530)^o$	$3/2^+$	1/2	(0) 1531.8 ± 0.3 (-) 1535.1 ± 0.6	(0) 9.1 ± 0.5 (-) 10.1 ± 1.9	$\Xi \pi$
$\Xi(1820)^o, p$?	1/2	1800 a 1850	12 a 100	$\Lambda \bar{K}$ ΣK $\Xi \pi$ $\Xi(1530) \pi$
$\Xi(1940)^o, q$?	1/2	1900 a 1970	30 a 140	$\Xi \pi$ $\Xi(1530) \pi$

1. Para un sistema físico dado, existe una función de estado que resume todo lo que se puede conocer acerca del sistema. Esta se representa en general como una función compleja de las coordenadas $\{x_i\} = \vec{r}$ y del tiempo; la función de onda $\psi(\vec{r}, t)$. Esta función no tiene un significado físico directo, sin embargo, $|\psi(\vec{r}, t)|^2 \geq 0$ se interpreta como la probabilidad de que el sistema físico se encuentre en la posición \vec{r} al tiempo t . Esto requiere que $\int |\psi(r, t)|^2 d\vec{r} = 1$. En general, el espacio de funciones ψ es un espacio vectorial con el producto escalar definido por $\langle \psi | \varphi \rangle = \int \psi^* \varphi d\vec{r}$, luego la interpretación probabilística es equivalente a $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

2. Cada observable física Ω se representa por un operador lineal hermítico Ω .

Para el caso de las funciones $\psi(\vec{r}, t)$. El operador de momentum lineal corresponde a

$$p_i \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y h es la constante de Planck, $h \cong 6.34 \times 10^{-34}$ J-s.

3. Un estado de un sistema físico, es un eigenestado del operador Ω si

$$\Omega \psi_n = \omega_n \psi_n$$

ω_n es el eigenvalor del n -ésimo eigenestado ψ_n . Si Ω es hermítico

* Puede depender de algún otro grado (cuántico) de libertad como spin por ejemplo.

$(\Omega = \Omega^\dagger)$, ω_n es real.

4. Si un conjunto de operadores $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ conmutan entre sí ($[\Omega_i, \Omega_j] = 0$), tienen un sistema ortonormal completo de funciones propias comunes ψ_n y viceversa. Esto es que cualquier función de onda ψ , para un sistema físico se puede expresar como $\psi = \sum_n a_n \psi_n$; $a_n = \langle \psi | \psi_n \rangle$. $|a_n|^2$ es la probabilidad de que el sistema se encuentre en n-ésimo eigenestado.

5. El resultado de una medida de una observable física O es cualesquiera de sus eigenvalores. Si un operador Ω tiene un sistema completo de eigenfunciones ψ_i , con valores propios ω_i , y si se mide la observable O en un sistema que inmediatamente antes de la medida esté en el estado ψ lo único que podemos predecir acerca del resultado de la medida, es que la probabilidad de que nos dé el valor propio ω_i es $|\langle \psi_i | \psi \rangle|^2$. El valor esperado del observable Ω (promedio de n ($n \rightarrow \infty$) medidas del observable O sobre sistemas preparados idénticamente), viene dado por

$$\langle \Omega \rangle = \langle \psi | \Omega \psi \rangle = \int \psi^* \Omega \psi (dP) = \sum_n |(\psi_n, \psi)|^2 \omega_n$$

6. Para todo sistema físico, existe un operador lineal hermítico H , el hamiltoniano, que (por lo general) corresponde a la observable energía. Este operador determina la evolución temporal de la función de estados mediante la ecuación de Schroedinger.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi.$$

Queremos determinar en este apéndice cómo se descompone una representación irreducible de SU_3 en representaciones irreducibles del subgrupo isospín-hipercarga $((SU_2) \otimes (U_1))^\gamma$. Etiquetaremos las representaciones de este subgrupo por su isospín y su hipercarga

$$(I)^\gamma$$

TEOREMA C.1

La representación $(p,0)$ se descompone en:

$$(p,0) \longrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{3}} \oplus \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p}{3}-1} \oplus \dots \oplus (0)^{-\frac{2p}{3}}$$

de la misma manera

$$(0,q) \longrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^{-\frac{q}{3}} \oplus \left(\frac{q-1}{2}\right)^{-\frac{q}{3}+1} \oplus \dots \oplus (0)^{\frac{2q}{3}}$$

DEMOSTRACION

Según vimos en el capítulo 4, las representaciones $(1,0)$ y $(0,1)$ se pueden descomponer en:

$$(1,0) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \oplus (0)^{-\frac{2}{3}}$$

$$(0,1) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \oplus (0)^{\frac{2}{3}}$$

De esta fórmula se puede calcular cómo se descompone $(p,0)$ y

$(0,q)$ en general. Sabemos que los tensores base son de la forma $x^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_p}$ totalmente simétricos. El elemento $x^1 x^1 x^1 \dots x^1$ es el de mayor I_3 con $I_3 = \frac{p}{2}$, $Y = \frac{p}{3}$. Como es el máximo I_3 tenemos que $I = \frac{p}{2}$ y este es un miembro de un isomultipléte de dimensión $2\left(\frac{p}{2}\right)+1 = p+1$. Los miembros del isomultipléte son

$x^1 x^1 \dots x^1, x^1 x^1 \dots x^1 x^2, x^1 x^1 \dots x^1 x^2 x^2, \dots, x^2 x^2 \dots x^2$
 (recordemos que $l_3 = \frac{1}{2}$ para x^1 e $l_3 = -\frac{1}{2}$ para x^2 y para am-
 bos $l = \frac{1}{2}$).

Introduciendo la componente x^3 ($l_3 = 0$) tenemos que:

$x^1 x^1 \dots x^1 x^3$ es el miembro de mayor l_3 de otro isomultiplete
 $l_3 = \frac{p-1}{2}$, luego $l = \frac{p-1}{2}$ y la dimensión del isomultiplete es
 $2 \frac{(p-1)}{2} + 1 = p$. Los demás miembros del multiplete se obtienen
 nuevamente, cambiando x^1 por x^2 en todas las formas posibles;
 ésto irá reduciendo el valor de l_3 en una unidad. $x^1 x^1 \dots x^1 x^3$,
 $x^1 x^1 \dots x^1 x^2 x^3, x^1 \dots x^1 x^2 x^2 x^3, \dots, x^2 x^2 \dots x^2 x^3$; todos los elementos
 tienen $Y = \frac{p}{3} - 1$ (pues quitamos un x^i con $Y = \frac{1}{3}$ y agregamos
 otro con $Y = -\frac{2}{3}$).

Si introducimos otro x^3 , tenemos otro isomul-
 tiplete con l disminuído en $\frac{1}{2}$ y la hipercarga disminuída en 1.

Si seguimos con este método obtendremos $p+1$ isomultipletes, ter-
 minando con el tensor $x^3 x^3 x^3 \dots x^3$ que tiene $Y = \frac{-2p}{3}$, $l = 0$.

De la misma forma se puede proceder para la representación $(0, q)$.

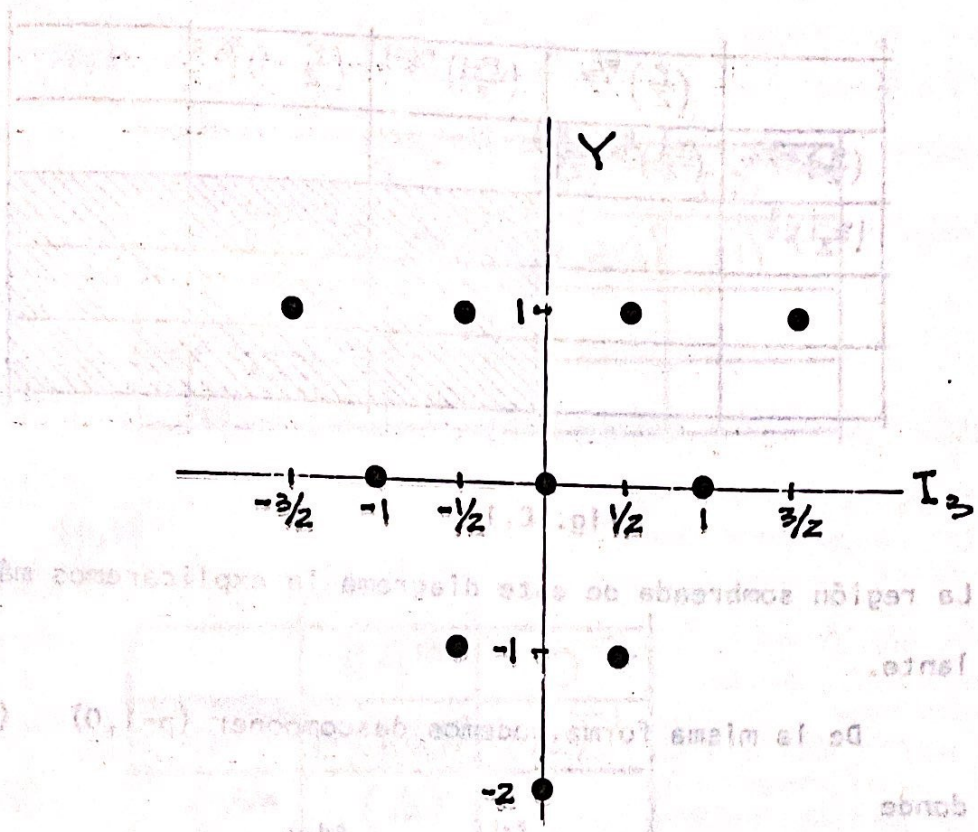
Ejemplo: $(3, 0) = \binom{3}{2}^1 + \binom{1}{1}^0 + \binom{1}{2}^{-1} + \binom{0}{0}^{-2}$ que nos dice que

el multiplete $(3, 0)$ se descompone en un isomultiplete

de dimensión 4, con hipercarga 1, un triplete con hi-

percarga 0, un doblete con hipercarga -1 y un singlete

con hipercarga -2. Gráficamente:



A partir de estas fórmulas podemos representar gráficamente la descomposición de $(p,0) \times (0,q)$. Formamos un arreglo rectangular de $p+1$ por $q+1$ y etiquetamos cada columna por un término de la descomposición de $(p,0)$ y cada fila por un término de la descomposición $(0,q)$. En cada posición ponemos el resultado del producto del elemento de la fila con el de la columna correspondiente. Para realizar este cálculo (lo que hacemos es sumar hipercargas y sumar vectorialmente isospín (ver ecuación 3.21). El contenido total del arreglo es la descomposición en isospín=hipercarga de $(p,0) \times (0,q)$:

	$(\frac{p}{2})^{p/3}$	$(\frac{p-1}{2})^{p/3-1}$	$(\frac{p}{2}-1)^{p/3-2}$
$(\frac{q}{2})^{-q/3}$	$(\frac{1+q}{2})^{\frac{p-q}{3}} \dots (\frac{p+1}{2})^{p/3}$		
$(\frac{q-1}{2})^{-\frac{q}{3}+1}$			

Fig. C.1

La región sombreada de este diagrama la explicaremos más adelante.

De la misma forma podemos descomponer $(p-1, 0)$ $(0, q-1)$ donde

$$\begin{aligned}
 (p-1, 0) &\longrightarrow \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\frac{p-1}{3}} \oplus \left(\frac{p}{2}-1\right)^{\frac{p-1}{3}-1} \oplus \dots, \\
 (0, q-1) &\longrightarrow \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{q-1}{3}} \oplus \left(\frac{q}{2}-1\right)^{\frac{q-1}{3}-1} \oplus \dots
 \end{aligned}$$

Para calcular el producto, podemos restar $\frac{2}{3}$ de todas las hipercargas de la primer serie y añadir la misma cantidad a todas las hipercargas de la segunda serie, sin cambiar el resultado.

Pero entonces, la descomposición de este producto es el contenido de la región sombreada del diagrama anterior. Ahora, recordemos (teorema (4.1)) que

$$(p, 0) \times (0, q) = (p, q) \oplus [(p-1, 0) \otimes (0, q-1)]$$

por lo tanto la descomposición en isospín-hipercarga de (p, q) es el contenido de la región no sombreada del diagrama anterior.

Como un ejemplo, encontremos la descomposición de $(2, 2)$ y de $(1, 1)$:

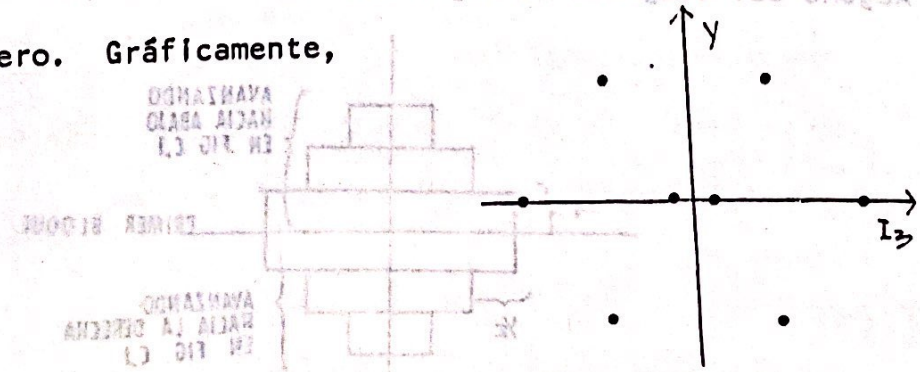
(2,2)

	$(1)^{1/3}$	$(1/2)^{-2/3}$	$(0)^{-5/3}$
$(1)^{-1/3}$	$(2)^0 \oplus (1)^0 \oplus (0)^0$	$(3/2)^{-1} \oplus (1/2)^{-1}$	$(1)^{-2}$
$(1/2)^{2/3}$	$(3/2)^0 \oplus (1/2)^0$		
$(0)^{5/3}$	$(1)^2$		

(1,1)

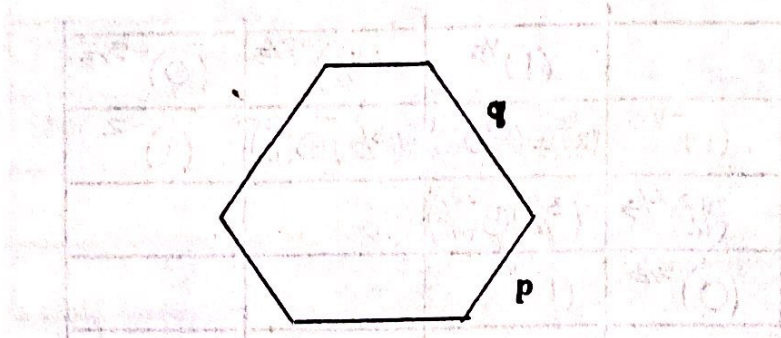
	$(1/2)^{1/3}$	$0^{-2/3}$
$(1/2)^{-1/3}$	$(1)^0 \oplus (0)^0$	$(1/2)^{-1}$
$0^{2/3}$	$(1/2)^1$	

Esto quiere decir que el SU_3 multiplete (1,1) está compuesto por dos isodobletes de hipercarga 1 y -1 respectivamente; de un isotriplete de hipercarga cero y un isosinglete de hipercarga cero. Gráficamente,



Este método, es una forma corta de encontrar los componentes de un multiplete de SU_3 , sin hacer uso de los diagramas de eigenvalores, U-spin, etc., además, nos sirve para construir estos diagramas (aunque ya sin mucho sentido). Podemos utilizarlo para encontrar propiedades generales de los diagramas de eigenvalores.

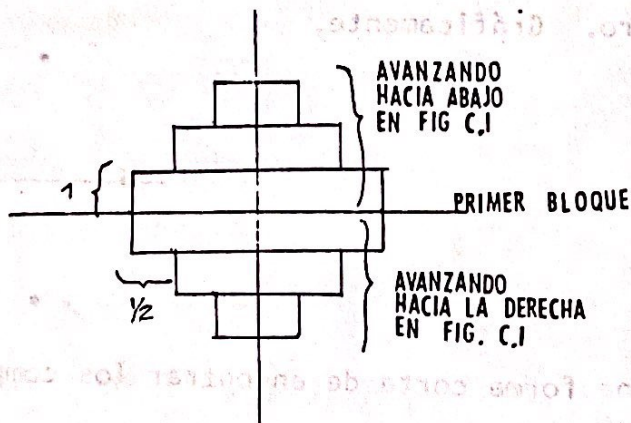
En el capítulo 4, mostramos que la frontera de un diagrama es un hexágono de lados p y q .



Para fijar ideas, supongamos que $p \geq q$.

En base a nuestro diagrama de descomposición (figura C.1), notamos que:

- i) Si a partir del primer bloque "avanzamos" (de bloque en bloque) hacia la derecha, notamos que la hipercarga disminuye en 1 cada vez y el valor del mayor l disminuye en $\frac{1}{2}$ hasta $l = \frac{p}{2}$. Si avanzamos hacia abajo, el valor de l también disminuye en $\frac{1}{2}$, hasta $\frac{q}{2}$, pero la hipercarga aumenta en uno. Lo que justifica la forma de hexágono del diagrama de eigenvalores.



- ii) Para la primer hipercarga (primer bloque). Existen $\left(\frac{p+q}{2}\right) - \left(\frac{p-q}{2}\right) + 1 = q+1$ isomultipletes, cada uno de dimensión $2l+1$, luego, el estado de mayor l (eigenvalor l_0) no será degenerado, pero el siguiente

(l_0-1) tendrá un eigenestado del primer isomultiplote y uno del segundo (doblemente degenerado), el tercero será tres veces degenerado y así sigue aumentando. Sucede lo mismo para cada bloque, luego la frontera es no degenerada.

iii) Si en cada bloque quitamos el isomultiplote de mayor isospín, nos queda la descomposición de $(p-1, q-1)$ que cumple con las mismas características de (p, q) por lo que será un hexágono con multiplicidad dos (por ii)); podemos continuar hasta $(p, q, 0)$ que será un triángulo (si $p > q$) o un punto (si $p = q$). Al llegar a este punto notamos que la degenerancia no puede seguir aumentando pues una representación triangular $(p, 0)$ es no degenerada (teorema C.1).

TEOREMA 4.4

En cualquier representación irreducible de SU_3 , un operador tensorial regular se puede expresar como

$$T^M_{\nu} = a \delta^M_{\nu} + b A^M_{\nu} + c (A \cdot A)^M_{\nu}$$

donde $(A \cdot A)^M_{\nu} = A^M_{\rho} A^{\rho}_{\nu}$ y a, b y c son constantes.

Usando la notación $\langle T \rangle = T^M_{\nu}$

$$(T \cdot A)^M_{\nu} = T^M_{\rho} A^{\rho}_{\nu}$$

$$\langle T \cdot A \rangle = T^M_{\nu} A^{\nu}_{\mu} \quad (17)$$

Seguiremos el camino de Okubo. Primero demostraremos algunos resultados.

LEMA D.1

Si un tensor $S^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$, en el espacio de tres dimensiones, es totalmente antisimétrico y sin traza; entonces $S^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ es idénticamente cero. Esquemáticamente, ésto significa que

$$S^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = -S^{\alpha\beta}_{\nu\mu} = -S^{\alpha\gamma}_{\nu\mu} \quad \text{y} \quad S^{\mu\beta}_{\mu\nu} = 0 \implies S^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = 0$$

DEMOSTRACION

Consideremos el tensor

$$T^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda} = S^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \delta^{\gamma}_{\lambda} - S^{\alpha\gamma}_{\mu\nu} \delta^{\beta}_{\lambda} - S^{\beta\gamma}_{\mu\nu} \delta^{\alpha}_{\lambda} + S^{\beta\delta}_{\lambda\nu} \delta^{\alpha}_{\mu} - S^{\alpha\delta}_{\lambda\nu} \delta^{\beta}_{\mu} - S^{\alpha\beta}_{\lambda\nu} \delta^{\gamma}_{\mu}$$

Directamente se puede observar que $T^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu\lambda}$ es totalmente antisimétrico para cualquier cambio de índices α , β y γ y además satisface la condición de ser sin traza $T^{\alpha\beta\gamma}_{\alpha\nu\lambda} = 0$. Debido a la

antisimetría, los únicos componentes independientes son $T_{\mu\nu\lambda}^{123}$; además, si encontramos la traza $T_{1\nu\lambda}^{123} + T_{2\nu\lambda}^{123} + T_{3\nu\lambda}^{123} = 0$ implica que $T_{1\nu\lambda}^{123} = 0 \forall \nu, \lambda$, luego $T_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Poniendo $\gamma = \nu$ y sumando sobre ν encontramos

$$T_{\mu\nu\lambda}^{\alpha\beta\gamma} = S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \delta_{\lambda}^{\gamma} - S_{\mu\nu}^{\alpha\gamma} \delta_{\lambda}^{\beta} - S_{\mu\nu}^{\alpha\lambda} \delta_{\lambda}^{\gamma} + S_{\mu\nu}^{\beta\gamma} \delta_{\lambda}^{\alpha} - S_{\mu\nu}^{\beta\lambda} \delta_{\lambda}^{\gamma} - S_{\mu\nu}^{\gamma\lambda} \delta_{\lambda}^{\beta} = S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} - S_{\mu\lambda}^{\beta\alpha} = 2S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow S_{\mu\lambda}^{\alpha\beta} = 0$$

LEMA D.2

Para cualquier par de tensores arbitrarios $M_{\mu\nu}^{\alpha}$ y $N_{\mu\nu}^{\beta}$, tenemos

$$\begin{aligned} & \text{la siguiente identidad: } (M_{\mu}^{\alpha} N_{\nu}^{\beta} - M_{\nu}^{\alpha} N_{\mu}^{\beta}) - (M_{\nu}^{\alpha} N_{\mu}^{\beta} - M_{\mu}^{\alpha} N_{\nu}^{\beta}) = \\ & \delta_{\mu}^{\alpha} [\langle M \rangle N_{\nu}^{\beta} + \langle N \rangle M_{\nu}^{\beta} - (M \cdot N) \delta_{\nu}^{\beta} - (N \cdot M) \delta_{\nu}^{\beta}] + \delta_{\nu}^{\beta} [(M \cdot N) \delta_{\mu}^{\alpha} + (N \cdot M) \delta_{\mu}^{\alpha} - \langle M \rangle N_{\mu}^{\alpha} - \langle N \rangle M_{\mu}^{\alpha}] \\ & + \delta_{\nu}^{\alpha} [(M \cdot N) \delta_{\mu}^{\beta} + (N \cdot M) \delta_{\mu}^{\beta} - \langle M \rangle N_{\mu}^{\beta} - \langle N \rangle M_{\mu}^{\beta}] + \delta_{\mu}^{\beta} [(M \cdot N) \delta_{\nu}^{\alpha} + (N \cdot M) \delta_{\nu}^{\alpha} - \langle M \rangle N_{\nu}^{\alpha} - \langle N \rangle M_{\nu}^{\alpha}] \\ & + (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta}) (\langle M \rangle \langle N \rangle - \langle M \cdot N \rangle) \dots \end{aligned}$$

DEMOSTRACION

Definamos un tensor $Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ por: Lema D.2 tenemos

$$Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = (M_{\mu}^{\alpha} N_{\nu}^{\beta} - M_{\nu}^{\alpha} N_{\mu}^{\beta}) - (M_{\nu}^{\alpha} N_{\mu}^{\beta} - M_{\mu}^{\alpha} N_{\nu}^{\beta})$$

luego $Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ es antisimétrico para cambios de α y β y de μ y ν .

Construyamos ahora el tensor

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - (\delta_{\mu}^{\alpha} Q_{\lambda\nu}^{\lambda\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} Q_{\lambda\nu}^{\alpha\lambda} + \delta_{\nu}^{\alpha} Q_{\mu\lambda}^{\lambda\beta} + \delta_{\nu}^{\beta} Q_{\mu\lambda}^{\alpha\lambda}) + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} - \delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta}) Q_{\lambda\theta}^{\lambda\theta}$$

observemos que

$$S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - (3 Q_{\lambda\nu}^{\lambda\beta} + Q_{\lambda\nu}^{\beta\lambda} + Q_{\nu\lambda}^{\lambda\beta} + \delta_{\nu}^{\beta} Q_{\mu\lambda}^{\alpha\lambda}) + \frac{3}{2} \delta_{\nu}^{\beta} Q_{\lambda\theta}^{\lambda\theta} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\beta} Q_{\lambda\theta}^{\lambda\theta} = 0$$

Además

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu}^{\beta\alpha} &= -Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} - (\delta_{\mu}^{\beta} Q_{\lambda\nu}^{\lambda\alpha} + \delta_{\mu}^{\alpha} Q_{\lambda\nu}^{\beta\lambda} + \delta_{\nu}^{\beta} Q_{\mu\lambda}^{\lambda\alpha} + \delta_{\nu}^{\alpha} Q_{\mu\lambda}^{\beta\lambda}) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\delta_{\mu}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} - \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\mu}^{\alpha}) Q_{\lambda\theta}^{\lambda\theta} \\ &= -Q_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + (\delta_{\mu}^{\alpha} Q_{\lambda\nu}^{\lambda\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} Q_{\lambda\nu}^{\alpha\lambda} + \delta_{\nu}^{\alpha} Q_{\mu\lambda}^{\lambda\beta} + \delta_{\nu}^{\beta} Q_{\mu\lambda}^{\alpha\lambda}) \\ & \quad - \frac{1}{2} (\delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\mu}^{\beta} - \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta}) Q_{\lambda\theta}^{\lambda\theta} = -S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

y de la misma forma $S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = -S_{\nu\mu}^{\alpha\beta}$; luego $S_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ satisface las condiciones del Lema D.1 y debe ser idénticamente cero. Esto nos demuestra el Lema.

TEOREMA D.1

En Su_3 , para cualquier tensor T_{μ}^{ν} y para operadores A_{μ}^{ν} . Satisfaciendo las relaciones de conmutación (4.9), tenemos

$$2[(A \cdot T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + (T \cdot A \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + (A \cdot A \cdot T)_{\beta}^{\alpha} + 10(T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + 8(A \cdot T)_{\beta}^{\alpha} - 2\langle T \rangle (A \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + 6T_{\beta}^{\alpha} - T_{\beta}^{\alpha} \langle A \cdot A \rangle - 6\langle T \rangle A_{\beta}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} [-6\langle T \cdot A \rangle - 2\langle T \rangle - 2\langle T \cdot A \cdot A \rangle + \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle] = 0$$

DEMOSTRACION

Si ponemos $M_{\mu}^{\nu} = N_{\mu}^{\nu} = A_{\mu}^{\nu}$ en el Lema D.2 tenemos

$$\begin{aligned} (A_{\mu}^{\nu} A_{\beta}^{\alpha} + A_{\beta}^{\alpha} A_{\mu}^{\nu}) - (A_{\nu}^{\alpha} A_{\beta}^{\mu} + A_{\beta}^{\mu} A_{\nu}^{\alpha}) &= -\delta_{\nu}^{\mu} (A \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + A_{\beta}^{\alpha} A^{\nu\mu} \\ &+ \delta_{\nu}^{\alpha} ((A \cdot A)_{\beta}^{\mu} + A_{\beta}^{\mu} A^{\nu\lambda}) + \delta_{\beta}^{\alpha} ((A \cdot A)_{\nu}^{\mu} + A_{\nu}^{\mu} A^{\lambda\alpha}) \\ &- \delta_{\beta}^{\mu} ((A \cdot A)_{\nu}^{\alpha} + A_{\nu}^{\alpha} A^{\lambda\mu}) + (\delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\mu}^{\alpha}) \langle A \cdot A \rangle \\ &= -\delta_{\nu}^{\mu} [2(A \cdot A)_{\beta}^{\alpha} + 3A_{\beta}^{\alpha}] + \delta_{\nu}^{\alpha} [2(A \cdot A)_{\beta}^{\mu} + 3A_{\beta}^{\mu}] + \delta_{\beta}^{\alpha} [2(A \cdot A)_{\nu}^{\mu} + 3A_{\nu}^{\mu}] \\ &- \delta_{\beta}^{\mu} [2(A \cdot A)_{\nu}^{\alpha} + 3A_{\nu}^{\alpha}] + (\delta_{\nu}^{\mu} \delta_{\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\mu}^{\alpha}) \langle A \cdot A \rangle \end{aligned}$$

Multiplicando cada uno de los lados por T_{α}^{ν}

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{\nu} A_{\mu}^{\nu} A_{\beta}^{\alpha} + T_{\alpha}^{\nu} A_{\beta}^{\alpha} A_{\mu}^{\nu} - T_{\alpha}^{\nu} A_{\nu}^{\alpha} A^{\mu\lambda} + T_{\alpha}^{\nu} A_{\beta}^{\mu} A_{\nu}^{\alpha} &= -2(T \cdot A \cdot A)_{\beta}^{\alpha} - 3(T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} \\ &+ \langle T \rangle (2(A \cdot A)_{\beta}^{\mu} + 3A_{\beta}^{\mu}) + \delta_{\beta}^{\mu} (2T_{\alpha}^{\nu} A_{\nu}^{\alpha} A_{\beta}^{\mu} + 3T_{\alpha}^{\nu} A_{\nu}^{\mu}) - 2T_{\beta}^{\nu} A_{\nu}^{\alpha} A_{\mu}^{\alpha} \\ &- 3T_{\beta}^{\nu} A_{\nu}^{\mu} + T_{\beta}^{\mu} \langle A \cdot A \rangle - \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle \delta_{\beta}^{\mu} \end{aligned}$$

Usando las relaciones de conmutación (4.9) y (4.14), el lado izquierdo de la ecuación resulta

$$2(A \cdot T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} - \langle T \rangle A_{\beta}^{\alpha} + 6(T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} - \langle T \cdot A \rangle \delta_{\beta}^{\alpha} + (T \cdot A)_{\beta}^{\alpha} - (A \cdot T)_{\beta}^{\alpha} + \langle T \rangle \delta_{\beta}^{\alpha} - 3T_{\beta}^{\mu}$$

y el lado derecho

$$-2(T \cdot A \cdot A)_\beta^M - 3(T \cdot A)_\beta^M + \langle T \rangle (2(A \cdot A)_\beta^M + 3A_\beta^M) + \delta_\beta^M (2\langle T \cdot A \cdot A \rangle + 3\langle T \cdot A \rangle) - 2(A \cdot A \cdot T)_\beta^M + 2\delta_\beta^M \langle T \cdot A \rangle + 2\langle T \rangle A_\beta^M - 6(A \cdot T)_\beta^M - 3(A \cdot T)_\beta^M + 3\langle T \rangle \delta_\beta^M - 9T_\beta^M + \langle A \cdot A \rangle T_\beta^M - \delta_\beta^M \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle$$

luego

$$2[(A \cdot T \cdot A)_\beta^M + (T \cdot A \cdot A)_\beta^M + (A \cdot A \cdot T)_\beta^M] + 10(T \cdot A)_\beta^M + 8(A \cdot T)_\beta^M - 2\langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle + 6T_\beta^M - T_\beta^M \langle A \cdot A \rangle - 6\langle T \rangle A_\beta^M + \delta_\beta^M [-6\langle T \cdot A \rangle - 2\langle T \rangle - 2\langle T \cdot A \cdot A \rangle + \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle] = 0$$

TEOREMA D.2

$$6(A \cdot A \cdot A)_\beta^M + 18(A \cdot A)_\beta^M + (6 - \langle A \cdot A \rangle) A_\beta^M + \delta_\beta^M [-6\langle A \cdot A \rangle - 2\langle A \cdot A \cdot A \rangle] = 0$$

DEMOSTRACION

Este resultado es inmediato si sustituimos T por A en el teorema anterior. Recordando que $\langle A \rangle = 0$.

En base a este último teorema, podemos ver que $(A \cdot A \cdot A)_\beta^M$ se puede expresar como combinación lineal de $(A \cdot A)_\beta^M$, A_β^M y δ_β^M además $(A \cdot A \cdot A)_\beta^M$ se puede expresar como combinación lineal de los anteriores operadores, luego $\langle A \cdot A \cdot A \rangle$ es una función de $\langle A \cdot A \rangle$ y $\langle A \cdot A \cdot A \rangle$.

TEOREMA D.3

Los operadores de Casimir $M_2 = A_\nu^\lambda A_\lambda^\nu$ y $M_3 = A_\nu^\lambda A_\lambda^\nu A_\mu^\lambda$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación.

$$[M_2, S_\mu^\nu] = 2(A \cdot S)_\mu^\nu - 2(S \cdot A)_\mu^\nu$$

$$[M_3, T_\mu^\nu] = 3(A \cdot A \cdot T)_\mu^\nu - 3(T \cdot A \cdot A)_\mu^\nu - 3[M_2, T_\mu^\nu]$$

DEMOSTRACION

$$\begin{aligned}
 \text{i) } [M_2, S_0^\lambda] &= M_2 S_0^\lambda - S_0^\lambda M_2 = A_\nu^\mu A_\mu^\nu S_0^\lambda - S_0^\lambda A_\nu^\mu A_\mu^\nu \\
 &= A_\nu^\mu A_\mu^\nu S_0^\lambda - A_\nu^\mu S_0^\lambda A_\mu^\nu + \delta_\nu^\mu S_0^\lambda A_\mu^\nu - \delta_\nu^\mu S_0^\lambda A_\mu^\nu \\
 &= A_\nu^\mu [A_\mu^\nu, S_0^\lambda] + (S_0^\lambda A)^\nu - (A \cdot S_0)^\lambda + \langle S \rangle S_0^\lambda - 3 S_0^\lambda \\
 &= A_\nu^\mu [\delta_\nu^\lambda S_0^\mu - \delta_\mu^\lambda S_0^\nu] + (S_0^\lambda A)^\nu - (A \cdot S_0)^\lambda + \langle S \rangle S_0^\lambda - 3 S_0^\lambda \\
 &= S_0^\lambda A_\mu^\nu + \delta_\mu^\lambda S_0^\nu - \delta_\nu^\lambda S_0^\mu - A_\nu^\lambda S_0^\nu + (S_0^\lambda A)^\nu - (A \cdot S_0)^\lambda + \langle S \rangle S_0^\lambda - 3 S_0^\lambda \\
 &= 2(S \cdot A)^\lambda - 2(A \cdot S)^\lambda
 \end{aligned}$$

$$\text{ii) } [M_3, T_0^\alpha] = A_\nu^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu T_0^\alpha - T_0^\alpha A_\nu^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu$$

Utilizando varias veces las relaciones de conmutación (4.9)

y (4.14) podemos transformar el primer miembro del lado derecho de la ecuación a

$$\begin{aligned}
 A_\nu^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu T_0^\alpha &= T_0^\alpha A_\nu^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu + (T \cdot A \cdot A)^\alpha - (A \cdot A \cdot T)^\alpha + A^\alpha \langle T \rangle - 3(A \cdot T)^\alpha \\
 &+ \langle T \cdot A \rangle \delta_0^\alpha - \delta_0^\nu T_0^\mu A_\mu^\lambda A_\lambda^\nu + (T \cdot A \cdot A)^\alpha + 3(T \cdot A)^\alpha \\
 &- \langle T \cdot A \rangle \delta_0^\alpha - (A \cdot A \cdot T)^\alpha - 3(A \cdot T)^\alpha + \langle A \cdot T \rangle \delta_0^\alpha \\
 &+ (T \cdot A \cdot A)^\alpha + (T \cdot A)^\alpha - \langle T \rangle A^\alpha - (A \cdot A \cdot T)^\alpha
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 [M_3, T_0^\alpha] &= 3(T \cdot A \cdot A)^\alpha - 3(A \cdot A \cdot T)^\alpha + 6(T \cdot A)^\alpha - (A \cdot T)^\alpha \\
 &- 3(T \cdot A \cdot A)^\alpha - 3(A \cdot A \cdot T)^\alpha + 3[M_2, T_0^\alpha]
 \end{aligned}$$

Ahora probaremos el teorema (4.4) en base a los anteriores resultados.

Con la ayuda del teorema D.3, podemos reescribir el teorema D.2 en la siguiente forma

$$3(T \cdot A \cdot A)^\alpha + 9(T \cdot A)^\alpha + T_B^\alpha (3 - \frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle) =$$

$$= \frac{1}{2} [M_2, (T \cdot A)^\alpha] + \frac{1}{3} [M_3, T_0^\alpha] + \langle T \rangle (A \cdot A)^\alpha - 3 \langle T \rangle A^\alpha$$

$$+ \delta_B^\alpha (3 \langle T \cdot A \rangle - \langle T \rangle + \langle T \cdot A \cdot A \rangle + \frac{1}{2} \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle)$$

$$\begin{aligned} & (\text{usamos: } \frac{1}{2} [M_2, (T \cdot A)_\beta^M + 2T_\beta^M] + \frac{1}{2} [M_3, T_\beta^M] - 2(T \cdot A \cdot A)_\beta^M - 4(T \cdot A)_\beta^M \\ & \quad - (A \cdot T \cdot A)_\beta^M - (A \cdot A \cdot T)_\beta^M - 4(A \cdot T)_\beta^M) \end{aligned}$$

Pero en una representación irreducible dada, M_2 y M_3 son constantes tal que los elementos matriciales $\langle \alpha | [M_2, Q] | \beta \rangle = \langle \alpha | [M_3, Q] | \beta \rangle = 0$

Luego, podemos escribir

$$\begin{aligned} 3(T \cdot A \cdot A)_\beta^M + 9(T \cdot A)_\beta^M + T_\beta^M (3 - \frac{1}{2} \langle A \cdot A \rangle) &= \langle T \rangle (A \cdot A)_\beta^M - 3 \langle T \rangle A_\beta^M \\ &+ \delta_\beta^M (3 \langle T \cdot A \rangle - \langle T \rangle + \langle T \cdot A \cdot A \rangle + \frac{1}{2} \langle T \rangle \langle A \cdot A \rangle) \end{aligned} \quad (D.1)$$

Esta ecuación es cierta sólo cuando tomamos elementos matriciales en una representación irreducible dada.

El operador T_β^M es arbitrario, siempre que satisfaga las relaciones de conmutación (4.) por lo tanto, podemos reemplazarlo por $(T \cdot A)$ y $(T \cdot A \cdot A)$, en la ecuación (D.1). Para cantidades como $(T \cdot A \cdot A \cdot A)$, $(T \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A)$..., podemos usar el teorema D.3 y las reducimos a combinaciones lineales de $T_\beta^M (T \cdot A)$ y $(T \cdot A \cdot A)_\beta^M$. Entonces la ecuación D.1 nos dá tres ecuaciones de la forma

$$a_{1\lambda} (T \cdot A \cdot A)_\beta^M + a_{2\lambda} (T \cdot A)_\beta^M + a_{3\lambda} T_\beta^M = b_{1\lambda} (A \cdot A)_\beta^M + b_{2\lambda} A_\beta^M + b_{3\lambda} \delta_\beta^M \quad (D.2)$$

donde los coeficientes $a_{i\lambda}$ dependen de $\langle A \cdot A \rangle$ y $\langle A \cdot A \cdot A \rangle$ (M_2 y M_3) y los $b_{i\lambda}$ de $\langle T \rangle$, $\langle T \cdot A \rangle$, $\langle T \cdot A \cdot A \rangle$, los cuales son constantes en una representación irreducible. En general, el determinante de (D.2) es distinto de cero y luego podemos resolver el sistema (D.2) resultando

$$T_\beta^M = a \delta_\beta^M + b A_\beta^M + c (A \cdot A)_\beta^M$$

y las otras ecuaciones para $(T \cdot A)$ y $(T \cdot A \cdot A)$.

BIBLIOGRAFIA

1. Ponomariov, L. (1974). "Alrededor del Cuanto". Editorial MIR, Moscú.
2. Kaplan, I. (1962). "Nuclear Physics". Addison-Wesley. Reading Massachusetts.
3. Perkins, D.H. (1972). "Introduction to High Energy Physics". Addison-Wesley. Reading Massachusetts.
4. Glashow, S.L. (1975). "Quarks with color and flavor". Scientific American, 23, página 38.
5. Chew, G.F., Gell-Mann, M., Rosenfeld, A.H. (1964). "Strongly Interacting Particles". Scientific American, Febrero, página 74.
6. Wichmann, E.H. (1971). "Física Cuántica". Berkeley Physics Course, Volumen IV. Editorial Reverté. España.
7. Drell, S.D. (1978). "When is a Particle?". Physics Today, Junio, página 23.
8. Weisskopf, V.M. (1979). "Fronteras Contemporáneas de la Física". Ciencia y Desarrollo, 25, página 39. México.
9. Omnés, R. (1970). "Introduction to Particle Physics". Wiley. New York.
10. Heisenberg, W. (1932). Z. Physik 77,1. Citado en (11).
11. Behrends, R.E., Dreitlein, J., Fronsdal, C., Lee, W. (1962). "Simple Groups and Strong Interaction Symmetries". Reviews of Modern Physics, 34, página 1.
12. Fermi, E., Yang, C.N. (1949). "Are Mesons Elementary Particles?". Physical Review, 76, página 1739. Citado en (47).
13. Gell-Mann, M. (1961). "The Eightfold Way: A Theory of Strong Interac-

- tion Symmetry". California Institute of Technology, Synchrotron Laboratory Report CTSL-20. (Sin publicar). Contenido en (47). Citado en (9).
14. Ne'eman, Y. (1961). "Derivation of Strong Interactions from a Gauge Invariance. Nuclear Physics, 26, página 222. Contenido en (47). Citado en (9).
15. Gell-Mann, M. (1964). "A Schematic Model in Baryons and Mesons". Physics Letters, 8, página 214. Netherlands. Contenido en (47) y (48). Citado en (9).
16. Zweig, G. (1964). CERN preprint Th. 412. Citado en (9). Ver también (46).
17. Lyubarskii. (1960). "The Application of Group Theory in Physics". Pergamon Press Ltd. Oxford.
18. Hamermesh, M. (1964). "Group Theory and its Application to Physical Problems". Addison-Wesley. Reading Massachusetts.
19. McVoy, K.W. (1965). "Symmetry Groups in Physics". Reviews of Modern Physics, 37, página 84.
20. Carruthers, P. (1966). "Introduction to Unitary Symmetry". Interscience Publishers. New York.
21. Weyl, H. (1925). Z. Math. 24, página 328, Reimpreso en H.Weyl Selecta (Birkhauser Verlag, Basel and Stuttgart, Alemania, 1956). Citado en (11).
22. Byron, F.W., Fuller, R.W. (1970). "Mathematics of Classical and Quantum Physics". Volúmenes I y II. Addison-Wesley. Reading Massachusetts.
23. Castañeda, Oscar. (1973). "El Grupo de Lorentz y el Significado de la

- invariancia en Física". Tesis de Licenciatura. Universidad del Valle de Guatemala.
24. Gottfried, K. (1966). "Quantum Mechanics". W.A. Benjamin. Massachusetts.
 25. Messiah, A. (1973). "Mecánica Cuántica". Volúmen II. Tecnos, Madrid.
 26. Weisskopf, V.F. (1962). "Relativistic Quantum Mechanics". CERN 62-15.
 27. Condon, E.U., Shortley, G.H. (1935). "The Theory of Atomic Spectra". Cambridge University Press. Cambridge Inglaterra. Citado en (31) y (20).
 28. Merzbacher, E. (1970). "Quantum Mechanics". John Wiley & Sons. New York.
 29. Sakata, S. (1956). "On a Composite Model for de New Particles". Progress Theoretical Physics 16, página 686. Citado en (41).
 30. Coleman, S. (1963). "Fun with SU_3 ". En "High Energy Physics and Elementary Particles". IAEA. Viena.
 31. de Swart, J.J. (1963). "The Octet Model and its Clebsch-Gordan Coefficients". Reviews of Modern Physics, 35, página 916.
 32. Berman, S.M. (1965). "Elements of SU_3 ". En (46).
 33. Lipkin, H.J. (1966). "Lie Groups for Pedestrians". North Holland. Amsterdam.
 34. Okubo, S. (1962). "Note on UNitary Symmetry in Strong Interactions". Progress Theoretical Physics (Kyoto), 27, página 94. Contenido en (47).
 35. Barnes et al. (1964). "Observation of a Hyperon with Strangenes minus Three". Physical Review Letters, 12, página . Contenido en (47). Citado en (9).

36. Lederman, L.M. (1978). "The Upsilon Particle". Scientific American 239, página 60.
37. Abram, G.S. (1975). Proceedings of the SLAC Symposium on Electron-Photon Interactions. Ver también (4) y (36).
38. Glashow, S.L., Bjorken, B.J. (1964) "Elementary Particles and SU_4 " Physics Letters 11, página 255. Netherlands. Citado en (4).
39. Bjorken, J.D., Drell, S.D. (1964). "Relativistic Quantum Mechanics" - McGraw-Hill New York.
40. Gillespie, D.T. (1976) "Introducción a la Mecánica Cuántica". Editorial

Reverté. España

Si algún lector quiere complementar o extender sus estudios en alguno de los temas tratados, son recomendables además, las siguientes obras:

FISICA DE PARTICULAS

41. Hughes, I.S. (1972) "Elementary Particles". Penguin Books. Inglaterra.
42. Tassie, L.J. (1973). "The Physics of Elementary Particles". Longman Group Limited. Inglaterra.

TEORIA DE GRUPOS

43. Tiukham, M. (1964) "Group Theory and Quantum Mechanics". McGraw-Hill. New York.
44. Racah, G. (1965). "Group Theory and Spectroscopy". Ergebnisse der Exakten Naturwissenschaften. Springer Verlag. Berlín (Basado en lecciones dadas en Princeton en 1951).
45. Gilmore, R. (1974). "Lie Groups". Lie Algebras and some of their Applications". Wiley, New York.

SIMETRIAS SU_3 Y QUARKS

46. Zichichi, A. (Editor). (1965). "Symmetries in Elementary Particle Physics" Academic Press. New York.
47. Gell-Mann, M., Neeman, Y. (1964). "The Eightfold Way". W.A. Benjamin. New York.
48. Kokkedee, J. J. (1969). "The Quark Model". W.A. Benjamin. New York.

33. J. J. Sakurai, (Editor), "Symmetries in Elementary Particle Physics", Academic Press, New York, 1964.

34. M. Gell-Mann, "The Eightfold Way", W.A. Benjamin, New York, 1962.

35. J. J. Sakurai, "The Quark Model", W.A. Benjamin, New York, 1969.

36. S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley-Interscience, New York, 1973.

37. R. Feynman, "Lectures on Physics", Wiley-Interscience, New York, 1962.

LIBRARY OF QUARKS

38. J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

39. J. J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", Benjamin, New York, 1967.

THEORY OF QUARKS

40. J. J. Sakurai, "The Quark Model", W.A. Benjamin, New York, 1969.

41. S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations", Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

42. S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Volume 2: Modern Applications", Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

43. J. J. Sakurai, "The Quark Model", W.A. Benjamin, New York, 1969.