

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



TORSIÓN, ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO Y ANOMALÍAS

Trabajo de graduación presentado por
Diego Liska de León
para optar al grado académico de
Licenciado en Física

Guatemala
2017

Torsión, entrelazamiento cuántico y anomalías

*Para mi Madre, Hilda,
por estar siempre ahí.*

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Excelencia que trasciende

DELVALLE
GRUPO EDUCATIVO

TORSIÓN, ENTRELAZAMIENTO CUÁNTICO Y ANOMALÍAS

Trabajo de graduación presentado por
Diego Liska de León
para optar al grado académico de
Licenciado en Física

Guatemala
2017

Vo.Bo.:

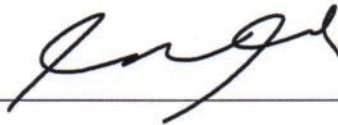


Dr. Álvaro Véliz Osorio

Tribunal Examinador:



MSc. Zaida del Rosario Urrutia del Cid



Dr. Álvaro Véliz Osorio



Dra. María Eugenia Cabrera Catalán

Fecha de aprobación:

Guatemala, 4 de diciembre de 2017

PREFACIO

Escribir un trabajo de graduación es una experiencia emocionante, principalmente porque uno nunca está preparado para ello. En el trayecto, tuve que aprender muchas cosas, y me di cuenta de lo vasto que es el mundo de la física. Mientras estaba escribiendo este trabajo, tuve muchas dificultades y frustraciones. No obstante, debo reconocer que aprendí mucho en el camino y al final, me quedé con aquel sentimiento que uno tiene cuando logra resolver un problema difícil.

La forma en que comenzó este proyecto fue por Rodrigo Castillo, quién a finales del 2015 me introdujo con mi asesor de tesis Álvaro Véliz. A inicios del año 2017 comencé a estudiar los conceptos básicos en geometría diferencial y posteriormente, seguí con el desarrollo del formalismo elaborado por Álvaro Véliz, enfocándome en la descripción de curvas. Los conceptos, los aprendí haciendo problemas y resolviendo primero los casos más sencillos; siempre bajo el auxilio de Álvaro, a quién le agradezco profundamente.

Quisiera agradecer también a mis padres: Pedro Liska e Hilda de León, por su apoyo incondicional y por haberme brindado la oportunidad tener estudios universitarios. Quiero agradecer a mis hermanas y a mis amigos por haber sido el germen de mi alegría en estos años de universidad. Agradezco también a Piermarco Fonda, por haberme incluido junto con Álvaro Véliz en este proyecto. Además, quiero agradecerles a mis catedráticos, por haberme enseñado todo lo que sé. En especial, quisiera agradecer a José Carlos Chiquín, Alan Reyes y Dorval Carias por haberme hecho, además, una mejor persona.

Finalmente, quisiera darle un agradecimiento especial a Zaida Urrutia, por haberme apoyado a lo largo de toda la carrera, y a Olga Castellanos y Byron Alay, por haberme ayudado en toda clase de imprevistos.

ÍNDICE

PREFACIO	V
LISTA DE FIGURAS	VIII
RESUMEN	IX
I. INTRODUCCIÓN	1
II. VECTORES, FORMAS Y TENSORES	3
III. VARIEDADES RIEMANNIANAS Y PSEUDORIEMANNIANAS	12
IV. CURVATURA	19
V. INMERSIONES Y GEOMETRÍA EXTRÍNSECA	31
A. LA HÉLICE COMO EJEMPLO	33
B. INVARIANZA DE GAUGE	37
C. GENERALIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE FRENET-SERRET	42
VI. GEOMETRÍA, ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO Y ANOMALÍAS	46
A. TEORÍA CONFORME DE CAMPOS	46
1. El álgebra de Witt.	48
2. El álgebra de Virasoro	49

3.	La expansión en producto de operadores	50
B.	ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO Y ANOMALÍAS GRAVITACIONALES	51
VII.	CURVAS EN FORMAS ESPACIALES	57
A.	CURVAS EN EL ESPACIO EUCLIDIANO	59
B.	CURVAS EN LA 3-ESFERA	60
C.	CURVAS EN EL ESPACIO DE POINCARÉ	62
D.	CURVAS EN EL ESPACIO ANTI DE SITTER	65
VIII.	CURVAS Y FLUJOS DE RENORMALIZACIÓN	71
IX.	CONCLUSIONES	82
X.	BIBLIOGRAFÍA	83

LISTA DE FIGURAS

III.1. Proyección estereográfica	13
III.2. Corte transversal de la proyección estereográfica	13
III.3. Traslape entre dos cartas locales	14
V.1. Hélice inmersa en \mathbb{R}^3	31
VII.1.Hélices inmersas en \mathbb{H}^3	64
VII.2.Hélices inmersas en AdS_3	67
VII.3.Valores permitidos para κ y τ , hélices en AdS_3	69
VIII.1.Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para el caso euclidiano.	74
VIII.2.Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para el caso lorentziano.	76
VIII.3.Espacio de posibles valores para la curvatura en flujo lorentziano	77
VIII.4.Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para la métrica VIII.27.	79
VIII.5.Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para la métrica VIII.28.	80
VIII.6.Espacio de posibles valores para la curvatura para la métrica VIII.28.	81

RESUMEN

Este trabajo de graduación tiene como objetivo construir y estudiar curvas en distintas variedades; en particular, se busca construir las curvas que extremizan un funcional conformado por la torsión extrínseca y la métrica inducida. Adicionalmente, se expone la relación que existe entre estos funcionales y la entropía de entrelazamiento cuántico en teorías conformes de dos dimensiones que presentan anomalías gravitacionales. En los primeros capítulos, se definen los objetos geométricos que describen la forma de curvas inmersas en una variedad 3-dimensional. Luego, se resumen los conceptos básicos en teorías conformes de campos como una motivación para estudiar curvas en diversas variedades. Finalmente, se describen los métodos utilizados para la construcción de las curvas que extremizan el funcional conformado por la torsión extrínseca y métrica inducida y se encuentran restricciones en los parámetros que las conforman. Es importante mencionar que, gran parte del material expuesto en los últimos capítulos es nuevo, pues no ha sido considerado en la literatura actual. Además, estos resultados pronto serán publicados en un artículo.

I. INTRODUCCIÓN

La correspondencia AdS/CFT, es una correspondencia entre una teoría de campo conforme (CFT por sus siglas en inglés) en una dimensión d y una teoría de gravedad en una dimensión $d + 1$. Esta fue propuesta por primera vez por el físico argentino Juan Maldacena en 1997. Desde su conjetura se han hecho grandes avances en el campo de la física teórica. Uno de ellos, es la prescripción de Ryu y Takayanagi (2006) para el cálculo de la entropía de entrelazamiento cuántico. La cual establece, que la entropía de entrelazamiento en una región X de una teoría conforme en dos dimensiones puede obtenerse a partir de la longitud de una geodésica inmersa en AdS_3 (espacio anti de Sitter).

En años recientes, esta prescripción fue generalizada por Castro, Detournay, Iqbal & Perlmutter (2014) para teorías conformes que presentan anomalías gravitacionales. En este caso, las curvas dejan de ser geodésicas y adquieren torsión y curvatura. El objetivo de este trabajo es el de construir estas curvas en diversas variedades y buscar restricciones en los parámetros que las caracterizan.

La estructura del texto es la siguiente: los primeros capítulos (II - V) son un resumen del formalismo geométrico que se necesita para estudiar curvas inmersas en variedades generales. El desarrollo de los temas comienza con la descripción de conceptos básicos, como la convención de suma de Einstein, y culmina con los conceptos de curvatura y torsión extrínseca en inmersiones generales. En cada capítulo, se resuelven ejemplos concretos como una forma de profundizar en los conceptos desarrollados en el texto. El lector familiarizado con estos temas puede omitir esta parte del texto y saltarse hasta el Capítulo VI.

Habiendo introducido toda la terminología necesaria para la descripción de curvas, se prosigue a dar un breve resumen sobre la relación que existe entre la geometría de curvas inmersas en variedades de tres dimensiones y la teoría de campos conformes en dos dimensiones (Capítulo VI). Se mencionan los resultados de Ryu y Takayanagi (2006) y de Castro *et al.* (2014), como una motivación para estudiar un funcional conformado únicamente por la torsión extrínseca y la métrica inducida.

Finalmente, en los capítulos VII y VIII se construyen las curvas que satisfacen este funcional

en diferentes variedades. Se consideran soluciones en formas espaciales, específicamente, en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , la 3-esfera \mathbb{S}^3 , y el espacio anti de Sitter AdS_3 . Además, en el último capítulo se consideran otros cuatro espacios cuyas métricas codifican flujos de renormalización.

II. VECTORES, FORMAS Y TENSORES

Antes de comenzar con el desarrollo teórico de los vectores, formas y tensores, es necesario introducir algunos aspectos de la notación y la forma en que se trabajará con estos objetos. Para ello, considérese un espacio n dimensional, las componentes de un vector V con respecto a una base $\hat{e}_{(1)}, \dots, \hat{e}_{(n)}$ se denotarán con los n números V^1, \dots, V^n . Si el vector V se representa en una base diferente $\hat{e}_{(1')}, \dots, \hat{e}_{(n')}$, las componentes V^1, \dots, V^n se ven modificadas. Dicha transformación puede escribirse utilizando una matriz Λ ,

$$\begin{bmatrix} V^{1'} \\ \vdots \\ V^{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^1_{1'} & \cdots & \Lambda^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^n_{1'} & \cdots & \Lambda^n_{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^1 \\ \vdots \\ V^n \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

o de forma más compacta,

$$V^{\mu'} = \sum_{\nu=1}^n \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^{\nu}. \quad (\text{II.2})$$

Aquí el índice μ recorre los valores desde $\mu = 1$ hasta $\mu = n$, mientras que ν es un índice auxiliar en la sumatoria. Esta clase de operaciones y las ecuaciones utilizadas para realizar cambios de coordenadas se utilizarán continuamente a lo largo de este trabajo. Por ello, es necesario utilizar una notación que permita manipular fácilmente expresiones de este tipo. Para tener una idea de cómo se podría compactar la notación, considérense las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} V = U &\Leftrightarrow V^{\mu} = U^{\mu}, \\ A = RG &\Leftrightarrow A^{\mu}_{\nu} = \sum_{\kappa=1}^n R^{\mu}_{\kappa} G^{\kappa}_{\nu}, \\ \Lambda^T \eta \Lambda = \eta &\Leftrightarrow \sum_{\mu'=1}^n \sum_{\nu'=1}^n \Lambda^{\mu'}_{\gamma} \Lambda^{\nu'}_{\delta} \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

donde U, V son vectores, y A, R, G, Λ y η son matrices cuadradas. Se pueden hacer algunas observaciones sobre los índices en estas expresiones:

1. Casi nunca se realiza una sumatoria sobre un índice si este solamente aparece una vez en un

producto y casi siempre se realiza una sumatoria sobre un índice si este se repite dos veces en un producto.

2. Un índice casi nunca aparece más de dos veces en un mismo producto.

Tomando en cuenta lo anterior, se comenzará a utilizar el convenio de suma de Einstein, el cual establece que cuando en un mismo producto hay dos índices repetidos, uno como subíndice y otro como superíndice, entonces se asume una sumatoria sobre estos índices. Así, la ecuación II.2 se reescribe como:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^{\nu}. \quad (\text{II.4})$$

En de este trabajo, los índices escritos con letras griegas recorrerán los valores 0, 1, 2 y 3, mientras que los índices escritos con letras latinas solamente recorrerán los valores 1, 2 y 3. El sistema de coordenadas x^{μ} que se utilizará es el siguiente:

$$x^{\mu} : \begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}, \quad (\text{II.5})$$

donde c es la velocidad de la luz, durante el texto se trabajará con unidades tales que $c = 1$.

En Relatividad General, el espacio vectorial con el que se trabaja se denomina espacio tangente y es denotado como T_p . Por el momento, este puede pensarse como un espacio vectorial abstracto asociado a un punto p en el espacio-tiempo. En esencia, un espacio vectorial es una colección de objetos que pueden sumarse y multiplicarse de forma lineal; es decir, si U, V son vectores, y a, b números reales, entonces

$$(a + b)(V + U) = aV + bV + aU + bU. \quad (\text{II.6})$$

Dado un espacio vectorial, puede construirse un segundo espacio, denominado espacio dual. Este se denota con un asterisco (Carroll, 2003). En el caso de T_p , el espacio dual T_p^* asociado se llama espacio cotangente. El espacio dual de un espacio vectorial es el conjunto de funciones lineales $\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, si $\omega \in T_p^*$, entonces ω actúa sobre elementos en T_p de la siguiente forma:

$$\omega(aV + bU) = a\omega(V) + b\omega(U) \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.7})$$

La ventaja de considerar estos mapas lineales es que forman un espacio vectorial, pues

$$(a + b)(\nu + \omega) = a\nu + b\nu + a\omega + b\omega, \quad (\text{II.8})$$

con $\nu, \omega \in T_p^*$. Una característica importante del espacio dual es que dada una base $\hat{e}_{(1)}, \dots, \hat{e}_{(n)}$ de T_p , existe una base $\hat{\theta}_{(1)}, \dots, \hat{\theta}_{(n)}$ de T_p^* que cumple con:

$$\hat{\theta}_{(n)}(\hat{e}_{(m)}) = \delta^n_m. \quad (\text{II.9})$$

Los vectores ω del espacio dual se denominan vectores covariantes y sus componentes se denotarán por los n números ω_μ con $\mu = 1, \dots, n$. Por otro lado, los vectores del espacio tangente se llaman vectores contravariantes. A diferencia de los vectores contravariantes, que se transforman según la ecuación II.4 con un cambio de base, los vectores covariantes se transforman de la siguiente manera:

$$\omega_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}{}^\nu \omega_\nu, \quad (\text{II.10})$$

donde $\Lambda_{\mu'}{}^\nu = (\Lambda^{-1})^{\mu'}{}_\nu$ es inversa de la matriz Λ .

Una vez introducido el concepto de lo que es un vector contravariante y covariante, se pueden mencionar los diferentes cambios de coordenadas que pueden hacerse en estos espacios. El principio de Relatividad Especial establece que las leyes de la naturaleza son invariantes bajo un grupo especial de transformaciones, denominadas transformaciones de Lorentz. Una transformación de Lorentz de un sistema coordenado x^μ a otro sistema $x^{\mu'}$ es tal que (Carroll, 2003):

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\lambda x^\lambda + a^{\mu'}, \quad (\text{II.11})$$

con $a^{\mu'}$, $\Lambda^{\mu'}{}_\lambda$ constantes y $\Lambda^{\mu'}{}_\lambda$ restringida a la condición

$$\Lambda^{\mu'}{}_\gamma \Lambda^{\nu'}{}_\delta \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\gamma\delta}, \quad (\text{II.12})$$

donde

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

es la métrica del espacio plano. La propiedad fundamental de las transformaciones de Lorentz es que dejan invariante el tiempo propio $d\mathcal{T}$, definido como:

$$d\mathcal{T}^2 = dt^2 - dx^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (\text{II.14})$$

para demostrar esto, considere un nuevo sistema coordenado $x^{\alpha'}$. El tiempo propio en este sistema es

$$\begin{aligned}
 (d\mathcal{T}')^2 &= -\eta_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \\
 &= -\eta_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\alpha'}_{\gamma} \Lambda^{\beta'}_{\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta} \\
 &= -\eta_{\gamma\delta} dx^{\gamma} dx^{\delta} \\
 &= (d\mathcal{T})^2.
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

Con lo cual se demuestra que el tiempo propio es invariante. La luz cumple con que su tiempo propio es cero. En relatividad, el tiempo propio permite definir el vector de velocidad de la siguiente forma:

$$U^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\mathcal{T}}, \tag{II.16}$$

por la ecuación II.14, el vector de velocidad se normaliza automáticamente:

$$\eta_{\mu\nu} U^{\mu} U^{\nu} = -1. \tag{II.17}$$

Una vez definida la velocidad, es posible definir el momento de una partícula:

$$p^{\mu} = mU^{\mu}. \tag{II.18}$$

Este se conoce como el vector de energía-momento (Carroll, 2003).

Los tensores son una generalización inmediata de los vectores covariantes y contravariantes. Un tensor se define como un mapa multilinear del espacio de vectores a los reales. Específicamente, un tensor T de rango (k, l) , es un mapa multilinear

$$T : \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{k\text{-veces}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{l\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

La multilinealidad significa que el tensor es lineal en cada una de sus componentes. El tensor T se denotará a través de sus componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$. La forma en que un tensor se transforma es muy similar a las transformaciones vectoriales:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \Lambda_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\nu'_l}^{\nu_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}. \tag{II.19}$$

Cada subíndice se transforma como un vector covariante y cada superíndice como un vector contravariante. Algunos ejemplos de tensores son la métrica $\eta_{\nu\mu}$ y el tensor de Levi-Civita definido

como

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutacion par de } (0123), \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutacion impar de } (0123), \\ 0 & \text{de cualquier otra forma,} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

Adicionalmente, la métrica $\eta_{\mu\nu}$ y su inversa $\eta^{\mu\nu}$ se utilizan para bajar o subir los índices en tensores. Es decir que dado un tensor $T^\mu{}_\nu$, pueden definirse nuevos tensores con ayuda de la métrica, por ejemplo:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\delta} T^\delta{}_\nu, \\ T_\mu{}^\nu &= \eta_{\mu\delta} \eta^{\nu\gamma} T^\delta{}_\gamma. \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Se dice que un tensor es simétrico en cualesquiera dos de sus índices si al momento de intercambiar estos índices el tensor no cambia. Por ejemplo, si

$$T_{\mu\nu\rho} = T_{\rho\nu\mu}, \quad (\text{II.22})$$

entonces se dice que $T_{\mu\nu\rho}$ es simétrico en su primer y tercer índice. Si un tensor es simétrico en todos sus índices simplemente se dice que el tensor es simétrico. De forma análoga, un tensor se dice que es antisimétrico en cualesquiera dos de sus índices si al intercambiar los índices el tensor cambia de signo. Por ejemplo, si

$$T_{\mu\nu\rho} = -T_{\nu\mu\rho}, \quad (\text{II.23})$$

entonces se dice que $T_{\mu\nu\rho}$ es antisimétrico en su primer y segundo índice. Un tensor que es antisimétrico en todos sus índices se denomina simplemente antisimétrico (Carroll, 2003). Dado un tensor cualquiera $T_{\mu_1\dots\mu_n}$, es posible generar un tensor $T_{(\mu_1\dots\mu_n)}$ simétrico y un tensor $T_{[\mu_1\dots\mu_n]}$ antisimétrico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T_{(\mu_1\dots\mu_n)} &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T_{\pi} & \text{y} \\ T_{[\mu_1\dots\mu_n]} &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) T_{\pi}, \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

donde π recorre todas las permutaciones de $(123\dots n)$ y

$$\text{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \text{ es una permutación par,} \\ -1 & \text{si } \pi \text{ es una permutación impar.} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Tomando como ejemplo el tensor $S_{\mu\nu\rho}$, el tensor S simétrico es

$$S_{(\mu\nu\rho)} = \frac{1}{6} (S_{\mu\nu\rho} + S_{\mu\rho\nu} + S_{\rho\mu\nu} + S_{\nu\mu\rho} + S_{\nu\rho\mu} + S_{\rho\nu\mu}), \quad (\text{II.26})$$

mientras que su tensor antisimétrico es

$$S_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{6} (S_{\mu\nu\rho} - S_{\mu\rho\nu} + S_{\rho\mu\nu} - S_{\nu\mu\rho} + S_{\nu\rho\mu} - S_{\rho\nu\mu}). \quad (\text{II.27})$$

Habiendo desarrollado las propiedades básicas de los tensores, es posible ilustrar algunas de sus aplicaciones en diferentes teorías físicas. Por ejemplo, en el caso del electromagnetismo, las cuatro leyes de Maxwell pueden reducirse a dos ecuaciones tensoriales haciendo uso del tensor de Faraday:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix} = -F_{\nu\mu}, \quad (\text{II.28})$$

y definiendo cuadvivector de corriente J^μ como (ρ, J^1, J^2, J^3) . En notación vectorial, las cuatro ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 4\pi \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Mientras que, en su forma tensorial, las primeras dos ecuaciones se reducen a

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu, \quad (\text{II.30})$$

y las dos ecuaciones restantes pueden escribirse como

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0. \quad (\text{II.31})$$

A continuación se mostrará la equivalencia entre la forma tensorial y vectorial de las ecuaciones de Maxwell, considerando primero el tensor $F^{\mu\nu}$.

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\kappa} F_{\lambda\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{II.32})$$

Haciendo $\nu = 0$ en la ecuación II.30 se obtiene que:

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \partial_i F^{0i} = \partial_i E^i = 4\pi J^0 \quad (\text{II.33})$$

Que corresponde a $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. En el caso de $\nu = i$, las ecuaciones resultantes son:

$$\partial_\mu F^{i\mu} = \partial_0 F^{i0} + \partial_1 F^{i1} + \partial_2 F^{i2} + \partial_3 F^{i3} = 4\pi J^i \quad (\text{II.34})$$

Notando que $(\nabla \times \mathbf{B})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = \partial_1 F^{i1} + \partial_2 F^{i2} + \partial_3 F^{i3}$, la ecuación II.34 se reduce a la primera de las ecuaciones de Maxwell

$$(\nabla \times \mathbf{B})^i - \partial_t E^i = 4\pi J^i \quad (\text{II.35})$$

Para obtener las dos ecuaciones restantes, se analizará la forma de la ecuación II.31. Por construcción, esta ecuación es antisimétrica, lo que implica que si $\mu = \nu$, $\lambda = \mu$ o $\lambda = \nu$ entonces la ecuación se reduce a la forma trivial $0 = 0$. Entonces, para obtener una ecuación no trivial, los índices μ, ν, λ deben ser todos distintos. Además, el orden en el que estos índices aparecen no importa, pues un cambio en su orden solamente difiere por un cambio de signo en la ecuación igualada a cero. Por lo tanto, el número de ecuaciones independientes en esta expresión es $\binom{4}{3} = 4$, estas son:

$$\partial_{[0} F_{12]} = \partial_0 F_{12} - \partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{01} = \partial_0 B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad (\text{II.36})$$

$$\partial_{[0} F_{31]} = \partial_0 F_{31} - \partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{03} = \partial_0 B_2 + \partial_1 E_1 - \partial_3 E_3 = 0, \quad (\text{II.37})$$

$$\partial_{[0} F_{23]} = \partial_0 F_{23} - \partial_1 F_{03} + \partial_2 F_{03} = \partial_0 B_1 + \partial_1 E_3 - \partial_2 E_2 = 0, \quad (\text{II.38})$$

$$\partial_{[1} F_{23]} = \partial_1 F_{23} - \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{12} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 - \partial_3 B_3 = 0 \quad (\text{II.39})$$

Las ecuaciones II.36, II.37, II.38 se reducen a $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$, mientras que la ecuación II.39 corresponde a $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Además de la teoría electromagnética, la teoría de fluidos es muy utilizada en Relatividad General, pues muchos problemas se resuelven suponiendo que el objeto a estudiar se comporta como un fluido perfecto. El comportamiento de este fluido puede describirse en términos de su densidad de energía, presión, temperatura, entre otros. Para estudiar esta clase de sistemas continuos es necesario generalizar la noción de vector de energía-momento para una partícula y considerar un tensor. Para un fluido perfecto, este tensor de estrés-energía está dado por la expresión:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{II.40})$$

donde ρ es la densidad de energía, U^μ es el vector de velocidad y p es la presión en el sistema. A continuación se mostrará como la ecuación II.40, restringida a la condición

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{II.41})$$

se reduce a las ecuaciones de fluido de Euler en el caso no relativista. Primero se obtendrán los coeficientes del tensor de estrés-energía para presiones mucho menores a la densidad de energía y velocidades mucho menores a la velocidad de la luz. Haciendo $\nu = 0$ en la ecuación II.40 se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} T^{00} &= (\rho + p)U^0U^0 + p\eta^{00} \approx (\rho + p) - p = \rho, \\ T^{i0} &= (\rho + p)U^iU^0 + p\eta^{i0} \approx (\rho + p)v^i \approx \rho v^i, \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

donde se hizo la aproximación $U^0 \approx 1$. Esta aproximación es válida porque la velocidad del fluido es mucho menor a la velocidad de la luz, con lo cual $U^\mu \approx (1, v^1, v^2, v^3)$, con v^i siendo la velocidad del fluido en las direcciones x, y y z . Aplicando la restricción II.41 se obtiene la ecuación de continuidad para fluidos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu 0} &= \partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i) = 0 \\ \Leftrightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Considerando el caso de $\nu = i$, se obtienen las siguientes componentes del tensor de energía momento:

$$\begin{aligned} T^{0i} &= (\rho + p)U^0U^i + p\eta^{0i} \approx \rho v^i, \\ T^{ji} &= (\rho + p)U^jU^i + p\eta^{ji} \approx \rho v^j v^i + p\delta^{ji}. \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Luego, utilizando la ecuación II.41 se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu i} &= \partial_0 T^{0i} + \partial_1 T^{1i} + \partial_2 T^{2i} + \partial_3 T^{3i} \\ &= \partial_t(\rho v^i) + \partial_k(\rho v^k v^i) + \partial_i p \\ &= v^i(\partial_t \rho + \partial_k(\rho v^k)) + \rho \partial_t v^i + \rho v^k \partial_k(v^i) + \partial_i p \\ &= \rho \partial_t v^i + \rho v^k \partial_k(v^i) + \partial_i p \\ \Leftrightarrow v^i[\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})] + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)v^i &= -\partial_i p \\ \Leftrightarrow \rho \partial_t \mathbf{v} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p, \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

con $\nabla \mathbf{v} = (\nabla v^1, \nabla v^2, \nabla v^3)$. Las ecuaciones II.43 y II.45 son las ecuaciones de Euler para fluidos no relativistas.

Una de las características más importantes de la notación tensorial es que las leyes escritas de esta forma son válidas en cualquier marco de referencia y cualquier sistema coordenado. Esto permite expresar las ecuaciones clásicas de una forma más general; además, la notación simplifica las

expresiones. En el caso del electromagnetismo y en el caso de fluidos, las ecuaciones en su forma tensorial son más compactas y elegantes.

III. VARIETADES RIEMANNIANAS Y PSEUDORIEMANNIANAS

En esencia una variedad es un espacio curvo con una topología no trivial que localmente se asemeja a \mathbb{R}^n . Formalmente, una variedad es un conjunto que puede ser continuamente parametrizado; es decir, para cada punto p en la variedad M existe un mapa φ y conjuntos abiertos $U \subseteq M, p \in U$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es una función continua e invertible con inversa continua. Si además la función φ es diferenciable; es decir, tiene infinitas derivadas parciales y todas ellas son continuas ($\varphi \in C^\infty$), entonces se dice que la variedad es una variedad diferenciable (Carroll, 2003). En este trabajo, solamente se consideran variedades diferenciables.

Una variedad por sí sola, es una colección de puntos que localmente se asemejan al espacio euclidiano; sin embargo, la adición de una métrica al espacio permite medir distancias y darle forma a la variedad. Una variedad que posee un tensor simétrico de rango $(0, 2)$, definido como su métrica en cada punto de la variedad, se denomina variedad riemanniana o pseudoriemanniana. Se dice que la variedad es riemanniana si todos los autovalores de la métrica son positivos; si exactamente uno de los autovalores es negativo, se dice que la variedad es pseudoriemanniana o lorentziana. En el siguiente capítulo se mostrará como la curvatura de una variedad está completamente definida por su métrica.

El ejemplo clásico de una variedad es la esfera unitaria S^2 parametrizada con la proyección estereográfica. La proyección estereográfica mapea el punto $p \in S^2$ con el punto de intersección entre la recta que pasa por los puntos n y p , y el plano $z = -1$ (Figura III.1).

Considérese la Figura III.2, puede observarse que $u^1 = kx^1$ y $u^2 = kx^2$ con k una constante de proporcionalidad, además por semejanza de triángulos:

$$\frac{1 - x^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} = \frac{2}{k\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \quad (\text{III.1})$$

con lo cual, $k = \frac{2}{1 - x^3}$ con $x^3 \neq 0$. Por lo tanto, el mapa $\varphi : S^2 - \{n\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que parametriza la

Figura III.1: Proyección estereográfica

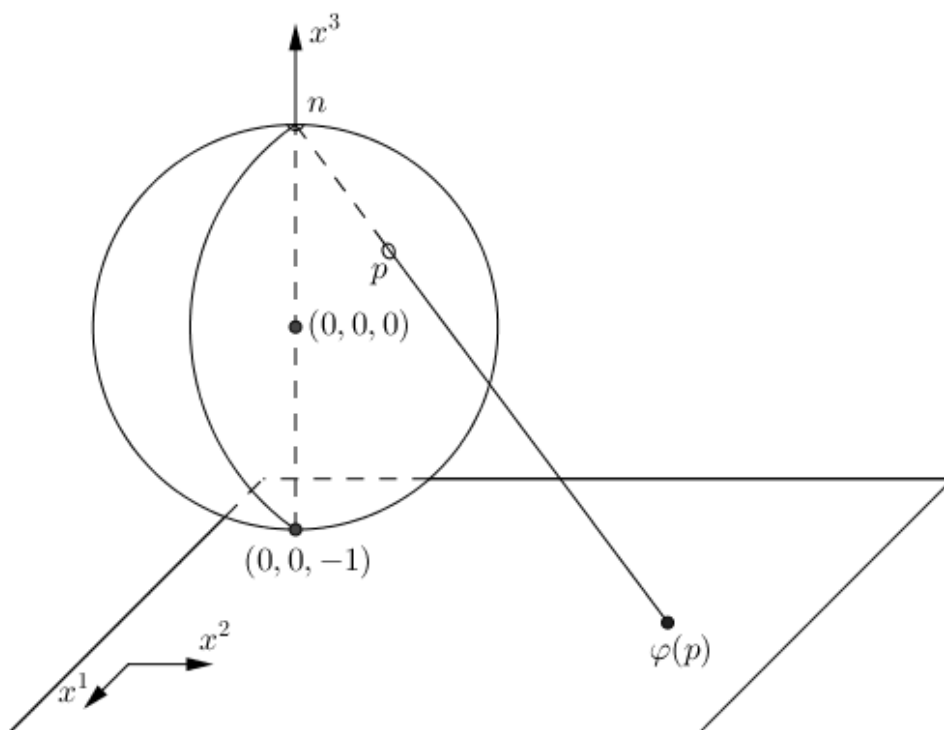
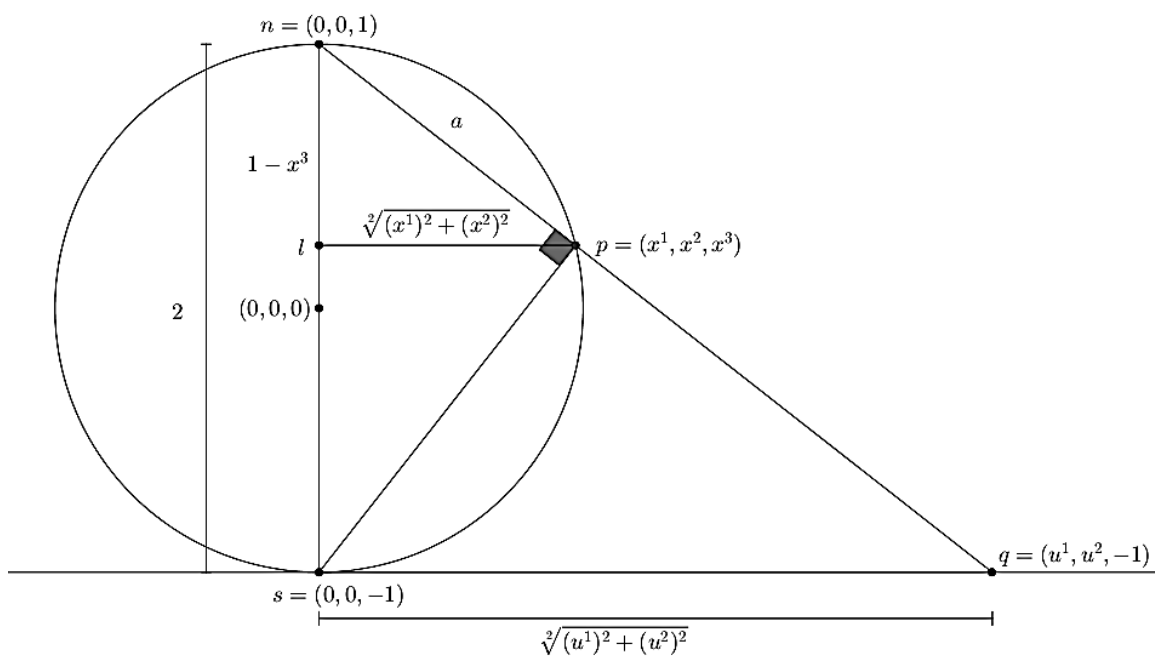


Figura III.2: Corte transversal de la proyección estereográfica



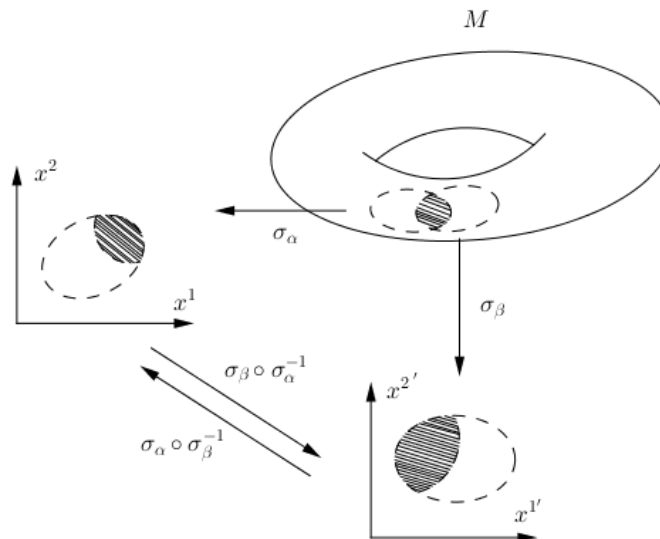
esfera, puede escribirse como:

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = (u^1, u^2) = \left(\frac{2x^1}{1-x^3}, \frac{2x^2}{1-x^3} \right). \quad (\text{III.2})$$

Este mapa, junto con su dominio $S^2 - \{n\}$ forman una carta local. Una carta local, también denominado sistema coordenado, (U, σ) consiste en un abierto $U \subseteq M$ y un mapa $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que σ es inyectiva y $\sigma(U)$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . En muchos de los casos, no es posible cubrir una variedad con una sola carta, por lo que se necesita una familia de cartas para cubrir todo el conjunto. Un atlas C^∞ es una colección de cartas $(U_\alpha, \sigma_\alpha)$ tales que (Carroll, 2003):

1. $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$
2. Las cartas locales se unen de manera suave. Es decir, si dos cartas σ_{α} y σ_{β} cumplen que $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, entonces el mapa $\sigma_{\alpha} \circ \sigma_{\beta}^{-1} : \sigma_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \sigma_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \subseteq \mathbb{R}^n$ debe ser de clase C^∞ y sobreyectivo (Figura III.3).

Figura III.3: Traslape entre dos cartas locales



Regresando al ejemplo de la esfera, para cubrir todo el conjunto es necesario definir otra parametrización ψ que incluya el punto n que se excluyó en la carta dada por φ . Para ello puede construirse un segundo mapa $\psi : S - \{s\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma análoga a φ considerando ahora la intersección de la

recta desde el polo sur de la esfera hasta el plano $x^3 = 1$; ψ puede obtenerse reemplazando $x^3 - 1$ por $x^3 + 1$ en ecuación III.1, el mapa resultante es:

$$\psi(x^1, x^2, x^3) = (v^1, v^2) = \left(\frac{2x^1}{1+x^3}, \frac{2x^2}{1+x^3} \right). \quad (\text{III.3})$$

Es posible mostrar que las dos cartas locales que cubren a S^2 se unen de manera suave. Para ello es necesario calcular φ^{-1} . A partir de la Figura III.2 se obtiene que:

$$\frac{2}{\sqrt[2]{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt[2]{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}}, \quad (\text{III.4})$$

pues el triángulo Δnsp es semejante al triángulo Δnsq . Luego, utilizando la semejanza entre los triángulos Δnlp y Δnsq ,

$$(1 - x^3) = \frac{2a}{\sqrt[2]{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}} = \frac{8}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}. \quad (\text{III.5})$$

De la Figura III.2, $u^1 = kx^1$ y $u^2 = kx^2$ con $k = \frac{1}{1 - x^3}$. Por lo tanto,

$$\varphi^{-1}(u^1, u^2) = \left(\frac{4u^1}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \frac{4u^2}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 - 4}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \right) \quad (\text{III.6})$$

Con lo cual, el mapa $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dado por

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi^{-1}(u^1, u^2) &= \psi(\varphi^{-1}(u^1, u^2)) \\ &= \psi \left(\frac{4u^1}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \frac{4u^2}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2}, \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 - 4}{4 + (u^1)^2 + (u^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{4u^1}{(u^1)^2 + (u^2)^2}, \frac{4u^2}{(u^1)^2 + (u^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

que es un mapa de clase C^∞ en el dominio $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, que corresponde a la región donde las dos cartas se traslapan. Finalmente, se ha demostrado que las dos cartas $(S^2 - n, \varphi)$, $(S^2 - s, \psi)$ forman un atlas para S^2 .

La inclusión de cartas diferenciables permite introducir diversos conceptos de análisis en variedades, como la diferenciación e integración. Por ejemplo, supongase una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, gracias a la existencia de una parametrización $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, la función f puede verse como una función n valuada en la variedad M considerando la composición $f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. La derivada parcial de f con respecto a cualquiera de sus componentes se define entonces como:

$$\partial_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(f \circ \varphi)(x^\mu) \quad (\text{III.8})$$

También es posible asociar un espacio vectorial, denominado plano tangente T_p , a cada uno de los puntos p en una variedad M . El plano tangente de un punto $p \in M$ se define como el espacio de operadores de derivadas direccionales de las curvas que pasan a través p . Las derivadas parciales con respecto a las coordenadas de una parametrización forman una base para este espacio. Para ver esto, considere el operador derivada direccional $\frac{d}{d\lambda}$, este operador aplicado a una función arbitraria f puede escribirse como una combinación lineal de derivadas parciales utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{d\lambda}f = \partial_\mu f \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (\text{III.9})$$

dado que f es arbitraria, esto significa que

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu, \quad (\text{III.10})$$

Lo que muestra que, los operadores $\{\partial_\mu\}$ forman una base de T_p . Esta base se hizo para una parametrización en particular; sin embargo, para un mismo punto puede existir más de una parametrización. Supóngase que $x^{\mu'}$ es otra parametrización para T_p la forma en que los operadores $\{\partial_{\mu'}\}$ se transforman bajo un cambio de base se obtiene como una aplicación directa de la regla de la cadena:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (\text{III.11})$$

Utilizando esta ecuación, es posible saber cómo cambian las componentes de un vector $V \in T_p$ al momento de realizar un cambio de base. Supóngase que V tiene las coordenadas V^μ en una base ∂_μ , entonces las coordenadas de V en una base distinta $\partial_{\mu'}$ son

$$V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu, \quad (\text{III.12})$$

Dado que V es el mismo vector en ambas bases, $V^\mu \partial_\mu = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu$, esto implica que:

$$V^\mu = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Leftrightarrow V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu, \quad (\text{III.13})$$

puesto que la matriz jacobiana $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$ es invertible. Es importante recordar que todas estas transformaciones son posibles porque las cartas locales de M se unen de manera suave en sus intersecciones.

Habiendo definido el espacio vectorial T_p , puede construirse el espacio dual T_p^* . Para ello, recordamos que el diferencial df aplicado a un vector $\frac{d}{d\lambda}$ del espacio T_p da como resultado la derivada direccional de f en la dirección $\frac{d}{d\lambda}$; es decir,

$$df \left(\frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{df}{d\lambda}. \quad (\text{III.14})$$

Lo que sugiere que el espacio dual asociado a T_p es el espacio de diferenciales df donde f es una función diferenciable. Una base natural para este espacio es el conjunto de diferenciales dx^μ , pues su acción con respecto a la base de derivadas parciales ∂_μ es

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (\text{III.15})$$

La forma en que los diferenciales se transforman con un cambio de coordenadas puede obtenerse a partir de la ecuación III.15 aplicada a dos bases diferentes,

$$\begin{aligned} dx^\mu(\partial_\mu) &= dx^\mu \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \partial_{\mu'} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu(\partial_{\mu'}) \\ &= dx^{\mu'}(\partial_{\mu'}) \\ \Rightarrow dx^{\mu'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Para obtener la transformación de las componentes de un vector del espacio dual, se aplica el mismo procedimiento que el aplicado en el plano tangente:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu'} dx^{\mu'} &= \omega_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu \\ &= \omega_\mu dx^\mu \\ \Rightarrow \omega_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} &= \omega_\mu \\ \Rightarrow \omega_{\mu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Por último, es posible determinar la regla de transformación para un tensor en general. Esta se obtiene transformando cada superíndice como se transforma un vector del espacio tangente (vector contravariante) y cada subíndice como se transforma un vector del espacio dual (vector covariante).

Un tensor T de rango (k, l) se transforma de la siguiente forma:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (\text{III.18})$$

Uno de los problemas más grandes que presenta esta transformación tensorial es que la derivada parcial de un tensor no es, en general, un tensor. Esto puede verse considerando la derivada de una

uno-forma (un tensor de rango (0,1)) T_ν , la derivada parcial $\partial_\mu T_\nu$ no se transforma como lo haría un tensor ante un cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned}\partial_{\mu'} T_{\nu'} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T_\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu T_\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right) T_\nu\end{aligned}\tag{III.19}$$

Para solucionar este problema, en el siguiente capítulo se definirá el concepto de derivada covariante, que puede pensarse como la extensión de la derivada parcial para variedades.

La métrica $g_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico de rango (0, 2). Usualmente se asume que la métrica es no-degenerada; es decir, $g = \det(g_{\mu\nu}) = |g_{\mu\nu}| \neq 0$. El inverso de la métrica se denotará como $g^{\nu\mu}$. En el caso especial de la métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. La métrica es una de las cantidades más importantes en la geometría de las variedades riemannianas y pseudoriemannianas, pues esta define el segmento infinitesimal de línea,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,\tag{III.20}$$

además, la métrica se utiliza para definir el producto punto de un espacio:

$$\langle V|W \rangle = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu\tag{III.21}$$

Con el producto punto pueden medirse los ángulos y distancias en una variedad, y estos dos conceptos son la base del desarrollo geométrico en espacios curvos.

IV. CURVATURA

Este capítulo se centra en el concepto de curvatura y su relación con la métrica de una variedad. En el estudio de variedades diferenciales surgieron diversas estructuras a raíz de las parametrizaciones que podían realizarse en cada punto en el espacio. Aparecieron los conceptos de derivadas, parametrizaciones, curvas sobre variedades y planos tangentes. A partir de ellos fue posible la construcción de vectores, formas diferenciables y tensores. Además, se introdujo una de las estructuras más importantes en geometría diferencial: la métrica $g_{\mu\nu}$.

En la última parte del Capítulo II, se encontró que la derivada parcial de un tensor no es, en general, un tensor. Para solucionar este problema es necesario generalizar el concepto de derivada parcial e introducir un nuevo tipo de derivada: la derivada covariante ∇ . En el espacio plano, el operador ∂_μ es un mapa $\partial_\mu : (T_p^*)^k \times (T_p)^l \rightarrow (T_p^*)^k \times (T_p)^{l+1}$, es decir, es que mapea tensores de rango (k, l) a tensores de rango $(k, l + 1)$. Dos propiedades que tiene la derivada parcial que se desean conservar en la derivada covariante son: 1. linealidad y 2. la regla del producto de Leibniz (Carroll, 2003). Debido a esto, en su definición, se exige que la derivada covariante cumpla con estas dos propiedades:

1. $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$.
2. $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

Una propuesta, es definir la derivada covariante como:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + (\Gamma_\mu)^\rho{}_\lambda V^\lambda, \quad (\text{IV.1})$$

donde las matrices $(\Gamma_\mu)^\rho{}_\sigma$ sirven como una corrección para que la derivada parcial en la dirección μ , ∂_μ pueda transformarse como un tensor. A los coeficientes de estas matrices se les denomina coeficientes de la conexión y suelen denotarse sin los paréntesis como $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$. Los coeficientes de la

conexión pueden obtenerse a partir de las propiedades de transformación de los tensores:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^{\lambda'} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu,
\end{aligned} \tag{IV.2}$$

la última igualdad en esta ecuación impone la condición que la derivada covariante debe transformarse como un tensor. De la segunda y tercera igualdad se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}.
\end{aligned} \tag{IV.3}$$

Por lo tanto, la regla de transformación para los coeficientes de la conexión es

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \tag{IV.4}$$

Esta no es la regla de transformación de un tensor y no se espera que lo sea; de hecho, los coeficientes de la conexión no se definieron para ser tensores, su objetivo es hacer que la derivada covariante sea un tensor, y el término extra en la transformación de los coeficientes hace que esto sea posible.

De forma análoga, puede definirse una derivada covariante que actúe sobre formas diferenciales, ω_ν . En este caso se definen nuevos coeficientes de conexión $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, tales que:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \tag{IV.5}$$

En general, los nuevos coeficientes $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, no guardan ninguna relación con los coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$; sin embargo, es conveniente que estas dos conexiones estén relacionadas. Para ello, es necesario incluir dos propiedades a la definición de derivada covariante:

3. Que conmute con la contracción; es decir, $\nabla_\mu (T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^\lambda_{\lambda\rho}$.
4. Que se reduzca a la derivada parcial en escalares: $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$.

Estas dos propiedades nuevas permiten encontrar una relación entre $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ y $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Por las propiedades

3, 4 y 2:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu(\omega_\nu V^\nu) &= \partial_\mu(\omega_\nu V^\nu) && \Rightarrow \\
(\nabla_\mu \omega_\nu) V^\nu + \omega_\nu (\nabla_\mu V^\nu) &= (\partial_\mu \omega_\nu) V^\nu + \omega_\nu (\partial_\mu V^\nu) && \Rightarrow \\
(\partial_\mu \omega_\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda) V^\nu + \omega_\nu (\partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda) &= (\partial_\mu \omega_\nu) V^\nu + \omega_\nu (\partial_\mu V^\nu) && \Rightarrow \quad (IV.6) \\
\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \omega_\nu V^\lambda &= 0 && \forall \omega, V \Rightarrow \\
\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda &= -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda.
\end{aligned}$$

Lo que muestra la relación entre ambas conexiones.

Habiendo definido ∇ para vectores covariantes y contravariantes, es posible extender la definición para tensores de cualquier rango. Esta consiste en obtener la derivada parcial del tensor y luego añadir un término Γ por cada índice contravariante y un término $-\Gamma$ por cada índice covariante:

$$\begin{aligned}
\nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\
&+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \dots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_k} T^{\mu_1 \dots \lambda}_{\nu_1 \dots \nu_l} \\
&- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \dots \nu_l} - \dots - \Gamma_{\sigma\nu_l}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \lambda}.
\end{aligned} \quad (IV.7)$$

Es importante resaltar que la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ utilizada para definir la derivada covariante no es única, y cualquier conexión que satisfaga regla de transformación de la ecuación IV.4 es una conexión válida. Sin embargo, si se trabaja sobre una variedad donde existe una métrica, es posible construir una única conexión con base en esta métrica. A continuación se muestra la construcción de esta conexión, pero antes es necesario introducir un último concepto, el tensor de torsión. Para cada conexión $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, puede asociarse un tensor, llamado tensor de torsión, que se define como:

$$T_{\mu\nu}{}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda. \quad (IV.8)$$

Por su definición, el tensor de torsión es antisimétrico. Una conexión que es simétrica en sus dos subíndices se denomina libre de torsión. Una conexión única, relacionada con la métrica, puede construirse exigiendo que esta sea libre de torsión y compatible con la métrica:

$$5. \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda.$$

$$6. \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0.$$

Una fórmula explícita para calcular los coeficientes de la conexión puede obtenerse a partir de todas las permutaciones de la propiedad 6.

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} &= \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \\ \nabla_{\mu} g_{\nu\rho} &= \partial_{\mu} g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\nu\lambda} = 0 \\ \nabla_{\nu} g_{\rho\mu} &= \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\rho\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Al sustraer la segunda y tercera ecuación de la primera, se obtiene la siguiente relación para calcular los coeficientes de la conexión:

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} = 0. \quad (\text{IV.10})$$

Por lo tanto, los símbolos de la conexión están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}). \quad (\text{IV.11})$$

Esta es una de las conexiones más importantes y se conoce como la conexión de Levi-Civita, aunque también puede llamarse Conexión de Riemann o Conexión de Christoffel (Carroll, 2003). Los símbolos $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ de la conexión se denominan los símbolos de Christoffel. Al trabajar con esta conexión, la derivada covariante adquiere propiedades importantes. La primera de ellas es la invariancia del inverso de la métrica:

$$\nabla_{\rho} g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{IV.12})$$

La segunda es la conmutatividad para subir o bajar índices:

$$g_{\mu\lambda} \nabla_{\rho} V^{\lambda} = \nabla_{\rho} (g_{\mu\lambda} V^{\lambda}) = \nabla_{\rho} V_{\mu}. \quad (\text{IV.13})$$

Habiendo definido una generalización de la derivada parcial a variedades, se proseguirá con la noción de curvatura en espacios curvos. La forma en que se cuantifica la curvatura de una variedad es a través del tensor de Riemann. Este tensor puede obtenerse a partir de cualquier conexión y la idea detrás de su definición es obtener una forma de medir que tan plano es el espacio con el que se está trabajando. El tensor de Riemann se define a partir de la siguiente ecuación (Carroll, 2003):

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma}, \quad (\text{IV.14})$$

y en términos de los símbolos de Christoffel, este puede obtenerse a partir de la siguiente relación:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (\text{IV.15})$$

Este tensor permite caracterizar los espacios planos, pues una de sus propiedades es que las componentes del tensor de Riemann son todas cero, si y solo si, es posible encontrar un sistema coordinado en donde las componentes de la métrica son todas constantes; es decir, el espacio es plano. Adicionalmente, el tensor de Riemann tiene varias propiedades:

1. Es antisimétrico con respecto a sus dos últimos índices, $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}_{\sigma\nu\mu}$.
2. El tensor con todos sus índices abajo ($R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$) es antisimétrico con respecto a sus dos primeros índices, $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$.
3. Es invariante al intercambiar su primer par de índices con su segundo par, $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$.
4. Cumple que la suma cíclica de sus últimos tres índices es cero, $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$.
5. Su suma antisimétrica es igual a cero, $R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0$.
6. Cumple con la identidad de Bianchi, $\nabla_{[\lambda}R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$.

En muchas ocasiones, es útil considerar contracciones en el tensor de Riemann. Una de ellas se conoce con el nombre del tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (\text{IV.16})$$

Este tensor asociado a la conexión de Christoffel es simétrico,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (\text{IV.17})$$

Además, pueden realizarse todavía más contracciones. Una de las más importantes es la curvatura escalar o escalar de Ricci:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\nu\mu}. \quad (\text{IV.18})$$

Utilizando la identidad de Bianchi, puede demostrarse que:

$$\nabla^{\mu}R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_{\rho}R, \quad (\text{IV.19})$$

lo que motiva la definición del tensor de Einstein (Carroll, 2003):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (\text{IV.20})$$

que inmediatamente cumple con la identidad,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{IV.21})$$

El tensor de Einstein, el tensor de Ricci y la curvatura escalar son entidades de gran importancia en el análisis de la curvatura de una variedad. Es importante resaltar que todos estos aspectos describen la geometría intrínseca de la variedad, nunca se hace referencia a un espacio que la contenga.

Después de haber introducido estas las definiciones para cuantificar la curvatura, vale la pena concretar lo descrito con algunos ejemplos. El primero de ellos es la esfera unitaria S^2 (parametrizada en el capítulo anterior). La métrica de la esfera es:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (\text{IV.22})$$

es decir,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{bmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2(\theta)} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.23})$$

Para esta métrica, hay seis distintos símbolos de Christoffel: $\Gamma_{\theta\theta}^\theta, \Gamma_{\phi\theta}^\theta, \Gamma_{\phi\theta}^\phi, \Gamma_{\theta\theta}^\phi, \Gamma_{\phi\phi}^\theta, \Gamma_{\phi\phi}^\phi$, los dos símbolos restantes se obtienen por simetría: $\Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi$ y $\Gamma_{\phi\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\phi}^\theta$. Los símbolos pueden calcularse a partir de la ecuación IV.11:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\theta}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\theta g_{\theta\theta}) = 0, \\ \Gamma_{\phi\theta}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\phi g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\theta}) = 0, \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\theta}) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^\phi &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\theta\phi} + \partial_\theta g_{\phi\theta} - \partial_\phi g_{\theta\theta}) = 0, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_\phi g_{\phi\theta} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\theta g_{\phi\phi}) = -\sin(\theta)\cos(\theta), \\ \Gamma_{\phi\phi}^\phi &= \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\phi g_{\phi\phi}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Luego puede calcularse el tensor de Riemann para la esfera. Debido a que el tensor es anti-simétrico en sus dos últimos índices, sola hay ocho componentes del tensor que pueden ser distintas

de cero: $R^\theta_{\theta\theta\phi}$, $R^\theta_{\phi\theta\phi}$, $R^\phi_{\theta\theta\phi}$, $R^\phi_{\phi\theta\phi}$ y sus respectivas componentes antisimétricas.

$$\begin{aligned}
R^\theta_{\theta\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\theta} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\phi} \Gamma^\theta_{\phi\theta} - \Gamma^\theta_{\phi\theta} \Gamma^\theta_{\theta\theta} - \Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0, \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\phi} \Gamma^\theta_{\phi\theta} - \Gamma^\theta_{\phi\theta} \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \sin^2(\theta), \\
R^\phi_{\theta\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\phi_{\phi\theta} - \partial_\phi \Gamma^\phi_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta} - \Gamma^\phi_{\phi\theta} \Gamma^\phi_{\theta\theta} - \Gamma^\phi_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\theta\theta} = \frac{\cos^2(\theta) - 1}{\sin^2(\theta)} = -1, \\
R^\phi_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\phi_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\phi_{\theta\phi} + \Gamma^\phi_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\phi_{\theta\phi} \Gamma^\phi_{\phi\theta} - \Gamma^\phi_{\phi\theta} \Gamma^\theta_{\theta\phi} - \Gamma^\phi_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\theta\theta} = 0.
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

Las cuatro componentes del tensor de Ricci se obtienen haciendo una contracción del tensor de Riemann. Debido a que el tensor es simétrico, solo hay tres componentes independientes: $R_{\theta\theta}$, $R_{\theta\phi}$ y $R_{\phi\phi}$

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= R^\phi_{\theta\phi\theta} = 1, \\
R_{\theta\phi} &= R^\theta_{\theta\theta\phi} = 0, \\
R_{\phi\phi} &= R^\theta_{\phi\theta\phi} = \sin^2(\theta).
\end{aligned} \tag{IV.26}$$

Luego, el escalar de Ricci para la esfera es:

$$R = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} = 1 + 1 = 2 \tag{IV.27}$$

Es necesario resaltar que el escalar de Ricci resultó ser dos veces la curvatura gaussiana de la esfera; sin embargo, en el caso de superficies, este es un resultado general. Por último, pueden calcularse las componentes del tensor de Einstein, solo se consideran $G_{\theta\theta}$ y $G_{\phi\phi}$, porque en este caso el tensor es simétrico y diagonal.

$$\begin{aligned}
G_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - g_{\theta\theta} = 1 - 1 = 0, \\
G_{\phi\phi} &= R_{\phi\phi} - g_{\phi\phi} = \sin^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0.
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

Es decir, el tensor de Einstein es idénticamente cero en toda la esfera.

En geometría diferencial, es usual tener una métrica diagonal que solamente depende de una de las variables del sistema. El ejemplo anterior, es uno de estos casos. A continuación, se considera el sistema coordenado x^0, \dots, x^n que posee una métrica diagonal que solo depende de la última variable, es decir $g_{\nu\mu} = g_{\nu\mu}(x^n)$, es una matriz diagonal. Comenzamos calculando los símbolos de Christoffel $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ para esta métrica. Para el caso en que $\sigma < n$,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu}), \tag{IV.29}$$

pues la métrica es independiente de x^σ . Para obtener coeficientes no nulos, es necesario que $\nu = n$ o $\mu = n$; sin pérdida, tome $\mu = n$. Entonces,

$$\Gamma_{n\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}(\partial_n g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma n}) = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}(\partial_n g_{\nu\sigma}), \quad (\text{IV.30})$$

luego, por la forma de la métrica, $\nu = \sigma$ y los símbolos de Christoffel para $\sigma < n$ son:

$$\Gamma_{n\sigma}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}(\partial_n g_{\sigma\sigma}), \quad (\text{IV.31})$$

y sus respectivos símbolos simétricos. Para el caso donde $\sigma = n$, se tiene que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^n = \frac{1}{2}g^{nn}(\partial_\mu g_{n\nu} + \partial_\nu g_{n\mu} - \partial_n g_{\mu\nu}). \quad (\text{IV.32})$$

Si $\mu < n$, entonces

$$\Gamma_{\mu\nu}^n = -\frac{1}{2}g^{nn}(\partial_n g_{\mu\nu}), \quad (\text{IV.33})$$

y se tiene que $\mu = \nu$,

$$\Gamma_{\nu\nu}^n = -\frac{1}{2}g^{nn}(\partial_n g_{\nu\nu}). \quad (\text{IV.34})$$

Por último, si $\mu = n$, por la forma de $g_{\mu\nu}$, $\nu = n$, y el último símbolo de Christoffel es:

$$\Gamma_{nn}^n = \frac{1}{2}g^{nn}(\partial_n g_{nn}). \quad (\text{IV.35})$$

Continuamos con el cálculo del tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Considérese el caso de $\rho < n$ en la ecuación IV.15. Nótese que si $\rho \neq \nu$ y $\rho \neq \mu$ entonces el tensor de Riemann se anula. Debido a esto, sin pérdida, se tomará $\nu = \rho$, entonces:

$$R^\rho_{\sigma\mu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\rho n} \Gamma^n_{\mu\sigma}, \quad (\text{IV.36})$$

ahora si se supone que $\sigma \neq \mu$, dado que $\sigma \neq n$, con lo cual, el tensor de Riemann se anula. Entonces, solamente es necesario considerar los casos donde el tensor de Riemann tiene la forma $R^\rho_{\sigma\sigma\rho}$. Ahora se prosigue a calcular estas componentes. Para $\rho, \sigma < n$, los coeficientes están dados por la expresión,

$$R^\rho_{\sigma\sigma\rho} = -\Gamma^\rho_{\rho n} \Gamma^n_{\sigma\sigma}. \quad (\text{IV.37})$$

Si $\rho < n$ y $\sigma = n$ entonces los símbolos están dados por:

$$R^\rho_{nn\rho} = \partial_n \Gamma^\rho_{\rho n} + (\Gamma^\rho_{\rho n})^2 - \Gamma^\rho_{\rho n} \Gamma^n_{nn}. \quad (\text{IV.38})$$

Para el caso donde $\rho = n$, los coeficientes del tensor de Riemann son:

$$R^n_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^n_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^n_{\mu\sigma} + \Gamma^n_{\mu\mu} \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \Gamma^n_{\nu\nu} \Gamma^\nu_{\mu\sigma}. \quad (\text{IV.39})$$

Si se toma $\nu \neq n$ y $\mu \neq n$, entonces el tensor de Riemann se reduce a

$$R^n_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^n_{\mu\mu} \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \Gamma^n_{\nu\nu} \Gamma^\nu_{\mu\sigma}, \quad (\text{IV.40})$$

que puede ser distinto de cero solo si $\sigma = n$ y $\mu = \nu$, que en todo caso, es cero. Luego se toma sin pérdida, $\nu = \rho = n$. Por último, si se considera $\sigma \neq \mu$, entonces las componentes del tensor están dadas por:

$$R^n_{\sigma\mu n} = \partial_\mu \Gamma^n_{n\sigma}, \quad (\text{IV.41})$$

que se anula para cualquier caso donde $\mu \neq \sigma$. Por lo tanto, las componentes distintas de cero se dan en el caso donde $\sigma = \mu$. Finalmente, puede concluirse que todas las componentes no nulas de tensor de Riemann tienen la forma $R^\rho_{\sigma\sigma\rho}$ o se relacionan con esta forma por la antisimetría de los dos últimos índices en el tensor.

Para el caso donde $\rho = n$ y $\sigma < n$, los símbolos pueden calcularse con la expresión:

$$R^n_{\sigma\sigma n} = -\partial_n \Gamma^n_{\sigma\sigma} + \Gamma^n_{\sigma\sigma} \Gamma^n_{n\sigma} - \Gamma^n_{nn} \Gamma^n_{\sigma\sigma}. \quad (\text{IV.42})$$

Para $\rho = \sigma = n$ por antisimetría, el tensor se anula. Lo mismo ocurre cuando $\rho = \sigma$. El tensor de Ricci y el tensor de Einstein son diagonales y sus componentes están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$R_{\mu\mu} = -R^\lambda_{\mu\mu\lambda} \text{ y} \quad (\text{IV.43})$$

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\mu}. \quad (\text{IV.44})$$

Luego de haber deducido estas expresiones, se estudiarán dos espacios que tienen esta estructura: una métrica diagonal que solamente depende de una variable. Considere el segmento de línea dado por:

$$ds^2 = L^2 \left(-r^{2\lambda} dt^2 + r^2 (dx^1)^2 + r^2 (dx^2)^2 + \frac{dr^2}{r^2} \right), \quad (\text{IV.45})$$

o de forma equivalente,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -L^2 r^{2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{r^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.46})$$

Para simplificar la notación, se denotará $x^0 = t$ y $r = x^3$, formando un sistema de coordenadas x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Primero se calculará la conexión de Christoffel. Utilizando las ecuaciones IV.31 y IV.35, los primeros símbolos de la conexión son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{30}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2 r^{2\lambda}} \right) (2\lambda L^2 r^{2\lambda-1}) = \frac{\lambda}{r}, \\ \Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L^2 r^2} \right) (2L^2 r) = \frac{1}{r} = \Gamma_{32}^2, \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{L^2} \right) \left(\frac{-2L^2}{r^3} \right) = -\frac{1}{r}.\end{aligned}\tag{IV.47}$$

El resto de los símbolos se calculan a partir de la ecuación IV.34:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^3 &= \frac{-1}{2} \left(\frac{r^2}{L^2} \right) (-2\lambda L^2 r^{2\lambda-1}) = \lambda r^{2\lambda+1}, \\ \Gamma_{11}^3 &= \frac{-1}{2} \left(\frac{r^2}{L^2} \right) (2L^2 r) = -r^3 = \Gamma_{22}^3.\end{aligned}\tag{IV.48}$$

Habiendo calculado todos los símbolos de Christoffel, se prosigue con el tensor de Riemann. Primero se consideran las componentes que pueden calcularse a partir de la ecuación IV.37:

$$\begin{aligned}R^0_{110} &= \left(\frac{-\lambda}{r} \right) (-r^3) = \lambda r^2 = R^0_{220}, \\ R^1_{001} &= \left(\frac{-1}{r} \right) (\lambda r^{2\lambda+1}) = -\lambda r^{2\lambda} = R^2_{002}, \\ R^1_{221} &= \left(\frac{-1}{r} \right) (-r^3) = r^2 = R^2_{112}.\end{aligned}\tag{IV.49}$$

De la ecuación IV.38 se obtienen tres componentes adicionales,

$$\begin{aligned}R^0_{330} &= \frac{-\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{\lambda}{r^2} = \frac{\lambda^2}{r^2}, \\ R^1_{331} &= \frac{-1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} = R^2_{332},\end{aligned}\tag{IV.50}$$

y de la ecuación IV.42 se obtienen las últimas tres componentes no nulas del tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}R^3_{003} &= -(\lambda)(2\lambda + 1)r^{2\lambda} + \frac{\lambda^2 r^{2\lambda+1}}{r} + \frac{\lambda r^{2\lambda+1}}{r} = -\lambda^2 r^{2\lambda}, \\ R^3_{113} &= 3r^2 - \frac{r^3}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{r^3}{r} = r^2 = R^3_{223}.\end{aligned}\tag{IV.51}$$

El tensor de Ricci se obtiene a partir de la ecuación IV.43:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \lambda r^{2\lambda} + \lambda r^{2\lambda} + \lambda^2 r^{2\lambda} = r^{2\lambda}(2 + \lambda)\lambda, \\ R_{11} &= -\lambda r^2 - 2r^2 = -r^2(2 + \lambda) = R_{22}, \\ R_{33} &= -\frac{\lambda^2}{r^2} - \frac{2}{r^2} = -\frac{(2 + \lambda^2)}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

La curvatura escalar es:

$$R = \frac{r^{2\lambda(2+\lambda)\lambda}}{L^2 r^{2\lambda}} - \frac{2r^2(2 + \lambda)}{L^2 r^2} - \frac{r^2(2 + \lambda^2)}{L^2 r^2} = -\frac{2\lambda^2 + 4\lambda + 6}{L^2}. \quad (\text{IV.53})$$

Luego, el tensor de Einstein para esta métrica es:

$$\begin{aligned} G_{00} &= r^{2\lambda}\lambda(2 + \lambda) - \frac{(2\lambda^2 + 4\lambda + 6)(L^2 r^{2\lambda})}{2L^2} = -3r^{2\lambda}, \\ G_{11} &= -r^2(2 + \lambda) + \frac{(2\lambda^2 + 4\lambda + 6)(L^2 r^2)}{2L^2} = r^2(\lambda^2 + \lambda + 1) = G_{22}, \\ G_{33} &= -\frac{(2 + \lambda)}{r^2} + \frac{(2\lambda^2 + 4\lambda + 6)(L^2)}{2L^2 r^2} = \frac{2\lambda + 1}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

En el último ejemplo del capítulo, se considera la métrica dada por el segmento de línea:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \quad (\text{IV.55})$$

con η la métrica de Minkowski. Para simplificar la notación, se considera $z = x^4$. La métrica correspondiente es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{-L^2}{z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.56})$$

Los símbolos de Christoffel pueden calcularse utilizando las ecuaciones IV.31, IV.35 y IV.34.

$$\begin{aligned} \Gamma_{40}^0 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{L^2} \right) \left(\frac{2L^2}{z^3} \right) = -\frac{1}{z}, \\ \Gamma_{4i}^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{L^2} \right) \left(-\frac{2L^2}{z^3} \right) = -\frac{1}{z}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \Gamma_{ii}^4 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{L^2} \right) \left(-\frac{2L^2}{z^3} \right) = \frac{1}{z}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

Las componentes del tensor de Riemann están dadas por las ecuaciones IV.37, IV.38 y IV.42:

$$\begin{aligned}
 R^j_{ij} &= -\left(-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 0, 1, 2, 3, \\
 R^j_{00j} &= -\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}, \quad j = 1, 2, 3, \\
 R^4_{ii4} &= \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z}\right) - \left(-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
 R^j_{44j} &= \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) - \left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
 R^4_{004} &= \frac{-1}{z^2} + \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) - \left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}, \\
 R^0_{440} &= \frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) - \left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}.
 \end{aligned} \tag{IV.58}$$

Luego pueden calcularse las componentes del tensor de Ricci,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -\left(-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{4}{z^2}, \\
 R_{ii} &= -\left(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) = -\frac{4}{z^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\
 R_{44} &= -\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2}\right) = -\frac{4}{z^2}.
 \end{aligned} \tag{IV.59}$$

El escalar de Ricci para esta métrica es:

$$R = -\frac{4z^2}{L^2z^2} - \frac{16z^2}{L^2z^2} = -\frac{20}{L^2}. \tag{IV.60}$$

Finalmente, se calcula el tensor de Einstein,

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \frac{4}{z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{20}{L^2}\right)\left(\frac{L^2}{z^2}\right) = -\frac{6}{z^2}, \\
 G_{ii} &= -\frac{4}{z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{20}{L^2}\right)\left(\frac{L^2}{z^2}\right) = \frac{6}{z^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{IV.61}$$

V. INMERSIONES Y GEOMETRÍA EXTRÍNSECA

Considérese un mapa $\gamma : N \rightarrow M$ entre variedades diferenciables N y M que mapea un elemento $u^i \in N$ a un elemento $x^\mu(u^i) \in M$. Se dice que el mapa γ es una inmersión si es diferenciable y cumple con que su derivada es inyectiva en todo punto. Como ejemplo, considérese la curva inmersa en el espacio \mathbb{R}^3 dada por el mapa $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

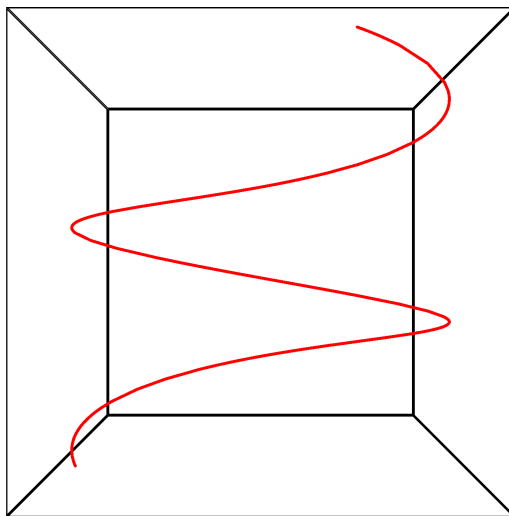
$$\gamma(s) = (\alpha \cos s, \alpha \sin s, s), \quad (\text{V.1})$$

o de forma equivalente:

$$\begin{aligned} x^1 &= \alpha \cos s \\ x^2 &= \alpha \sin s \\ x^3 &= s. \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Este mapa corresponde a la parametrización de una hélice (Figura V.1).

Figura V.1: Hélice inmersa en \mathbb{R}^3



En el Capítulo IV, se describió la geometría de distintos espacios a partir de su métrica, sin necesidad de considerar que el espacio estaba inmerso en otro. La curvatura y torsión correspondían a propiedades intrínsecas, pues solamente eran una descripción local del espacio. No obstante, al momento de considerar una inmersión, es posible obtener más información sobre la variedad inmersa.

Como ejemplo considérese una variedad de dimensión uno, esta clase de variedades tienen un tensor de Riemann igual a cero, es decir no tienen curvatura. Sin embargo, al considerar el espacio inmerso en una dimensión mayor, es posible definir una curvatura extrínseca y obtener información acerca de la curva.

Para comenzar con la descripción geométrica de las inmersiones, es necesario definir algunos elementos geométricos. Para ello, se utiliza la notación de Fonda, Jejjala y Veliz-Osorio (2017). Los vectores tangentes se definen como:

$$t_i^\mu = \partial_i x^\mu, \quad (\text{V.3})$$

en esta notación, los índices escritos en letras latinas minúsculas corresponden a la numeración de los vectores tangentes $i = 1, 2, \dots, p$ donde p es la dimensión del espacio inmerso N ; por otra parte, los índices escritos con letras griegas corresponden a la dimensión d del espacio ambiente M , $\mu = 1, 2, \dots, d$. La métrica inducida h_{ij} del espacio inmerso se define a partir de los vectores tangentes y la métrica de $g_{\mu\nu}$ de M

$$h_{ij} = t_i^\mu t_j^\nu g_{\mu\nu}. \quad (\text{V.4})$$

Junto con esta métrica, es posible definir una derivada covariante intrínseca $\tilde{\nabla}_i$, a partir de la conexión de Levi-Civita. Esta derivada es compatible con h_{ij} :

$$\tilde{\nabla}_k h_{ij} = 0. \quad (\text{V.5})$$

Además de los p vectores t_i^μ es posible definir $d - p$ vectores n_A^μ tales que:

$$n_\mu^A t_i^\mu = 0, \quad (\text{V.6})$$

para toda A y para toda i . Estos vectores se conocen por el nombre de vectores normales, y pueden escogerse de tal forma que sean ortogonales entre sí y tengan una norma de magnitud uno,

$$\eta_{AB} = n_A^\mu n_B^\nu g_{\mu\nu}. \quad (\text{V.7})$$

η_{AB} es una matriz diagonal cuyas entradas son ± 1 . En estas ecuaciones, los índices escritos en letras latinas mayúsculas corresponden a la numeración de los vectores normales, $A, B = 1, 2, \dots, d - p$. La curvatura extínseca (o segunda forma fundamental) se define como:

$$K_{ij}^A = t_i^\nu \mathcal{D}_j n_\nu^A, \quad (\text{V.8})$$

donde la derivada direccional $\mathcal{D}_j \equiv t_j^\mu \nabla_\mu$. Adicionalmente, puede definirse una torsión extrínseca como:

$$T_i^{AB} = n^{A\nu} \mathcal{D}_j n_\nu^B. \quad (\text{V.9})$$

Hay que recordar que la curvatura y torsión definidas en el Capítulo IV son diferentes a la torsión y curvatura extrínseca dadas por las ecuaciones V.8 y V.9. Una de las propiedades de la torsión es que es antisimétrica con respecto a los índices A y B , esto se debe a la forma en que se definieron los vectores normales:

$$T_i^{AB} + T_i^{BA} = n^{A\nu} \mathcal{D}_i n_\nu^B + n^{B\nu} \mathcal{D}_i n_\nu^A = \mathcal{D}_i (n^{A\nu} n_\nu^B) = 0, \quad (\text{V.10})$$

donde se uso el hecho que los vectores n_A y n_B son ortonormales.

Para el caso de una curva en el espacio: $d = 3$ y $p = 2$, puede definirse una cantidad τ denominada torsión de la curva:

$$\tau = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} T^{AB}, \quad (\text{V.11})$$

y dado que la torsión es antisimétrica:

$$\tau = \frac{1}{2} T^{12} - \frac{1}{2} T^{21} = T^{12}. \quad (\text{V.12})$$

A. LA HÉLICE COMO EJEMPLO

Retomando el ejemplo de la espiral, se proseguirá a calcular su métrica inducida, su vector tangente, sus vectores normales, su curvatura y su torsión. Dado que la curva esta inmersa en \mathbb{R}^3

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.13})$$

además, $p = 1$ y $d = 3$, con lo cual i toma el valor de 1, $A = 1, 2$ y $\mu = 1, 2, 3$. Debido a esto, se dejará de escribir el índice correspondiente al vector tangente i . El vector tangente esta dado por:

$$\begin{aligned} t^1(s) &= -\alpha \sin s \\ t^2(s) &= \alpha \cos s \\ t^3(s) &= s. \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Normalizando el resultado anterior, el vector tangente unitario es:

$$\begin{aligned} t^1(s) &= \frac{-\alpha \sin s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ t^2(s) &= \frac{-\alpha \cos s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ t^3(s) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Teniendo el vector tangente, puede calcularse la métrica inducida h_{ij} . Debido a que solo hay un vector tangente, la métrica tiene solamente una componente:

$$\begin{aligned} h &= t^\mu t^\nu g_{\mu\nu} \\ &= t^\mu t_\mu \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Al momento de calcular los vectores normales, nos encontramos con la dificultad de que su definición tiene una ambigüedad, pues la respuesta no es única. En este caso, los vectores normales de la curva yacen sobre el plano cuyo vector normal es t^μ y cualquier base ortonormal de vectores de este plano es válida. Para lidiar con esta dificultad, primero se calcularán los vectores normales correspondientes al marco de Frenet-Serret y luego se aplicará una transformación a este marco de referencia para generalizar los resultados. El vector normal unitario \mathbf{n}^1 de este marco es:

$$\mathbf{n}^1 = \frac{\partial_s \mathbf{t}}{|\partial_s \mathbf{t}|} \quad (\text{V.17})$$

Con lo cual, el vector normal tiene componentes:

$$\begin{aligned} n^{11} &= \frac{-\alpha \cos s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ n^{12} &= \frac{-\alpha \sin s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ n^{13} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

normalizando el vector

$$\begin{aligned} n^{11} &= -\cos s \\ n^{12} &= -\sin s \\ n^{13} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.19})$$

Se prosigue a calcular el segundo vector normal \mathbf{n}^2 . En el marco de Frenet-Serret, este está dado por:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{t} \times \mathbf{n}^1, \quad (\text{V.20})$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}
 n^{21} &= \frac{\sin s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\
 n^{22} &= \frac{-\cos s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\
 n^{23} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}.
 \end{aligned} \tag{V.21}$$

Finalmente, una vez obtenidos los vectores normales y el vector tangente, es posible calcular la curvatura:

$$\begin{aligned}
 K^1 &= t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^1 \\
 &= t^3(t^1 \partial_3 n_1^1 + t^2 \partial_3 n_2^1 + t^3 \partial_3 n_3^1) \\
 &= \frac{1}{\alpha^2 + 1} \left(\frac{-\alpha \sin^2 s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} - \frac{\alpha \cos^2 s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \\
 &= \frac{-\alpha}{\alpha^2 + 1},
 \end{aligned} \tag{V.22}$$

donde se tomó ventaja del hecho que $x^3 = s$ y se tomó $n^{1\mu}(s) = n^{1\mu}(x^3)$. Para la segunda componente de la curvatura, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 K^2 &= t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^2 \\
 &= t^3(t^1 \partial_3 n_1^2 + t^2 \partial_3 n_2^2 + t^3 \partial_3 n_3^2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(\frac{-\alpha \sin s \cos s}{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha \cos s \sin s}{\alpha^2 + 1} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{V.23}$$

Falta calcular la torsión en este marco de referencia. Debido a que la torsión es antisimétrica, las componentes T^{11} y T^{22} son cero, además, $\tau = T^{12} = -T^{21}$, con lo cual, basta calcular la torsión de la curva:

$$\begin{aligned}
 \tau &= -T^{21} \\
 &= -t^\mu n^{2\nu} \partial_\mu n_\nu^1 \\
 &= -t^3(n^{21} \partial_3 n_1^1 + n^{22} \partial_3 n_2^1 + n^{23} \partial_3 n_3^1) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(\frac{\sin^2 s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} + \frac{\cos^2 s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\alpha^2 + 1}.
 \end{aligned} \tag{V.24}$$

Ahora se considerará lo que sucede con la curvatura y la torsión de la hélice cuando los vectores normales, dados por el marco de Frenet-Serret, se intercambian por otra base. Para ello, se conside-

ran nuevos vectores $\tilde{n}^{1\mu}, \tilde{n}^{2\mu}$ ortonormales, que cumplen con ser una base del plano tangente a t^μ . La relación entre las dos bases: $\{n^{1\mu}, n^{2\mu}\}$ y $\{\tilde{n}^{1\mu}, \tilde{n}^{2\mu}\}$ es una rotación por un ángulo θ (solamente se consideran bases derechas de \mathbb{R}^3). Los nuevos vectores normales pueden escribirse en términos de los vectores del marco de Frenet-Serret como:

$$\begin{aligned}\tilde{n}^{1\mu} &= n^{1\mu} \cos \theta + n^{2\mu} \sin \theta \\ \tilde{n}^{2\mu} &= -n^{1\mu} \sin \theta + n^{2\mu} \cos \theta.\end{aligned}\tag{V.25}$$

Las nuevas curvaturas \tilde{K}^1 y \tilde{K}^2 son

$$\begin{aligned}\tilde{K}^1 &= t^\mu t^\nu \partial_\mu \tilde{n}_\nu^1 \\ &= t^\mu t^\nu \partial_\mu (n_\nu^1 \cos \theta + n_\nu^2 \sin \theta) \\ &= t^\mu t^\nu \partial_\mu (n_\nu^1 \cos \theta) + t^\mu t^\nu \partial_\mu (n_\nu^2 \sin \theta).\end{aligned}\tag{V.26}$$

Antes de seguir simplificando, se tomará en cuenta la posibilidad de que θ sea una función del parámetro s , es decir $\theta = \theta(s)$. Con lo cual:

$$\begin{aligned}\partial_\mu (n_\nu^1 \cos \theta) &= \cos \theta \partial_\mu n_\nu^1 - n_\nu^1 \partial_\mu (\cos \theta), \\ \partial_\mu (n_\nu^2 \sin \theta) &= \sin \theta \partial_\mu n_\nu^2 + n_\nu^2 \partial_\mu (\sin \theta).\end{aligned}\tag{V.27}$$

con

$$\begin{aligned}\partial_\mu (\cos \theta) &= \frac{d}{d\theta} (\cos \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x^\mu} \\ &= -\sin \theta \partial_\mu \theta \\ \partial_\mu (\sin \theta) &= \frac{d}{d\theta} (\sin \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x^\mu} \\ &= \cos \theta \partial_\mu \theta.\end{aligned}\tag{V.28}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación V.26,

$$\begin{aligned}\tilde{K}^1 &= (t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^1) \cos \theta - \sin \theta t^\mu (t^\nu n_\nu^1) \partial_\mu \theta + \sin \theta t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^2 + \cos \theta t^\mu (t^\nu n_\nu^2) \partial_\mu \theta \\ &= K^1 \cos \theta + K^2 \sin \theta,\end{aligned}\tag{V.29}$$

recordando que el vector t^ν es ortogonal a los vectores normales. Para la segunda componente de la curvatura:

$$\begin{aligned}\tilde{K}^2 &= t^\mu t^\nu \partial_\mu \tilde{n}_\nu^2 \\ &= t^\mu t^\nu \partial_\mu (-n_\nu^1 \sin \theta + n_\nu^2 \cos \theta) \\ &= -\sin \theta t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^1 + \cos \theta t^\mu t^\nu \partial_\mu n_\nu^2 - t^\mu (t^\nu n_\nu^1) \partial_\mu (\sin \theta) + t^\mu (t^\nu n_\nu^2) \partial_\mu (\cos \theta) \\ &= -K_1 \sin \theta + K_2 \cos \theta.\end{aligned}\tag{V.30}$$

Se prosigue a calcular la nueva torsión. De nuevo, solamente es necesario la torsión de la curva, pues la torsión sigue siendo antisimétrica.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau} &= -\tilde{T}^{21} \\
&= -t^\mu \tilde{n}^{2\nu} \partial_\mu \tilde{n}_\nu^1 \\
&= -t^\mu (-\tilde{n}^{1\nu} \sin \theta + n^{2\nu} \cos \theta) \partial_\mu (n_\nu^1 \cos \theta + n_\nu^2 \sin \theta) \\
&= -t^\nu (-n^{1\nu} \sin \theta + n^{2\nu} \cos \theta) (\cos \theta \partial_\mu n_\nu^1 + n_\mu^1 \partial_\mu (\cos \theta) + \sin \theta \partial_\mu n_\nu^2 + n_\nu^2 \partial_\mu (\sin \theta)) \\
&= -\cos^2 \theta T^{21} + \sin^2 \theta T^{12} + t^\mu \sin \theta \partial_\mu (\cos \theta) - t^\mu \cos \theta \partial_\mu (\sin \theta) \\
&= \tau - (t^\mu \sin^2 \theta \partial_\mu \theta + t^\mu \cos^2 \theta \partial_\mu \theta) \\
&= \tau - t^\mu \partial_\mu \theta,
\end{aligned} \tag{V.31}$$

donde se utilizó la ortonormalidad de los vectores $n^{1\mu}$ y $n^{2\mu}$. La forma en que se transforma la torsión, permite encontrar un sistema de vectores normales tales que la torsión sea cero en todo punto. Para encontrar la función $\theta(s)$ que hace cero la torsión, basta desarrollar la expresión anterior.

Para el caso de la hélice:

$$t^\mu \partial_\mu \theta = \frac{\theta'(s)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}, \tag{V.32}$$

Haciendo $\tilde{\tau} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'(s)}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} &= -\frac{1}{\alpha^2 + 1}, \\
\Rightarrow \theta(s) &= -\frac{s}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} + c,
\end{aligned} \tag{V.33}$$

donde c es una constante. Este sistema se le conoce con el nombre de sistema Somba.

B. INVARIANZA DE GAUGE

En física, las simetrías juegan un papel importante, estas proporcionan una estructura que permite derivar las leyes de la naturaleza. Este resultado se resume en uno de los teoremas clave de la física: el teorema de Noether. Este establece que a cada simetría diferenciable en un sistema físico le corresponde una ley de conservación. El objetivo de esta sección es el de introducir un grupo importante de simetrías, las simetrías de gauge y resaltar su relación con la torsión extrínseca de una variedad inmersa en otra. Estas simetrías aparecen de forma natural en el electromagnetismo, por lo que el análisis comenzará a partir de las ecuaciones de Maxwell (ecs. II.29) que, por comodidad, se

reescriben a continuación:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} &= 4\pi \mathbf{J} \\
 \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\
 \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{V.34}$$

De la última ecuación, se deduce que existe una función vectorial \mathbf{A} tal que:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \tag{V.35}$$

Además, por la tercera ecuación,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \nabla \times \mathbf{A} = 0, \tag{V.36}$$

es decir

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0. \tag{V.37}$$

Con lo cual,

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \mathbf{A}, \tag{V.38}$$

pues el rotacional de un gradiente siempre es cero. El vector \mathbf{A} se denomina potencial vectorial magnético, mientras que φ se llama potencial eléctrico.

Este resultado establece que el campo eléctrico y el campo magnético pueden ser reescritos en términos de potenciales. No obstante, existe cierta libertad al momento de escoger cada potencial. Por ejemplo, el potencial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda, \tag{V.39}$$

donde $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, también es un potencial vectorial válido, pues

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Lambda) = \mathbf{B}. \tag{V.40}$$

En general, la transformación

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda \\
 \varphi' &= \varphi - \partial_t \Lambda,
 \end{aligned}
 \tag{V.41}$$

produce dos nuevos campos φ' y \mathbf{A}' que están asociados al mismo campo eléctrico y magnético que el generado por φ y \mathbf{A} . A esta libertad para escoger los potenciales se le conoce como libertad de gauge, y la transformación V.41 se llama transformación de gauge (Griffiths, 1999). Este grupo

de transformaciones está relacionado con el grupo especial ortogonal $SO(2)$ que corresponde al grupo de rotaciones de \mathbb{R}^2 y también se relaciona con el grupo de Lie $U(1)$, el grupo de matrices unitarias de dimensión uno. Ambos hechos se hacen evidentes cuando se considera la formulación lagrangiana del electromagnetismo.

Un campo complejo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ con carga e tiene el siguiente lagrangiano (Ryder, 1996):

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi(D^\mu\phi)^* - m^2\phi\phi^* - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (\text{V.42})$$

donde $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ se denomina el potencial vectorial electromagnético y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday (ec. II.28), que puede definirse en términos de A_μ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (\text{V.43})$$

El término $D_\mu\phi$ se conoce como derivada covariante de gauge y se define como (Ryder, 1996)

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi, \quad (\text{V.44})$$

la mayor motivación para definir esta derivada es que hace al lagrangiano invariante ante la transformación

$$\begin{aligned} \phi' &= e^{i\Lambda(x^\mu)}\phi \\ A'^\mu &= A^\mu + \partial^\mu\Lambda(x^\mu). \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

Que se conoce con el nombre de transformada de gauge de segundo tipo (Ryder, 1996). Para ver que el lagrangiano es invariante basta verificar dos cosas, la primera es

$$\begin{aligned} D_\mu\phi' &= D_\mu e^{i\Lambda}\phi \\ &= (\partial_\mu + ieA'_\mu)e^{i\Lambda}\phi \\ &= [\partial_\mu + ieA_\mu + ie(\partial_\mu\Lambda)]\phi e^{i\Lambda} \\ &= e^{i\Lambda}(\partial_\mu\phi + ieA_\mu)\phi - ie^{i\Lambda}\partial_\mu\Lambda + ie^{i\Lambda}\partial_\mu\Lambda \\ &= e^{-i\Lambda}D_\mu\phi \end{aligned} \quad (\text{V.46})$$

mientras que la segunda es

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial(A_\nu + \partial_\nu\Lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\Lambda) \\ &= F_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu\partial_\mu\Lambda \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

La transformación V.45 puede expresarse de forma geométrica. Recordando que el campo complejo ϕ tiene dos componentes ϕ_1, ϕ_2 , la transformación de gauge puede reescribirse como una rotación y es equivalente a:

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \phi_1 \cos \Lambda + \phi_2 \sin \Lambda, \\ \phi'_2 &= -\phi_1 \sin \Lambda + \phi_2 \cos \Lambda.\end{aligned}\tag{V.48}$$

Que corresponde a una rotación en el plano por un ángulo Λ . Esta transformación es análoga a la transformación que se hizo con la espiral para encontrar su curvatura y torsión extrínseca. En la teoría electromagnética, la derivada covariante se introdujo con el propósito de construir objetos que fuesen invariantes ante transformaciones de gauge, como es el caso del lagrangiano. En analogía con este resultado, es posible construir una derivada covariante de gauge para el vector V_j^C en el marco de la geometría diferencial a partir de la torsión extrínseca. El tipo de transformaciones a considerar son rotaciones en el plano normal, es decir:

$$V_j'^A = M^A_B V_j^B,\tag{V.49}$$

donde M^A_B es una matriz ortogonal,

$$\eta_{AB} M^A_C M^B_D = \eta_{CD}.\tag{V.50}$$

Además, se considerará el caso en donde M^A_B depende de los parámetros u^i de la variedad inmersa, $M^A_B = M^A_B(u^i)$. La derivada covariante intrínseca de este vector es:

$$\tilde{\nabla}_i M^A_B V_j^B = (\tilde{\nabla}_i M^A_B) V_j^B + (\tilde{\nabla}_i V_j^B) M^A_B\tag{V.51}$$

Sin embargo, se quisiera que la transformación fuera del tipo

$$\tilde{\nabla}_i M^A_B V_j^B = M^A_B \tilde{\nabla}_i V_j^B,\tag{V.52}$$

Por lo que se busca una derivada que si cumpla con esta ecuación. Como una motivación para resolver el problema, se investiga la forma en que la torsión se transforma si se hacen rotar los vectores normales n_μ^A

$$n_\mu'^C = M^C_B n_\mu^B,\tag{V.53}$$

luego

$$\begin{aligned}T_i'^{CD} &= t_i^\mu (M^C_A n^{A\nu}) \nabla_\mu (M^D_B n_\nu^B) \\ &= t_i^\mu M^C_A n^{A\nu} (\nabla_\mu M^D_B) n_\nu^B + t_i^\mu M^C_A n^{A\nu} M^D_B \nabla_\mu n_\nu^B \\ &= M^C_A M^D_B T_i^{AB} + \eta^{AB} t_i^\mu M^C_A \nabla_\mu M^D_B.\end{aligned}\tag{V.54}$$

Por último, para terminar de simplificar esta transformación, se observa que

$$\nabla_\mu M^D_B = \partial_\mu M^D_B, \quad (\text{V.55})$$

pues, dado que la matriz M^D_B no tiene índices correspondientes al espacio ambiente, la derivada covariante actúa sobre ella como con un escalar, y por definición, la derivada covariante de un escalar es igual a su derivada parcial. Luego, el producto:

$$t_i^\mu \partial_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad (\text{V.56})$$

Finalmente, la transformación es:

$$T_i^{CD} = M^C_A M^D_B T_i^{AB} + \eta^{AB} M^C_A \partial_i M^D_B, \quad (\text{V.57})$$

que se asemeja a la regla de transformación de una conexión. Recordando que la fórmula de la derivada covariante: $\nabla_\nu = \partial_\nu \omega_\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda$, se propone la forma de una derivada covariante de gauge a partir de la torsión

$$\tilde{\nabla}_i V_j^A + T_i^{AB} V_{Bj} = \tilde{\nabla}_i V_j^A + T_i^{AB} \eta_{BC} V_j^C, \quad (\text{V.58})$$

que se denotará con el símbolo $\tilde{D}_i^A{}_B V_j^B$ (Fonda, Jejjala y Veliz-Osorio, 2017). Para mostrar que esta es la derivada que se busca, hay que probar que se transforma adecuadamente,

$$\tilde{D}_i^A{}_B M^B{}_C V_j^C = M^A{}_C \tilde{D}_i^C{}_B V_j^B. \quad (\text{V.59})$$

La demostración comienza expandiendo el lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^A{}_B M^B{}_C V_j^C &= \tilde{\nabla}_i M^A{}_B V_j^B + T_i^{AB} \eta_{BC} M^C{}_D V_j^D \\ &= \tilde{\nabla}_i M^A{}_B V_j^B - T_i^{BA} \eta_{BC} M^C{}_D V_j^D. \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

expandimos cada uno de los términos por separado, primero

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i M^A{}_B V_j^B &= V_j^B \partial_i M^A{}_B + M^A{}_B \tilde{\nabla}_i V_j^B \\ &= V_j^C \partial_i M^A{}_C + M^A{}_C \tilde{\nabla}_i V_j^C. \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Por otro lado,

$$-T_i^{BA} \eta_{BC} M^C{}_D V_j^D = (M^A{}_E M^B{}_F T_i^{EF} - \eta^{EF} M^B{}_E \partial_i M^A{}_F) \eta_{BC} M^C{}_D V_j^D. \quad (\text{V.62})$$

Trabajando cada producto de forma separada,

$$\begin{aligned}
M^A{}_E M^B{}_F T_i{}^{EF} \eta_{BC} M^C{}_D V_j{}^D &= (\eta_{BC} M^C{}_D M^B{}_F) M^A{}_E T_i{}^{EF} V_j{}^D \\
&= M^A{}_E \eta_{DF} T_i{}^{EF} V_j{}^D \\
&= M^A{}_C \eta_{BD} T_i{}^{CB} V_j{}^D,
\end{aligned} \tag{V.63}$$

recordando que $M^A{}_C$ es una matriz ortogonal y renombrando índices. Simplificando el segundo término:

$$\begin{aligned}
-\eta^{EF} (\eta_{BC} M^B{}_E M^C{}_D) (\partial_i M^A{}_F) V_j{}^D &= -(\eta^{EF} \eta_{ED} V_j{}^D) (\partial_i M^A{}_F) \\
&= -V_j{}^F (\partial_i M^A{}_F) \\
&= -V_j{}^C \partial_i M^A{}_C,
\end{aligned} \tag{V.64}$$

sustituyendo en la ecuación V.60,

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_i{}^A{}_B M^B{}_C V_j{}^C &= V_j{}^C \partial_i M^A{}_C + M^A{}_C \tilde{\nabla}_i V_j{}^C + M^A{}_C \eta_{BD} T_i{}^{CB} V_j{}^D - V_j{}^C \partial_i M^A{}_C \\
&= M^A{}_C (\tilde{\nabla}_i V_j{}^C + T_i{}^{CB} \eta_{BD} V_j{}^D) \\
&= M^A{}_C \tilde{D}_i{}^C{}_B V_j{}^B,
\end{aligned} \tag{V.65}$$

Que es lo que se quería mostrar.

C. GENERALIZACIÓN DE LAS FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

En el ejemplo de una hélice en \mathbb{R}^3 , resultó que una de las componentes de la curvatura K^2 era igual a cero. No obstante, este es un resultado general para cualquier curva en \mathbb{R}^3 . Para mostrar esto basta recordar la definición del vector tangente y los vectores normales (ecs. V.17, V.20). De la primera ecuación, se concluye que el vector $\partial_s \mathbf{t}$ es paralelo al vector \mathbf{n}^1 , de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
\partial_s \mathbf{n}^2 &= \partial_s \mathbf{t} \times \mathbf{n}^2 + \mathbf{t} \times \partial_s \mathbf{n}^1 \\
&= \mathbf{t} \times \partial_s \mathbf{n}^1.
\end{aligned} \tag{V.66}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
K^2 &= t^\nu \mathcal{D}_s n_\nu^2 \\
&= t^\nu \partial_s n_\nu^2 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{V.67}$$

A partir de este resultado, surge la motivación de definir un marco de Frenet-Serret en espacios generales. Para cualquier espacio, el marco de Frenet-Serret se define como aquel marco en el cual la segunda componente de la curvatura K^2 es igual a cero. Es decir:

$$K^2 = t^\nu \mathcal{D}_s n_\nu^2 = 0. \quad (\text{V.68})$$

A partir de esta definición, es posible encontrar relaciones entre los diferentes vectores que caracterizan la curva. Por ejemplo, la derivada direccional (\mathcal{D}_s) del vector tangente puede escribirse en términos de la curvatura K^1 y el vector normal:

$$\mathcal{D}_s t^\nu = -K^1 n^{1\nu}, \quad (\text{V.69})$$

para ver esto, basta expandir el lado derecho de la ecuación, sabiendo que la derivada direccional del vector tangente es un vector, esta puede escribirse como una combinación lineal de \mathbf{t} , \mathbf{n}^1 y \mathbf{n}^2 , de hecho:

$$\mathcal{D}_s t^\nu = [(\mathcal{D}_s t^\alpha) t_\alpha] t^\nu + \sum_A [(\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^A] n^{A\nu}, \quad (\text{V.70})$$

pero $(\mathcal{D}_s t^\alpha) t_\alpha = 0$; pues, dado que $t^\alpha t_\alpha = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s(t^\alpha t_\alpha) &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) t_\alpha + (\mathcal{D}_s t_\alpha) t^\alpha \\ &= 2(\mathcal{D}_s t^\alpha) t_\alpha \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.71})$$

Además, $(\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^2$ también es cero, puesto que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_s(t^\alpha n_\alpha^2) \\ &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^2 + t^\alpha \mathcal{D}_s n_\alpha^2 \\ &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^2 + K^2 \\ &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^2. \end{aligned} \quad (\text{V.72})$$

Por último, basta considerar el término $(\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^1$, utilizando el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_s(t^\alpha n_\alpha^1) \\ &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^1 + t^\alpha \mathcal{D}_s n_\alpha^1 \\ &= (\mathcal{D}_s t^\alpha) n_\alpha^1 + K^1. \end{aligned} \quad (\text{V.73})$$

Lo que termina de demostrar la ecuación V.69. Ecuaciones análogas existen para la derivada direccional de los vectores normales, para el caso de \mathbf{n}^1 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_s n_\nu^1 &= [(\mathcal{D}_s n_\alpha^1) t^\alpha] t^\nu + \sum_A [(\mathcal{D}_s n_\alpha^1) n^{A\alpha}] n_\nu^A \\
 &= K^1 t_\nu + [(\mathcal{D}_s n_\alpha^1) n^{2\alpha}] n_\nu^2 \\
 &= K^1 t_\nu + T^{21} n_\nu^2 \\
 &= K^1 t_\nu - \tau n_\nu^2.
 \end{aligned} \tag{V.74}$$

En el caso de \mathbf{n}^2

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_s n_\nu^2 &= [(\mathcal{D}_s n_\alpha^2) t^\alpha] t^\nu + \sum_A [(\mathcal{D}_s n_\alpha^2) n^{A\alpha}] n_\nu^A \\
 &= [(\mathcal{D}_s n_\alpha^2) n^{1\alpha}] n_\nu^1 \\
 &= T^{12} n_\nu^1 \\
 &= \tau n_\nu^1.
 \end{aligned} \tag{V.75}$$

Estas tres ecuaciones (ecs. V.69, V.74, V.75) son la generalización de las fórmulas de Frenet-Serret. Para el caso del espacio euclidiano, las ecuaciones se reducen a:

$$\begin{aligned}
 \partial_s t^\mu &= -K^1 n^{1\mu} \\
 \partial_s n_\mu^1 &= K_\mu^1 - \tau n_\mu^2 \\
 \partial_s n_\mu^2 &= \tau n_\mu^1.
 \end{aligned} \tag{V.76}$$

De ahora en adelante, la torsión y curvatura correspondientes al marco de Frenet-Serret se denotan como: K_{FS} y τ_{FS} para diferenciarlas del resto de los marcos. A continuación se detalla una forma para encontrar los valores de τ_{FS} y K_{FS} a partir de un marco cualquiera $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$.

Sea un $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ un marco general con curvatura K^1, K^2 y torsión τ , la curvatura y torsión de Frenet-Serret están dadas por:

$$\begin{aligned}
 K_{FS}^2 &= K^A K_A, \\
 \tau_{FS} &= \tau - \frac{K^1 \partial_s K^2 - K^2 \partial_s K^1}{K_{FS}^2},
 \end{aligned} \tag{V.77}$$

la demostración de estas ecuaciones proviene del hecho que

$$K^A K_A, \quad \epsilon_{AB} K^A \tilde{D}_s^B K^C, \tag{V.78}$$

son cantidades invariantes. Para el marco de Frenet-Serret, las dos expresiones se reducen a K_{FS}^2 y $-\tau_{FS}K_{FS}^2$, para un marco arbitrario, la segunda expresión pasa a ser:

$$\epsilon_{AB}K^A\tilde{D}_s^B K^C = -\tau K_{FS}^2 + K^1\partial_s K^2 - K^2\partial_s K^1, \quad (\text{V.79})$$

igualando las expresiones se obtienen las ecuaciones V.77.

VI. GEOMETRÍA, ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO Y ANOMALÍAS

En este Capítulo se pretende dar un breve resumen de los conceptos clave en teoría conforme de campos en dos dimensiones, con el fin de motivar el estudio de curvas inmersas en variedades de tres dimensiones. La conexión que existe entre estos dos conceptos yace en la correspondencia AdS/CFT, la cual establece una equivalencia entre una teoría de relatividad general descrita en el espacio AdS_{d+1} y una teoría conforme, sin gravedad, de dimensión d . Esta correspondencia fue propuesta por primera vez por el físico Juan Maldacena (1999) y aunque siendo una conjetura, numerosos resultados, como el encontrado por Ryu y Takayanagi (2006), son indicios de su veracidad.

A. TEORÍA CONFORME DE CAMPOS

La teoría conforme de campos (CFT por sus siglas en inglés), es una teoría cuántica de campos que tiene como grupo de simetrías las transformaciones conformes. Es decir, transformaciones que, localmente, preservan el ángulo entre dos vectores. Esta teoría tiene importantes aplicaciones en teoría de cuerdas, materia condensada, mecánica estadística y es la base de la holografía cuántica. Una transformación $\varphi : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq M'$ de una variedad M a otra M' , se dice que es conforme si el tensor métrico se transforma de la siguiente forma:

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (\text{VI.1})$$

donde $x' = \varphi(x)$ (Blumhagen y Plauschinn, 2009).

Este trabajo, se limita al caso en donde $M = M'$ y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica del espacio plano. La ecuación VI.1 se reescribe entonces como:

$$\eta_{\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{VI.2})$$

La función positiva $\Lambda(x)$ se denomina factor de escala (Blumhagen y Plauschinn, 2009). Nótese que para $\Lambda(x) = 1$, las ecuaciones que cumplen esta relación son las transformaciones de Lorentz.

Es decir, que el grupo de Poincaré: conformado por traslaciones y rotaciones (tanto espaciales como espacio-temporales), esta contenido en el grupo de transformaciones conformes. A continuación, se buscan las restricciones que caracterizan a las transformaciones conformes; para ello, se considera la siguiente transformación infinitesimal:

$$x^{\rho'} = x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x), \quad (\text{VI.3})$$

donde se desprecian términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Sustituyendo esta transformación en VI.2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho'\sigma'} \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} &= \eta_{\rho'\sigma'} \delta_{\mu}^{\rho'} \delta_{\nu}^{\sigma'} + \eta_{\rho'\sigma'} \partial_{\mu} \epsilon^{\rho'} \delta_{\nu}^{\sigma'} + \eta_{\rho'\sigma'} \delta_{\mu}^{\rho'} \partial_{\nu} \epsilon^{\sigma'} \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\nu} \epsilon_{\mu} + \partial_{\mu} \epsilon_{\nu}), \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

despreciando términos de orden superior y utilizando la relación $\epsilon_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \epsilon^{\nu}$ en la última línea. Para que esta sea una transformación conforme, se necesita que:

$$\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu} = K(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{VI.5})$$

Condiciones para encontrar $K(x)$ pueden encontrarse manipulando esta expresión; por ejemplo, al calcular la traza:

$$\eta^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}) = K(x) \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}, \quad (\text{VI.6})$$

se encuentra que

$$\partial^{\mu} \epsilon_{\mu} = \frac{d}{2} K(x), \quad (\text{VI.7})$$

donde $d = \eta^{\mu}_{\mu}$ es la dimensión de la variedad M . Para el caso donde $M = \mathbb{R}^2$ con $\eta = \text{diag}(1, 1)$, la ecuación anterior se reduce a:

$$\partial_0 \epsilon_1 + \partial_1 \epsilon_0 = 0 \quad (\text{VI.8})$$

para $\mu \neq \nu$ y

$$\partial_1 \epsilon_1 - \partial_0 \epsilon_0 = 0, \quad (\text{VI.9})$$

para $\mu = \nu$. La estructura detrás de estas expresiones es idéntica a la estructura de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el contexto de análisis complejo. Lo cual motiva la complejificación de la teoría; por ello, se introducen las siguientes variables complejas:

$$\begin{aligned} z &= x^0 + ix^1, & \epsilon &= \epsilon^0 + i\epsilon^1, \\ \bar{z} &= x^0 - ix^1, & \bar{\epsilon} &= \epsilon^0 - i\epsilon^1. \end{aligned} \quad (\text{VI.10})$$

Las restricciones VI.8 y VI.9 implican que ϵ es una función holomorfa (analítica) en un conjunto abierto cercano a z . Utilizando esta nueva notación, la transformación VI.3 se reescribe como:

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z), \quad (\text{VI.11})$$

donde $f(z)$ es holomorfa en un abierto cercano a z . Además, la ecuación VI.2 pasa a ser:

$$ds^2 = dzd\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z}, \quad (\text{VI.12})$$

donde se uso el hecho que $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$. El factor de escala $\Lambda(x)$ pasa a ser $\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$.

1. El álgebra de Witt. Como se dedujo en las ecuaciones VI.8 y VI.9, para ser una transformación conforme, $\epsilon(z)$ debe ser una función holomorfa en un abierto cerca del punto z . No obstante, es razonable asumir que la función $\epsilon(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo, quizás solo a excepción de un número contable de puntos aislados, en donde $\epsilon(z)$ es singular. Esta clase de funciones se denominan funciones meromorfas (Blumenhagen y Plauschinn, 2009) y pueden ser expresadas mediante una serie de Laurent:

$$\begin{aligned} f(z) = z + \epsilon(z) &= z + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n (-z^{n+1}), \\ \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) &= \bar{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon}_n (-\bar{z}^{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

Con ϵ_n y $\bar{\epsilon}_n$ constantes. A cada uno de los términos que aparece en esta transformación, le corresponde un operador que lo genera. Para encontrar dicho operador, se considera el generador del operador T_L definido por:

$$T_L f(z) = f(z + L), \quad (\text{VI.14})$$

el generador de este operador puede encontrarse por medio de la serie de Taylor de $f(z + L)$:

$$f(z + L) = f(z) + f'(z)L + \dots = (1 + L\partial_z + \dots)f(z), \quad (\text{VI.15})$$

de esta ecuación, se deduce que el generador infinitesimal de traslaciones es el operador $L\partial_z$. Al remplazar L por $(-z^{n+1})$, se obtiene que los generadores de la transformación VI.13 son:

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}}. \quad (\text{VI.16})$$

Es importante notar que esta familia es infinita, lo que tendrá grandes implicaciones en el desarrollo de la teoría. Las relaciones de conmutación entre estos operadores forman lo que se conoce como el álgebra de Witt (Blumenhagen y Plauschinn, 2009):

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= (m - n)l_{m+n} \\ [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m - n)\bar{l}_{m+n} \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0. \end{aligned} \tag{VI.17}$$

Un problema a tomar en cuenta es que los operadores l_n y \bar{l}_n no están definidos en todo el plano complejo. En el punto $z = 0$, los operadores l_n son no singulares solo cuando $n \geq -1$. Además, para ciertos valores de n los operadores l_n se indefinen cuando $z \rightarrow \infty$. Esto se hace evidente cuando se realiza el cambio de variables $z = -1/w$,

$$l_n = - \left(\frac{1}{w} \right)^{n-1} \partial_w, \tag{VI.18}$$

donde se uso el hecho que $\partial_z = (-w)^2 \partial_w$. Al tomar el límite $w \rightarrow 0$, los únicos operadores no singulares son aquellos con $n \leq 1$. Tomando en cuenta ambas restricciones (en 0 y ∞), se obtiene que las transformaciones conformales que están definidas globalmente en $\mathbb{C} \cup \infty$ son aquellas generadas por los operadores l_{-1}, l_0, l_{+1} . Este conjunto de operadores genera transformaciones de la forma:

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \tag{VI.19}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ constantes tales que $ad - bc \neq 0$. Este grupo de transformaciones se conoce como el grupo de Möbius $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ y en él se encuentran las traslaciones ($z \rightarrow z + b$), rotaciones y dilataciones ($z \rightarrow az$), y las transformaciones conformes especiales ($z \rightarrow z/(cz + 1)$).

2. El álgebra de Virasoro . Este álgebra se define como una extensión central del álgebra de Witt. Una extensión central $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$, de un álgebra \mathfrak{g} por \mathbb{C} se caracteriza por las siguientes relaciones de conmutación (Blumenhagen y Plauschinn, 2009):

$$\begin{aligned} [\tilde{x}, \tilde{y}]_{\tilde{\mathfrak{g}}} &= [x, y]_{\mathfrak{g}} + cp(x, y), \\ [\tilde{x}, c]_{\tilde{\mathfrak{g}}} &= 0, \\ [c, c]_{\tilde{\mathfrak{g}}} &= 0, \end{aligned} \tag{VI.20}$$

con $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\mathfrak{g}}, x, y \in \mathfrak{g}, c \in \mathbb{C}$ y $p : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ una función bilineal. La función $p(x, y)$ puede determinarse a partir de la identidad de Jacobi, la cual establece que:

$$[\tilde{x}, [\tilde{y}, \tilde{z}]_{\tilde{\mathfrak{g}}}]_{\tilde{\mathfrak{g}}} + [\tilde{y}, [\tilde{z}, \tilde{x}]_{\tilde{\mathfrak{g}}}]_{\tilde{\mathfrak{g}}} + [\tilde{z}, [\tilde{x}, \tilde{y}]_{\tilde{\mathfrak{g}}}]_{\tilde{\mathfrak{g}}} = 0, \quad (\text{VI.21})$$

para todo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{\mathfrak{g}}$. Pidiendo que el álgebra de Virasoro cumpla con estas condiciones, se encuentra que:

$$p(x, y) = \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}. \quad (\text{VI.22})$$

Por lo tanto, el álgebra de Virasoro cumple con las siguientes relaciones de conmutación:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad (\text{VI.23})$$

donde c se conoce con el nombre de carga central. Para el caso de $m, n = -1, 0, 1$, el álgebra de Virasoro se reduce al de Witt. Lo que significa que los operadores L_{-1}, L_0, L_{+1} siguen siendo los generadores de las transformaciones conformes globales.

3. La expansión en producto de operadores , o OPE por sus siglas en inglés, establece que es lo que ocurre cuando dos operadores, definidos en una vecindad del plano complejo, se acercan uno a otro. La idea detrás de la expansión es que dos operadores que actúan sobre puntos cercanos pueden ser aproximados tanto como se quieran por operadores que pertenecen a uno solo de estos puntos. El resultado se resume en la siguiente ecuación (Blumenhagen y Plauschinn, 2009):

$$O_i(z, \bar{z})O_j(w, \bar{w}) = \sum C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w})O_k(w, \bar{w}), \quad (\text{VI.24})$$

donde $O_i(z, \bar{z})$ es un operador definido en un punto z del plano complejo y j, k, i recorren el conjunto de todos los operadores en la teoría conforme. Los coeficientes C_{ij}^k son funciones que dependen solamente de la separación entre los puntos. Una de las expansiones en producto de operadores más importantes es la expansión del tensor de estrés-energía en dos puntos diferentes de \mathbb{C} (Blumenhagen y Plauschinn, 2009):

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{c_L/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \\ \bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) &= \frac{c_R/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2} + \frac{\partial_{\bar{w}} \bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}} + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

Las constantes c_L y c_R se denominan cargas centrales y juegan un papel fundamental en teorías conformes. Estos números codifican información acerca de los grados de libertad de la teoría y

están relacionados con la energía de Casimir (la energía del estado basal) del sistema. Para lograr que la CFT sea consistente en espacios curvos, se requiere que $c_L = c_R$ sean iguales a la carga central del álgebra de Virasoro (Tong, 2012). Una teoría que no cumple esto, se dice que es una teoría conforme con anomalías gravitacionales (Castro *et al.*, 2014).

Cualquier teoría cuántica de campos puede acoplarse a un métrica de fondo $g_{\mu\nu}$, que actúa como una fuente del tensor de estrés-energía. No obstante, cuando una teoría presenta anomalías gravitacionales, este proceso no puede llevarse a cabo consistentemente. Existen dos formas en que la anomalía se hace presente al momento de generar el tensor de estrés-energía. La primera de ellas se expresa como una anomalía difeomórfica, en la cual el tensor de estrés-energía es simétrico pero no se conserva (Castro *et al.*, 2014):

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \frac{c_L - c_R}{96\pi} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma \Gamma_{\nu\beta}^\gamma, \quad (\text{VI.26})$$

La segunda forma en que la anomalía puede expresarse es como una anomalía de Lorentz, en la cual el tensor de estrés-energía se conserva pero no es simétrico (Castro *et al.*, 2014):

$$T_\mu - T_\nu = \frac{c_L - c_R}{48\pi} * R_{\mu\nu}, \quad (\text{VI.27})$$

donde $*R_{\mu\nu}$ es el dual de Hodge de la 2-forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\gamma\sigma} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta dx^\gamma \wedge dx^\sigma. \quad (\text{VI.28})$$

Ejemplos importantes de teorías físicas que presentan esta clase de anomalías son las teorías que tienen fermiones de Weyl (Iqbal y Wall, 2016).

B. ENTROPÍA DE ENTRELAZAMIENTO Y ANOMALÍAS GRAVITACIONALES

En esta sección, se pretende dar un breve resumen de los resultados obtenidos por Ryu y Takayanagi(2006), para el cálculo de la entropía de entrelazamiento cuántico, también conocida como entropía de von-Neumann. La entropía de von-Neumann de un subsistema A de un sistema cuántico conformado por dos subsistemas (A y B), esta dada por la expresión:

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A, \quad (\text{VI.29})$$

con,

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Phi\rangle \langle \Phi|. \quad (\text{VI.30})$$

Aquí, Tr_A y Tr_B significan que la traza se está tomando solamente sobre el espacio del sistema A o B respectivamente. La matriz de densidad de todo el sistema está dada por $\rho |\Phi\rangle \langle \Phi|$. De forma intuitiva, S_A puede pensarse como la entropía de un observador que solo tiene accesible la información del sistema A . En este caso, el subsistema B es análogo al interior de un hoyo negro, para un observador que se encuentra fuera de este (Ryu y Takayanagi, 2006).

Ryu y Takayanagi (2006) utilizaron la correspondencia AdS/CFT para calcular la entropía de entrelazamiento S_A en una teoría conforme en d dimensional. Para teorías en dos dimensiones, su prescripción establece que la entropía de una región espacial A está dada por

$$S = \frac{l}{4G_3}, \quad (\text{VI.31})$$

donde l es la longitud de la geodésica inmersa en AdS que tiene como frontera la frontera de la región espacial A y G_3 es la constante de Newton en tres dimensiones espacio-temporales. En años recientes Castro, *et al.* (2014) ampliaron el resultado de Ryu y Takayanagi a teorías conformes en dos dimensiones que presentan anomalías gravitacionales, i.e. $c_L \neq c_R$. Para esta clase de teorías, la entropía de entrelazamiento cuántico está dada por:

$$S = \int_{\Sigma} \left(m\sqrt{h} + \mathfrak{s}\tau \right) d\sigma, \quad (\text{VI.32})$$

donde m y τ cumplen con:

$$m = \frac{1}{4G_3}, \quad \mathfrak{s} = \frac{1}{4\mu G_3}, \quad (\text{VI.33})$$

donde μ es una constante real que está relacionada con las cargas centrales c_L y c_R :

$$c_L = \frac{3l}{2G_3} \left(1 - \frac{1}{\mu l} \right), \quad c_R = \frac{3l}{2G_3} \left(1 + \frac{1}{\mu l} \right), \quad (\text{VI.34})$$

con l una constante positiva. Nótese que para $c_L = c_R$ (correspondiente a una CFT sin anomalías) $\mu \rightarrow \infty$, lo que implica que $\mathfrak{s} = 0$, y la acción VI.32 se reduce a la acción de Ryu y Takayanagi, que corresponde a la longitud de la curva.

Para una curva parametrizada por longitud de arco, la integral VI.32 se reduce a

$$S = \int_{\Sigma} (m + \mathfrak{s}\tau) ds. \quad (\text{VI.35})$$

Esta expresión es una de las ecuaciones más importantes en este texto, ya que el objetivo del mismo es el de describir las curvas que extremizan este funcional en diferentes espacios (problema que se aborda en los capítulos siguientes). No obstante, primero es necesario encontrar las ecuaciones que restringen la forma de las curvas asociadas a este funcional. Castro, *et al.* (2014) encontraron que extremar el funcional VI.35 da origen a las ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon, que son las ecuaciones de movimiento de partículas giratorias en un espacio-tiempo curvo. Estas partículas reciben el nombre de aniones y sus ecuaciones de movimiento son (Fonda, Liska y Veliz-Osorio, 2017):

$$\mathcal{D}_s(\mathfrak{m} t^\lambda + t_\mu \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) = -\frac{1}{2} t^\nu \mathcal{S}^{\rho\sigma} R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} \quad (\text{VI.36})$$

$$\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\mu\nu} + t^\mu t_\sigma \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\nu\sigma} - t^\nu t_\sigma \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\mu\sigma} = 0,$$

con

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = -\mathfrak{s} \epsilon_{AB} n^{A\mu} n^{B\nu}. \quad (\text{VI.37})$$

A continuación, se calculan las proyecciones de estas ecuaciones sobre cada uno de los vectores del marco normal de la curva $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$, con el fin de reescribir estas restricciones utilizando únicamente términos geométricos. Se inicia con el desarrollo de la primera ecuación en VI.36:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s(\mathfrak{m} t^\lambda + t_\mu \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) &= \mathfrak{m} \mathcal{D}_s t^\lambda + (\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) + t_\mu \mathcal{D}_s^2 \mathcal{S}^{\lambda\mu} \\ &= -\frac{1}{2} t^\nu \mathcal{S}^{\rho\sigma} R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}, \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

Calculando las proyecciones del lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} t_\lambda \mathcal{D}_s t^\lambda &= 0 \\ \mathfrak{m} n_{1\lambda} \mathcal{D}_s t^\lambda &= -\mathfrak{m} \eta_{1A} K^A = -\mathfrak{m} K_1 \\ \mathfrak{m} n_{2\lambda} \mathcal{D}_s t^\lambda &= -\mathfrak{m} \eta_{2A} K^A = -\mathfrak{m} K_2, \end{aligned} \quad (\text{VI.39})$$

para la segunda parte de la expresión

$$(\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) = -\mathfrak{s}(\mathcal{D}_s t_\mu) \left[(\mathcal{D}_s n^{1\lambda}) n^{2\mu} + n^{1\lambda} (\mathcal{D}_s n^{2\mu}) - (\mathcal{D}_s n^{1\mu}) n^{2\lambda} - n^{1\mu} (\mathcal{D}_s n^{2\lambda}) \right]. \quad (\text{VI.40})$$

Analizando las proyecciones de esta expresión:

$$\begin{aligned} t_\lambda (\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) &= -\mathfrak{s} (-K^1 K^2 + K^2 K^1) = 0 \\ n_{1\lambda} (\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) &= -\mathfrak{s} (-K^1 \eta_{11} T^{12} + \eta_{11} T^{12} K^1) = 0 \\ n_{2\lambda} (\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\lambda\mu}) &= -\mathfrak{s} (-\eta_{22} T^{21} K^2 + K^2 \eta_{22} T^{21}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.41})$$

con lo cual, se concluye que el vector $(\mathcal{D}_s t_\mu)(\mathcal{D}_s S^{\lambda\mu}) = 0$. Luego, se analizan las proyecciones del último término:

$$t_\mu \mathcal{D}_s^2 S^{\lambda\mu} = -\mathfrak{s} t_\mu \left[(\mathcal{D}_s^2 n^{1\lambda}) n^{2\mu} + 2(\mathcal{D}_s n^{1\lambda})(\mathcal{D}_s n^{2\mu}) + n^{1\lambda} \mathcal{D}_s^2 n^{2\mu} - (\mathcal{D}_s^2 n^{1\mu}) n^{2\lambda} - 2(\mathcal{D}_s n^{1\mu})(\mathcal{D}_s n^{2\lambda}) - n^{1\mu} \mathcal{D}_s^2 n^{2\lambda} \right], \quad (\text{VI.42})$$

proyectando sobre la base:

$$\begin{aligned} t_\lambda t_\mu \mathcal{D}_s^2 S^{\lambda\mu} &= -\mathfrak{s} (2K^2 K^1 - 2K^1 K^2) = 0 \\ n_{1\lambda} t_\mu \mathcal{D}_s^2 S^{\lambda\mu} &= -\mathfrak{s} (\partial_s K^2 + T^{21} \eta_{11} K^1) = -\mathfrak{s} \tilde{D}_s^2 C K^C \\ n_{2\lambda} t_\mu \mathcal{D}_s^2 S^{\lambda\mu} &= -\mathfrak{s} (-\partial_s K^1 - T^{12} \eta_{22} K^2) = \mathfrak{s} \tilde{D}_s^1 C K^C \end{aligned} \quad (\text{VI.43})$$

Ahora, se analiza el lado derecho de la ecuación:

$$-\frac{1}{2} t^\nu S^{\rho\sigma} R^\lambda_{\nu\rho\sigma} = \mathfrak{s} R^\lambda_{\nu\rho\sigma} t^\nu n^{1\rho} n^{2\sigma}. \quad (\text{VI.44})$$

La proyección sobre t_λ da como resultado cero pues el tensor de Riemann es antisimétrico. La proyección sobre $n_{A\lambda}$ da,

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} R_{\lambda\nu\rho\sigma} n_A^\lambda t^\nu n^{1\rho} n^{2\sigma} &= -\mathfrak{s} R_{\nu\lambda\rho\sigma} t^\nu n_A^\lambda n^{1\rho} n^{2\sigma} \\ &= \mathfrak{s} R_{\nu\sigma\lambda\rho} t^\nu n^{2\sigma} n_A^\lambda n^{1\rho} - \mathfrak{s} R_{\nu\rho\lambda\sigma} t^\nu n^{1\rho} n_A^\lambda n^{2\sigma} \\ &= -\mathfrak{s} (R_s^1 A^2 - R_s^2 A^1) \\ &= -\mathfrak{s} \epsilon_{DE} R_s^D A^E, \end{aligned} \quad (\text{VI.45})$$

donde se uso el hecho que $R_{\nu\sigma\lambda\rho} - R_{\nu\rho\lambda\sigma} = -R_{\nu\lambda\rho\sigma}$. En esta expresión, la notación $R_s^D A^E$ indica índices contraídos con vectores normales (letras latinas mayúsculas) o tangentes (en este caso el subíndice s). Uniendo todas las proyecciones se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{m} K_1 - \mathfrak{s} \tilde{D}_s^2 C K^C &= -\mathfrak{s} \epsilon_{DE} R_s^D A^E \\ -\mathfrak{m} K_2 + \mathfrak{s} \tilde{D}_s^1 C K^C &= -\mathfrak{s} \epsilon_{DE} R_s^D A^E, \end{aligned} \quad (\text{VI.46})$$

de forma más compacta:

$$\mathfrak{m} K_A + \mathfrak{s} \left(\epsilon_{AB} \tilde{D}_s^B C K^C - \epsilon_{DE} R_s^D A^E \right) = 0. \quad (\text{VI.47})$$

Las cuales son las ecuaciones de forma de las curvas que extremizan el funcional VI.35. La tercera ecuación, correspondiente a la proyección sobre t_λ da como resultado $0 = 0$. Además, la segunda

de las ecuaciones en VI.36 se satisface automáticamente al considerar \mathfrak{s} como una constante. Esto puede verificarse desarrollando cada uno de los términos en la ecuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\mu\nu} &= -\mathfrak{s}(K^1 t^\mu n^{2\nu} + K^2 t^\nu n^{1\mu} - K^1 t^\nu n^{2\mu} - K^2 t^\mu n^{1\nu}) \\ t^\mu t_\sigma \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\nu\sigma} &= -\mathfrak{s}(K^2 t^\mu n^{1\nu} - K^1 t^\mu n^{2\nu}) \\ -t^\nu t_\sigma \mathcal{D}_s \mathcal{S}^{\mu\sigma} &= -\mathfrak{s}(-K^2 t^\nu n^{1\mu} + K^1 t^\nu n^{2\mu}). \end{aligned} \quad (\text{VI.48})$$

En tres dimensiones, el tensor de Riemann puede obtenerse a partir del tensor de Ricci de la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - R_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}R(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (\text{VI.49})$$

utilizando esta relación:

$$R_s^D A^E = R_{sA}g^{DE} - R_s^E g^D_A + R^{DE}g_{sA} - R^D A g_s^E - \frac{1}{2}R(g_s^A g^{DE} - g_s^E g^D_A); \quad (\text{VI.50})$$

sin embargo,

$$g^{DE} = \eta^{DE}, \quad g_{sA} = g_s^A = 0, \quad g^D_A = \delta^D_A, \quad (\text{VI.51})$$

por lo tanto

$$\epsilon_{DE}R_s^D A^E = \epsilon_{DE}\eta^{DE}R_{sA} - \epsilon_{DE}R_s^E \delta^D_A = -\epsilon_{AE}R_s^E, \quad (\text{VI.52})$$

luego, las ecuaciones VI.47 se reescriben como:

$$m K_A + \mathfrak{s} \epsilon_{AB}(\tilde{D}_s^B K^C + R_s^B) = 0. \quad (\text{VI.53})$$

El siguiente capítulo se centra en construir las curvas en el espacio euclidiano, la 3-esfera, el espacio hiperbólico y el espacio anti de Sitter. Todos estos espacios cumplen que:

$$R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}, \quad (\text{VI.54})$$

con lo cual,

$$R_s^B = R_{\mu\nu} t_s^\mu n^{\nu B} = \alpha g_{\mu\nu} t_s^\mu n^{\nu B} = 0, \quad (\text{VI.55})$$

por lo tanto, para estos espacios, las ecuaciones de forma se reducen a:

$$m K_A + \mathfrak{s} \epsilon_{AB} \tilde{D}_s^B K^C = m K_A + \mathfrak{s} \epsilon_{AB}(\partial_s K^B + T^{BC} \eta_{CD} K^D) = 0. \quad (\text{VI.56})$$

Para el marco de Frenet-Serret ($K^2 = 0$), las ecuaciones se simplifican

$$\begin{aligned} m K_{FS} - \mathfrak{s} \tau_{FS} K_{FS} &= 0, \\ \mathfrak{s} \partial_s K_{FS} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.57})$$

Expresadas de esta forma, es fácil observar que las soluciones son curvas con:

$$K_{FS} = cte. > 0, \quad \tau_{FS} = \frac{m}{s}; \quad (\text{VI.58})$$

es decir, son hélices con torsión y curvatura constante. También puede ocurrir el caso donde $K_{FS} = 0$, en este caso las soluciones son geodésicas.

VII. CURVAS EN FORMAS ESPACIALES

En el Capítulo V se definió el concepto de curvatura mediante el tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. No obstante, existen otros objetos geométricos que describen la geometría de una variedad y uno de los más importantes es la curvatura seccional. Sea un plano π contenido en el espacio T_pM de una variedad M , $\dim(M) \geq 2$, la curvatura seccional de π se define como (do Carmo, 2003):

$$K(\pi) = -\frac{\langle R(V, W)V, W \rangle}{|V|^2|W|^2 - \langle V, W \rangle^2}, \quad (\text{VII.1})$$

donde $\{V_1, V_2\}$ son una base de π . El valor curvatura seccional independe de la base $\{V_1, V_2\}$ que se escoja para el plano π . La ecuación anterior, hace uso del tensor de Riemann como un mapa multilinear que tiene como argumento tres vectores y da como resultado un cuarto vector. En notación tensorial, esta ecuación se reescribe como:

$$K(\pi) = K(V, W) = -\frac{R_{\rho\sigma\mu\nu}Y^\rho X^\sigma X^\mu Y^\nu}{X^\mu X_\mu Y^\mu Y_\mu - X^\mu Y_\mu}. \quad (\text{VII.2})$$

Un resultado importante en geometría diferencial, establece que si se conoce la curvatura seccional de todos los planos tangentes en una variedad M entonces es posible determinar de manera única el tensor de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ de M .

En esta sección se estudiarán espacios que tienen curvatura seccional K constante. Dichos espacios se denominan formas espaciales (do Carmo, 2003). En particular, se estudiarán: el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , la 3-esfera \mathbb{S}^3 , el espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 y el espacio anti de Sitter AdS_3 . Cada uno de estos espacios se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\} \\ \mathbb{S}^3 &= \{(\psi, \theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) : ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\} \\ \mathbb{H}^3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0 \text{ y } ds^2 = \frac{1}{z^2} (dx^2 + dy^2 + L^2 dz^2)\} \\ \text{AdS}_3 &= \{(t, x, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0 \text{ y } ds^2 = \frac{1}{z^2} (-dt^2 + dx^2 + L^2 dz^2)\}. \end{aligned} \quad (\text{VII.3})$$

La curvatura seccional de cada espacio puede obtenerse a partir de la ecuación VII.2. Considerando

la base $\{\partial_\alpha, \partial_\beta\}$, $\alpha \neq \beta$, del plano $\pi_{\alpha\beta}$,

$$K_{\alpha\beta} = K(\pi_{\alpha\beta}) = -\frac{R_{\beta\alpha\alpha\beta}}{g_{\alpha\alpha} - g_{\alpha\beta}}. \quad (\text{VII.4})$$

Para el caso del espacio euclidiano, $R_{\beta\alpha\alpha\beta} = 0$, por lo que $K_{\alpha\beta} = 0$; para la tres esfera, $K_{\alpha\beta} = 1$, y para el caso del espacio hiperbólico y anti de Sitter, $K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{L^2}$.

Una de las características más importantes que tienen en común estos espacios es que son espacios maximalmente simétricos (EMS); esto es, su grupo de isometrías es de dimensión $n(n+1)/2$, el máximo posible. (una isometría es un mapa que preserva distancias). Un resultado importante en geometría diferencial es que una variedad es EMS si y solo si la curvatura escalar R es constante y además, el tensor de Riemann es de la forma (do Carmo, 2003):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}). \quad (\text{VII.5})$$

Para el caso de \mathbb{E}^3 , la ecuación anterior se reduce al caso $0 = 0$. Para los otros tres casos, basta con calcular el lado derecho y el lado izquierdo de la ecuación VII.5 por separado y observar que los resultados coinciden. Por ejemplo, para la 3-esfera se obtiene que:

$$\begin{aligned} R_{1221} &= -\sin^2(\psi) & R_{2332} &= -\sin^2(\theta)\sin^4(\psi) \\ R_{1331} &= -\sin^2(\theta)\sin^2(\psi) & R_{3131} &= \sin^2(\theta)\sin^2(\psi) \\ R_{2121} &= \sin^2(\psi) & R_{3232} &= \sin^2(\theta)\sin^4(\psi), \end{aligned} \quad (\text{VII.6})$$

mientras que el lado derecho de la ecuación es (con $R = 6$ y $n = 3$):

$$\begin{aligned} g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22} &= -\sin^2(\psi) & g_{23}g_{32} - g_{22}g_{33} &= -\sin^2(\theta)\sin^4(\psi) \\ g_{13}g_{31} - g_{11}g_{33} &= -\sin^2(\theta)\sin^2(\psi) & g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} &= \sin^2(\theta)\sin^2(\psi) \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} &= \sin^2(\psi) & g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} &= \sin^2(\theta)\sin^4(\psi). \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

Este capítulo, tiene como objetivo construir las curvas con torsión y curvatura constante (hélices) en cada uno de estos espacios. La forma en que se construyen estas hélices hará uso de las isometrías de cada espacio. Se comenzará con la construcción de hélices en el espacio más sencillo: el espacio euclidiano.

En las secciones siguientes, se hará uso del marco de Frenet-Serret definido por las ecuaciones V.69, V.74 y V.75 definidas en el Capítulo V. Para simplificar la notación, en este capítulo, se hace

la siguiente correspondencia entre símbolos:

$$\begin{aligned} -K_{FS} &\rightarrow \kappa \\ -\tau_{FS} &\rightarrow \tau \end{aligned} \tag{VII.8}$$

A. CURVAS EN EL ESPACIO EUCLIDIANO

En el Capítulo V se analizó una hélice descrita con la parametrización V.2 con la intención de presentar los objetos relacionados con la geometría extrínseca de una variedad inmersa en otra. En esta sección, se presenta una forma novedosa de construir la parametrización V.2 utilizada por Adachi, Maeda & Udagawa (2002) para hélices en \mathbb{E}^3 , \mathbb{S}^3 , y \mathbb{H}^3 . Luego, este método se generalizará para el caso de AdS_3 . En \mathbb{E}^3 , la idea es generar la hélice a partir de las isometrías del espacio. Se comienza estudiando las ecuaciones de Frenet-Serret para una curva $\gamma(s)$ parametrizada por longitud de arco ($\mathbf{t} = \partial_s \gamma(s)$):

$$\begin{aligned} \partial_s \mathbf{t} &= \kappa \mathbf{n}^1 \\ \partial_s \mathbf{n}^1 &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{n}^2 \\ \partial_s \mathbf{n}^2 &= -\tau \mathbf{n}^1, \end{aligned} \tag{VII.9}$$

donde los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ conforman el marco de Frenet-Serret. Estas tres ecuaciones pueden reducirse a una sola ecuación diferencial:

$$\gamma^{(4)} + (\kappa^2 + \tau^2)\ddot{\gamma} = 0, \tag{VII.10}$$

donde $\dot{\gamma} \equiv \partial_s \gamma$. Las soluciones a esta ecuación diferencial son una combinación lineal de las funciones $\{\cos(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s), \sin(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s), s, 1\}$. La forma en que se construye la hélice es considerando la siguiente isometría aplicada al un punto $(a, 0, 0) \in \mathbb{E}^3$:

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) & -\sin(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) & 0 \\ \sin(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) & \cos(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau s / \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \end{pmatrix}, \tag{VII.11}$$

utilizando la restricción que $|\mathbf{t}| = 1$:

$$|\mathbf{t}|^2 = (\kappa^2 + \tau^2)a^2 + \frac{\tau^2}{\kappa^2 + \tau^2} = 1, \tag{VII.12}$$

con lo cual, se obtiene que

$$a = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \tau^2}. \tag{VII.13}$$

Finalmente, la hélice tiene la forma:

$$\gamma(s) = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) \\ \sin(\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}s) \\ \frac{\tau s}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.14})$$

B. CURVAS EN LA 3-ESFERA

En el capítulo V, se encontró que para cualquier curva inmersa en una variedad de dimensión tres, existe un marco de vectores ortonormales $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ tales que:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s t^\nu &= \kappa n^{1\nu} \\ \mathcal{D}_s n^{1\nu} &= -\kappa t^\nu + \tau n^{2\nu} \\ \mathcal{D}_s n^{2\nu} &= -\tau n^{1\nu}, \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

La parte izquierda de estas ecuaciones puede desarrollarse en términos de los símbolos de Christoffel asociados a \mathbb{S}^3 , las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} \partial_s t^\nu &= \kappa n^{1\nu} - t^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu t^\lambda \\ \partial_s n^{1\nu} &= -\kappa t^\nu + \tau n^{2\nu} - t^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu n^{1\lambda} \\ \partial_s n^{2\nu} &= -\tau n^{1\nu} - t^\mu \Gamma_{\mu\lambda}^\nu n^{2\lambda}, \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

este es un sistema no lineal de nueve ecuaciones diferenciales. El cual es útil para mostrar la existencia de curvas con cualquier torsión y curvatura en \mathbb{S}^3 (y de hecho, en cualquier otro espacio); no obstante, resulta un método poco efectivo a la hora de encontrar las soluciones analíticas de las hélices. Para simplificar el problema, es conveniente considerar una definición alternativa de \mathbb{S}^3 y tomar el espacio como una inmersión en un espacio de dimensión mayor:

$$\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 : |\mathbf{x}|^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}. \quad (\text{VII.17})$$

Considerando esta inmersión, las ecuaciones VII.16 se simplifican y se reducen a:

$$\begin{aligned} \partial_s \mathbf{t} &= -\gamma + \kappa \mathbf{n}^1 \\ \partial_s \mathbf{n}^1 &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{n}^2 \\ \partial_s \mathbf{n}^2 &= -\tau \mathbf{n}^1, \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

Este marco es valido para cualquier función $\kappa(s)$ y $\tau(s)$; no obstante, solo se consideran curvas con τ y κ constantes. Resolviendo para γ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\gamma^{(4)}(s) + (\kappa^2 + \tau^2 + 1)\ddot{\gamma}(s) + \tau^2\gamma(s) = 0, \quad (\text{VII.19})$$

con lo cual, el problema de resolver un sistema de nueve ecuaciones no lineales se ha reducido al de resolver una sola ecuación diferencial lineal. Las soluciones a esta ecuación son una combinación lineal de las funciones $\{\cos(\alpha s), \sin(\alpha s), \cos(\beta s), \sin(\beta s)\}$ con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2} + \kappa^2 + \tau^2 + 1} \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2 + 1)^2 - 4\tau^2} + \kappa^2 + \tau^2 + 1}, \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

constantes. Para construir la hélice en \mathbb{S}^3 se considera la siguiente isometría aplicada a un punto $(a, 0, b, 0) \in \mathbb{R}^4$:

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha s) & -\sin(\alpha s) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha s) & \cos(\alpha s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta s) & -\sin(\beta s) \\ 0 & 0 & \sin(\beta s) & \cos(\beta s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\alpha s) \\ a \sin(\alpha s) \\ b \cos(\beta s) \\ b \sin(\beta s) \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.21})$$

Para ubicar esta hélice en la esfera \mathbb{S}^3 hay que normalizar $(a, 0, b, 0)$, es decir

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (\text{VII.22})$$

además, la derivada de la curva γ debe ser igual a uno, con lo cual:

$$(a\alpha)^2 + (b\beta)^2 = 1, \quad (\text{VII.23})$$

resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene que que:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}} \\ b &= \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

Finalmente, es posible regresar estas curvas al espacio \mathbb{S}^3 descrito en la ec. VII.3, el mapa se obtiene

al parametrizar \mathbb{E}^3 en coordenadas esféricas y tomar $r = 1$:

$$\begin{aligned}\psi &= \arccos(x^0) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{x^1}{\sqrt{1 - (x^0)^2}}\right) \\ \phi &= 2\arccot\left(\frac{x^2 + \sqrt{(x^3)^2 + (x^2)^2}}{x^3}\right)\end{aligned}\tag{VII.25}$$

C. CURVAS EN EL ESPACIO DE POINCARÉ

El procedimiento para la construcción de curvas en el espacio de Poincaré es similar al procedimiento que se siguió en \mathbb{S}^3 . Lo primero que debe hacerse, es considerar a \mathbb{H}^3 como una inmersión en un espacio de dimensión mayor. Para el caso de \mathbb{H}^3 , considere la inmersión en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^3 dada por:

$$\mathbb{H}^3 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}_1^3 : x^0 > 0 \text{ y } |\mathbf{x}|^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -L^2\}.\tag{VII.26}$$

Puede mostrarse que esta definición de \mathbb{H}^3 y la definición dada en la ec. VII.3 son equivalentes, considerando el mapa $\varphi : \mathbb{H}^3 \subseteq \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{H}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ dado por:

$$\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{x^0 - x^3} (x^1, x^2, 1).\tag{VII.27}$$

Este mapa, es una isometría entre espacios; es decir, deja invariante el elemento infinitesimal de línea ds^2 . Las ecuaciones del marco de Frenet-Serret en este espacio, son

$$\begin{aligned}\partial_s \mathbf{t} &= \frac{\gamma}{L^2} + \kappa \mathbf{n}^1 \\ \partial_s \mathbf{n}^1 &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{n}^2 \\ \partial_s \mathbf{n}^2 &= -\tau \mathbf{n}^1.\end{aligned}\tag{VII.28}$$

Las cuales se reducen a la ecuación diferencial:

$$\gamma^{(4)}(s) + \left(k^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right) \ddot{\gamma}(s) - \frac{\tau^2}{L^2} \gamma(s) = 0.\tag{VII.29}$$

Las soluciones a esta ecuación diferencial son: $\{\cosh(\alpha s), \sinh(\alpha s), \cos(\beta s), \sin(\beta s)\}$, con:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2}} \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} + \kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}},\end{aligned}\tag{VII.30}$$

constantes que cumplen las siguientes relaciones:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\tau^2}{L^2}} = \left|\frac{\tau}{L}\right|,\tag{VII.31}$$

además

$$\left(\frac{1}{L^2} - \alpha^2\right) \left(\frac{1}{L^2} + \beta^2\right) = \frac{\kappa^2}{L^2}\tag{VII.32}$$

Finalmente, para obtener la forma de las hélices se considera la siguiente isometría aplicada a un punto $(a, 0, b, 0) \in \mathbb{R}_1^3$:

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha s) & \sinh(\alpha s) & 0 & 0 \\ \sinh(\alpha s) & \cosh(\alpha s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta s) & -\sin(\beta s) \\ 0 & 0 & \sin(\beta s) & \cos(\beta s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh(\alpha s) \\ a \sinh(\alpha s) \\ b \cos(\beta s) \\ b \sin(\beta s) \end{pmatrix}\tag{VII.33}$$

Para hacer encajar la hélice en \mathbb{H}^3 y que esta cumpla con las formulas de Frenet-Serret, deben cumplirse las siguientes condiciones sobre a y b :

$$\begin{aligned}-a^2 + b^2 &= -L^2 \\ (a\alpha)^2 + (b\beta)^2 &= 1.\end{aligned}\tag{VII.34}$$

La primera ecuación ubica a la hélice sobre la superficie \mathbb{H}^3 , la segunda, asegura que norma de la derivada de la curva sea uno. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

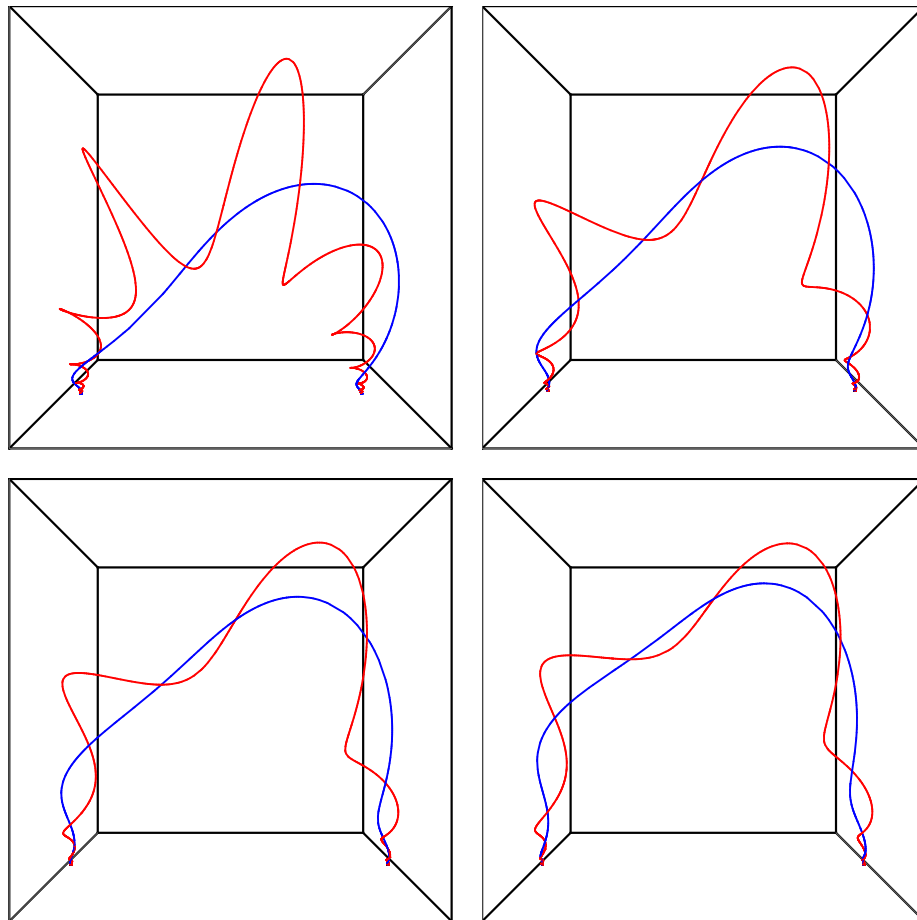
$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{1 + (L\beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \\ b &= \sqrt{\frac{1 - (L\alpha)^2}{\alpha^2 + \beta^2}}.\end{aligned}\tag{VII.35}$$

Por último, se regresa la curva a la definición original de \mathbb{H}^3 haciendo uso de la isometría VII.27, la imagen de la hélice $\varphi(\gamma(s))$ es:

$$\varphi(\gamma(s)) = \frac{1}{a \cosh(\alpha s) - b \sin(\beta s)} (a \sinh(\alpha s), b \cos(\beta s), 1)\tag{VII.36}$$

Figura VII.1: Hélices inmersas en \mathbb{H}^3 .

Para cada gráfica, $L = 1$, $k = 1, 2$, y de izquierda a derecha $\tau = 0.5, 1$ y $1.5, 2$.



La Figura VII.1 muestra hélices con diferentes valores de κ y τ .

Antes de proseguir con la construcción de curvas en AdS_3 , es necesario demostrar algunos supuestos que se realizaron al momento de construir esta hélice. Las soluciones más generales de la ecuación diferencial VII.29 son de la forma $\{e^{\alpha s}, e^{-\alpha s}, e^{\beta s}, e^{-\beta s}\}$ con:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right)^2 + 4\frac{\tau^2}{L^2} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2}}} \quad (\text{VII.37})$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2}\right)^2 + 4\frac{\tau^2}{L^2} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2}}}$$

Nótese el cambio de signo en β . Estas soluciones se reducen a las soluciones propuestas ($\cosh(\alpha s)$, $\sinh(\alpha s)$, $\cos(\beta s)$, $\sin(\beta s)$) solo cuando α es un número real y β es un número imaginario. Además,

las definiciones VII.35 de a y b suponen que $(L\alpha)^2 < 1$. A continuación se demuestra que todos estos supuestos son válidos para cualquier $\kappa > 0$ y $\tau \neq 0$. Primero se muestra que α es real, esto se debe a que:

$$\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \leq \left| \kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right| = \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2} < \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{\tau^2}{L^2}}, \quad (\text{VII.38})$$

por lo tanto,

$$0 < \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2}. \quad (\text{VII.39})$$

El mismo argumento aplicado a $-\kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2}$ muestra que:

$$-\sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2} < 0, \quad (\text{VII.40})$$

lo que implica que β es un número imaginario. Por último, se muestra que $(L\alpha)^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2} &= \kappa^4 + 2\kappa^2\tau^2 - \frac{2\kappa^2}{L^2} + \tau^4 + \frac{2\tau^2}{L^2} + \frac{1}{L^4} \\ &< \kappa^4 + 2\kappa^2\tau^2 + \frac{2\kappa^2}{L^2} + \tau^4 + \frac{2\tau^2}{L^2} + \frac{1}{L^4} \\ &= \left(\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{VII.41})$$

luego, dado que ambos lados de la desigualdad son positivos:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} &< \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \\ \sqrt{\left(\kappa^2 + \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 - \tau^2 + \frac{1}{L^2} &< \frac{2}{L^2}, \end{aligned} \quad (\text{VII.42})$$

por lo tanto, $(L\alpha)^2 < 1$.

D. CURVAS EN EL ESPACIO ANTI DE SITTER

Como en los casos anteriores, se considera al espacio AdS_3 como una inmersión en un espacio de dimensión mayor:

$$\text{AdS}_3 = \{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}_2^2 : |\mathbf{x}|^2 = -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -L^2\}. \quad (\text{VII.43})$$

La siguiente isometría asegura que este espacio y el descrito al inicio del capítulo (ec. VII.3) son el mismo:

$$\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{x^0 + x^3}(-x^1, -x^2, 1). \quad (\text{VII.44})$$

En este espacio, las ecuaciones de Frenet-Serret adquieren la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial_s \mathbf{t} &= \frac{\gamma}{L^2} + \kappa \mathbf{n}^1 \\ \partial_s \mathbf{n}^1 &= -\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{n}^2 \\ \partial_s \mathbf{n}^2 &= -\tau \mathbf{n}^1, \end{aligned} \quad (\text{VII.45})$$

reduciendo el sistema de ecuaciones diferenciales, se obtiene una única ecuación:

$$\gamma^{(4)}(s) + \left(\kappa^2 - \tau^2 - \frac{1}{L^2} \right) \ddot{\gamma}(s) + \frac{\tau^2}{L^2} \gamma(s) = 0. \quad (\text{VII.46})$$

Se consideran soluciones de la forma: $\{\cosh(\alpha s), \sinh(\alpha s), \cosh(\beta s), \sinh(\beta s)\}$ con:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}} \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}}, \end{aligned} \quad (\text{VII.47})$$

constantes que cumplen la relación:

$$\alpha\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4\tau^2}{L^2}} - \left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\tau^2}{L^2}} = \left| \frac{\tau}{L} \right| \quad (\text{VII.48})$$

y,

$$\left(\frac{1}{L^2} - \beta^2 \right) \left(\frac{1}{L^2} - \alpha^2 \right) = \frac{\kappa^2}{L^2}. \quad (\text{VII.49})$$

Luego, se considera la hélice generada por la siguiente isometría:

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha s) & 0 & -\sinh(\alpha s) & 0 \\ 0 & -\cosh(\beta s) & 0 & \sinh(\beta s) \\ -\sinh(\alpha s) & 0 & \cosh(\alpha s) & 0 \\ 0 & \sinh(\beta s) & 0 & -\cosh(\beta s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh(\alpha s) \\ b \sinh(\beta s) \\ -a \sinh(\alpha s) \\ -b \cosh(\beta s) \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.50})$$

Las condiciones para a y b son:

$$\begin{aligned} -a^2 + b^2 &= -L^2 \\ (a\alpha)^2 - (b\beta)^2 &= 1, \end{aligned} \quad (\text{VII.51})$$

por lo tanto,

$$a = \sqrt{\frac{1 - (L\beta)^2}{\alpha^2 - \beta^2}} \quad (VII.52)$$

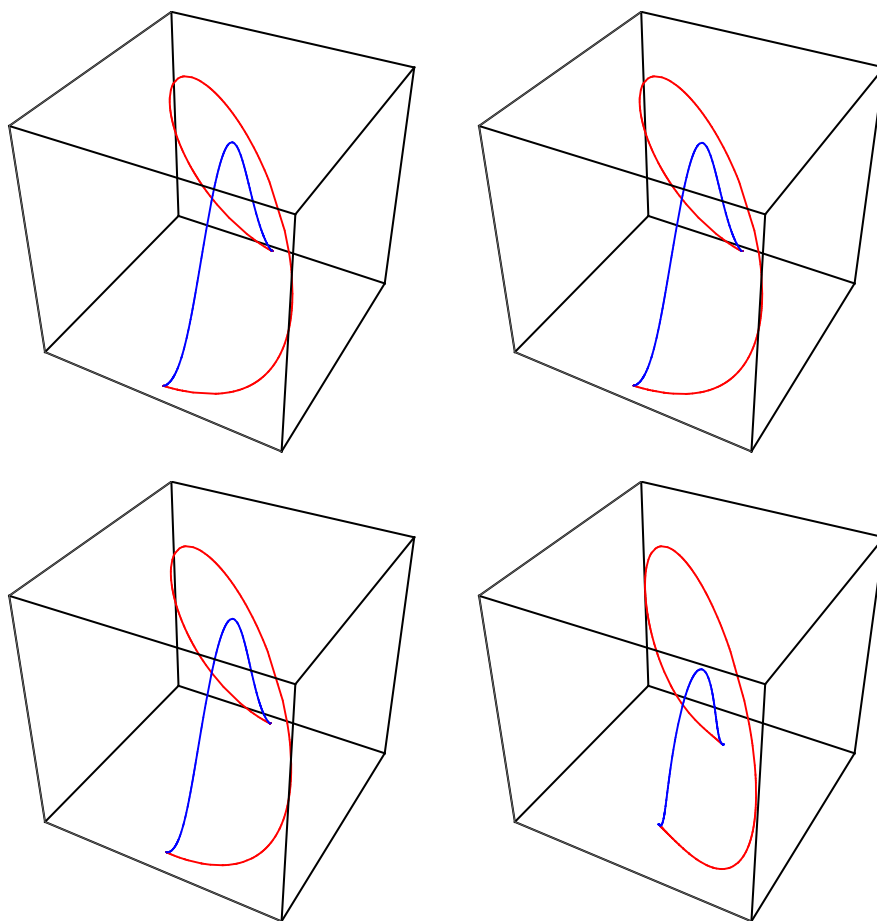
$$b = \sqrt{\frac{1 - (L\alpha)^2}{\alpha^2 - \beta^2}}.$$

Finalmente, se regresa la hélice al espacio original definido en VII.3, la imagen de la hélice $\varphi(\gamma(s))$ es:

$$\varphi(\gamma(s)) = \frac{1}{a \cosh(\alpha s) - b \cosh(\beta s)} (-b \sinh(\beta s), a \sinh(\alpha s), 1). \quad (VII.53)$$

Figura VII.2: Hélices inmersas en AdS_3 .

Para cada gráfica, $L = 1$, $k = 0.1, 0.35$ y de izquierda a derecha $\tau = 0.05, 0.1$ y $0.3, 0.6$.



Como en el caso de la hélice en \mathbb{H}^3 , en este procedimiento se realizaron ciertos supuestos sobre la forma de las hélices. En el caso de \mathbb{H}^3 estos supuestos no provocaron ninguna restricción en el conjunto de los posibles valores para κ y τ , porque todos resultaron ser ciertos para cualquier valor de estas constantes. No obstante, como se mostrará a continuación, en el caso de AdS_3 estas

restricciones limitan los valores de κ y τ a un conjunto pequeño de posibilidades. Las soluciones más generales de la ecuación VII.46 son de la forma $\{e^{\alpha s}, e^{-\alpha s}, e^{\beta s}, e^{-\beta s}\}$ con α y β dados en la ecuación VII.47. Las hélices de interés, son aquellas cuyos extremos tocan el borde del espacio AdS_3 dado en la definición VII.3 (pues estas hélices son la que tienen un significado físico en el cálculo de la entropía de entrelazamiento cuántico). Es decir, son aquellas curvas que cumplen que cuando $s \rightarrow \pm\infty$ entonces $z \rightarrow 0$. Para el caso de la hélice inmersa en \mathbb{R}_2^2 , esta condición se traduce a: por lo menos una de las componentes de la espiral es una función que no esta limitada. Esto implica que por lo menos una de las constantes α o β es real (lo que permite la construcción de funciones no limitadas del tipo $\{\cosh(\alpha s), \sinh(\alpha s)\}$ o $\{\cosh(\beta s), \sinh(\beta s)\}$).

A continuación se mostrará un resultado importante correspondiente a α y β con $\kappa > 0$ y $\tau \neq 0$ y es que: si α es un número complejo o β es un número complejo, entonces α y β son números complejos. La demostración se hace por casos. Primero, si $\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2} < 0$, entonces $\sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}}$ es un número complejo y esto implica que tanto α como β son complejos. Luego; sin pérdida, tome $0 \leq \left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}$. Suponga ahora que α es complejo, entonces β también es un número complejo pues:

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \\ & \leq \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} < 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.54})$$

Por último, suponga que β es un número complejo, luego afirmamos que $-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} < 0$. Pues si $0 \leq -\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}$, entonces $-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \geq \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}}$ lo que implica que:

$$-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} - \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} \geq 0, \quad (\text{VII.55})$$

con lo cual se concluye que β es un número real (lo que contradice la hipótesis). Esto significa que $\kappa^2 - \tau^2 - \frac{1}{L^2} > 0$, con lo cual,

$$\kappa^2 - \tau^2 - \frac{1}{L^2} > \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}}. \quad (\text{VII.56})$$

Es decir,

$$0 > \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}\right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}} - \kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2}, \quad (\text{VII.57})$$

lo que implica que α es un número complejo.

Este resultado es importante, pues unido con la condición que α debe ser real o β debe ser real, implica que tanto α como β deben ser reales (caso contrario ambos serían números complejos). Esto impone condiciones sobre los valores que τ y κ pueden tomar. Primero,

$$0 \leq \left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2} \quad (\text{VII.58})$$

y segundo,

$$-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} > 0, \quad (\text{VII.59})$$

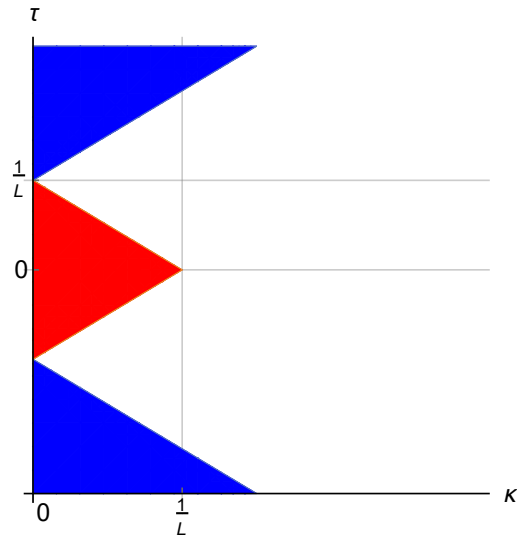
pues sí $-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \leq 0$, entonces, $\kappa^2 - \tau^2 - \frac{1}{L^2} \geq 0$ lo que implica que:

$$\kappa^2 - \tau^2 - \frac{1}{L^2} > \sqrt{\left(-\kappa^2 + \tau^2 + \frac{1}{L^2} \right)^2 - \frac{4\tau^2}{L^2}}, \quad (\text{VII.60})$$

lo que haría a α un número complejo.

Figura VII.3: Valores permitidos para κ y τ , hélices en AdS_3 .

Las regiones en rojo y azul corresponden a los valores donde es posible construir hélices en AdS_3 cuyos bordes toquen la frontera; no obstante, solo en la región roja las hélices cumplen con ser curvas continuas.



Estas restricciones limitan a κ y τ al conjunto de puntos en rojo y azul que se observa en la Figura VII.3. Sin embargo, todavía queda una condición que tomar en cuenta, y es que se espera que las

hélices sean continuas en todo el intervalo abierto $(-\infty, \infty)$, esta condición restringe los valores que κ y τ puedan tomar a la región roja de la Figura VII.3. Se prosigue a demostrar esta afirmación.

Tome $|\tau| > 1/L$, para mostrar que la curva VII.53 es discontinua, basta mostrar que la función:

$$z^{-1}(s) = a \cosh(\alpha s) - b \cosh(\beta s), \quad (\text{VII.61})$$

tiene un cero en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Dado que α y β solo dependen de τ^2 , únicamente se considera el caso $\tau > 1/L$. Luego, $\tau = \alpha\beta > 1/L$, dado que $\beta \geq \alpha$, $\beta > 1/L$. Dado que la curvatura κ es un número real, se concluye que $\alpha > 1/L$. Además, $a > b$, lo que implica que $z^{-1}(0) = a - b > 0$. Finalmente, cuando se toma $s \gg 0$, $\cosh(\alpha s) \rightarrow \frac{1}{2}e^{\alpha s}$ y $\cosh(\beta s) \rightarrow \frac{1}{2}e^{\beta s}$, con lo cual,

$$z^{-1}(s) \rightarrow \frac{a}{2}e^{\alpha s} \left(1 - \frac{b}{a}e^{(\beta-\alpha)s} \right), \quad (\text{VII.62})$$

y dado que $\beta - \alpha > 0$, para s lo suficientemente grande, se obtiene que $z^{-1}(s) < 0$ y dado que $z^{-1}(s)$ es una función continua, debe existir un punto s_0 tal que $z^{-1}(s_0) = 0$; es decir, $z(s)$ es discontinua. Esta última condición, muestra que los únicos valores posible de τ y κ son los que se encuentran en la región roja de la Figura VII.3.

VIII. CURVAS Y FLUJOS DE RENORMALIZACIÓN

La idea del grupo de renormalización surge durante el proceso de renormalización de la teoría cuántica de campos. Esta herramienta, permite el estudio sistemático de los cambios que ocurren en un sistema al momento de considerarlo a diferentes escalas. Su objetivo es el de remover todas las divergencias que existen en la teoría y hacerla renormalizable. Un ejemplo de cómo puede renormalizarse una teoría ocurre en electrodinámica cuántica, en donde se introduce un corte en la escala de energía Λ al momento de considerar integrales divergentes en el espacio de momentos. La idea del corte Λ es evaluar la integral sobre el conjunto de puntos $|p| < \Lambda$, en lugar de evaluar la integral sobre todo el espacio. Una vez realizado el corte, las constantes de acoplamiento del lagrangiano se vuelven dependientes del parámetro Λ y se dice que la teoría cuántica se ha convertido en una teoría de campos efectiva; es decir, la teoría se ha vuelto una aproximación y solamente es válida para escalas de energía apropiadas (Li, 2017). Al variar el valor del corte Λ , pueden obtenerse diferentes teorías efectivas, que describen fenómenos a distintas energías.

A medida que la escala de energía varía, desde el ultravioleta (alta energía y distancias pequeñas) hasta el infrarrojo (bajas energías y grandes distancias) se forma un flujo en el grupo de renormalización, el cual puede tener varios puntos fijos (Li, 2017). Uno de los supuestos con respecto al flujo de renormalización es que, si el cambio en las escalas es pequeño desde una energía alta a una energía baja, entonces la teoría efectiva es invariante ante cambios de escala y en la mayoría de los casos esta invariancia puede ser promovida a ser una invariancia ante transformaciones conformes. Otra observación importante es que el flujo de renormalización es irreversible en el sentido de que siempre recorre un camino desde el ultravioleta al infrarrojo. Este resultado fue demostrado por Zamolodchikov (1986). La función β de una constante de acoplamiento $g(\Lambda)$ se define como (Li, 2017):

$$\beta(g) = \Lambda \frac{\partial g}{\partial \Lambda} = \frac{\partial g}{\partial \ln \Lambda}. \quad (\text{VIII.1})$$

Esta función describe la forma en que las constantes de acoplamiento g cambian a medida que cambia la escala de renormalización dada por Λ . En un punto fijo de flujo de renormalización, la invariancia conforme implica que $\beta(g) = 0$.

El objetivo de este capítulo, es el de analizar espacios cuyas métricas codifican flujos de renormalización. Se consideran dos casos diferentes, y en cada caso, se resuelve el problema desde una perspectiva euclidiana y desde una perspectiva lorentziana. La primera métrica a considerar tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{z^2} + \frac{dy^2}{z^2} + \frac{dz^2}{f(z)^2 z^2}, \quad (\text{VIII.2})$$

para el caso euclidiano, donde $f(z) \neq 0$ para todo $z > 0$. Para este espacio, el tensor de Ricci no es proporcional a la métrica. Es decir que las soluciones al problema de extremizar el funcional VI.35 dejan de ser curvas con torsión y curvatura constante. En cambio:

$$R_{\mu\nu} = f(z)[zf'(z) - 2f(z)]g_{\mu\nu} + \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 3} \frac{f'(z)}{zf(z)}, \quad (\text{VIII.3})$$

donde $\frac{d}{dz}f(z) = f'(z)$. Con lo cual

$$R_s^B = R_{\mu\nu}n^{B\mu}t^\nu = \frac{f'(z)}{zf(z)}n^{B3}t^3. \quad (\text{VIII.4})$$

Por lo tanto, las ecuaciones de forma VI.53 del Capítulo VI se reducen a:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}K_1 + \mathfrak{s}(\tilde{D}_s^2 K^C + R_s^2) &= \\ \mathfrak{m}K^1 + \mathfrak{s}(\partial_s K^2 - \tau K^1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}K_2 - \mathfrak{s}(\tilde{D}_s^1 K^C + R_s^1) &= \\ \mathfrak{m}K^2 - \mathfrak{s}\left(\partial_s K^1 + \tau K^2 + \frac{f'(z)}{zf(z)}n^{13}t^3\right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

Para desarrollar estas ecuaciones, se propone una parametrización conveniente de la curva que extremiza el funcional, el vector tangente se toma como:

$$\begin{aligned} \partial_s x(s) &= z(s) \cos(\theta(s)) \operatorname{sech}(\eta(s)) \\ \partial_s y(s) &= z(s) \sin(\theta(s)) \operatorname{sech}(\eta(s)) \\ \partial_s z(s) &= z(s)f(z(s)) \tanh(\eta(s)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.7})$$

Por construcción, $t_\mu t^\mu = 1$, con lo cual la parametrización esta dada por longitud de arco. Finalmente se propone el siguiente marco normal para la curva:

$$n_\mu^1 = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \cos(\theta(s)) \tanh(\eta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \tanh(\eta(s)) \\ -\operatorname{sech}(\eta(s))/f(z(s)) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^2 = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\sin(\theta(s)) \\ \cos(\theta(s)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{VIII.8})$$

por construcción, los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ con ortonormales. Una vez obtenido el marco, es posible calcular la torsión y la curvatura asociadas:

$$\begin{aligned} K^A &= t^\nu \mathcal{D}_s n_\nu^A \\ &= t^\nu (\partial_\mu n_\nu^1 - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda n_\lambda^A) \\ &= t^\mu \partial_s n_\mu^A + n_3^A \left(\frac{(t^3)^2 f'(z)}{f(z)} - z f(z)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{VIII.9})$$

Para el caso de $A = 1$,

$$\begin{aligned} K^1 &= \text{sech}(\eta) \left[\partial_s \eta + f(z) + \frac{\partial_s z \tanh(\eta) f'(z)}{f(z)} - z \tanh^2(\eta) f'(z) \right] \\ &= \text{sech}(\eta) [\partial_s \eta + f(z)], \end{aligned} \quad (\text{VIII.10})$$

para $A = 2$, la ecuación es más sencilla

$$K^2 = -\text{sech}(\eta) \partial_s \theta. \quad (\text{VIII.11})$$

La torsión $\tau = T^{12}$ del marco esta dada por:

$$\tau = n^{1\nu} \mathcal{D}_s n_\nu^2 = n^{2\mu} \partial_s n_\mu^2 = -(\partial_s \theta) \tanh(\eta). \quad (\text{VIII.12})$$

Finalmente, es posible sustituir estas expresiones en las ecuaciones VIII.5 y VIII.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\dot{\eta} + f(z)) - \mathfrak{s} \ddot{\theta} + \mathfrak{s} \tanh(\eta) \dot{\theta} (2\dot{\eta} + f(z)) &= 0 \\ \mathbf{m} \dot{\theta} + \mathfrak{s} \dot{\eta} + \mathfrak{s} \tanh(\eta) [\dot{\theta}^2 - \dot{\eta}(\dot{\eta} + f(z))] &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VIII.13})$$

donde la derivada con respecto a s se representa con un punto. Para encontrar curvas extremales es necesario resolver el sistema de tres ecuaciones diferenciales compuesto por las ecuaciones VIII.13 y la ecuación VIII.7 para $\partial_s z(s)$. Para encontrar soluciones numéricas, se impone que $\dot{z}(0) = 0$. Esto puede hacerse sin pérdida, pues se buscan soluciones diferenciables cuyos límites toquen el borde del espacio, es decir $z(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \pm\infty$. Por lo que $z(s)$ debe tener un punto máximo para algún s_0 . Fijar el valor de $\dot{z}(0)$ tiene implicaciones sobre los valores iniciales de η y θ :

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= -\hat{k}_2 \\ \dot{\eta}(0) &= \hat{k}_1 - f(z(0)), \end{aligned} \quad (\text{VIII.14})$$

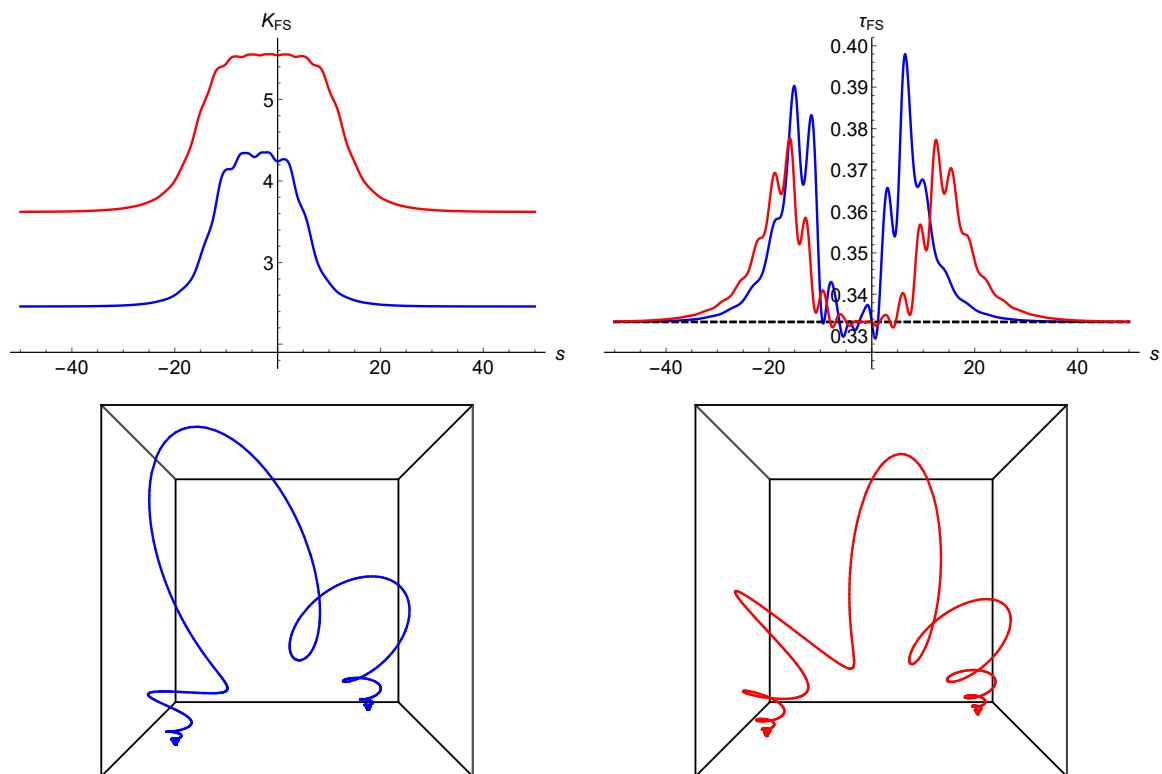
donde \hat{k}_1 y \hat{k}_2 corresponden a las curvaturas en el punto $s = 0$. Por lo tanto, para encontrar una solución numérica del sistema, es necesario fijar \hat{k}_1 , \hat{k}_2 y $z(0)$. La función $f(z)$ con la que se realizaran los cálculos numéricos es:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2} \tanh(\log(z(s))), \quad (\text{VIII.15})$$

que describe un espacio cuyos extremos se reducen al espacio hiperbólico. La Figura VIII.1 muestra algunas de las soluciones al problema. Se utilizó Mathematica para resolver las ecuaciones. En la Figura, se pueden observar aspectos importantes de las soluciones. A medida que $s \rightarrow \pm\infty$, $\tau_{FS} \rightarrow \frac{m}{s}$ y K_{FS} tiende a un valor constante; sin embargo, los valores asintóticos de K_{FS} cambian dependiendo de si $s \rightarrow -\infty$ o $s \rightarrow \infty$.

Figura VIII.1: Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para el caso euclidiano.

Para todas las curvas, $m = 1$ y $\varepsilon = 3$, para el resto de los parámetros: azul, $z(0) = 5$, $\hat{k}_1 = 1.8$ y $\hat{k}_2 = 1$, y rojo, $z(0) = 15$, $\hat{k}_1 = 2.3$ y $\hat{k}_2 = 0.5$.



Ahora, se considera la signatura lorentziana, con el sistema coordenado (t, x, z) y la métrica:

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{z^2} + \frac{dx^2}{z^2} + \frac{dz^2}{f(z)^2 z^2}. \quad (\text{VIII.16})$$

Al igual que para el caso riemanniano, el tensor de Ricci de esta métrica no es proporcional a la identidad:

$$R_{\mu\nu} = f(z)[zf'(z) - 2f(z)]g_{\mu\nu} + \delta_{\mu 3}\delta_{\nu 3}\frac{f'(z)}{f(z)z}, \quad (\text{VIII.17})$$

debido a esto, las ecuaciones de forma son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} K_1 + \mathfrak{s}(\tilde{D}_s^2 K^C + R_s^2) &= \\ \mathfrak{m} K^1 + \mathfrak{s}(\partial_s K^2 - \tau K^1) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VIII.18})$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} K_2 - \mathfrak{s}(\tilde{D}_s^1 K^C + R_s^1) &= \\ -mK^2 - \mathfrak{s}\left(\partial_s K^1 - \tau K^2 + \frac{f'(z)}{f(z)}n^{13}t^3\right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.19})$$

Al igual que para el caso euclidiano, se propone un marco para la curva a extremizar:

$$\begin{aligned} \partial_s x(s) &= z(s) \sinh(\alpha(s)) \operatorname{sech}(\beta(s)) \\ \partial_s y(s) &= z(s) \cosh(\alpha(s)) \operatorname{sech}(\beta(s)) \\ \partial_s z(s) &= z(s)f(z(s)) \tanh(\beta(s)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.20})$$

Se considerará el siguiente marco normal:

$$n_\mu^1 = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -\sinh(\alpha(s)) \tanh(\beta(s)) \\ \cosh(\alpha(s)) \tanh(\beta(s)) \\ -\operatorname{sech}(\beta(s))/f(z(s)) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^2 = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \cosh(\alpha(s)) \\ -\sinh(\alpha(s)) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.21})$$

Por construcción $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ forman una base ortonormal. Una vez construido el marco, es posible calcular la torsión y curvatura asociado a él. Para el caso de la curvatura:

$$\begin{aligned} K^A &= t^\nu \mathcal{D}_s n_\nu^A \\ &= t^\mu \partial_s n_\mu^A + n_3^A \left(\frac{(t^3)^2 f'(z)}{f(z)} - zf(z)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{VIII.22})$$

sustituyendo en la expresión anterior,

$$K^1 = \operatorname{sech}(\beta)(\partial_s \beta + f(z)) \quad K^2 = -(\partial_s \alpha) \operatorname{sech}(\beta). \quad (\text{VIII.23})$$

En el cálculo de la torsión, como en el caso hiperbólico, esta se reduce al cálculo de las derivadas parciales:

$$\tau = n^{1\nu} \mathcal{D}_s n_\nu^2 = n^{1\mu} \partial_s n_\mu^2 = -(\partial_s \alpha) \tanh(\beta). \quad (\text{VIII.24})$$

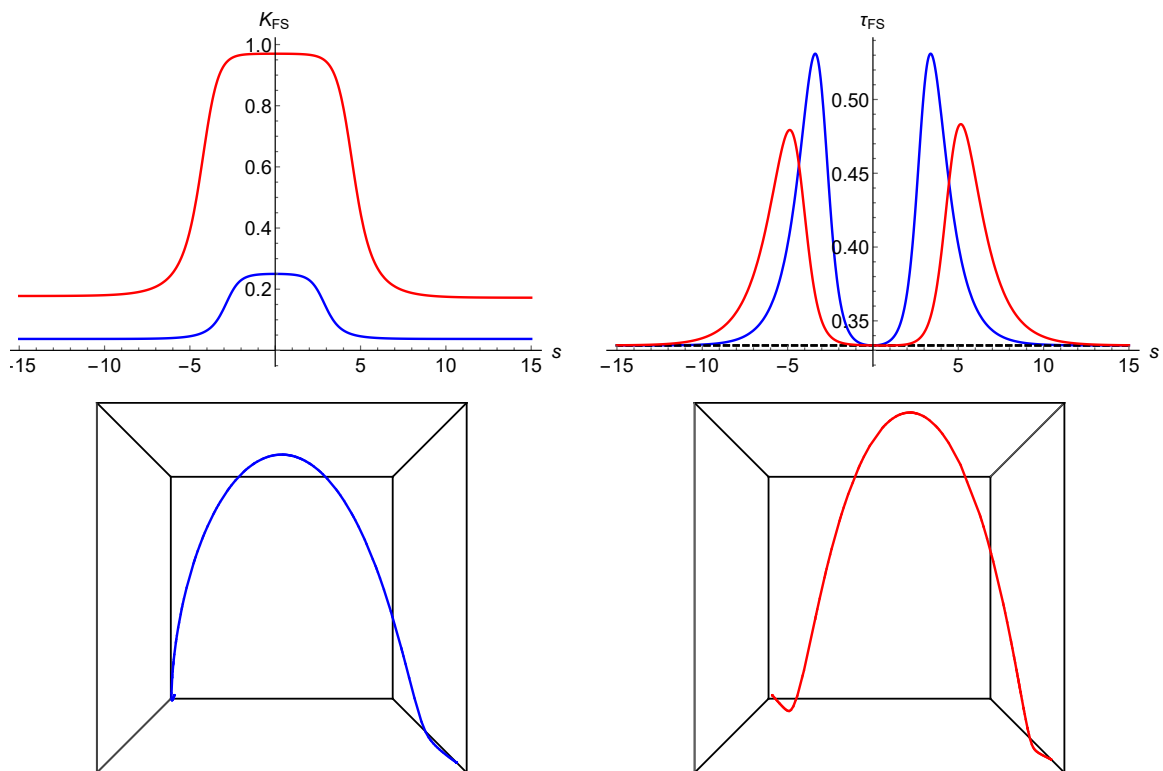
Por último, es posible sustituir la parametrización en las ecuaciones de forma:

$$\begin{aligned} m(\dot{\beta} + f(z)) - \varepsilon \ddot{\alpha} + \varepsilon \dot{\alpha} \tanh(\beta)(2\dot{\beta} + f(z)) &= 0 \\ m \dot{\alpha} - \varepsilon \ddot{\beta} + \varepsilon \tanh(\beta) \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}(\dot{\beta} + f(z)) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.25})$$

Las condiciones iniciales que se utilizarán son las mismas que para el caso euclidiano:

$$\begin{aligned} \beta(0) &= 0 \\ \dot{\alpha}(0) &= -\hat{k}_2 \\ \dot{\beta}(0) &= \hat{k}_1 - f(z(0)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.26})$$

Figura VIII.2: Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para el caso lorentziano. Para todas las curvas, $m = 1$ y $\varepsilon = 3$, para el resto de los parámetros: azul, $z(0) = 30$, $\hat{k}_1 = 0.5$ y $\hat{k}_2 = 0$, y rojo, $z(0) = 70$, $\hat{k}_1 = 0.9$ y $\hat{k}_2 = -0.4$.



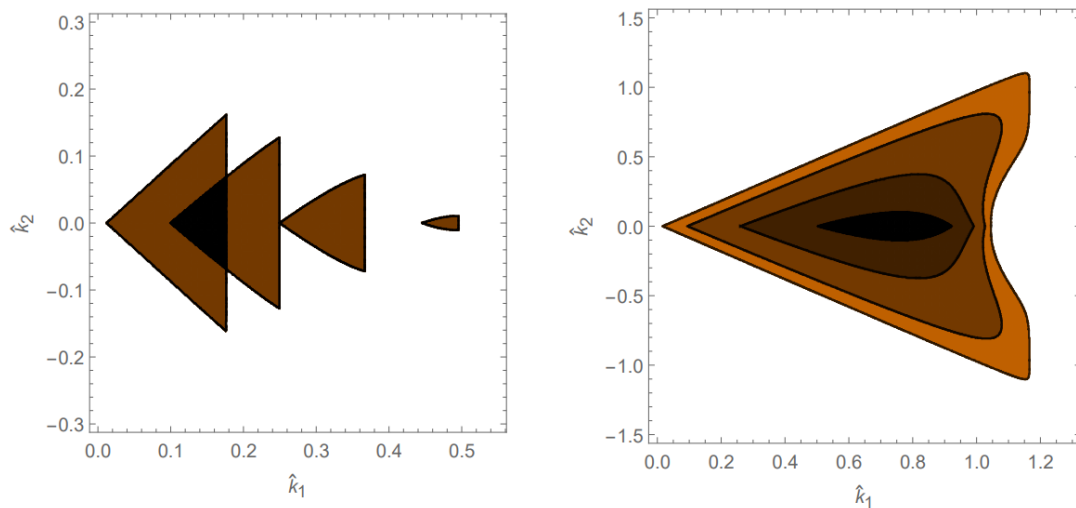
La Figura VIII.2 muestra algunas de las soluciones de las ecuaciones VIII.25. Las características que presentan estas curvas son análogas a las encontradas en el caso euclidiano: valores constantes que no necesariamente iguales para K_{FS} en los extremos, y valor constante para τ_{FS} igual a m/ε . No obstante, a diferencia del caso euclidiano, en la signatura lorentziana se encontraron soluciones solo

para valores especiales de \hat{k}_1 y \hat{k}_2 . Además, se encontró que el conjunto de valores permitidos para \hat{k}_1 y \hat{k}_2 depende del valor de $z(0)$. Este resultado esta acorde a los resultados encontrados para las hélices en AdS_3 ; pues, en el capítulo anterior (VII), se encontró que el conjunto de valores de torsión y curvatura que podían tener las hélices era un conjunto limitado a la región roja de la Figura VII.3. Debido a esto, también se esperaban restricciones en el conjunto de puntos que \hat{k}_1 y \hat{k}_2 podían tomar para el caso lorentziano.

La Figura VIII.3 muestra los valores iniciales para \hat{k}_1 y \hat{k}_2 que dan como resultado una curva continua. Se encontraron dos conjuntos diferentes para estos valores, uno correspondiente a curvas cercanas al borde del espacio y otro para curvas que se adentran más al espacio, e.g. $z(0) > 20$. Se encontró que entre $1 < z(0) < 10$ no existen valores iniciales permitidos para \hat{k}_1 y \hat{k}_2 .

Figura VIII.3: Espacio de posibles valores para la curvatura en flujo lorentziano

. En ambas gráficas $m = 1$ y $s = 3$. En la gráfica izquierda $z(0) = 0.7, 0.5, 0.3, 0.01$; con las regiones desplazándose de derecha a izquierda. En la gráfica de la derecha, $z(0) = 20, 50, 200, 2000$; con las regiones pasando del negro al anaranjado.



Ahora se analizan métricas de la forma:

$$ds^2 = e^{-2A(\rho)} dx^2 + e^{-2A(\rho)} dy^2 + d\rho^2, \quad (\text{VIII.27})$$

para el caso euclidiano y

$$ds^2 = -e^{-2A(\rho)} dt^2 + e^{-2A(\rho)} dx^2 + d\rho^2, \quad (\text{VIII.28})$$

para el caso lorentziano. El análisis es el mismo que el elaborado para los dos casos anteriores. Para la métrica VIII.27, el marco ortonormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ esta dado por:

$$t^\mu = \begin{pmatrix} e^{A(\rho)} \cos(\theta) \operatorname{sech}(\eta) \\ e^{A(\rho)} \sin(\theta) \operatorname{sech}(\eta) \\ \tanh(\eta) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^1 = \begin{pmatrix} e^{-A(\rho)} \cos(\theta) \tanh(\eta) \\ e^{-A(\rho)} \sin(\theta) \tanh(\eta) \\ -\operatorname{sech}(\eta) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^2 = \begin{pmatrix} -e^{-A(\rho)} \sin(\theta) \\ e^{-A(\rho)} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.29})$$

Con el marco definido, es posible obtener la torsión y curvatura de esta curva:

$$K^1 = \operatorname{sech}(\eta)[\dot{\eta} + A'(\rho)] \quad K^2 = -\dot{\theta} \operatorname{sech}(\eta) \quad \tau = -\dot{\theta} \tanh(\eta), \quad (\text{VIII.30})$$

con $A' = \frac{dA}{d\rho}$. Aplicando el mismo procedimiento que en el caso anterior, se obtiene que las ecuaciones de forma para esta métrica con esta parametrización son:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(\dot{\eta} + A'(\rho)) - \mathfrak{s} \ddot{\theta} + \mathfrak{s} \dot{\theta} \tanh(\eta)(2\dot{\eta} + A'(\rho)) &= 0 \\ \mathfrak{m} \dot{\theta} + \mathfrak{s} \ddot{\eta} + \mathfrak{s} \tanh(\eta)[\dot{\theta}^2 - \dot{\eta}(\dot{\eta} + A'(\rho))] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.31})$$

Para encontrar las soluciones numéricas asociadas a este sistema de ecuaciones, se utiliza

$$A'(\rho) = \frac{1}{2l} (\sin \phi(\rho) + \alpha), \quad (\text{VIII.32})$$

donde $\alpha > 1, l > 0$ son constantes y ϕ esta dado por la expresión:

$$\phi(\rho) = 2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{\rho - a}{2l} \right) \right), \quad (\text{VIII.33})$$

con a constante. Para estas soluciones, se tomará $\alpha = 2, l = 1$ y $a = 0$. Las condiciones iniciales son las mismas utilizadas en las métricas anteriores:

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 0, \\ \dot{\theta}(0) &= -\hat{k}^2, \\ \dot{\eta}(0) &= \hat{k}^1 - A'(\rho(0)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.34})$$

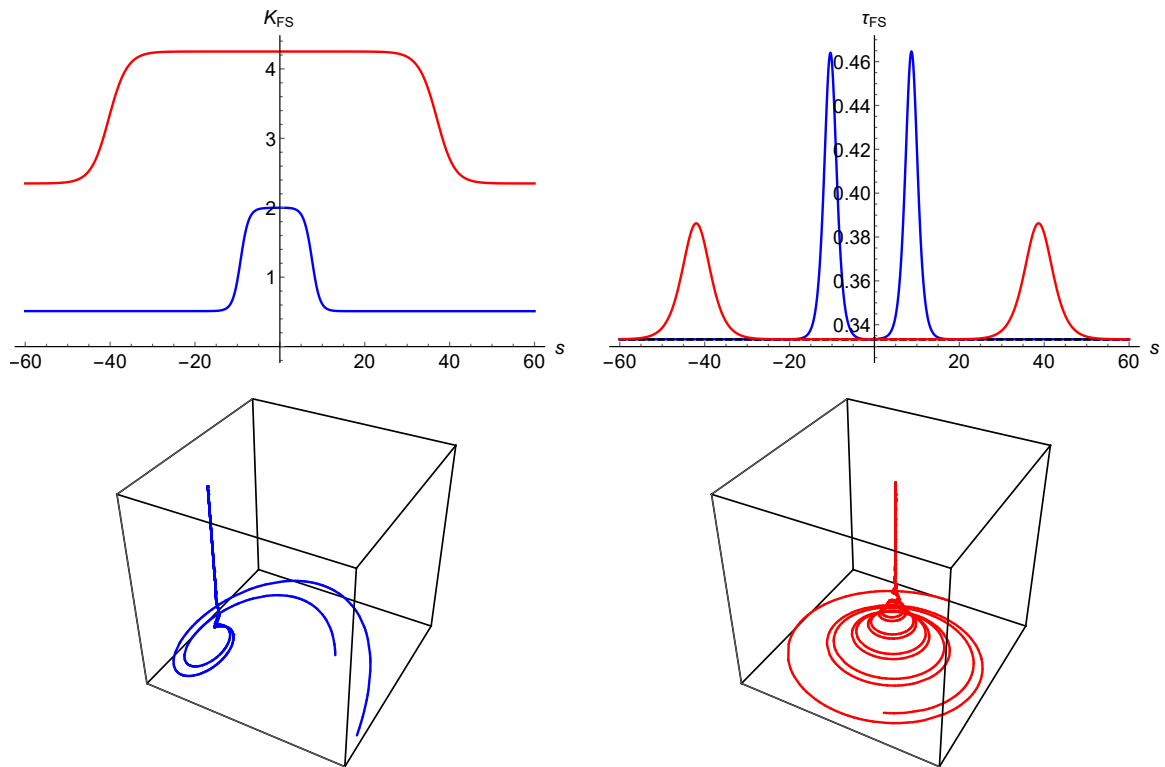
La Figura VIII.4 muestra las soluciones encontradas para diferentes condiciones iniciales.

Como en los casos anteriores, el comportamiento de las gráficas es el mismo. Se encontró que las curvaturas de Frenet-Serret tienden a valores constantes en el infinito y que la torsión tiende al valor de $\mathfrak{m} / \mathfrak{s}$. En esta métrica no se encontró restricción alguna para los valores iniciales de la curvatura.

Pasando al caso lorentziano, métrica VIII.28, los resultados son análogos que los encontrados para la métrica VIII.16. El marco ortogonal esta dado por los siguientes vectores:

$$t^\mu = \begin{pmatrix} e^{A(\rho)} \sinh(\alpha) \operatorname{sech}(\beta) \\ e^{A(\rho)} \cosh(\alpha) \operatorname{sech}(\beta) \\ \tanh(\beta) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^1 = \begin{pmatrix} -e^{-A(\rho)} \sinh(\alpha) \tanh(\beta) \\ e^{-A(\rho)} \cosh(\alpha) \tanh(\beta) \\ -\operatorname{sech}(\beta) \end{pmatrix}, \quad n_\mu^2 = \begin{pmatrix} e^{-A(\rho)} \cosh(\alpha) \\ -e^{-A(\rho)} \sinh(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VIII.35})$$

Figura VIII.4: Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para la métrica VIII.27. Para todas las curvas, $m = 1$ y $\varepsilon = 3$, para el resto de los parámetros: azul, $z(0) = 4$, $\hat{k}_1 = 1.5$ y $\hat{k}_2 = 1$, y rojo, $z(0) = 8$, $\hat{k}_1 = 1$ y $\hat{k}_2 = 0.5$.



La torsión y curvatura del marco es:

$$K^1 = \operatorname{sech}(\beta)(\partial_s \beta + A'(\rho)), \quad K^2 = -(\partial_s \alpha) \operatorname{sech}(\beta) \quad \tau = -(\partial_s \alpha) \tanh(\beta). \quad (\text{VIII.36})$$

Las ecuaciones de forma asociadas son:

$$\begin{aligned} m(\dot{\beta} + A'(\rho)) - \varepsilon \ddot{\alpha} + \varepsilon \dot{\alpha} \tanh(\beta)[2\dot{\beta} + A'(\rho)] &= 0 \\ m \dot{\alpha} - \varepsilon \ddot{\beta} + \varepsilon \tanh(\beta)[\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}(\dot{\beta} + A'(\rho))] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VIII.37})$$

Las condiciones iniciales, son las mismas que las condiciones impuestas para los otros casos:

$$\begin{aligned} \beta(0) &= 0 \\ \dot{\alpha}(0) &= -\hat{k}_2 \\ \dot{\beta}(0) &= \hat{k}_1 - A'(\rho(0)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.38})$$

La Figura VIII.5 muestra algunas de las soluciones a este sistema.

Como en el caso de la métrica VIII.16, las soluciones a este problema no son continuas para cualquier valor inicial de \hat{k}_1 y \hat{k}_2 . La Figura VIII.6 resume los resultados obtenidos. En general, se encontró que el conjunto de puntos permitidos es distinto para valores de ρ positivos y valores de ρ negativos. Además, se encontró una región entre $\rho < 2.7$ y $\rho > 0$ donde no hay soluciones permitidas. Estos resultados concuerdan con lo encontrado para el espacio dado por VIII.16.

Figura VIII.5: Soluciones numéricas y gráficas de $K_{FS}(s)$ y $\tau_{FS}(s)$ para la métrica VIII.28.

Para todas las curvas, $m = 1$ y $s = 3$, para el resto de los parámetros: azul, $z(0) = 3$, $\hat{k}_1 = 0.5$ y $\hat{k}_2 = 0$, y rojo, $z(0) = 5$, $\hat{k}_1 = 1$ y $\hat{k}_2 = 0.5$.

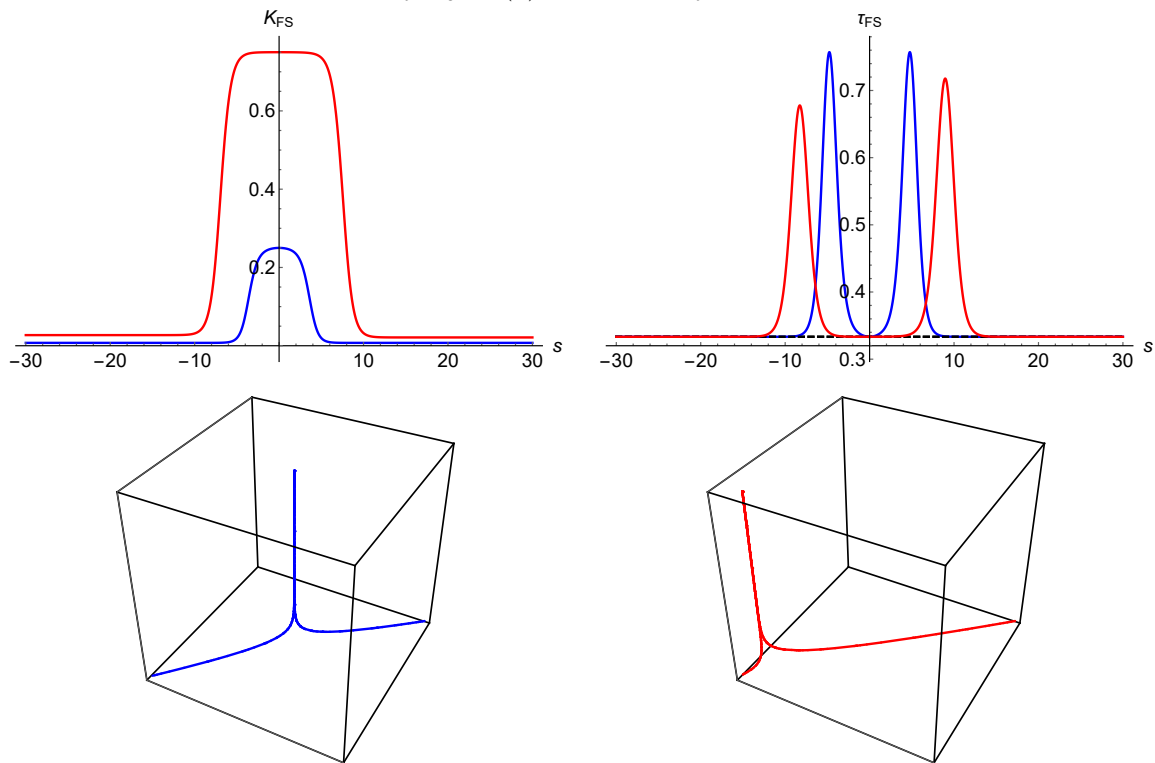
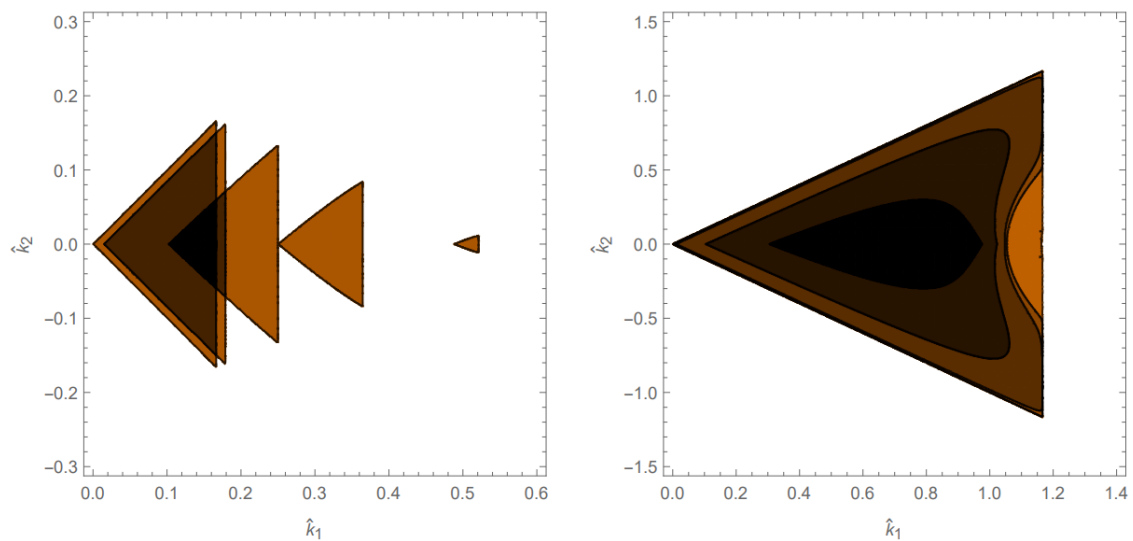


Figura VIII.6: Espacio de posibles valores para la curvatura para la métrica VIII.28.

En ambas gráficas $m = 1$ y $\varepsilon = 3$. En la gráfica izquierda $z(0) = -5, -2, -1, -0.5, -0.1$; con las regiones desplazándose de derecha a izquierda. En la gráfica de la izquierda, $z(0) = 3, 4, 6, 10, 100$; con las regiones pasando del negro al anaranjado.



IX. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo, se introdujeron los conceptos relativos a la geometría intrínseca de una variedad: como la curvatura, la torsión y la métrica (Capítulo IV). Además, también se presentaron los objetos que describen la geometría extrínseca de una variedad inmersa en otra: curvatura y torsión extrínseca, métrica inducida, vectores tangentes y vectores normales (Capítulo V). En cada tema, se resolvieron ejemplos como una forma de profundizar en los conceptos desarrollados en el texto. Todo lo anterior, permitió la construcción y el estudio de curvas en diferentes variedades: formas espaciales y métricas que codifican flujos de renormalización (capítulos VII y VIII). En particular, las curvas que se construyeron son solución del funcional VI.35, conformado únicamente por la torsión y la métrica inducida. Además, en el Capítulo VI se explicó la relación que existe entre estas curvas y la teoría de campos conforme en dos dimensiones con anomalías gravitacionales. Debido a estos resultados, se concluye que el presente trabajo cumplió con sus objetivos.

X. BIBLIOGRAFÍA

- Adachi, T., Maeda, S. & Udagawa, S. (2004). Geometry of ordinary helices in a complex projective space. *Hokkaido Math. J.* 33(1), 233-246.
- Berg, M. & Samtleben, H. (2002). An Exact Holographic RG Flow Between 2d Conformal Fixed Points. *Journal of High Energy Physics*, 2002(05), 006.
- Blumenhagen, R. & Plauschinn, E. (2009). *Introduction to Conformal Field Theory*. Springer-Verlag GmbH.
- Capovilla, R. & Guven, J. (1995). Geometry of deformations of relativistic membranes. *Phys. Rev.* 51(67).
- Carroll, S. (2003). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Pearson.
- Castro, A., Detournay, S., Iqbal, N. & Perlmutter, E. (2014). Holographic entanglement entropy and gravitational anomalies. *Journal of High Energy Physics*, 2014(7), 114.
- Chakrabarti, D., Sahay, R. & Williams, J. (2017). Curves of Constant Curvature and Torsion in the 3-Sphere. *ArXiv e-prints*.
- Chow, D. D. K., Pope, C. N. & Sezgin, E. (2010). Classification of solutions in topologically massive gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 27(10).
- do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall.
- do Carmo, M. (2003). *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag.
- Dong, X. (2014). Holographic entanglement entropy for general higher derivative gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2014(1), 44.
- Fonda, P., Jejjala, V. & Veliz-Osorio, A. (2017). On the shape of things: From holography to elastica. *Annals of Physics*, 385(Supplement C), 358-398.
- Fonda, P., Liska, D. & Veliz-Osorio, A. (2017). *Entangled curls*. Institute of Physics, Jagiellonian University & Instituut-Lorentz, Universiteit Leiden.
- Fonda, P., Seminara, D. & Tonni, E. (2015). On shape dependence of holographic entanglement entropy in AdS₄/CFT₃. *Journal of High Energy Physics*, 2015(12), 1-58.
- Griffiths, D. (1999). *Introduction to Electrodynamics* (3rd Edition). Prentice Hall.

- Hotta, K., Hyakutake, Y., Kubota, T., Nishinaka, T. & Tanida, H. (2009). Left–right asymmetric holographic RG flow with gravitational Chern–Simons term. *Physics Letters B*, 680(3), 279-285.
- Iqbal, N. & Wall, A. C. (2016). Anomalies of the entanglement entropy in chiral theories. *Journal of High Energy Physics*, 2016(10), 111.
- Li, D. (2017). Renormalization group flow, entropy and eigenvalues. *Letters in Mathematical Physics*.
- Maldacena, J. (1999). The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4), 1113-1133.
- Molgaard, E. & Shrock, R. (2014). Renormalization-group flows and fixed points in Yukawa theories. *Phys. Rev. D*, 89(10), 105007.
- Ryder, L. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- Ryu, S. & Takayanagi, T. (2006). Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti–de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence. *Physical Review Letters*, 96.
- Saravanan, S. K. (2016). *Spin Dynamics in General Relativity* (Tesis doctoral, Leiden U.).
- Singer, D. (2008). Lectures on Elastic Curves and Rods. *AIP Conference Proceedings*, 1002(1), 3-32. eprint: <http://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/1.2918095>
- Tong, D. (2012). Lectures on String Theory. *arXiv:0908.0333v3*.
- Zamolodchikov, A. B. (1986). Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory. *JETP Lett.* 43(12), 730-732. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.43,565(1986)].
- Zhao, W., Pei, D. & Cao, X. (2015). Mannheim Curves in Nonflat 3-Dimensional Space Forms. *Advances in Mathematical Physics*, 2015(319046), 9.