

APLICACIONES DE ANALISIS FUNCIONAL NO LINEAL A UN
PROBLEMA DE OPTIMIZACION

**BIBLIOTECA
DE LA
UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA**

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

APLICACIONES DE ANALISIS FUNCIONAL NO LINEAL A UN
PROBLEMA DE OPTIMIZACION

ALVARO ARIAS PALOMO

Trabajo de investigación presentado para optar al
grado académico de licenciatura en matemática

Guatemala

1984

Vo. Bo. :

(f) _____
Doctor Raul González de Paz
Asesor

Tribunal:

(f) _____
Doctor Raul Gonzalez de Paz

(f) _____
Licenciado Leonel Morales Aldana

(f) _____
Doctor Belisario Ventura Ruiz

Fecha de aprobación:

CONTENIDO

	Páginas
I. INTRODUCCION	1
II. ELEMENTOS DE ANALISIS FUNCIONAL	3
A. Cálculo diferencial en espacios de Banach	3
1. Convexidad y concavidad	3
2. Derivada en el sentido de Gateaux	3
B. Mínimos de funcionales en espacios de Banach	7
1. Algunas proposiciones importantes	7
C. Espacios de Sobolev	10
1. Notación	10
2. Derivada en el sentido de distribuciones	11
3. Espacios $H^k(\Omega)$	12
4. Algunas proposiciones importantes	13
III. UNA APLICACION	19
A. Formulación del problema	19
B. Propiedades del funcional $J_\lambda: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$	19
C. Propiedades del funcional $\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \longrightarrow \mathbb{R}$	23
D. Características de la solución	30
IV. BIBLIOGRAFIA	33

RESUMEN DE LA TESIS

APLICACIONES DE ANALISIS FUNCIONAL NO LINEAL A UN
PROBLEMA DE OPTIMIZACION

ALVARO ARIAS PALOMO

Licenciado en matemática.

Universidad del Valle de Guatemala, 1984

Asesor: Raul González de Paz

El problema que estudiaremos es el siguiente:

$$(P) \min_{f \in C_p} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \langle (u-u)^2, f \rangle_{L^1, L^\infty} \right]$$

donde $U > 0$, $\beta > 0$, $C_p = \{ f = \beta g : 0 \leq g(x) \leq 1 \text{ c.t.p. y } \int_{\Omega} g dx = V \}$
y $0 < V < \mu(\Omega)$.

Para cada $f \in C_p$ sea

$$J_f : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto J_f(u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \langle (u-u)^2, f \rangle_{L^1, L^\infty}$$

El funcional J_f tiene un único mínimo absoluto $u_f \in H_0^1(\Omega)$ que

está caracterizado por:

$$(\nabla u_f, \nabla \varphi)_{L^2} = \langle (U - u_f) \varphi, f \rangle_{L^1, L^\infty} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Se define el funcional

$$\Phi : L^\infty(\Omega)^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \Phi(f) = J_f(u_f).$$

Φ es continuo para la topología *-débil y es estrictamente cóncavo.

El problema original se transforma en:

$$(P') \quad \min_{f \in C_\Phi} \Phi(f)$$

C_Φ es compacto en la topología *-débil y entonces (P') tiene solución. Como Φ es estrictamente cóncavo las soluciones son puntos extremales de C_Φ y son de la forma $\beta \chi_A$ donde $A \subset \Omega$ es medible y $\mu(A) = V$.

I. INTRODUCCION

Al investigar un modelo matemático de optimización de diseño, Raul González en "Sur un problème d'optimisation de domaine", estudió el siguiente problema:

$$(P_0) \quad \min_{f \in C_p} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left[\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \langle (u-v)^2, f \rangle_{L^1, \Omega} \right].$$

Por otra parte Cea y Malanowski investigaron, en el artículo "An example of a max-min problem in partial differential equations" la resolución de:

$$(P') \quad \max_{u \in C} \min_{y \in H^1(\Omega)} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} u (\nabla y)^2 dx - \int_{\Omega} f y dx \right].$$

(La nomenclatura de los problemas (P_0) y (P') se encuentra en las páginas diez y diecinueve.)

El problema (P') tiene cierta analogía con el (P) . Las técnicas empleadas por Cea y Malanowski, en el primero, son más sencillas que las utilizadas por González en (P) .

El objetivo de esta tesis es investigar el problema (P) , usando las técnicas empleadas por Cea y Malanowski en (P') .

Si bien se llega a los mismos resultados, la perspectiva es distinta, ya que se parte de técnicas comúnmente utilizadas en la teoría de optimización y control, mientras que González, en su artículo, utilizó métodos derivados de la teoría de espacios vectoriales topológicos.

Previo al estudio de (P_0) , veremos, en el capítulo II, algunos temas de análisis funcional. La nomenclatura de este capítulo es básicamente la

misma que J. Céa usó en "Optimisation, théorie et algorithmes". En el capítulo III, presentaremos el problema (P) , su estudio y los resultados obtenidos.

II. ELEMENTOS DE ANALISIS FUNCIONAL

A. Cálculo diferencial en espacios de Banach

1. Convexidad y concavidad

Sea V un espacio vectorial, normado, sobre el campo de los números reales.

1.1. Definiciones:

La función $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si:

$$J(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v) \quad \forall u, v \in V; \lambda \in [0, 1].$$

Y si la desigualdad es estricta, siempre que $u \neq v$, J es estrictamente convexa.

La función $\Phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava (estrictamente cóncava) si $-\Phi$ es convexa (estrictamente convexa). i.e.

$$\Phi(\lambda u + (1-\lambda)v) \geq \lambda \Phi(u) + (1-\lambda)\Phi(v) \quad \forall u, v \in V; \lambda \in [0, 1].$$

2. Derivada en el sentido de Gateaux

Sean V un espacio de Banach real y $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en V .

2.1. Definiciones:

Si para $u \in V$, $\varphi \in V$ el siguiente límite existe:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J(u + \theta\varphi) - J(u)}{\theta},$$

lo denotaremos por $J'(u, \varphi)$ y diremos que es la G-diferencial de J en el punto u y en la dirección de φ .

Si $J'(u, \varphi)$ existe para todo $\varphi \in V$, J es G-diferenciable en u .

Si para $u, \varphi, \psi \in V$ el siguiente límite existe:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J'(u + \theta\psi, \varphi) - J'(u, \varphi)}{\theta}$$

lo denotaremos por $J''(u, \varphi, \psi)$ y diremos que es la G-diferencial segunda de J en el punto u y en las direcciones de φ y de ψ .

Si $J''(u, \varphi, \psi)$ existe para todo $\varphi, \psi \in V$, J es dos veces G-diferenciable en u .

2.2. Algunas propiedades:

2.2.1. Proposición:

a) Si el funcional $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es G-diferenciable en $u \in V$, entonces: $J'(u, \lambda\varphi) = \lambda J'(u, \varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \varphi \in V$.

b) Si el funcional $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces G-diferenciable en u , entonces:

$$J''(u, \lambda\varphi, \mu\psi) = \lambda\mu J''(u, \varphi, \psi) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \varphi, \psi \in V.$$

2.2.2. Proposición: (Fórmula de Taylor)

Si el funcional $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces G-diferenciable en $u + \theta\varphi$, para cada $\theta \in [0, 1]$, en las direcciones φ, φ , entonces existe θ_0 en $(0, 1)$, tal que:

$$J(u + \varphi) = J(u) + J'(u, \varphi) + 1/2 J''(u + \theta_0\varphi, \varphi, \varphi)$$

Demostración: Sean $u, \varphi \in V$.

Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} :: \theta \mapsto f(\theta) = J(u + \theta\varphi)$, entonces

$$f'(\theta) = J'(u + \theta\varphi, \varphi)$$

$$f''(\theta) = J''(u + \theta\varphi, \varphi, \varphi).$$

Y por el teorema de Taylor (Ver Haaser et la (1977:704)),

$$J(v) = J(u) + J'(u, v-u) + \frac{1}{2} J''(u + \theta(v-u), v-u, v-u)$$

Entonces,

$$J(v) \geq J(u) + J'(u, v-u)$$

por lo tanto J es convexa.

La demostración de la convexidad estricta es similar. Q.E.D.

B. Mínimos de funcionales en espacios de Banach

Definiciones:

$\bar{u} \in V$ es un mínimo relativo del funcional $J: V \rightarrow \mathbb{R}$, si existe una vecindad \mathcal{U} de \bar{u} , tal que:

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad \forall u \in \mathcal{U} \cap V.$$

$\bar{u} \in V$ es un mínimo absoluto de J, si se cumple la siguiente condición:

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad \forall u \in V.$$

Definición:

El funcional $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es semicontinuo inferiormente, si se satisface la siguiente condición:

$$u_n \rightarrow \bar{u} \Rightarrow J(\bar{u}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n).$$

Si $u_n \rightarrow \bar{u}$ en la topología débil de V, diremos que J es débilmente semicontinuo inferiormente.

1. Algunas proposiciones importantes

1.1. Proposición:

Si V es un espacio de Banach reflexivo, $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional débilmente semicontinuo inferiormente, y \mathcal{U} es un subconjunto acotado y débilmente cerrado de V; entonces existe al menos un mínimo absoluto de J en \mathcal{U} .

Demostración:

Sean $l = \inf \{J(u) : u \in \mathcal{U}\}$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{U} , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = l.$$

(Una sucesión de esta forma es llamada minimizante.)

Como \mathcal{U} es acotado, entonces $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada y existe una subsucesión $(u_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, que converge débilmente hacia algún $\bar{u} \in V$

(Ver Rudin (1979:65)), y $\bar{u} \in \mathcal{U}$ porque \mathcal{U} es débilmente cerrado.

Como J es débilmente semicontinua inferiormente, tenemos que

$$J(\bar{u}) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} J(u_{n_j});$$

de donde $J(\bar{u}) = l$.

$\therefore \bar{u} \in \mathcal{U}$ es un mínimo absoluto de $J: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Q.E.D.

1.2. Proposición:

Si V es un espacio de Banach reflexivo, $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional débilmente semicontinuo inferiormente y

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = \infty$$

entonces existe al menos un mínimo absoluto.

Demostración:

Sean $l = \inf \{J(u) : u \in V\}$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión minimizante.

Si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ no fuera acotada, existiría una subsucesión $(u_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_{n_j}\| = \infty$.

Entonces, por hipótesis, $l = \infty$; que es una contradicción.

Luego existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u_n\| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Y J tiene un mínimo absoluto en $\mathcal{U} = \{u \in V : \|u\| \leq M\}$. (II.B. 1.2.)

$\therefore J$ tiene un mínimo absoluto en V . Q.E.D.

1.3. Proposición:

Sea \mathcal{U} un subconjunto abierto de V .

a). Si $\bar{u} \in \mathcal{U}$ es un mínimo relativo de J en \mathcal{U} y J es G -diferenciable, entonces $J'(\bar{u}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V$.

b). Si J es convexa y G -diferenciable, entonces:

i. Todo mínimo relativo es un mínimo absoluto.

ii. La inecuación (1) es equivalente a la ecuación (2).

$$J(\bar{u}) \leq J(u) \quad \forall u \in V \quad (1)$$

$$J'(\bar{u}, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in V \quad (2)$$

iii. Si además J es estrictamente convexa, entonces (1) y (2) satisfacen a lo más una solución.

Demostración:

a). Sea $\bar{u} \in \mathcal{U}$ un mínimo relativo de J en \mathcal{U} y sea $\varphi \in V$.

Por hipótesis, para $\theta > 0$ y suficientemente pequeño

$$J(\bar{u}) \leq J(\bar{u} + \theta\varphi);$$

de donde $\frac{J(\bar{u} + \theta\varphi) - J(\bar{u})}{\theta} \geq 0;$

entonces $J'(\bar{u}, \varphi) \geq 0$.

Como φ es arbitrario, $J'(\bar{u}, -\varphi) \geq 0;$

de donde $J'(\bar{u}, \varphi) = 0$. Q.E.D.

b). i. Sea $\bar{u} \in V$ un mínimo relativo de $J: V \rightarrow \mathbb{R}$.

Dado que J es convexa, por la proposición II.A. 2.2.3., tenemos que

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + J'(\bar{u}, u - \bar{u}) \quad \forall u \in V,$$

y $J'(\bar{u}, u - \bar{u}) = 0$ porque $u - \bar{u} \in V$.

$\therefore J(u) \geq J(\bar{u}) \quad \forall u \in V$. Q.E.D.

ii. (1) \Rightarrow (2) es la proposición a).

(2) \Rightarrow (1)

Como J es convexa

$$J(u) \geq J(\bar{u}) + J'(\bar{u}, u - \bar{u}) \quad \forall u \in V;$$

entonces $J(u) \geq J(\bar{u}) \quad \forall u \in V.$ Q.E.D.

iii. Supongamos que $u_1, u_2 \in V$ son dos mínimos absolutos de J , y supongamos que J es estrictamente convexa;

$$\text{entonces } J(u_2) > J(u_1) + J'(u_1, u_2 - u_1);$$

$$\text{entonces } J(u_2) > J(u_1),$$

que es una contradicción.

\therefore sólo hay una solución como máximo.

C. Espacios de Sobolev

1. Notación.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

Al conjunto de todas las funciones medibles $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|f|^p$ es integrable sobre Ω lo denotaremos por $L^p(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_p$ es un espacio de Banach si $1 \leq p \leq \infty$ (Ver Hu(1967:235)). Cuando $p=2$ escribiremos $\|\cdot\|$ en lugar de $\|\cdot\|_2$.

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, diremos que

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^k ($k \in \mathbb{N}$), si $D^\alpha f$ existe y es continua para todo multi-índice α que satisface $|\alpha| \leq k$. Si f es de clase C^k para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces f es de clase C^∞ .

Al conjunto de todas las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , con soporte compacto, lo denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2. Derivada en el sentido de distribuciones

Para mayor claridad, consideremos primero $\Omega = (a, b)$.

Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces, integrando por partes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f' \varphi \, dx &= f \varphi \Big|_a^b - \int_a^b f \varphi' \, dx \\ &= - \int_a^b f \varphi' \, dx \end{aligned}$$

Y por inducción, si $f \in C^k(\Omega)$, entonces:

$$\int_a^b f^{(k)} \varphi \, dx = (-1)^k \int_a^b f \varphi^{(k)} \, dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $m \in \mathbb{N}$. Si existe $g \in L^2(\Omega)$ que satisface

$$(a) \int_a^b g \varphi \, dx = (-1)^m \int_a^b f \varphi^{(m)} \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

entonces diremos que g es la m -derivada de f , en el sentido de distribuciones y la denotaremos por $f^{(m)}$.

Si $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$ satisfacen (a), entonces

$$\int_a^b (g_1 - g_2) \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega)$ (Ver Khoan(1972:148)), $g_1 = g_2$ c.t.p.

Este concepto de derivada es más general que el de la derivada usual.

No es difícil probar que posee las propiedades esperadas (Ver Khoan(1972:183)). Veamos ahora el caso general.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice. Si existe $g \in L^2(\Omega)$ que satisface:

$$\int_{\Omega} g \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

diremos que g es la D^α -derivada de f , en el sentido de distribuciones, y la denotaremos por $D^\alpha f$.

Al igual que en el caso de una variable, si f es de clase $C^{|\alpha|}$, integrando por partes y usando el teorema de Fubini, la derivada en el sentido de distribuciones es la usual (Ver Rudin(1979:141)).

3. Espacios $H^l(\Omega)$

Definición:

Para $l \in \mathbb{N}$, definiremos al espacio de Sobolev $H^l(\Omega)$ como:

$$H^l(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ si } |\alpha| \leq l \}$$

Por la definición es claro que

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \dots \subset H^{l+1}(\Omega) \subset H^l(\Omega) \subset \dots \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega).$$

En $H^l(\Omega)$ definiremos un producto interno:

$$(f, g)_l = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g \, dx = \sum_{|\alpha| \leq l} (D^\alpha f, D^\alpha g)$$

3.1. Proposición:

El espacio $H^l(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración:

Sea $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $H^l(\Omega)$.

Entonces $(D^\alpha f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ y, como $L^2(\Omega)$ es completo, existe $f_0^\alpha \in L^2(\Omega)$, tal que:

$$D^\alpha f_n \longrightarrow f_0^\alpha \quad (|\alpha| \leq l).$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\text{Entonces: } \int_{\Omega} D^\alpha f_n \varphi \, dx \longrightarrow \int_{\Omega} f_0^\alpha \varphi \, dx$$

$$\int_{\Omega} D^\alpha f_n \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_n D^\alpha \varphi \, dx \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_0^\alpha D^\alpha \varphi \, dx$$

$$\therefore \int_{\Omega} f_0^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f_0^\alpha D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

i.e. $D^\alpha f_0 = f_0^\alpha \quad \therefore f_n \rightarrow f_0$ en $H^k(\Omega) \quad \therefore$
 $H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición:

Definiremos a $H_0^k(\Omega)$ como la cerradura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en la topología de $H^k(\Omega)$.

Como $H^k(\Omega)$ es un espacio completo y $H_0^k(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $H^k(\Omega)$, entonces $H_0^k(\Omega)$ es completo respecto de la topología relativa. Por lo tanto $H_0^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

4. Algunas proposiciones importantes

4.1. Lema (Teorema de Kolmogoroff)

$M \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

a) M es acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. i.e.

$$\sup_{f \in M} \|f\| = \sup_{f \in M} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty$$

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0$ uniformemente en M .

c) $\lim_{\alpha \uparrow \infty} \int_{|x| > \alpha} |f|^2 dx = 0$ uniformemente en M .

Como $L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ isométricamente si Ω es medible, entonces el mismo criterio se aplica para $M \subset L^2(\Omega)$.

Si además Ω es acotado, la condición c) puede eliminarse.

Esquema de demostración: (La prueba completa está en Voigt y Wloka)

(\Rightarrow) a) es trivial. Para b) y c) dado $\varepsilon > 0$, sea $\{f_1, \dots, f_m\} \subset M$, tal que $M \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}(f_i, \varepsilon/2)$, y para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ elegir g_i una función simple, tal que $\|f_i - g_i\| < \varepsilon/2$.

(\Leftarrow) Sea $T_t: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) :: f \mapsto T_t(f)$ t.q. $(T_t f)(x) = f(x+t)$

$$\left(\int_a^1 f \right)(x) = \frac{1}{V(a)} \int_{|t| \leq a} (T_t f)(x) dt \quad \text{donde} \quad V(a) = \int_{|t| \leq a} dt$$

Probar que $\|J_a f - f\| \leq \sup_{|t| \leq a} \|T_t f - f\|$. $\therefore \lim_{a \downarrow 0} J_a f = f$
uniformemente en M .

Para $a > 0$, el conjunto $\{J_a f : f \in M\}$ es equicontinuo y uniformemente acotado. \therefore es relativamente compacto sobre todo compacto de \mathbb{R}^n .

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $\alpha > 0$ t.q. $\left[\int_{|x| > \alpha} |f|^2 dx \right]^{1/2} \leq \varepsilon/3 \quad \forall f \in M$.

Sea $a > 0$ t.q. $\|J_a f - f\| \leq \varepsilon/3 \quad \forall f \in M$.

Como $\{J_a f \cdot \chi_A : f \in M\}$ es relativamente compacto

($A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \alpha\}$) sean $\{f_1, \dots, f_m\} \subset M$ t.q.

$\left\{ \begin{array}{l} \forall f \in M \exists j \in \{1, \dots, m\} \text{ t.q.} \\ |J_a f(x) - J_a f_j(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{a}} \varepsilon/3 \text{ si } |x| \leq \alpha \end{array} \right.$

Sea $g_j = J_a f_j \cdot \chi_A$

Y entonces $M \subset \bigcup_{j=1}^m \mathcal{U}(g_j, \varepsilon)$

\therefore es relativamente compacto.

Definición:

Si X, Y son dos espacios de Banach, la función $J: X \rightarrow Y$ es compacta si la imagen de un conjunto acotado en X es relativamente compacto en Y .

4.2. Proposición: (Teorema de Rellich-Kondrasov.)

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado y $\lambda_2 < \lambda_1$, entonces la inyección $H_0^{\lambda_1}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{\lambda_2}(\Omega)$ es compacta.

Demostración:

Sean $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $\|\phi\|_{\lambda_1} \leq 1$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|x| \leq \lambda_1 - 1$

Para $x, x+t \in \Omega$

$$D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} D^\alpha \phi(x+\tau t) d\tau$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_0^1 t \cdot \text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t) d\tau \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \int_0^1 |t| |\text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t)| d\tau \right|^2 dx \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \int_{\Omega} |\text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t)|^2 dx d\tau \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq \ell_1} |D^\alpha \phi(x+\tau t)|^2 dx d\tau \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \sum_{|\alpha| \leq \ell_1} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(y)|^2 dy d\tau \\ &\leq |t|^2 \|\phi\|_{\ell_1} \leq |t|^2 \end{aligned}$$

Sea $N = \{ D^\alpha \phi : \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\phi\|_{\ell_1} \leq 1, |\alpha| \leq \ell_1 - 1 \}$.

Todo elemento $D^\alpha \phi$ de N satisface la desigualdad:

$$\int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx \leq |t|^2.$$

Sea $M = \{ D^\alpha \phi : \phi \in H_0^{\ell_1}(\Omega), \|\phi\|_{\ell_1} \leq 1, |\alpha| \leq \ell_1 - 1 \}$.

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^{\ell_1}(\Omega)$, se sigue que si $D^\alpha \phi \in M$, entonces:

$$\int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx \leq |t|^2.$$

Además, si $D^\alpha \phi \in M$, entonces:

$$\|D^\alpha \phi\| = \|D^\alpha \phi\|_0 \leq \|\phi\|_{\ell_1} \leq 1.$$

Como Ω es acotado, por el lema anterior tenemos que M es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Sea $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $H_0^{\ell_1}(\Omega)$.

Entonces $(D^\alpha \phi_n)_{n=1}^{\infty}$ con $|\alpha| \leq \ell_1$ es una sucesión en M y entonces tiene una subsucesión convergente.

Entonces existe una subsucesión $(\phi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que

$(D^\alpha \phi_{n_k})_{k=1}^\infty$ con $|\alpha| \leq l_2$ sea convergente.

$\therefore (\phi_{n_k})_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $H_0^{l_2}(\Omega)$.

\therefore La inyección es compacta.

4.3. Proposición: (Desigualdad de Poincaré)

Si Ω es un conjunto acotado, entonces existe $C \in \mathbb{R}^+$ que depende solamente de Ω , tal que:

$$\|\phi\|_1^2 \leq C \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x)|^2 dx = C \|\text{grad } \phi\|_0^2 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración:

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\|\phi\|_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\phi(x)|^2 \cdot 1 dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [|\phi(x)|^2 \cdot x_i] = \frac{\partial}{\partial x_i} |\phi(x)|^2 x_i + |\phi(x)|^2 \cdot 1$$

sumando desde $i=1$ hasta $i=n$ e integrando sobre Ω , tenemos que:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [|\phi(x)|^2 \cdot x_i] dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} |\phi(x)|^2 x_i dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\phi(x)|^2 \cdot 1 dx$$

Por el teorema de Gauss, el lado izquierdo puede escribirse

$$\int_{\Omega} \text{div} (|\phi(x)|^2 x_1, \dots, |\phi(x)|^2 x_n) dx = \int_{\partial\Omega} |\phi(x)|^2 (x_1, \dots, x_n) \cdot d\vec{\sigma} = 0;$$

entonces:

$$\|\phi\|_0^2 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (|\phi(x)|^2)}{\partial x_i} x_i dx = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} x_i dx$$

Como Ω es acotado, existe $d \in \mathbb{R}^+$ tal que $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq d, i=1, \dots, n\}$

De donde:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_0^2 &\leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| |\phi| |x_i| dx \\ &\leq \frac{2d}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\phi| \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| dx \leq \frac{2d}{n} \|\phi\|_0 \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} D^\alpha \phi(x+\tau t) d\tau$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} \left| \int_0^1 t \cdot \text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t) d\tau \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \int_0^1 |t| |\text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t)| d\tau \right|^2 dx \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \int_{\Omega} |\text{grad } D^\alpha \phi(x+\tau t)|^2 dx d\tau \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq l_1} |D^\alpha \phi(x+\tau t)|^2 dx d\tau \\ &\leq |t|^2 \int_0^1 \sum_{|\alpha| \leq l_1} \int_{\Omega} |D^\alpha \phi(y)|^2 dy d\tau \\ &\leq |t|^2 \|\phi\|_{l_1} \leq |t|^2 \end{aligned}$$

Sea $N = \{ D^\alpha \phi : \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \|\phi\|_{l_1} \leq 1, |\alpha| \leq l_1 - 1 \}$.

Todo elemento $D^\alpha \phi$ de N satisface la desigualdad:

$$\int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx \leq |t|^2.$$

Sea $M = \{ D^\alpha \phi : \phi \in H_0^{l_1}(\Omega), \|\phi\|_{l_1} \leq 1, |\alpha| \leq l_1 - 1 \}$.

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^{l_1}(\Omega)$, se sigue que si $D^\alpha \phi \in M$, entonces:

$$\int_{\Omega} |D^\alpha \phi(x+t) - D^\alpha \phi(x)|^2 dx \leq |t|^2.$$

Además, si $D^\alpha \phi \in M$, entonces:

$$\|D^\alpha \phi\| = \|D^\alpha \phi\|_0 \leq \|\phi\|_{l_1} \leq 1.$$

Como Ω es acotado, por el lema anterior tenemos que M es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Sea $(\phi_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión acotada en $H_0^{l_1}(\Omega)$.

Entonces $(D^\alpha \phi_n)_{n=1}^\infty$ con $|\alpha| \leq l_1$ es una sucesión en M y entonces tiene una subsucesión convergente.

Entonces existe una subsucesión $(\phi_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(\phi_n)_{n=1}^\infty$, tal que

Entonces:

$$\|\phi\|_0 \leq \frac{2d}{n} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

De donde:

$$\|\phi\|_0 \leq \frac{2d}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{2d}{\sqrt{n}} \left(\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \phi\|_0^2 \right)^{1/2}$$

Por lo tanto:

$$\|\phi\|_1^2 = \|\phi\|_0^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \phi\|_0^2 \leq C \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \phi\|_0^2$$

donde $C = \frac{4d^2}{n} + 1$

Como $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, entonces:

$$\|\phi\|_1^2 \leq C \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha \phi\|_0^2, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad \text{Q.E.D.}$$

A continuación veremos dos corolarios de la desigualdad de Poincaré que utilizaremos más adelante.

Por $\|\nabla u\|^2$ entenderemos $\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_0^2$.

4.4. Corolario

$$\phi = 0 \Leftrightarrow \|\nabla \phi\|^2 = 0; \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

4.5. Corolario

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow \infty} \|\nabla u\| = \infty$$

III. UNA APLICACION

A. Formulación del problema.

Sea Ω un conjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^n ($n \leq 3$). Para $\beta > 0$, denotaremos por C_β al siguiente conjunto cerrado, acotado y convexo de $L^\infty(\Omega)$.

$$C_\beta = \left\{ f = \beta g : 0 \leq g(x) \leq 1 \text{ c.t.p.} \wedge \int_{\Omega} g \, dx = V \right\}$$

donde $0 < V < \beta \mu(\Omega)$.

El problema que estudiaremos es el siguiente:

$$(P_0) \min_{f \in C_\beta} \min_{u \in H_0^1(\Omega)} J(f, u);$$

donde

$$J(f, u) = \|\nabla u\|^2 + \langle (u-u)^2, f \rangle \wedge u > 0.$$

Recordemos que $\|\cdot\|$ representa la norma de $L^2(\Omega)$. Y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a la dualidad $\langle L^1(\Omega), L^\infty(\Omega) \rangle$. i.e.

$$\langle h, f \rangle = \int_{\Omega} h f \, dx \quad ; \forall h \in L^1(\Omega), f \in L^\infty(\Omega).$$

Para cada $f \in L^\infty(\Omega)^+$ sea $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por:

$$J_f(u) = J(f, u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

B. Propiedades del funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Proposición:

El funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es G-diferenciable.

Demostración:

Sean $u \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

$$J_f(u + \theta\varphi) = \|\nabla(u + \theta\varphi)\|^2 + \langle (u + \theta\varphi - u)^2, f \rangle;$$

Entonces

$$J_f(u+\theta\varphi) = \|\nabla u\|^2 + 2\theta \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \theta^2 \|\nabla \varphi\|^2 + \langle (u-u)^2, f \rangle \\ + 2\theta \langle (u-u)\varphi, f \rangle + \theta^2 \langle \varphi^2, f \rangle.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{J_f(u+\theta\varphi) - J_f(u)}{\theta} = 2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle (u-u)\varphi, f \rangle \quad \text{i.e.}$$

$$J_f'(u, \varphi) = 2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle (u-u)\varphi, f \rangle. \quad \text{Q.E.D.}$$

2. Proposición:

El funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces G-diferenciable.

Demostración:

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$.

Sean $\varphi, \psi \in H_0^1(\Omega)$.

$$J_f'(u+\theta\psi, \varphi) = 2 \langle \nabla(u+\theta\psi), \nabla \varphi \rangle + 2 \langle (u+\theta\psi-u)\varphi, f \rangle \\ = 2 \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + 2\theta \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle (u-u)\varphi, f \rangle + 2\theta \langle \psi\varphi, f \rangle$$

Entonces

$$\frac{J_f'(u+\theta\psi, \varphi) - J_f'(u, \varphi)}{\theta} = 2 \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle \psi\varphi, f \rangle ;$$

Por lo tanto

$$J_f''(u, \varphi, \psi) = 2 \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle \psi\varphi, f \rangle.$$

3. Proposición:

El funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexo.

Demostración:

J_f es dos veces G-diferenciable y

$$J_f''(u, \varphi, \varphi) = 2 \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle + 2 \langle \varphi^2, f \rangle \\ = 2 \|\nabla \varphi\|^2 + 2 \langle \varphi^2, f \rangle.$$

Como $f \in L^\infty(\Omega)^+$, entonces $f \geq 0$ y $\langle \varphi^2, f \rangle \geq 0$

Y por el corolario II.C. 4.4., $\varphi = 0 \Leftrightarrow \|\nabla\varphi\| = 0$.

Entonces

$$\varphi \neq 0 \Rightarrow J_f''(u, \varphi, \varphi) > 0.$$

Y por la proposición I.A. 2.2.4., J_f es estrictamente convexa.

4. Proposición:

El funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ es débilmente semicontinuo inferiormente.

Demostración:

Sea $u_n \rightarrow u$ en la topología débil de $H_0^1(\Omega)$.

Entonces, por el teorema de inyección de Rellich-Kondrasov (II.C. 4.2.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0. \quad (\text{Ver Reed y Simon (1980:199)}).$$

Como J_f es convexa y G-diferenciable, por I.A. 2.2.3. tenemos que:

$$J_f(u_n) \geq J_f(u) + J_f'(u, u_n - u) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Ahora bien, $J_f'(u, u_n - u) = Z(\nabla u, \nabla(u_n - u)) + Z\langle (u - u)(u_n - u), f \rangle$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (u - u)(u_n - u), f \rangle = 0$$

Como $u_n \rightarrow u$ débilmente en H_0^1 , entonces

$$(u, u_n)_1 \rightarrow (u, u)_1 \quad \text{i.e.}$$

$$(\nabla u, \nabla u_n) + (u, u_n) \rightarrow (\nabla u, \nabla u) + (u, u).$$

Como $(u, u_n) \rightarrow (u, u)$, arriba obtenemos que $(\nabla u, \nabla u_n) \rightarrow (\nabla u, \nabla u)$.

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\nabla u, \nabla(u_n - u)) = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} J_f'(u, u_n - u) = 0.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_f(u_n) \geq J_f(u)$$

$\therefore J_f$ es débilmente semicontinuo inferiormente.

5. Proposición:

El funcional $J_f: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un único mínimo absoluto.

Demostración:

$H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo.

Por el corolario II.C. 4.5.

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow \infty} \|\nabla u\|^2 = \infty.$$

Y como $f \geq 0$, entonces

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow \infty} J_f(u) = \infty.$$

Por las proposiciones II.B. 1.2. y 1.3., existe un único $u_f \in H_0^1(\Omega)$ que es un mínimo absoluto de J_f . $Q.E.D.$

Por la prop. II.C. 1.3., el mínimo de J_f está caracterizado por:

$$J_f'(u_f, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad \text{i.e.}$$

$$(\nabla u_f, \nabla \varphi) = \langle (U - u_f)\varphi, f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

La ecuación anterior caracteriza a la solución débil del problema:

$$\Delta u_f = (u_f - U) f \quad \text{en } \Omega$$

$$u_f = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

Y si $\partial\Omega$ es "suficientemente regular", entonces $u_f \in C(\bar{\Omega})$ y $0 < u_f < U$ en Ω . (Ver. Gonzalez (1982:178)).

Los resultados anteriores permiten la definición del funcional:

$$\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \Phi(f) = J_f(u_f) = \min_{u \in H_0^1} J_f(u).$$

Y el problema (P_0) se transforma en:

$$(P_1) \min_{f \in C_f} \Phi(f).$$

C. Propiedades del funcional $\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Proposición:

El funcional $\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncavo.

Demostración:

Sean $f_1, f_2 \in L^\infty(\Omega)^+$ y $\alpha \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2) &= \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left[\|\nabla u\|^2 + \langle (u-u)^2, \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2 \rangle \right] \\ &= \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left[\alpha (\|\nabla u\|^2 + \langle (u-u)^2, f_1 \rangle) + (1-\alpha) (\|\nabla u\|^2 + \langle (u-u)^2, f_2 \rangle) \right] \\ &\geq \alpha \Phi(f_1) + (1-\alpha) \Phi(f_2). \end{aligned}$$

$\therefore \Phi$ es cóncava. Q.E.D.

$\Phi(f) = J_f(u_f)$ donde u_f está caracterizado por:

$$(\nabla u_f, \nabla \varphi) = \langle (u - u_f) \varphi, f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Substituyendo en la ecuación anterior φ por u_f , tenemos que

$$(\nabla u_f, \nabla u_f) = \langle (u - u_f) u_f, f \rangle,$$

y entonces:

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= (\nabla u_f, \nabla u_f) + \langle (u_f - u)^2, f \rangle \\ &= \langle (u - u_f) u_f, f \rangle + \langle (u_f - u)^2, f \rangle \\ &= \langle u u_f, f \rangle - \langle u_f^2, f \rangle + \langle u_f^2, f \rangle - 2 \langle u u_f, f \rangle + \langle u^2, f \rangle \\ &= \langle u(u_f - 2u_f + u), f \rangle \\ &= \langle u(u - u_f), f \rangle. \end{aligned}$$

Sea $B_R = \{ f \in L^\infty(\Omega)^+ : \|f\|_\infty \leq R \}$, $R > 0$.

2. Lema:

Si $f_n \rightarrow f$ en la topología *-débil (en B_R), entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que:

$$\Phi(f_{n_k}) \rightarrow \Phi(f)$$

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u_n, \nabla \varphi) = \langle (U - u_n)\varphi, f_n \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Substituyendo φ por u_n , tenemos que:

$$\|\nabla u_n\|^2 = \langle (U - u_n)u_n, f_n \rangle \leq U^2 \mu(\Omega) R$$

Entonces $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$, y existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es débilmente convergente hacia algún $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$.

Por el teorema de inyección de Rellich-Kondrasov (II.C. 4.2.)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| \bar{u} - u_{n_k} \| = 0$$

Vamos a probar ahora que $\bar{u} = u_f$.

Sea $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Como $u_{n_k} \rightarrow \bar{u}$ débilmente, entonces

$$(\nabla u_{n_k}, \nabla \varphi) + (u_{n_k}, \varphi) \rightarrow (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) + (\bar{u}, \varphi)$$

Y como $(u_{n_k}, \varphi) \rightarrow (\bar{u}, \varphi)$ entonces $(\nabla u_{n_k}, \nabla \varphi) \rightarrow (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi)$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\begin{cases} k \geq N \Rightarrow \|u_{n_k} - \bar{u}\| < \varepsilon/4R\|\varphi\| \\ k \geq N \Rightarrow |\langle (U - \bar{u})\varphi, f_{n_k} - f \rangle| < \varepsilon/4 \\ k \geq N \Rightarrow |(\nabla u_{n_k}, \nabla \varphi) - (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi)| < \varepsilon/2 \end{cases}$$

entonces para $k \geq N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |(\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) - \langle (v - \bar{u})\varphi, f \rangle| &\leq |(\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) - (\nabla u_{n_k}, \nabla \varphi)| + |(\nabla u_{n_k}, \nabla \varphi) - \langle (v - u_{n_k})\varphi, f_{n_k} \rangle| \\
 &\quad + |\langle (v - u_{n_k})\varphi, f_{n_k} \rangle - \langle (v - \bar{u})\varphi, f_{n_k} \rangle| + |\langle (v - \bar{u})\varphi, f_{n_k} - f \rangle| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon \|\varphi\| \|f_{n_k}\|_{L^\infty}}{4R \|\varphi\|} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

$$\therefore (\nabla \bar{u}, \nabla \varphi) = \langle (v - \bar{u})\varphi, f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

$$\therefore \bar{u} = u_f.$$

Vamos a probar ahora que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(f_{n_k}) = \Phi(f)$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\begin{cases}
 k \geq N \Rightarrow \|u_{n_k} - u_f\| < \varepsilon / 4R U \mu(\Omega) \\
 k \geq N \Rightarrow |\langle U u_f, f_{n_k} - f \rangle| < \varepsilon / 4 \\
 k \geq N \Rightarrow |\langle U^2, f_{n_k} - f \rangle| < \varepsilon / 4
 \end{cases}$$

entonces para $k \geq N$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |\Phi(f_{n_k}) - \Phi(f)| &= |\langle U^2, f_{n_k} \rangle - \langle U u_{n_k}, f_{n_k} \rangle - \langle U^2, f \rangle + \langle U u_f, f \rangle| \\
 &\leq |\langle U^2, f_{n_k} - f \rangle| + |\langle U u_f, f \rangle - \langle U u_{n_k}, f_{n_k} \rangle| \\
 &\leq |\langle U^2, f_{n_k} - f \rangle| + |\langle U u_f, f \rangle - \langle U u_f, f_{n_k} \rangle| \\
 &\quad + |\langle U u_f, f_{n_k} \rangle - \langle U u_{n_k}, f_{n_k} \rangle| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{U \mu(\Omega) \varepsilon \|f_{n_k}\|_{L^\infty}}{2R U \mu(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon. \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

3. Proposición:

El funcional $\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo para la topología *-débil.

Demostración:

Sea $f_n \rightarrow f$ en la topología *-débil (en $L^\infty(\Omega)^+$).

Entonces $(f_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión acotada en $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty})$. i.e.

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \|f_n\|_{L^\infty} \leq R < \infty \quad (\text{Ver Hu(1967:258)}).$$

5. Lema:

Si $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$ entonces

$$\Phi'_+(f, g-f) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(f+\theta(g-f)) - \Phi(f)}{\theta} = \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle.$$

Demostración:

Sean $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$, $\theta \in (0, 1]$

$$u_{f+\theta(g-f)} = u_f + \theta \left(\frac{u_{f+\theta(g-f)} - u_f}{\theta} \right) \quad \text{y sea} \quad v_\theta = \frac{u_{f+\theta(g-f)} - u_f}{\theta}$$

Es fácil ver que v_θ está caracterizado por:

$$(\nabla v_\theta, \nabla \varphi) + \langle v_\theta \varphi, f \rangle = \langle (u - u_{f+\theta(g-f)}) \varphi, g-f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Substituyendo φ por v_θ en la ecuación anterior, tenemos que

$$\|\nabla v_\theta\|^2 + \langle v_\theta^2, f \rangle = \langle (u - u_{f+\theta(g-f)}) v_\theta, g-f \rangle$$

Entonces

$$\|\nabla v_\theta\|^2 \leq U \mu(\Omega)^{1/2} \|v_\theta\| \|g-f\|_\infty.$$

y usando la desigualdad de Poincare (II.C. 4.3.),

$$\|\nabla v_\theta\|^2 \leq C \|\nabla v_\theta\|$$

donde C depende de $U, \Omega, g-f$.

$\therefore \{v_\theta : \theta \in (0, 1]\}$ está acotado en $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \Phi(f+\theta(g-f)) &= \int_{f+\theta(g-f)} (u_{f+\theta(g-f)}) \\ &= \|\nabla(u_f + \theta v_\theta)\|^2 + \langle (u_f + \theta v_\theta - u)^2, f + \theta(g-f) \rangle \\ &= \|\nabla u_f\|^2 + 2\theta (\nabla u_f, \nabla v_\theta) + \theta^2 \|\nabla v_\theta\|^2 + \langle (u_f - u)^2, f \rangle \\ &\quad + 2\theta \langle (u_f - u) v_\theta, f \rangle + \theta^2 \langle v_\theta^2, f \rangle + \theta \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle \\ &\quad + 2\theta^2 \langle (u_f - u) v_\theta, g-f \rangle + \theta^3 \langle v_\theta^2, g-f \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(f+\theta(g-f)) - \Phi(f)}{\theta} &= 2 [(\nabla u_f, \nabla v_\theta) + \langle (u_f - u) v_\theta, f \rangle \\ &\quad + \theta \|\nabla v_\theta\|^2 + \theta \langle v_\theta^2, f \rangle + 2\theta \langle (u_f - u) v_\theta, g-f \rangle \\ &\quad + \theta^2 \langle v_\theta^2, g-f \rangle + \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle]. \end{aligned}$$

Por la caracterización de u_f ,

$$(\nabla u_f, \nabla v_\theta) + \langle (u_f - v) v_\theta, f \rangle = 0 \quad \forall \theta \in (0, 1].$$

Y como $\{v_\theta : \theta \in (0, 1]\}$ está acotado, entonces

$$\Phi'_+(\langle f, g-f \rangle) = \langle (u_f - v)^2, g-f \rangle. \quad \text{Q.E.D.}$$

6. Lema:

Si $f, g \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi'_+(\langle f + \theta(g-f), g-f \rangle) - \Phi'_+(\langle f, g-f \rangle)}{\theta}$$

existe, y es negativo si $f \neq g$.

Demostración:

Sean $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$, $\theta \in (0, 1]$.

Sea $v_\theta = \frac{u_{f+\theta(g-f)} - u_f}{\theta}$.

v_θ está caracterizado por

$$(\nabla v_\theta, \nabla \varphi) + \langle v_\theta \varphi, f \rangle = \langle (v - u_{f+\theta(g-f)}) \varphi, g-f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos a probar que $\lim_{\theta \rightarrow 0} v_\theta$ existe, cuando el límite es tomado respecto de la topología débil de $H_0^1(\Omega)$.

Sea $(\theta_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $(0, 1]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$.

Como $(v_{\theta_n})_{n=1}^\infty$ está acotada, existe una subsucesión $(v_{\theta_{n_k}})_{k=1}^\infty$ de $(v_{\theta_n})_{n=1}^\infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} v_{\theta_{n_k}} = \tilde{u}_f$ para algún $\tilde{u}_f \in H_0^1(\Omega)$, donde el límite está tomado respecto de la topología débil de $H_0^1(\Omega)$.

Puede probarse que \tilde{u}_f satisface la ecuación:

$$(\nabla \tilde{u}_f, \nabla \varphi) + \langle \tilde{u}_f \varphi, f \rangle = \langle (v - u_f) \varphi, g-f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

y que la ecuación anterior tiene una única solución.

Y similarmente al lema 2, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} v_\theta = \tilde{u}_f$.

5. Lema:

Si $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$ entonces

$$\Phi'_+(f, g-f) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(f+\theta(g-f)) - \Phi(f)}{\theta} = \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle.$$

Demostración:

Sean $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$, $\theta \in (0, 1]$

$$u_{f+\theta(g-f)} = u_f + \theta \left(\frac{u_{f+\theta(g-f)} - u_f}{\theta} \right) \quad \text{y sea} \quad v_\theta = \frac{u_{f+\theta(g-f)} - u_f}{\theta}$$

Es fácil ver que v_θ está caracterizado por:

$$(\nabla v_\theta, \nabla \varphi) + \langle v_\theta \varphi, f \rangle = \langle (u - u_{f+\theta(g-f)}) \varphi, g-f \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Substituyendo φ por v_θ en la ecuación anterior, tenemos que

$$\|\nabla v_\theta\|^2 + \langle v_\theta^2, f \rangle = \langle (u - u_{f+\theta(g-f)}) v_\theta, g-f \rangle$$

Entonces

$$\|\nabla v_\theta\|^2 \leq U \mu(\Omega)^{1/2} \|v_\theta\| \|g-f\|_\infty.$$

y usando la desigualdad de Poincaré (II.C. 4.3.),

$$\|\nabla v_\theta\|^2 \leq C \|\nabla v_\theta\|$$

donde C depende de $U, \Omega, g-f$.

$\therefore \{v_\theta : \theta \in (0, 1]\}$ está acotado en $H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \Phi(f+\theta(g-f)) &= \int_{f+\theta(g-f)} (u_{f+\theta(g-f)}) \\ &= \|\nabla(u_f + \theta v_\theta)\|^2 + \langle (u_f + \theta v_\theta - u)^2, f + \theta(g-f) \rangle \\ &= \|\nabla u_f\|^2 + 2\theta (\nabla u_f, \nabla v_\theta) + \theta^2 \|\nabla v_\theta\|^2 + \langle (u_f - u)^2, f \rangle \\ &\quad + 2\theta \langle (u_f - u) v_\theta, f \rangle + \theta^2 \langle v_\theta^2, f \rangle + \theta \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle \\ &\quad + 2\theta^2 \langle (u_f - u) v_\theta, g-f \rangle + \theta^3 \langle v_\theta^2, g-f \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(f+\theta(g-f)) - \Phi(f)}{\theta} &= 2 [(\nabla u_f, \nabla v_\theta) + \langle (u_f - u) v_\theta, f \rangle \\ &\quad + \theta \|\nabla v_\theta\|^2 + \theta \langle v_\theta^2, f \rangle + 2\theta \langle (u_f - u) v_\theta, g-f \rangle \\ &\quad + \theta^2 \langle v_\theta^2, g-f \rangle + \langle (u_f - u)^2, g-f \rangle]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(f+\theta(g-f), g-f) &= \langle (u_{f+\theta(g-f)} - u)^2, g-f \rangle \\ &= \langle u_{f+\theta(g-f)}^2, g-f \rangle - 2 \langle u_{f+\theta(g-f)} u, g-f \rangle + \langle u^2, g-f \rangle\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\Phi'(f+\theta(g-f), g-f) - \Phi'(f, g-f)}{\theta} &= \frac{\langle u_{f+\theta(g-f)}^2 - u_f^2, g-f \rangle - 2 \langle (u_{f+\theta(g-f)} - u_f) u, g-f \rangle}{\theta} \\ &= \langle (u_{f+\theta(g-f)} + u_f) v_\theta, g-f \rangle - 2 \langle v_\theta u, g-f \rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi'(f+\theta(g-f), g-f) - \Phi'(f, g-f)}{\theta} &= 2 [\langle u_f \dot{u}_f, g-f \rangle - \langle \dot{u}_f u, g-f \rangle] \\ &= 2 \langle \dot{u}_f (u_f - u), g-f \rangle.\end{aligned}$$

Substituyendo φ por \dot{u}_f en la ecuación característica de u_f , tenemos que:

$$\|\nabla \dot{u}_f\|^2 + \langle \dot{u}_f^2, f \rangle = \langle (u - u_f) \dot{u}_f, g-f \rangle$$

Y entonces

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi_+(f+\theta(g-f), g-f) - \Phi_+(f, g-f)}{\theta} = -2 [\|\nabla \dot{u}_f\|^2 + \langle \dot{u}_f^2, f \rangle].$$

Si $f \neq g$ entonces como $u - u_f > 0$ c.t.p., $\dot{u}_f \neq 0$. Q.E.D.

7. Proposición:

El funcional $\Phi: L^\infty(\Omega)^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente cóncavo.

Demostración:

Supongamos que Φ no es estrictamente cóncavo. i.e.

existen $f, g \in L^\infty(\Omega)^+$, $f \neq g$ y $\theta_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\Phi(f + \theta_0(g-f)) = \Phi(f) + \theta_0(\Phi(g) - \Phi(f))$$

Sea $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} :: \theta \mapsto h(\theta) = \Phi(f + \theta(g-f))$.

Es fácil ver que h es cóncava. Y como

$$h(\theta_0) = \theta_0 h(1) + (1 - \theta_0) h(0)$$

entonces h es lineal.

además $h'_+(\theta) = \Phi'_+(\ell + \theta(g-\ell), g-\ell) = \text{cte.}$ si $\theta \in [0, 1)$.

Entonces

$$0 > \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\Phi'_+(\ell + \theta(g-\ell), g-\ell) - \Phi'_+(\ell, g-\ell)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{h'_+(\theta) - h'_+(0)}{\theta} = 0,$$

que es una contradicción.

$\therefore \Phi$ es estrictamente cóncavo.

D. Características de la solución.

1. Proposición:

El problema $\min_{f \in C_\beta} \Phi(f)$ tiene solución.

Demostración:

C_β es compacto en la topología *-débil de $L^\infty(\Omega)$ (Ver Rudin(1979:65)), y como Φ es continua para esa topología, existe la solución. **Q.E.D.**

Definición:

$f \in C_\beta$ es un punto extremal de C_β si se satisface la siguiente condición: $[f_1, f_2 \in C_\beta \wedge \alpha \in (0, 1) \wedge \alpha f_1 + (1-\alpha) f_2 = f] \Rightarrow f_1 = f_2 = f$.

2. Lema:

Los puntos extremales de C_β son de la forma $\beta \chi_A$ donde A es un conjunto medible de Ω y tiene medida V .

Demostración:

Sea f un punto extremal de C_β .

Supongamos que para algún $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$E = \{x \in \Omega : f(x) \in [0 + \varepsilon, \beta - \varepsilon]\}$$

tiene medida positiva.

Sea $F \subset E$, medible, tal que $\mu(F) = \frac{1}{2}\mu(E)$ y sea $h = \varepsilon(2\chi_F - \chi_E)$

Es claro que $\int_{\Omega} h \omega dx = 0$, $|h(x)| \leq \varepsilon \forall x \in \Omega$ y $h \neq 0$.

Entonces $f+h, f-h \in C_{\beta}$ y $f = \frac{1}{2}(f+h) + \frac{1}{2}(f-h)$,

contradiciendo que f es un punto extremal de C_{β} .

$\therefore f$ es de la forma $\beta \chi_A$. Q.E.D.

3. Proposición:

Las soluciones del problema $\min_{f \in C_{\beta}} \Phi(f)$ son puntos extremales de C_{β} .

Demostración:

Sea $f \in C_{\beta}$ una solución del problema.

Sean $f_1, f_2 \in C_{\beta}$ y $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha f_1 + (1-\alpha)f_2 = f$.

Si $f_1 \neq f_2$ entonces como Φ es estrictamente cóncava tenemos que:

$$\Phi(f) > \alpha \Phi(f_1) + (1-\alpha)\Phi(f_2) \geq \alpha \Phi(f) + (1-\alpha)\Phi(f) = \Phi(f),$$

que es una contradicción.

$\therefore f$ es un punto extremal de C_{β} . Q.E.D.

Sea $C_{\beta}^{\circ} = \{ \beta \chi_A : A \text{ es medible y } \mu(A) = \nu \}$.

De las proposiciones anteriores se deduce que el problema

$$(P_1) \min_{f \in C_{\beta}} \Phi(f)$$

es equivalente a:

$$(P_2) \min_{f \in C_{\beta}^{\circ}} \Phi(f)$$

que es un problema de optimización de dominio.

IV. BIBLIOGRAFIA

- Céa, J. y K. Malanowski. "An example of a max-min problem in partial
1970 diferencial equations". SIAM J. Control (E.E.U.U.) 8 (3) :
305-316.
- Céa, J. Optimisation, théorie et algorithmes. Paris, Dunod. 227 pp.
1971
- González, R. "Sur un problème d'optimisation de domaine". Numerical
1982 functional analysis and optimization. (E.E.U.U.) 5 (2):173-197
- Haaser, N.; J. LaSalle y J. Sullivan. Análisis matemático 1. México,
1977 Editorial Trillas. 810 pp.
- Hu, S. Elements of real analysis. California, Holden-Day. 365 pp.
1967
- Khoan, V. Distributions analyse de Fourier opérateurs aux dérivées
1972 partielles. Paris, Vuibert. 292 pp.
- Reed, M. y B. Simon. Methods of modern mathematical physics I: Funcio-
1980 nal analysis. New York, Academic Press, Inc. 400 pp.
- Rudin, W. Análisis funcional. España, Editorial Reverté, S.A.. 397 pp.
1979
- Vainberg, M. Variational method and method of monotone operators. New
1972 York, John Wiley & Sons. 356 pp.
- Voigt, A. y J. Wloka. Hilbertraume und elliptische differential-opera-
1974 toren. Zurich, Wissenschaftsverlag. 260 pp.

