UN ANALOGO AL TEOREMA DE TAYLOR PARA FUNCIONES BOOLEANAS

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ciencias y Humanidades

Departamento de Matemática

UN ANALOGO AL TEOREMA DE TAYLOR PARA FUNCIONES BOOLEANAS

PAULO VLADIMIR MEJIA CASTILLO

Trabajo de graduación presentado para optar el grado académico de Licenciado en Matemática

Guatemala

1996

Vo. Bo.:

(f)____

Licenciado Dorval José Manuel Carías Samayoa

Asesor

Tribunal:

(f)____

Doctor Raúl Benjamín González de Paz

(f)____

Doctor Roberto Antonio Molina Cruz

(f)____

Licenciado Dorval José Manuel Carías Samayoa

Fecha de aprobación: 23 de agosto de 1996.

Agradecimiento a:

Todos aquellos que ayudaron en la preparación del documento. Agradezco especialmente a mis padres, Rubén Mejía y Luz de Mejía, por la comprensión y apoyo que me brindaron. También la colaboración del Lic. Dorval Carías y de mi novia Jessica.

PREFACIO

Los rápidos avances del conocimiento científico en todas sus ramas, particularmente en las ciencias de la computación, la electrónica, y la tecnología en general, ha significado un reto para el quehacer matemático de la actualidad. Es por ello que la Matemática Discreta, cuyo objeto de estudio lo constituyen las propiedades de las funciones con dominio de cardinalidad a lo más contable, se ha constituído, junto a la Lógica Formal, en la herramienta teórica fundamental para el análisis y diseño de modelos que apoyan la sostenibilidad del mencionado desarrollo tecnológico.

Una de las características de la teoría de funciones discretas es la inexistencia del concepto de límite, tal como se estudia en el análisis matemático real y complejo. En el presente trabajo de investigación, se presenta una propuesta de reciente desarrollo formal, en la que, de una manera heurística, se define el concepto de derivada para funciones discretas definidas, en una estructura de álgebra booleana, utilizando su interpretación de incrementos. En base a este concepto, se propone un ánalogo discreto al Teorema de Taylor para funciones booleanas. Igualmente se realiza, a manera de aplicación en la teoría de electrónica, con las señales discretas. Además, se presenta una metodología para la optimización del método de cascada, con el fin de evaluar el grado de relación entre una función y un bloque de variables de exclusión.

CONTENIDO

I. INTRODUCCION

A. Definiciones Preliminares

Un conjunto es un ente indefinible cuyos sinónimos son: colección, agrupación, etc.

Definición: A los objetos que forman un conjunto se les llama elementos.

Notación: Si x es elemento del conjunto M se notará $x \in M$. En caso contrario se escribirá $x \notin M$.

Definición: El conjunto A se denomina subconjunto de B si y sólo si, todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B (es decir, si $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$). En el caso en que A es un subconjunto de B y A no es igual a B se dice que A es un subconjunto propio de B.

Notación: A es subconjunto de B se denotará $A \subseteq B$.

Definición: Para cualquier A y B conjuntos. Se dice que $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Definición: Para cada conjunto A existe un conjunto, cuyos elementos son los subconjuntos del conjunto A y sólo ellos. Tal conjunto se llamará el conjunto potencia de A.

Notación: $P(A)$.

Definición: Un conjunto M del tipo, M={(a,b) : a∈A y b∈B} donde A y B son conjuntos, se denomina Producto Cartesiano de A con B.

Notación: A×B.

Definición: El subconjunto F⊆A×B se llama función, si para cada uno de los elementos x∈A existe un elemento único y∈B tal que (x,y)∈F. Si para cada x∈A existe un elemento y∈B tal que (x,y)∈F, la función se denominará completamente definida. En caso contrario, parcialmente definida. Al conjunto A se le llama dominio de la función F y al conjunto B se le llamará contradominio de la función F.

Notación: (x,y)∈F se escribe a veces como y=F(x) donde y es el valor de F y x es el argumento de F.

Definición: Llámese Producto Cartesiano M=$M_1 \times \ldots \times M_n$ de los conjuntos $M_1, \ldots, M_n$ al conjunto M={ $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_n})$: $m_{i_1} \in M_1, \ldots, m_{i_n} \in M_n$ }.

Nota: Si en la definición de función, A es el producto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n$, se obtiene la definición de función n-ádica.

Definición: Una operación n-ádica en el conjunto $M_1 \times \ldots \times M_n$ es una función n-ádica y=F($x_1, \ldots, x_n$), cuyos dominio $M_1 \times \ldots \times M_n$ y contradominio B satisfacen $M_1 = \ldots = M_n$=B.

Definición: La unión A∪B de los conjuntos A y B es el conjunto: A∪B={ x : x∈A o x∈B}. La intersección A∩B de los conjuntos A y B es el conjunto: A∩B={ x : x∈A y x∈B}. La diferencia $A \setminus B$ de los conjuntos A y B es el conjunto: $A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ y } x \notin B \}$. El complemento $\sim A$ del conjunto A, es el conjunto: $\sim A = \{ x : x \notin A \}$.

Definición: Una función F se llama inyectiva ssi, para cada x,y del dominio de definición de F, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definición: Una función F se llama sobreyectiva ssi para cada elemento y del contradominio de F, $\exists x$ del dominio de F tal que $y=f(x)$.

Definición: Una función F se llama biyectiva o correspondencia biunívoca si y sólo si F es sobreyectiva e inyectiva.

Definición: Se dice que dos conjuntos son cardinalmente equivalentes si, y sólo si, existe una correspondencia biunívoca entre ellos.

Definición: Se dice que un conjunto A es infinito si, y sólo si, A es cardinalmente equivalente a un subconjunto propio de A.

Definición: Un conjunto A es un conjunto finito si, y sólo si, A no es un conjunto infinito.

Definición: Para cualquier $f:A \rightarrow B$ y $g:B \rightarrow C$ funciones. Se dice que la composición de funciones de f y g es la función $g \circ f$: $A \rightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, $\forall x \in A$.

Definición: Para cualquier $f:X\rightarrow Y$ y $g:X\rightarrow Y$ funciones. Se dice que $f=g$ ssi $f(x)=g(x)$, $\forall x\in X$.

Definición: Un álgebra A es una colección del conjunto $M\neq\emptyset$ con operaciones prefijadas en éste S.

Notación: $A=\langle M,S\rangle$.

Nota: Para identificar un todo común que contiene objetos de distintas estructuras matemáticas, por ejemplo, un conjunto y operaciones en él, se propuso utilizar el término colección y designarlo con los paréntesis angulares $\langle,\rangle$.

Definición: Se denomina relación binaria T en el conjunto M, a cualquier subconjunto del producto cartesiano de M con él mismo, $M\times M$.

Nota: Uno de los conceptos fundamentales, en el estudio de la matemática discreta, es el de relación binaria , ya que se utiliza para designar la ligazón entre objetos o nociones.

Definición: Sea T una relación binaria. Por relación binaria inversa de T, T^{-1}, se comprende aquella tal que $(x,y)\in T^{-1}$ si y sólo si $(y,x)\in T$.

Definición: Una relación binaria T definida en el conjunto M se llama reflexiva, si $\forall x\in M$, $(x,x)\in T$.

Definición: Una relación binaria T en el conjunto M se llama antisimétrica, si $(x,y)\in T$ y $(y,x)\in T\Rightarrow x=y$.

Definición: Una relación binaria T en el conjunto M se llama transitiva, si $(x,y) \in T$ y $(y,z) \in T$ $\Rightarrow (x,z) \in T$.

Definición: Una relación binaria T en el conjunto M se llama relación de orden parcial y se designa con $\leq$, si cumple con ser reflexiva, antisimétrica y transitiva .

Definición: Un conjunto M en el cual se define una relación de orden parcial $\leq$, se denomina conjunto parcialmente ordenado.

1. Teorema: (Principio de Dualidad) La relación binaria inversa de la relación de orden parcial $\leq$ es también una relación de orden parcial. La relación binaria inversa se designará por $\leq_T$.

Demostración: : Sea M un conjunto parcialmente ordenado respecto a $\leq$.

Como $a \leq a$, $\forall a \in M$, por ser la relación $\leq$ reflexiva, entonces $a \leq_T a$, $\forall a \in M$.

Sean $a,b \in M$. Si $a \leq_T b$ y $b \leq_T a \Rightarrow b \leq a$ y $a \leq b \Rightarrow a=b$, por ser la relación $\leq$ antisimétrica.

Sean $a,b,c \in M$. Si $a \leq_T b$ y $b \leq_T c \Rightarrow c \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow c \leq a \Rightarrow a \leq_T c$, por ser la relación $\leq$ transitiva.

Por lo tanto, la relación $\leq_T$ es de orden parcial □

Definición: Se llama dual del conjunto parcialmente ordenado M, el conjunto parcialmente ordenado M definido sobre el mismo conjunto M empleando la relación binaria inversa.

Nota: Es usual encontrar la siguiente formulación del principio de dualidad: Si un teorema es válido para los conjuntos parcialmente ordenados también es válido su teorema dual.

<u>Definición</u>: Sea $a,b \in M$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $c \in M$ es cota superior de a y b ,si $a \leq c$ y $b \leq c$.

<u>Definición</u>: Sea $a,b \in M$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $d \in M$ es cota inferior de a y b, si $d \leq a$ y $d \leq b$.

<u>Definición</u>: Sea $a,b \in M$ un conjunto parcialemente ordenado. Un elemento $c \in M$ es la menor cota superior (supremo) de a y b, si:

i) c es cota superior de a y b.

ii) no existe d, cota superior de a y b, tal que $d \leq c$.

<u>Notación</u>: sup(a,b) es el supremo de a y b.

<u>Definición</u>: Sean $a,b \in M$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $c \in M$ es la mayor cota inferior (ínfimo) de a y b, si:

i) c es cota inferior de a y b.

ii) no existe d, cota inferior de a y b, tal que $c \leq d$.

<u>Notación</u>: inf(a,b) es el ínfimo de a y b.

<u>Definición</u>: Sea $a \in M$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $c \in M$ cubre al elemento a si no existe $b \in M$ tal que $a \leq b \leq c$.

B. Retículos

Definición: Llámase retículo a un conjunto parcialmente ordenado $<M,\leq>$, en el cual cualquiera de dos elementos $a,b\in M$ tienen un único ínfimo y un único supremo.

Sea $<M,\leq>$ un retículo. Defínase el sistema algebraico $<M,v,\wedge>$, donde v y ^ son operaciones binarias en M tales que sólo, para cualquier $a,b\in M$, $avb=\sup(a,b)$ y $a\wedge b=\inf(a,b)$.

1. Teorema: Si M es un retículo con la relación de orden parcial $\leq$, M conserva su calidad de retículo, si se considera con la relación de orden parcial dual a la dada, designada por $\leq_T$.

Demostración: Por el principio de dualidad se tiene que la relación dual $\leq_T$ es un orden parcial en M.

Sean $a,b\in M$.

Pruébese que el supremo de a y b con la relación dual $\leq_T$ es $a\wedge b$.

Como $a\wedge b\leq a$ y $a\wedge b\leq b \Rightarrow a \leq_T a\wedge b$ y $b\leq_T a\wedge b \Rightarrow a\wedge b$ es cota superior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial. Sea c una cota superior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial, entonces $a\leq_T c$ y $b\leq_T c \Rightarrow c\leq a$ y $c\leq b \Rightarrow c\leq a\wedge b$ por ser $a\wedge b$ la mayor cota inferior de a y b $\Rightarrow$ $a\wedge b\leq_T c \Rightarrow a\wedge b$ es la menor cota superior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial. Nótese que el supremo de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial es único porque el ínfimo con la relación $\leq$ de orden parcial es único por ser $<M,\leq>$ un retículo.

Pruébese ahora, que el ínfimo de a y b con la relación dual $\leq_T$ es avb.

Como $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b \Rightarrow a \vee b \leq_T a$ y $a \vee b \leq_T b \Rightarrow a \vee b$ es cota inferior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial. Sea c una cota inferior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial. Entonces $c \leq_T a$ y $c \leq_T b \Rightarrow a \leq c$ y $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$ por ser $a \vee b$ la menor cota superior de a y b, por lo tanto $c \leq_T a \vee b \Rightarrow a \vee b$ es la mayor cota inferior de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial. Nótese que el ínfimo de a y b con la relación $\leq_T$ de orden parcial, es único porque el supremo con la relación $\leq$ de orden parcial es único por ser $<M, \leq>$ un retículo □

<u>Notación</u>: Utilizando la relación $\leq_T$ de orden parcial, se designará $\sup(a,b)=a \underline{\vee} b$ y $\inf(a,b)=a \underline{\wedge} b$.

2. <u>Teorema</u>: Para cualquier a y b en un retículo $<M, \leq>$ se tiene $a \leq a \vee b$ y $a \wedge b \leq a$.

<u>Demostración</u>: Por definición, $a \vee b$ es cota superior de a. Entonces, $a \leq a \vee b$. De igual manera, por definición, $a \wedge b$ es cota inferior de a. Entonces, $a \wedge b \leq a$ □

3. <u>Teorema</u>: Para cualquier a,b,c,d en un retículo $<M, \leq>$, si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.

<u>Demostración</u>: Como $b \leq b \vee d$ y $d \leq b \vee d$ por el teorema anterior. Por hipótesis y por transitividad se tiene: $a \leq b \vee d$ y $c \leq b \vee d$. Por tanto, $b \vee d$ es cota superior de a y c. Pero la menor cota superior de a y c es $a \vee c$ entonces, $a \vee c \leq b \vee d$. De igual forma, como $a \wedge c \leq a$ y $a \wedge c \leq c$ por el teorema anterior. Por hipótesis y por transitividad se tiene: $a \wedge c \leq b$ y $a \wedge c \leq d$. Entonces $a \wedge c$ es cota inferior de b y d. Pero la mayor cota inferior de b y d es $b \wedge d$ entonces, $a \wedge c \leq b \wedge d$ □

4. <u>Teorema</u>: (Idempotencia) Para cada a en el retículo $<M, \leq>$, se tiene: $a \vee a=a$ y $a \wedge a=a$.

Demostración: Sea a en el retículo $\langle M,\leq\rangle$. Por definición de supremo, se tiene: $a\leq a\vee a$. Además, $a\leq a$ por reflexividad. Entonces, a es cota superior de sí mismo. Con lo cual, $a\vee a\leq a$ ya que $a\vee a$ es la mínima cota superior de a. Por ser antisimétrica la relación $\leq$, se tiene: $a\vee a=a$. De igual forma, por definición de ínfimo se tiene: $a\wedge a\leq a$. Además, $a\leq a$ por reflexividad. Por lo anterior, a es cota inferior de sí mismo. Con lo cual, $a\leq a\wedge a$. Al ser antisimétrica la relación $\leq$ se tiene: $a\wedge a=a\square$

5. Teorema: (Absorción) Para cualesquiera a y b en un retículo $\langle A,\leq\rangle$ se tiene: $a\vee(a\wedge b)=a$ y $a\wedge(a\vee b)=a$.

Demostración: Sea a y b elementos del retículo $\langle A,\leq\rangle$. Por definición de supremo se tiene: $a\leq a\vee(a\wedge b)$. Luego, $a\leq a$ por reflexividad y $a\wedge b\leq a$ por definición de ínfimo. Entonces, $a\vee(a\wedge b)\leq a\vee a$ por el teorema I.B.3. Por idempotencia se tiene: $a\vee(a\wedge b)\leq a$. Como la relación $\leq$ es antisimétrica se concluye que: $a\vee(a\wedge b)=a$. De igual forma, como $a\wedge(a\vee b)\leq a$ por la definición de ínfimo. Luego, $a\leq a$ por reflexividad y $a\leq a\vee b$ por definición de supremo. Por consiguiente, $a\wedge a\leq a\wedge(a\vee b)$ por el teorema I.B.3. Entonces, $a\leq a\wedge(a\vee b)$ por idempotencia. Como la relación $\leq$ es antisimétrica se tiene: $a\wedge(a\vee b)=a\square$

6. Teorema: Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son asociativas.

Demostración: Sean a,b,c en un retículo $\langle M,\leq\rangle$.

Nótese que $a\leq a\vee(b\vee c)$ y $b\vee c\leq a\vee(b\vee c)$. Además, $b\leq b\vee c$ y $c\leq b\vee c \Rightarrow a\leq a\vee(b\vee c)$ y $b\leq a\vee(b\vee c)$ y $c\leq a\vee(b\vee c)$ por transitividad. Entonces, $a\vee b\leq a\vee(b\vee c)$ y $c\leq a\vee(b\vee c)$ por el teorema I.B.3 e idempotencia. Por lo tanto, $(a\vee b)\vee c\leq a\vee(b\vee c)$ por el teorema I.B.3 e idempotencia.

Por otro lado, nótese que $a\vee b\leq(a\vee b)\vee c$ y $c\leq(a\vee b)\vee c$ por definición de supremo. Como $a\leq a\vee b$ y $b\leq a\vee b$ entonces, $a\leq(a\vee b)\vee c$ y $b\leq(a\vee b)\vee c$ por transitividad. Por lo tanto, $a\leq(a\vee b)\vee c$ y $b\vee c\leq(a\vee b)\vee c$ por el teorema I.B.3 e idempotencia. Con lo cual, $a\vee(b\vee c)\leq(a\vee b)\vee c$ por el teorema I.B.3 e idempotencia. Por ser la relación $\leq$ antisimétrica se tiene: $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$. Por tanto, la operación $\vee$ es asociativa.

De igual forma, para el retículo $<M, \leq_T>$ se tendría: $a\underline{\vee}(b\underline{\vee}c)=(a\underline{\vee}b)\underline{\vee}c$ $,\forall a,b,c\in M \Rightarrow$ $a\wedge(b\wedge c)\leq(a\wedge b)\wedge c$, $\forall a,b,c\in M$ por el teorema I.B.1. Por ello, la operación $\wedge$ es asociativa$\square$

Definición: Un retículo $<M,\leq>$ es distributivo si para cada $a,b,c\in M$ se cumple:

i) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$

ii) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$.

7. Teorema: Sea $<M,\leq>$ un retículo. La operación $\vee$ es distributiva respecto a $\wedge$ en el retículo si y sólo si $\wedge$ es distributivo respecto a $\vee$.

Demostración:

($\Leftarrow$) Supóngase $\wedge$ es distributiva respecto a $\vee$. Entonces, $\forall a,b,c\in M$ se cumple que $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$. Luego, $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)=a\vee((a\vee b)\wedge c)=a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))=$ $(a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c)=a\vee(b\wedge c)$. De esta forma, la operación $\vee$ es distributiva respecto a $\wedge$.

($\Rightarrow$) Sea $\vee$ es distributiva respecto a $\wedge$. Así, se cumple que $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$. Como $<M, \leq_T>$ es un retículo. Entonces, $a\underline{\vee}(b\underline{\wedge}c)=(a\underline{\vee}b)\underline{\wedge}(a\underline{\vee}c)$ $,\forall a,b,c\in M \Rightarrow a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$ $,\forall a,b,c\in M$ por el teorema I.B.1. Por lo tanto, la operación $\wedge$ es distributiva respecto a $\vee$ $\square$

Definición: Sea $<M, \leq>$ un retículo. Un elemento $a \in M$ es llamado mayor cota universal si $\forall b \in M$, $b \leq a$.

Notación: La mayor cota universal se denotará por 1.

Nota: Si un retículo tiene mayor cota universal, ésta es única.

Definición: Sea $<M, \leq>$ un retículo. Un elemento $a \in M$ es llamado menor cota universal si $\forall b \in M$, $a \leq b$.

Notación: La menor cota universal se denotará por 0.

Nota: Si un retículo tiene menor cota universal, ésta es única.

8. Teorema: Sea $<M, \leq>$ un retículo con 1 y 0. Entonces: $a \vee 1 = 1$, $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$ y $a \wedge 0 = 0$ $, \forall a \in M$.

Demostración: Sea $a \in M$.

Nótese que $a \vee 1 \leq 1$ por ser 1 la mayor cota superior. Además, $1 \leq a \vee 1$ por definición de supremo de a y 1. Como la relación $\leq$ de orden parcial es antisimétrica, entonces $a \vee 1 = 1$.

Nótese que $0 \leq a$ por ser 0 menor cota universal. Como $a \leq a$ por ser la relación $\leq$ reflexiva, entonces, $a \vee 0 \leq a$ por el teorema I.B.3 e idempotencia. Además, $a \leq a \vee 0$ por definición de supremo de a y 0. Como la relación $\leq$ de orden parcial es antisimétrica, entonces $a \vee 0 = a$.

Por el teorema I.B.1 se tiene: $<M, \leq_T>$ es un retículo, $\forall b \in M$, $b \leq 1$ y $0 \leq b \Rightarrow \forall b \in M$, $1 \leq_T b$ y $b \leq_T 0 \Rightarrow 1$ es la menor cota universal y 0 es la mayor cota universal del retículo $<M, \leq_T>$. Entonces, $<M, \leq_T>$ es un retículo con $\underline{1}$ y $\underline{0}$ donde $\underline{1}$ es la mayor cota universal y $\underline{0}$ es la menor cota universal. Entonces, $a \underline{\vee}\, \underline{1} = \underline{1}$ y $a \underline{\vee}\, \underline{0} = a$. Por lo anterior, y el teorema I.B.1, se tiene:

$a \wedge 0=0$ y $a \wedge 1=a$ □

Definición: Sea $<M,\leq>$ un retículo con 1 y 0. Para un elemento $a \in M$, el elemento $b \in M$ es su complemento ssi $a v b=1$ y $a \wedge b=0$.

Nota: Por la conmutatividad del v,^, si b es complemento de a, entonces a es complemento de b. El complemento no necesariamente es único. Un elemento no necesariamente tiene complemento.

Definición: Un retículo es complementado, si cada elemento del retículo tiene complemento.

9. Teorema: Sea $<M,\leq>$ un retículo distributivo con 1 y 0. Si un elemento tiene complemento, entonces éste es único.

Demostración: Sea a un elemento de $<M,\leq>$, retículo distributivo con 1 y 0, el cual tiene complemento. Supóngase que b y c son complementos de a, entonces $a v b=1$, $a \wedge b=0$ y $a v c=1$, $a \wedge c=0$ por definición. Con lo cual , $b=b \wedge 1=b \wedge (a v c)=(b \wedge a) v (b \wedge c)=0 v (b \wedge c)=(a \wedge c) v (b \wedge c)=$ $(a v b) \wedge c= 1 \wedge c=c$. Por lo tanto, $b=c$ □

Definición: Un Retículo complementado y distributivo se llama Retículo Booleano.

Nota: Como cada elemento $<M,\leq>$ tiene un único complemento definase una operación unaria en el conjunto M, denotada ~, así que para cada $a \in M$, ~a es el complemento de a. La operación antes definida se llama complementación. Entonces, El retículo Booleano $<M,\leq>$ define el sistema algebraico $<M,v,\wedge,\sim>$.

Definición: Dado un retículo booleano $\langle M,\leq\rangle$. Se define $\oplus: M\times M\to M$ tal que $a\oplus b=(a\wedge\sim b)\vee(\sim a\wedge b)$, $\forall\, a,b\in M$.

Nota: $\oplus$ recibe el nombre de " ó exclusivo".

10. Lema: Dado un retículo booleano $\langle M,\leq\rangle$. Entonces:

i) $\sim(a\oplus b)=(\sim a\wedge\sim b)\vee(a\wedge b)$, $\forall a,b\in M$.

ii) $a\oplus b=b\oplus a$, $\forall a,b\in M$.

iii) $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$, $\forall a,b,c\in M$.

iv) $a\wedge(b\oplus c)=(a\wedge b)\oplus(a\wedge c)$, $\forall a,b,c\in M$.

v) $a\oplus a=0$, $a\oplus\sim a=1$, $a\oplus 0=a$ y $\sim a=1\oplus a$, $\forall a\in M$.

vi) $a\vee b=a\oplus b\oplus(a\wedge b)$, $\forall a,b\in M$.

Demostración: Sea $a,b,c\in M$.

i) $\sim(a\oplus b)=\sim\{(a\wedge\sim b)\vee(\sim a\wedge b)\}=(\sim a\vee\sim\sim b)\wedge(\sim\sim a\vee\sim b)=\{(\sim a\vee b)\wedge a\}\vee\{(\sim a\vee b)\wedge\sim b\}=\{(\sim a\wedge a)\vee(b\wedge a)\}$ $\vee\{(\sim a\wedge\sim b)\vee(b\wedge\sim b)\}=\{0\vee(a\wedge b)\}\vee\{(\sim a\wedge\sim b)\vee 0\}=(a\wedge b)\vee(\sim a\wedge\sim b)=(\sim a\wedge\sim b)\vee(a\wedge b)$ por conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$, distributividad de $\vee$ con respecto $\wedge$, distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$.

ii) $a\oplus b=(a\wedge\sim b)\vee(\sim a\wedge b)=(\sim a\wedge b)\vee(a\wedge\sim b)=(b\wedge\sim a)\vee(\sim b\wedge a)=b\oplus a$ por conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$.

iii) $a\oplus(b\oplus c)=a\oplus\{(b\wedge\sim c)\vee(\sim b\wedge c)\}=[a\wedge\sim\{(b\wedge\sim c)\vee(\sim b\wedge c)\}]\vee[\sim a\wedge\{(b\wedge\sim c)\vee(\sim b\wedge c)\}]=[a\wedge\{(\sim b\wedge\sim c)\vee$ $(b\wedge c)\}]\vee\{(\sim a\wedge(b\wedge\sim c))\vee(\sim a\wedge(\sim b\wedge c))\}=\{(a\wedge(\sim b\wedge\sim c))\vee(a\wedge(b\wedge c))\}\vee\{((\sim a\wedge b)\wedge\sim c)\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)\}$ $=[\{((a\wedge\sim b)\wedge\sim c)\vee((a\wedge b)\wedge c)\}\vee((\sim a\wedge b)\wedge\sim c)]\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)=[((a\wedge\sim b)\wedge\sim c)\vee\{((a\wedge b)\wedge c)\vee((\sim a\wedge b)\wedge$ $\sim c)\}]\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)=[((a\wedge\sim b)\wedge\sim c)\vee\{((\sim a\wedge b)\wedge\sim c)\vee((a\wedge b)\wedge c)\}]\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)=[\{((a\wedge\sim b)\wedge\sim c)\vee($ $(\sim a\wedge b)\wedge\sim c)\}\vee((a\wedge b)\wedge c)]\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)=[\{(a\wedge\sim b)\vee(\sim a\wedge b)\}\wedge\sim c]\vee\{((a\wedge b)\wedge c)\vee((\sim a\wedge\sim b)\wedge c)\}=\{(a$

⊕b)^~c}v[{(a^b)v(~a^~b)}^c]={(a⊕b)^~c}v[{(~a^~b)v(a^b)}^c]={(a⊕b)^~c}v{~(a⊕b)^c}=
(a⊕b)⊕c.

iv) a^(b⊕c)=a^{(b^~c)v(~b^c)}=(a^(b^~c))v(a^(~b^c))={0v((a^b)^~c)}v{0v((a^~b)^c)}=
{((a^~a)^b)v((a^b)^~c)}v{((~a^a)^c)v((~b^a)^c)}={(a^(~a^b))v((a^b)^~c)}v{(~a^(a^c))
v(~b^(a^c))}={(a^(b^~a))v((a^b)^~c)}v{(~av~b)^(a^c)}={((a^b)^~a)v((a^b)^c)}v{(~av~b)
^(a^c)}={(a^b)^(~av~c)}v{~(a^b)^(a^c)}={(a^b)^~(a^c)}v{~(a^b)^(a^c)}=(a^b)⊕(a^c).

v) a⊕a=(a^~a)v(~a^a)=0v0=0, a⊕~a=(a^~~a)v(~a^~a)=(a^a)v~a=av~a=1,
a⊕0=(a^~0)v(~a^0)= (a^1)v0=av0=a y 1⊕a=(1^~a)v(~1^a)=~av(0^a)=~av0=~a.

vi)a⊕b⊕(a^b)={(a⊕b)^~(a^b)}v{~(a⊕b)^(a^b)}={[(a^~b)v(~a^b)]^(~av~b)}
v{[(a^b)v(~a^~b)]^(a^b)}={[(a^~b)^(~av~b)]v[(~a^b)^(~av~b)]}v{[(a^b)^(a^b)]
v[(~a^~b)^(a^b)]}={[((a^~b)^~a)v((a^~b)^~b)]v[((~a^b)^~a)v((~a^b)^~b)]}v{(a^b)v0}=
{[(~a^(a^~b))v(a^(~b^~b))]v[(~a^(~a^b))v((~a^(b^~b))]}v(a^b)={[((~a^a)^~b))v(a^~b))]
v[((~a^~a)^b))v0]}v(a^b)={[0v(a^~b))]v[~a^b]}v(a^b)={[a^~b]v[~a^b]}v(a^b)=(a^~b)v{
(~a^b)v(a^b)}=(a^~b)v{(~ava)^b}=(a^~b)v(1^b)=(a^~b)vb=(a^~b)v{(a^b)vb}={(a^~b)v(
a^b)}vb={a^(~bvb)}vb=(a^1)vb=avb.

C. Algebra Booleana

Definición: Un sistema algebraico definido por un retículo Booleano se llama Algebra Booleana.

1. Teorema: (Leyes de DeMorgan): Para cualesquiera a,b en un álgebra Booleana se tiene:

$\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$ y $\sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$.

Demostración: Sean a,b en un álgebra Booelana $\langle M, \vee, \wedge, \sim \rangle$. Luego, $(a \vee b) \vee (\sim a \wedge \sim b)$ $= \{(a \vee b) \vee \sim a\} \wedge \{(a \vee b) \vee \sim b\} = \{(a \vee \sim a) \vee b\} \wedge \{a \vee (b \vee \sim b)\} = (1 \vee b) \wedge (a \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$ y $(a \vee b) \wedge (\sim a \wedge \sim b) = \{a \wedge (\sim a \wedge \sim b)\} \vee \{b \wedge (\sim a \wedge \sim b)\} = \{(a \wedge \sim a) \wedge \sim b\} \vee \{\sim a \wedge (b \wedge \sim b)\} = (0 \wedge \sim b)$ $\vee (0 \wedge \sim a) = 0 \vee 0 = 0$. Como el complemento de avb es único, entonces $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$.

Como $\langle M, \underline{\vee}, \underline{\wedge}, \sim \rangle$ es un álgebra Booleana. Por lo anterior se tiene: $\sim(a \underline{\vee} b) = \sim a \underline{\wedge} \sim b$, $\forall a,b \in M$ $\Rightarrow \sim(a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$, $\forall a,b \in M$ □

Definición: Un elemento a de un retículo Booleano es un átomo si cubre a 0.

2. Lema: Sea $\langle M, \leq \rangle$ un retículo booleano finito. Para cada a elemento no cero, existe por lo menos un átomo b, tal que: $b \leq a$.

Demostración: Si a es un átomo, se obtiene el resultado. En caso contrario, si a no es un átomo, el elemento a no cubre a 0 por lo que $\exists b \in M$ tal que $0 \leq b \leq a$ y $b \neq a$. Si b es un átomo, entonces queda demostrado. En caso que b no es un átomo, se sigue el mismo argumento. Como M es un conjunto finito, este proceso eventualmente termina, con lo que se obtiene: $0 \leq b_i \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \leq a \Rightarrow b_i$ es átomo y es tal que $b_i \leq a$ □

3. Lema: Sea $\langle M, \leq \rangle$ un retículo distributivo con 0 y 1. Si $b \wedge \sim c = 0 \Rightarrow b \leq c$.

Demostración: Si $b \wedge \sim c = 0 \Rightarrow c = 0 \vee c = (b \wedge \sim c) \vee c = (b \vee c) \wedge (\sim c \vee c) = (b \vee c) \wedge 1 = b \vee c \Rightarrow b \leq c$ □

4. Lema: Sea $\langle M, \vee, \wedge, \sim \rangle$ un álgebra booleana finita. Sea b un elemento no cero de M y

$a_1, a_2, ..., a_n$ todos los átomos de M tales que $a_i \leq$b para i=1,...,n. Entonces b=a_1 v a_2 v...v a_n.

Demostración: Por hipótesis, $a_i \leq$b para i=1,...,n, entonces, a_1 v a_2 v...v $a_n \leq$b. Supóngase c=a_1 v a_2 v...v a_n y que b^~c≠0. En este caso, ∃a∈M, átomo, tal que a≤b^~c. Además b^~c≤b y b^~c≤~c. Por transitividad se tiene: a≤b y a≤~c ⇒ a es uno de los $a_1, a_2, ..., a_n$, de lo que se sigue que a≤c y a≤~c. Entonces, a≤c^~c=0, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, b^~c=0, lo que implica que b≤c. Es decir, b≤ a_1 v a_2 v...v a_n . Entonces, b=a_1 v a_2 v...v a_n por antisimetría □

5. Lema: Sea <M,v,^,~> un álgebra booleana finita. Sea x elemento de M y sea a un átomo de M, entonces a≤x ó a^x=0.

Demostración: Sea x en M y a un átomo de M. Nótese que 0≤x y 0≤a ⇒ 0≤x^a≤a. Entonces x^a=0 ó x^a=a por ser a un átomo. Por lo tanto, x^a=0 ó a=x^a≤x, con lo cual, x^a=0 ó a≤x□

6. Teorema: Sea <M,v,^,~> un álgebra booleana finita con conjunto de átomos S={a_1,a_2,..,a_n}. Sea x un elemento no cero de M. Así, x puede representarse: x=a_{i_1} v...v a_{i_k} donde $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ son todos los átomos ≤x. Más aún, esa expresión es única, excepto por el orden de los átomos.

Demostración: Sea x≠0 en M. Nótese que $a_i \leq 1$, $\forall a_i \in$S. Entonces 1=a_1 v...v a_n por el lema I.C.4. Luego, x=x^1=x^(a_1 v...v a_n)=(x^ a_1)v...v(x^ a_n). Como x^ a_i=a_i ,si $a_i \leq$x y x^ a_i=0, en caso contrario, entonces x=a_{i_1} v...v a_{i_k} donde $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ son todos los átomos ≤x. Para verificar la unicidad, supóngase que x=b_1 v...v b_k donde $b_1, ..., b_k$ son átomos. Entonces, $b_i \leq$x para i=1,...,k , por lo tanto $b_i \in$\{a∈S:a≤x\}. Por otro lado, si a∈S y a≤x entonces

$0 \neq a = a \wedge x = a \wedge (b_1 \vee \ldots \vee b_k) = (a \wedge b_1) \vee \ldots \vee (a \wedge b_k)$. Con lo cual, para algún b_i con $i=1,\ldots,k$ se tiene que $a \wedge b_i \neq 0$, ya que de lo contrario, si todos los $a \wedge b_i = 0$, entonces $a=0$, lo cual es una contradicción. Lo anterior implica que, $a \wedge b_i = a = b_i$ ya que a y b_i son átomos. Por lo tanto $a \in \{b_1,\ldots,b_k\}$. En consecuencia, $\{b_1,\ldots,b_k\} = \{a \in S : a \leq x\}$.

7. Lema: Sean x,y elementos de una álgebra booleana y a un átomo.

i) $a \leq x \vee y$ si y sólo si $a \leq x$ o $a \leq y$.

ii) $a \leq x \wedge y$ si y sólo si $a \leq x$ y $a \leq y$.

iii) $a \leq x$ ó $a \leq \sim x$.

Demostración: Sean x,y elementos de un álgebra booleana y a un átomo.

i) ($\Rightarrow$) Como x es un elemento de un álgebra booleana, se tiene: $a \leq x$ ó $a \wedge x = 0$ por lema I.C.5. Para el caso $a \leq x$, se obtiene el resultado. Para el caso contrario, por hipótesis se tiene que: $a \leq x \vee y \Rightarrow a = a \wedge (x \vee y)$. Luego, $a = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = 0 \vee (a \wedge y) = a \wedge y \Rightarrow a \leq y$.

i) ($\Leftarrow$) Por hipótesis se tiene que $a \leq x$ o $a \leq y$. Además, $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$ por definición de supremo. En cualquiera de los dos casos por transitividad se tiene: $a \leq x \vee y$.

ii) ($\Rightarrow$) Por hipótesis se tiene que: $a \leq x \wedge y$. Además, $x \wedge y \leq x$ y $x \wedge y \leq y$ por definición de ínfimo. Entonces, $a \leq x$ y $a \leq y$ por transitividad.

ii) ($\Leftarrow$) Por hipótesis se tiene que $a \leq x$ y $a \leq y$. Entonces, $a \wedge a \leq x \wedge y$ por el teorema I.B.3. Por lo tanto, $a \leq x \wedge y$ por idempotencia.

iii) Como x es un elemento de un álgebra booleana se tiene: $a \leq x$ ó $a \wedge x = 0$. Para el caso $a \leq x$ queda demostrado. Para el caso contrario, como $a \wedge x = 0 \Rightarrow a \wedge \sim\sim x = 0$, por unicidad del complemento de $\sim x$. Entonces, $a \leq \sim x$ por lema I.C.3.

8. Teorema: Si A es un álgebra Booleana finita con conjunto de átomos S={ $a_1,...,a_n$ }, y B es un álgebra booleana finita con conjunto de átomos D={ $b_1,...,b_n$ }, entonces existe una corresepondencia uno a uno f de A en B, tal que f(a_i)=b_i, para i=1,...,n y cumple las siguientes propiedades:

i) x≤y si y sólo si f(x)≤f(y) , ∀x,y∈A

ii) f(xvy)=f(x)vf(y) , ∀x,y∈A.

iii) f(x^y)=f(x)^f(y) , ∀x,y∈A.

iv) f(~x)=~f(x) , ∀x∈A.

v) f(x⊕y)=f(x)⊕f(y) , ∀x,y∈A.

Demostración: Sea x∈A un álgebra booleana finita con conjunto de átomos S. Si x≠0 entonces, x puede escribirse de manera única en la forma x=a_{i_1}v...va_{i_k}. Defínase f:A→B tal que f(x)=b_{i_1}v...vb_{i_k}, si x≠0 ó f(x)=0, si x=0. En particular, f(a_i)=b_i para i=1,...,n. Para cada x∈A, f(x) tiene representación única (salvo por el orden de los átomos). Entonces f está bien definida .

Pruébese ahora, que f es biyectiva.

Sea y∈B. Luego, y=b_{i_1}v...vb_{i_k} por el teorema I.C.6. Como f(a_i)=b_i para i=1,...,n. Considérese x=a_{i_1}v...va_{i_k}, de donde f(x)=b_{i_1}v...vb_{i_k}=y por definición de f.

Sean x,y∈A tal que f(x)=f(y). Luego, x=a_{i_1}v...va_{i_k} y y=a_{j_1}v...va_{j_m}. Entonces, b_{i_1}v...vb_{i_k}=f(x)= f(y)=b_{j_1}v...vb_{j_m}. Como la representación de f(x) y f(y) es única, se tiene que k=m y ∀t∈{1,...,k}, ∃! w tal que $b_{i_t}=b_{j_w}$. Entonces $a_{i_t}=a_{j_w}$, con lo cual, x=a_{i_1}v...va_{i_k}=$a_{j_{w(1)}}$v...v$a_{j_{w(k)}}$=y. Entonces f es biyectiva.

A probar, que ∀y∈A y ∀a∈S si a≤y si y sólo si f(a)≤f(y).

($\Rightarrow$) Sean $y\in A$ y $a\in S$, tal que, $a\leq y$. Nótese que $y=y\wedge 1=y\wedge(a\vee\sim a)=(y\wedge a)\vee(y\wedge\sim a)=a\vee y\wedge\sim a$, por ser $a\leq y$. Como $y\wedge\sim a\in A$, se tiene $y\wedge\sim a=a_{j_1}\vee\ldots\vee a_{j_m}$ por el lema I.C.6; entonces, $y=a\vee a_{j_1}\vee\ldots\vee a_{j_m}$. Luego, $f(y)=f(a)\vee f(a_{j_1})\vee\ldots\vee f(a_{j_m})$ por definición de f. Entonces, $f(a)\leq f(y)$.

($\Leftarrow$) Sean $y\in A$ y $a\in S$ tal que $f(a)\leq f(y)$. Nótese que $f(y)=f(y)\wedge 1=f(y)\wedge(f(a)\vee\sim f(a))=(f(y)\wedge f(a))\vee(f(y)\wedge\sim f(a))=f(a)\vee(f(y)\wedge\sim f(a))$. Como $f(y)\wedge\sim f(a)\in B$ se tiene que $f(y)\wedge\sim f(a)=b_{j_1}\vee\ldots\vee b_{j_m}$. Siendo así, $f(y)=f(a)\vee b_{j_1}\vee\ldots\vee b_{j_m}$. Además, $f(a_i)=b_i$ para $i=1,\ldots,n$ y, por definición de f, se tiene $f(y)=f(a\vee a_{j_1}\vee\ldots\vee a_{j_m})$. Como f es inyectiva entonces $y=a\vee a_{j_1}\vee\ldots\vee a_{j_m}$. Por lo tanto, $a\leq y$.

i) ($\Rightarrow$) Sean $x,y\in A$ tal que $x\leq y$. Como $x\in A$ se tiene: $x=a_{i_1}\vee\ldots\vee a_{i_k}$ por el teorema I.C.6. En ese caso, $a_{i_j}\leq y$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ $\Rightarrow$ $f(a_{i_j})\leq f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Como $f(x)=f(a_{i_1})\vee\ldots\vee f(a_{i_k})$ por definición de f, entonces $f(x)\leq f(y)$.

i) ($\Leftarrow$) Sean $x,y\in A$ tal que $f(x)\leq f(y)$. Como $f(x)\in B$ se tiene: $f(x)=b_{i_1}\vee\ldots\vee b_{i_k}$ por el teorema I.C.6. Como $f(a_i)=b_i$ para $i=1,\ldots,n$,entonces $f(x)=f(a_{i_1})\vee\ldots\vee f(a_{i_k})$. Por lo tanto, $f(a_{i_j})\leq f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ se tiene: $a_{i_j}\leq y$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Con lo cual, $x\leq y$.

ii) Sean $x,y\in A$.

Como $f(x\vee y)\in B$ se tiene que: $f(x\vee y)=b_{i_1}\vee\ldots\vee b_{i_k}$ por el teorema I.C.6. Nótese que $b_{i_j}\leq f(x\vee y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Por ser f sobreyectiva, $\exists a_{i_j}$ tal que $f(a_{i_j})=b_{i_j}$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$, entonces $f(a_{i_j})\leq f(x\vee y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Con lo cual, $a_{i_j}\leq x\vee y$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ por i) $\Rightarrow$ $a_{i_j}\leq x$ o $a_{i_j}\leq y$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ por el lema I.C.7. Luego, $f(a_{i_j})\leq f(x)$ o $f(a_{i_j})\leq f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ por i). De lo anterior se tiene: $f(a_{i_j})\leq f(x)\vee f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$ por el lema I.C.7, entonces $b_{i_j}\leq f(x)\vee f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Por lo tanto, $f(x\vee y)\leq f(x)\vee f(y)$.

Como $f(x)\vee f(y)\in B$ se tiene que: $f(x)\vee f(y)=b_{i_1}\vee\ldots\vee b_{i_k}$ por el teorema I.C.6. Nótese que $b_{i_j}\leq f(x)\vee f(y)$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$. Por ser f sobreyectiva, $\exists a_{i_j}$ tal que $f(a_{i_j})=b_{i_j}$, $\forall j\in\{1,\ldots,k\}$, entonces f($a_{i_j}$)≤f(x)vf(y), ∀j∈{1,...,k}. Luego, f(a_{i_j})≤f(x) o f(a_{i_j})≤f(y), ∀j∈{1,...,k} por el lema I.C.7. Con lo cual, a_{i_j}≤x o a_{i_j}≤y, ∀j∈{1,...,k} por i). Por lo tanto, a_{i_j}≤xvy, ∀j∈{1,...,k} por el lema I.C.7. De lo anterior se tiene: f(a_{i_j})≤f(xvy), ∀j∈{1,...,k} por i) , así, b_{i_j}≤f(xvy), ∀j∈{1,...,k}. Por tanto, f(x)vf(y)≤f(xvy).

Por antisimetría se tiene: f(xvy)=f(x)vf(y).

iii) Sea x,y∈A.

Como f(x^y)∈B se tiene que: f(x^y)=b_{i_1}v...vb_{i_k} por el teorema I.C.6. Nótese que b_{i_j}≤f(x^y), ∀j∈{1,...,k}. Por ser f sobreyectiva, ∃a_{i_j} tal que f(a_{i_j})= b_{i_j}, ∀j∈{1,...,k}, de esta manera f(a_{i_j})≤f(x^y), ∀j∈{1,...,k}. Con lo cual, a_{i_j}≤x^y, ∀j∈{1,...,k} por i) ⇒ a_{i_j}≤x y a_{i_j}≤y, ∀j∈{1,...,k} por el lema I.C.7. Luego, f(a_{i_j})≤f(x) y f(a_{i_j})≤f(y), ∀j∈{1,...,k} por i) . De lo anterior se tiene: f(a_{i_j})≤f(x)^f(y), ∀j∈{1,...,k} por el lema I.C.7, entonces b_{i_j}≤f(x)^f(y), ∀j∈{1,...,k}. Por lo tanto, f(x^y)≤f(x)^f(y).

Como f(x)^f(y)∈B se tiene que: f(x)^f(y)=b_{i_1}v...vb_{i_k} por teorema I.C.6. Nótese que b_{i_j}≤f(x)^f(y), ∀j∈{1,...,k}. Por ser f sobreyectiva, ∃a_{i_j} tal que f(a_{i_j})= b_{i_j}, ∀j∈{1,...,k}, entonces f(a_{i_j})≤f(x)^f(y), ∀j∈{1,...,k} Luego, f(a_{i_j})≤f(x) y f(a_{i_j})≤f(y), ∀j∈{1,...,k} por lema I.C.7. Con lo cual, a_{i_j}≤x y a_{i_j}≤y, ∀j∈{1,...,k} por i). Por lo tanto, a_{i_j}≤x^y, ∀j∈{1,...,k} por el lema I.C.7. De lo anterior se tiene: f(a_{i_j})≤f(x^y), ∀j∈{1,...,k} por i), siendo así, b_{i_j}≤f(x^y), ∀j∈{1,...,k}. Por lo tanto, f(x)^f(y)≤f(x^y).

Por antisimetría se tiene: f(x^y)=f(x)^f(y).

iv) Sea x∈A. Nótese que f(0)=0 y f(1)=1. Luego, f(x)vf(~x)=f(xv~x)=f(1)=1 por ii), y f(x)^f(~x)=f(x^~x)=f(0)=0 por iii). Entonces, f(~x) es complemento de f(x). Por unicidad del complemento de f(x) se tiene: f(~x)=~f(x).

v) Sea $x,y \in A$. Luego, $f(x \oplus y)=f((x \wedge \sim y) \vee (\sim x \wedge y))=f((x \wedge \sim y)) \vee f((\sim x \wedge y))=(f(x) \wedge f(\sim y)) \vee (f(\sim x) \wedge f(y))=(f(x) \wedge \sim f(y)) \vee (\sim f(x) \wedge f(y))=f(x) \oplus f(y)$ por ii), iii) y iv) □

Definición: Dos álgebras booleanas A y B son isomorfas si existe una función f biyectiva tal que:

i) $f(x \vee y)=f(x) \vee f(y)$, $\forall x,y \in A$.

ii) $f(x \wedge y)=f(x) \wedge f(y)$, $\forall x,y \in A$.

iii) $f(\sim x)=\sim f(x)$, $\forall x \in A$.

9. Corolario: (Teorema de Stone) Toda álgebra booleana con n átomos es isomorfa al álgebra booleana P(S) de todos los subconjuntos de un conjunto S con n elementos.

II. FUNCIONES BOOLEANAS

A. Funciones Booleanas

Considérese $<\{0,1\},\mathrm{v},\wedge,\sim>$ el álgebra de Boole. El álgebra de Boole es la más simple en la clase de las álgebras booleanas. Es un álgebra de dos elementos.

Definición: Sea $<\{0,1\},\mathrm{v},\wedge,\sim>$ álgebra de Boole. Una expresión booleana sobre $\{0,1\}$ es:

i) Cualquier elemento de $\{0,1\}$.

ii) Cualquier variable evaluada en $\{0,1\}$.

iii) Si E_1 y E_2 son expresiones booelanas también lo son $E_1 \mathrm{v} E_2$, $E_1 \wedge E_2$ y $\sim E_1$.

Definición: Dos expresiones Booleanas son equivalentes si:

i) son ambas de n-variables

ii) ambas toman el mismo valor para cada asignación de variables.

Definición: Sea $<\{0,1\},\mathrm{v},\wedge,\sim>$ álgebra de Boole. Una función de $\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ es una función booleana ssi se puede encontrar una expresión booleana que la represente.

Notación: $\mathscr{F}_n$=$\{$f : f es una función booleana de n-variables$\}$.

Definición: Sean <{0,1},v,^,~> álgebra de Boole e i∈{1,2,...,n}.. Se define $x_i \in \mathcal{F}_n$ tal que $x_i(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_n)=y_i$, $\forall(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$. A x_i se denomina i-ésima función coordenada.

Definición: Sea <{0,1},v,^,~> álgebra de Boole. Se define $\vee: \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ tal que $(f\vee g)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mathrm{v} g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\forall f,g\in\mathcal{F}_n$. De igual manera, se define $\wedge: \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ tal que $(f\wedge g)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \,\hat{}\, g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\forall f,g\in\mathcal{F}_n$. Además, se define $\sim: \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ tal que $(\sim f)(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sim f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\forall f\in\mathcal{F}_n$.

1. Teorema: Sea <{0,1},v,^,~> álgebra de Boole entonces $<\mathcal{F}_n,\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana.

Demostración: Nótese que el $<\{0,1\},\leq>$ álgebra de Boole es un conjunto parcialmente ordenado. Defínase la relación $\leq$ en $\mathcal{F}_n$ tal que: Sea $f,g\in\mathcal{F}_n$, $f\leq g$ ssi $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq g(x_1,x_2,\ldots,x_n), \forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$.

i) Sea $f\in\mathcal{F}_n$. Nótese que $f\leq f$ ya que $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ por ser $\leq$ reflexiva en $\{0,1\}$.

ii) Si $f\leq g$ y $g\leq f$ $\Rightarrow$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ $\Rightarrow$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g(x_1,x_2,\ldots,x_n), \forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ por ser $\leq$ antisimétrica en $\{0,1\}$ $\Rightarrow$ $f=g$ por definición de igualdad de funciones.

iii) Si $f\leq g$ y $g\leq h$ $\Rightarrow$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ y $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq h(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $,\forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ $\Rightarrow$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq h(x_1,x_2,\ldots,x_n), \forall(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ por ser $\leq$ transitiva en $\{0,1\}$ $\Rightarrow$ $f\leq h$ por definición de $\leq$. Por lo tanto, $<\mathcal{F}_n,\leq>$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sean f,g$\in\mathscr{F}_n$. Como f(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$f(x_1,x_2,...,x_n)vg(x_1,x_2,...,x_n) y g(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$ f(x_1,x_2,...,x_n)vg(x_1,x_2,...,x_n), $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n\Rightarrow$ f$\leq$f$\vee$g y g$\leq$f$\vee$g $\Rightarrow$ f$\vee$g es cota superior de f y g. Sea c una cota superior de f y g $\Rightarrow$ f$\leq$c y g$\leq$c $\Rightarrow$ f(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$c(x_1,x_2,...,x_n) y g(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$c(x_1,x_2,...,x_n),$\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n\Rightarrow$f(x_1,x_2,...,x_n)vg(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$c(x_1,x_2,...,x_n) , $\forall$(x_1,x_2,...,x_n) $\in\{0,1\}^n\Rightarrow$ f$\vee$g$\leq$c $\Rightarrow$ f$\vee$g es el supremo de f y g. Pruébese ahora que el supremo es único. Sea a el supremo de f y g $\Rightarrow$ f$\vee$g$\leq$a por lo anterior $\Rightarrow$ f$\vee$g=a por definición de supremo de f y g.

Sean f,g$\in\mathscr{F}_n$. Como f(x_1,x_2,...,x_n)^g(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$f(x_1,x_2,...,x_n) y f(x_1,x_2,...,x_n)^g(x_1,x_2,...,x_n) $\leq$g(x_1,x_2,...,x_n), $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n\Rightarrow$ f$\wedge$g$\leq$f y f$\wedge$g$\leq$g $\Rightarrow$ f$\wedge$g es cota inferior de f y g. Sea c una cota inferior de f y g $\Rightarrow$ c$\leq$f y c$\leq$g $\Rightarrow$ c(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$f(x_1,x_2,...,x_n) y c(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$ g(x_1,x_2,...,x_n), $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n$ $\Rightarrow$ c(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$f(x_1,x_2,...,x_n)^g(x_1,x_2,...,x_n) , $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in$ $\{0,1\}^n\Rightarrow$ c$\leq$f$\wedge$g $\Rightarrow$ f$\wedge$g es el ínfimo de f y g. Pruébese ahora que el ínfimo es único. Sea a el ínfimo de f y g $\Rightarrow$ a$\leq$f$\wedge$g por lo anterior $\Rightarrow$ f$\wedge$g=a por definición de ínfimo de f y g. Por lo tanto, <$\mathscr{F}_n$,V,$\wedge$> es un retículo.

Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Defínase 1$\in\mathscr{F}_n$ tal que 1(x_1,x_2,...,x_n)=1, $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n$. Como f(x_1,x_2,...,x_n)$\leq$1= 1(x_1,x_2,...,x_n), $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n$ $\Rightarrow$ f$\leq$1. Por lo tanto, 1 es mayor cota universal.

Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Defínase 0$\in\mathscr{F}_n$ tal que 0(x_1,x_2,...,x_n)=0, $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n$. Como 0(x_1,x_2,...,x_n)=0$\leq$ f(x_1,x_2,...,x_n), $\forall$(x_1,x_2,...,x_n)$\in\{0,1\}^n$ $\Rightarrow$ 0$\leq$f. Por lo tanto, 0 es menor cota universal.

Sean f,g,h$\in\mathscr{F}_n$. Nótese que : (f$\wedge$(g$\vee$h))(x_1,x_2,...,x_n)=f(x_1,x_2,...,x_n)^(g$\vee$h)(x_1,x_2,...,x_n)= f(x_1,x_2,...,x_n)^(g(x_1,x_2,...,x_n)vh(x_1,x_2,...,x_n))=(f(x_1,x_2,...,x_n)^g(x_1,x_2,...,x_n))v(f(x_1,x_2,...,x_n)

$\wedge$h$(x_1,x_2,...,x_n)$=(f$\wedge$g)$(x_1,x_2,...,x_n)$v(f$\wedge$h)$(x_1,x_2,...,x_n)$=((f$\wedge$g)$\vee$(f$\wedge$h))$(x_1,x_2,...,x_n)$, $\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in\{0,1\}^n \Rightarrow$ f$\wedge$(g$\vee$h)=(f$\wedge$g)$\vee$(f$\wedge$h). Por lo anterior se tiene: f$\vee$(g$\wedge$h)=(f$\vee$g)$\wedge$(f$\vee$h) ya que $<\mathscr{F}_n,\vee,\wedge>$ es un retículo. Por lo tanto, $<\mathscr{F}_n,\vee,\wedge>$ es un álgebra distributiva con 0 y 1.

Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Luego, $0(x_1,x_2,...,x_n)$=0=f$(x_1,x_2,...,x_n)\wedge\sim$f$(x_1,x_2,...,x_n)$=f$(x_1,x_2,...,x_n)\wedge(\sim$f) $(x_1,x_2,...,x_n)$=(f$\wedge\sim$f)$(x_1,x_2,...,x_n)$ y $1(x_1,x_2,...,x_n)$=1=f$(x_1,x_2,...,x_n)$v$\sim$f$(x_1,x_2,...,x_n)$= f$(x_1,x_2,...,x_n)$v($\sim$f)$(x_1,x_2,...,x_n)$=(f$\vee\sim$f)$(x_1,x_2,...,x_n)$, $\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in\{0,1\}^n \Rightarrow$ 0=f$\wedge\sim$f y 1=f$\vee\sim$f. Por lo tanto, $\sim$f, el complemento de f, es único porque $<\mathscr{F}_n,\vee,\wedge>$ es un álgebra distributiva con 0 y 1. Con lo cual, $<\mathscr{F}_n,\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana□

2. <u>Teorema</u>: Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Entonces f= $\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ donde F={ $(x_1,x_2,...,x_n)$: f$(x_1,x_2,...,x_n)$=1} y $x_i^{s_j}=x_i$ si s_j=1 ó =$\sim x_i$ si s_j=0, i =1,...,n.

<u>Demostración</u>: Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Nótese que $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{F}_n$ y $0\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ por ser 0 menor cota universal. Sea g$\in\mathscr{F}_n$ tal que $0\leq$g$\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$. Entonces g$(x_1,x_2,...,x_n)$=0, $\forall(x_1,x_2,...,x_n)$ excepto $(s_1,s_2,...,s_n)$ donde g$(s_1,s_2,...,s_n)$=0 ó 1. Por lo tanto, g=0 ó g=$x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$. Con lo cual, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ cubre a 0. Entonces, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ es átomo de $\mathscr{F}_n$, $\forall(s_1,s_2,...,s_n)\in\{0,1\}^n$.

Sea b un átomo de $\mathscr{F}_n$. Como b cubre a 0 $\Rightarrow$ b$\neq$0 $\Rightarrow \exists(s_1,s_2,...,s_n)$ tal que b$(s_1,s_2,...,s_n)$=1 $\Rightarrow$ $0\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\leq$b $\Rightarrow$ b=$x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ por ser un átomo.

Como $<\mathscr{F}_n,\vee,\wedge,\sim>$ es álgebra booleana finita con un conjunto de atomos { $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$: $(s_1,s_2,...,s_n)\in\{0,1\}^n$}. Entonces, f= $\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ donde

F={$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$: $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\leq$f} por teorema I.C.6. Nótese que F={$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$: f$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$=1} ya que : $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\leq$f si y sólo si f$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$=1 □

3. Teorema: Sea f$\in\mathcal{F}_n$. Entonces f = $\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}$ donde F={ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: f$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$=0}.

Demostración: Sea f$\in\mathcal{F}_n$. Como $<\mathcal{F}_n,\vee,\wedge,\sim>$ es álgebra booleana finita con un conjunto de átomos { $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$: $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\{0,1\}^n$ } entonces $<\mathcal{F}_n,\underline{\vee},\underline{\wedge},\sim>$ es álgebra booleana finita con un conjunto de átomos { $x_1^{\underline{s_1}}\underline{\wedge}x_2^{\underline{s_2}}\underline{\wedge}\ldots\underline{\wedge}x_n^{\underline{s_n}}$: $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\{0,1\}^n$ } por principio de dualidad para álgebras booleanas. Por teorema I.C.6 se tiene: f= $\underline{\bigvee}_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F}x_1^{\underline{s_1}}\underline{\wedge}x_2^{\underline{s_2}}\underline{\wedge}\ldots\underline{\wedge}x_n^{\underline{s_n}}$ donde F={$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$: $x_1^{\underline{s_1}}\underline{\wedge}x_2^{\underline{s_2}}\underline{\wedge}\ldots\underline{\wedge}x_n^{\underline{s_n}}\leq_T$f}. Además, $x_i^{s_j}=x_i$ si s_j=1 ó =~ x_i si s_j=0, i =1,...,n y por el principio de dualidad para álgebras booleanas se tiene: $\underline{\wedge}$=$\vee$, $\underline{\vee}$=$\wedge$, $\underline{1}$=0 y $\underline{0}$=1. Con lo cual, f= $\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}$ donde F={$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: f$\leq\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}$}. Nótese que F={$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$: f$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$=0} ya que f$\leq\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}$ si y sólo si f$(s_1,s_2,\ldots,s_n)$=0 □

Definición: Se define $\oplus:\mathcal{F}_n\times\mathcal{F}_n\rightarrow\mathcal{F}_n$ tal que (f$\oplus$g)$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$=f$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\oplus$ g$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\forall$f,g$\in\mathcal{F}_n$.

4. Corolario: Dado $<\mathcal{F}_n,\vee,\wedge,\sim>$ un álgebra booleana se tienen las siguientes propiedades:

i) f$\oplus$g=g$\oplus$f, $\forall$f,g$\in\mathcal{F}_n$.

ii) f$\oplus$(g$\oplus$h)=(f$\oplus$g)$\oplus$h, $\forall$f,g,h$\in\mathcal{F}_n$.

iii) f$\oplus$0=f, f$\oplus$f=0 y f$\oplus$~f=1, $\forall$f$\in\mathcal{F}_n$.

iv) $f\wedge(g\oplus h)=(f\wedge g)\oplus(f\wedge h)$, $\forall f,g,h\in\mathscr{F}_n$.

v) $f\vee g=f\oplus g\oplus(f\wedge g)$ y $\sim f=1\oplus f$, $\forall f,g\in\mathscr{F}_n$.

Demostración: Sean $f,g\in\mathscr{F}_n$. Luego, $f\oplus g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\oplus g(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $=\{f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\wedge\sim g(y_1,y_2,\ldots,y_n)\}\vee\{\sim f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n)\}=(f\wedge\sim g)(y_1,y_2,\ldots,y_n)\vee$ $(\sim f\wedge g)(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(f\wedge\sim g)\vee(\sim f\wedge g)(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\forall(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Por lo tanto, $f\oplus g=(f\wedge\sim g)\vee(\sim f\wedge g)$. Por el lema I.B.10 queda demostrado□

Definición: $\mathscr{E}=\{f\in\mathscr{F}_{n+1} : f=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\}$ donde $F=\{ (y_1,y_2,\ldots,y_n) :$ $f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)= f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$.

5. Teorema: $\mathscr{E}$ es isomorfo a $\mathscr{F}_n$.

Demostración: Pruébese ahora que $<\mathscr{E},\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana.

Como $<\mathscr{F}_{n+1},\leq>$ es un conjunto parcialmente ordenado y $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{F}_{n+1}$. Entonces $<\mathscr{E},\leq>$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $f,g\in\mathscr{E}$. Entonces, $f=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde $F=\{ (y_1,y_2,\ldots,y_n) :$ $f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)= f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$ y $g=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in G} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde $G=\{$ $(y_1,y_2,\ldots,y_n) :$ $g(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)= g(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$.

Luego, $f\vee g = (\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\vee(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in G} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})=$ $\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F\cup G} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$ ya que $\{ (y_1,y_2,\ldots,y_n) : f\vee g(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=$ $f\vee g(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1 \}=\{ (y_1,y_2,\ldots,y_n): f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1$ o $g(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)$ $= g(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}=F\cup G$. Por tanto, $f\vee g$ es el supremo de f y g en $\mathscr{E}$.

Luego, $f\wedge g = (\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in G} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})=$

$\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} \bigvee_{\forall(t_1,\ldots,t_n)\in G} (x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge(x_1^{t_1}\wedge x_2^{t_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{t_n})= \bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F\cap G}$ $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$ ya que $\{(y_1,y_2,\ldots,y_n) : f\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=f\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\} = \{(y_1,y_2,\ldots,y_n) : f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1) = f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1$ y $g(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)= g(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$ $= F\cap G$. Así, $f\wedge g$ es el ínfimo de f y g en $\mathscr{E}$. Por lo tanto, $<\mathscr{E},\vee,\wedge>$ es un retículo.

Nótese que $1\in\mathscr{E}$. Ya que $1=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n,s_{n+1})} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}= (\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n,1)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1})\vee(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1})=\{(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge x_{n+1}\}\vee\{(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge\sim x_{n+1}\} = (\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge (x_{n+1}\vee\sim x_{n+1})= (\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge 1=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$. Por lo tanto, 1 es la mayor cota universal en $\mathscr{E}$. De igual manera, $0\in\mathscr{E}$ ya que $0=\bigvee_{(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde $F=\varnothing$. Por lo tanto, 0 es la menor cota universal en $\mathscr{E}$. Como $<\mathscr{F}_{n+1},\vee,\wedge>$ es un retículo distributivo, entonces $<\mathscr{E},\vee,\wedge>$ es un retículo distributivo.

Sea $f\in\mathscr{E}$. Como $f= \bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n,s_{n+1})\in F}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}\vee\sim x_{n+1}^{s_{n+1}}$ donde $F=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1}) : f(y_1,y_2,\ldots,y_n,y_{n+1})=0\}$ por teorema II.A.3. Entonces, $f = (\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n,1)\in F}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}\vee\sim x_{n+1})\wedge(\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)\in F}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}\vee\sim\sim x_{n+1})=\{(\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in H}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n})\vee\sim x_{n+1}\}\wedge\{(\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in G}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n})\vee x_{n+1}\}$ donde $H=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n) : f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=0\}$ y $G=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n) : f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=0\}$. Como $f\in\mathscr{E}$ se tiene que $H=G$ ya que $f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=0$ si y sólo si $f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=0$. Entonces, $f=(\bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in H}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n})\vee(\sim x_{n+1}\wedge x_{n+1})= \bigwedge_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in H}\sim x_1^{s_1}\vee\sim x_2^{s_2}\vee\ldots\vee\sim x_n^{s_n}$. Por lo tanto, $\sim f=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in H} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$ ya que $H=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n) : \sim f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)= \sim f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$. De esa forma, $<\mathscr{E},\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana.

Sea $a\in\mathscr{E}$ tal que $0\leq a\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$. Entonces, $a(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})=0$, si $(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})\notin\{$

$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$, $(s_1,s_2,\ldots,s_n,0)\}$. Nótese que a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$=0 ó a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$=1. Si a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$=0 $\Rightarrow$ ~a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$=1 $\Rightarrow$ ~a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,0)$=1 ya que ~a$\in\mathscr{E}$ $\Rightarrow$ a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,0)$=0. Con lo cual, a=0. Si a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)$=1 $\Rightarrow$ a$(s_1,s_2,\ldots,s_n,0)$=1 ya que a$\in\mathscr{E}$. Entonces, a=$x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$. Por lo tanto, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ es un átomo de $\mathscr{E}$, $\forall(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\{0,1\}^n$.

Sea b un átomo de $\mathscr{E}$. Como b cubre a 0 $\Rightarrow$ b$\neq$0 $\Rightarrow$ $\exists(s_1,s_2,\ldots,s_n,s_{n+1})$ tal que b$(s_1,s_2,\ldots,s_n,s_{n+1})$=1 $\Rightarrow 0\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}\leq$b . Además, b$(s_1,s_2,\ldots,s_n,\sim s_{n+1})$=1 ya que b$\in\mathscr{E}$ $\Rightarrow$ $0\leq x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{\sim s_{n+1}}\leq$b. Con lo cual, $\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}\}\vee\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{\sim s_{n+1}}\}\leq$bvb=b. Luego, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}=\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\}\wedge 1=\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\}\wedge\{x_{n+1}^{s_{n+1}}\vee x_{n+1}^{\sim s_{n+1}}\}=\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}\}\vee\{x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{\sim s_{n+1}}\}$ $\leq$b. Entonces, b = $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ por ser un átomo y $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$.

Nótese que el número de átomos de $\mathscr{E}$ es 2^n y como el número de átomos de $\mathscr{F}_n$ es 2^n. Así, $\mathscr{E}$ es isomorfo a $\mathscr{F}_n$ por teorema I.C.8 y definición I.C.3. Considérese el isomorfismo Φ: $\mathscr{F}_n\to\mathscr{E}$ tal que $\Phi(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})=x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$, $\forall(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\{0,1\}^n$□

6. <u>Teorema</u>: Sea f$\in\mathscr{F}_n$. Entonces f= $\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde F={ $(y_1,y_2,\ldots y_n)$: f$(y_1,y_2,\ldots,y_n)$=1}.

<u>Demostración</u>: Arguméntese por inducción.

i) Como $\mathscr{F}_1=\{0,x_1,\sim x_1,1\}$. Para los casos en que f=0 ó =x_1 ó =~x_1. Ya queda demostrado. En caso contario, si f=1=$x_1\oplus\sim x_1$. Entonces f=$\sum_{\forall s_1\in F} x_1^{s_1}$ donde F={ y_1 : f(y_1)=1}, $\forall$f$\in\mathscr{F}_1$.

ii) Por hipótesis de inducción : f= $\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde F={ $(y_1,y_2,\ldots y_n)$

: $f(y_1,y_2,...y_n)=1\}$, $\forall f\in\mathscr{F}_n$.

iii) Sea $f\in\mathscr{F}_{n+1}$. De manera que, $f=\bigvee_{\forall(s_1,...,s_{n+1})\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}$ donde $F=\{(y_1,y_2,...y_{n+1}):\ f(y_1,y_2,...y_{n+1})=1\}$ por teorema II.A.2. Como $<\mathscr{F}_{n+1},\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana se tiene: $f=\{(\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\wedge x_{n+1}\}\vee\{(\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\wedge\sim x_{n+1}\}$ donde $M=\{(y_1,y_2,...y_n):\ f(y_1,y_2,...y_n,1)=1\}$ y $N=\{(y_1,y_2,...y_n):\ f(y_1,y_2,...y_n,0)=1\}$.

Nótese que $\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}, \bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$. Entonces, $\exists g,h\in\mathscr{F}_n$ tal que $\Phi(g)=\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ y $\Phi(h)=\bigvee_{\forall(s_1,...,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ por teorema II.A.5. Por hipótesis de inducción se tiene: $g=\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in A} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ y $h=\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in B} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ donde $A=\{(y_1,y_2,...y_n):\ g(y_1,y_2,...y_n)=1\}$ y $B=\{(y_1,y_2,...y_n):\ h(y_1,y_2,...y_n)=1\}$. Luego, $\Phi(g)=\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in A} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$ y $\Phi(h)=\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in B} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}$.

Pruébese ahora que A=M y B=N.

Sea $(s_1,s_2,...,s_n)\in M \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\leq\Phi(g) \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}=\Phi^{-1}(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\leq g \Rightarrow 1=x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}(s_1,s_2,...,s_n)\leq g(s_1,s_2,...,s_n) \Rightarrow g(s_1,s_2,...,s_n)=1 \Rightarrow (s_1,s_2,...,s_n)\in A$. Entonces, $M\subseteq A$.

Sea $(s_1,s_2,...,s_n)\in A$. Supóngase que $(s_1,s_2,...,s_n)\notin M$. Luego, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\leq g \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}=\Phi(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\leq\Phi(g) \Rightarrow 1=x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}(s_1,s_2,...,s_n,1)\leq\Phi(g)(s_1,s_2,...,s_n,1)=0$, lo que implica una contradicción. Entonces, $A\subseteq M$. Por lo tanto, A=M. De igual manera, se tendría que B=N.

Luego, $f=\{(\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in A} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\wedge x_{n+1}\}\vee\{(\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n})\wedge\sim x_{n+1}\}=\{\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in A} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1}\}\vee\{\sum_{\forall(s_1,...,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge...\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1}\}=$

$\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,1)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1}\}\vee\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1}\} =$

$\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,1)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1}\}\oplus\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1}\}\oplus$

$\{(\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,1)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge x_{n+1})\wedge(\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1})\} =$

$\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_{n+1})\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}\}\oplus\{\sum_{\forall(t_1,\ldots,t_n,1)\in F} \sum_{\forall(s_1,\ldots,s_n,0)\in F} (x_1^{t_1}\wedge x_2^{t_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{t_n}\wedge$ $x_{n+1})\wedge(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1})\}$.

Nótese que $(x_1^{t_1}\wedge x_2^{t_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{t_n}\wedge x_{n+1})\wedge(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1})=0$ por ser $x_1^{t_1}\wedge x_2^{t_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{t_n}\wedge x_{n+1}$ y $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\wedge\sim x_{n+1}$ átomos diferentes. Entonces, $f=\{\sum_{\forall(s_1,\ldots,s_{n+1})\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}\}\oplus 0= \sum_{\forall(s_1,\ldots,s_{n+1})\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}$ □

III. DERIVADA DE FUNCIONES BOOLEANAS Y SEÑALES DISCRETAS

A. Derivada de la función booleana

Definición: Dado f$\in \mathscr{F}_n$. A g se le llama función residual unitaria de f respecto a la función coordenada x_i , si g$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1} y_i y_{i+1},\ldots y_n)$=f$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1},1 y_{i+1},\ldots y_n)$, $\forall (y_1 y_2,\ldots y_n)\in \{0,1\}^n$.

Notación: g=$f_{i=1}$.

Definición: Dado f$\in \mathscr{F}_n$. A g se le llama función residual nula de f respecto a la función coordenada x_i , si g$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1} y_i y_{i+1},\ldots y_n)$=f$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1},0 y_{i+1},\ldots y_n)$, $\forall (y_1 y_2,\ldots y_n)\in \{0,1\}^n$.

Notación: g=$f_{i=0}$.

Nota: f= $\{f_{i=1}\wedge x_i\}\oplus\{f_{i=0}\wedge\sim x_i\}$, $\forall$ f$\in \mathscr{F}_n$.

Definición: Derivada de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de la función booleana f respecto a una función coordenada x_i, es $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{i=1}\oplus f_{i=0}$.

Nota: La expresión booleana $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1 y_2,\ldots y_n)$=f$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1},1,\ldots y_n)\oplus$f$(y_1 y_2,\ldots y_{i-1},0,\ldots y_n)$.

La expresión anterior determina las condiciones, para las cuales la función f cambia su valor cuando se conmuta el valor de la función coordenada x_i.

<u>Definición</u>: Se denomina derivada mixta $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}$ de la función booleana f una expresión de la forma $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{k-1}}}\right)$.

<u>Definición</u>: La derivada de orden k $\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k})}$ de la función booleana f respecto a las funciones coordenadas $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k}$ es igual a la suma módulo dos de todas las derivadas de primer orden, de las segundas, las terceras y las k-ésimas derivadas mixtas fijando las variables $x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_k})} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \oplus \sum_{i<j<s} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_{k-1}}\partial x_{i_k}}$$

donde $i,j,s,\ldots = i_1,\ldots,i_k$.

<u>Nota</u>: La derivada de orden k $\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1},x_{i_2}\ldots x_{i_k})}$ de la función booleana f respecto a las funciones coordenadas $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$ determina las condiciones para las cuales esta función cambia su valor sustituyendo simultáneamente los valores de las funciones coordenadas $x_{i_1},\ldots,x_{i_k}$.

I. <u>Lema</u>: Sea $f,g \in \mathcal{F}_n$. Entonces:

i) $\frac{\partial(f\oplus g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial g}{\partial x_i}$,

ii) $\frac{\partial(f\wedge g)}{\partial x_i} = f\wedge \frac{\partial g}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}$,

iii) $\frac{\partial(f\vee g)}{\partial x_i} = \sim f\wedge \frac{\partial g}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge \sim g \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}$,

iv) $\frac{\partial(\sim f)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

<u>Demostración</u>: Sean $f,g \in \mathcal{F}_n$ y $i \in \{1,\ldots,n\}$. Luego,

i) $\frac{\partial(f\oplus g)}{\partial x_i} = (f\oplus g)_{i=1} \oplus (f\oplus g)_{i=0} = (f_{i=1} \oplus g_{i=1}) \oplus (f_{i=0} \oplus g_{i=0}) = (f_{i=1} \oplus f_{i=0}) \oplus (g_{i=1} \oplus g_{i=0}) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial g}{\partial x_i}$.

ii) $\frac{\partial(f\wedge g)}{\partial x_i} = (f\wedge g)_{i=1} \oplus (f\wedge g)_{i=0} = (f_{i=1}\wedge g_{i=1}) \oplus (f_{i=0}\wedge g_{i=0}) = \{(\frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus f_{i=0}) \wedge (\frac{\partial g}{\partial x_i} \oplus g_{i=0})\} \oplus$

$$(f_{i=0}\wedge g_{i=0})=\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g_{i=0})\oplus(f_{i=0}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(f_{i=0}\wedge g_{i=0})\}\oplus(f_{i=0}\wedge g_{i=0})$$
$$=(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g_{i=0})\oplus(f_{i=0}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})=(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\wedge x_i)\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\wedge x_i)\}$$
$$\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g_{i=0})\oplus(f_{i=0}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}) \quad =(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\wedge x_i)\oplus\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge(\frac{\partial g}{\partial x_i}\wedge x_i\oplus g_{i=0})\}\oplus$$
$$(f_{i=0}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})=\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g)\}\oplus\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\wedge x_i)\oplus(f_{i=0}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\}=\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g)\oplus($$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\}\oplus\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge x_i\oplus f_{i=0})\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\}=(f\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus\{(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g)\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\}.$$

iii) $$\frac{\partial(f\vee g)}{\partial x_i}=\frac{\partial(f\oplus g\oplus(f\wedge g))}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\oplus\frac{\partial g}{\partial x_i}\oplus\frac{\partial(f\wedge g)}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\oplus\frac{\partial g}{\partial x_i}\oplus\{(f\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g)\oplus$$
$$(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})=\{\frac{\partial g}{\partial x_i}\oplus(f\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\}\oplus\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge g)\}\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})=\{(1\oplus f)\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}\}\oplus$$
$$\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge(1\oplus g)\}\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})=\{(\sim f\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i})\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\sim g)\}\oplus(\frac{\partial f}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial g}{\partial x_i}).$$

iv) $$\frac{\partial(\sim f)}{\partial x_i}=\frac{\partial(1\oplus f)}{\partial x_i}=\frac{\partial 1}{\partial x_i}\oplus\frac{\partial f}{\partial x_i}=0\oplus\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \square$$

2. <u>Lema</u>: $\frac{\partial}{\partial x_i}(\bigwedge_{j=1}^{n} x_j)=\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

<u>Demostración</u>: Sea $i\in\{1,\dots,n\}$.

Nótese que $\bigwedge_{j=1}^{n} x_j=(\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j)\wedge x_i$. Luego, $\frac{\partial}{\partial x_i}(\bigwedge_{j=1}^{n} x_j)=\frac{\partial}{\partial x_i}([\bigwedge_{j=1,i\neq j}^{n} x_j]\wedge x_i)=\{(\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j)\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i)\}\oplus\{\frac{\partial}{\partial x_i}(\bigwedge_{j=1,i\neq j}^{n} x_j)\wedge x_i\}\oplus\{(\frac{\partial}{\partial x_i}(\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j))\wedge\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i)\}=\{(\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j)\wedge 1\}\oplus\{0\wedge x_i\}\oplus\{0\wedge 1\}=\bigwedge_{j=1,j\neq i}^{n} x_j\ \square$

B. Derivada de una señal discreta

<u>Definición</u>: Una señal discreta es una función cuyo dominio y contradominio son $\mathbb{N}$ y $\{0,1\}$ respectivamente.

<u>Notación</u>: S={x : x es una señal discreta}

Definición: Dada f una función booleana de orden n y $x_1,x_2,\ldots,x_n$ señales discretas. Se dice que x es una función booleana en el tiempo de orden n, si x es una señal discreta tal que $x(t)=f(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $\forall t\in\mathbb{N}$.

Definición: Sea $<\{0,1\},v,\wedge,\sim>$ álgebra de Boole. Se define $\vee:S\times S\to S$ tal que $(x\vee y)(t)=x(t)vy(t)$, $\forall x,y\in S$. De igual manera, se define $\wedge:S\times S\to S$ tal que $(x\wedge y)(t)=x(t)\wedge y(t)$, $\forall x,y\in S$. Además, se define $\sim:S\to S$ tal que $(\sim x)(t)=\sim x(t)$, $\forall x\in S$.

1. Teorema: Sea $<\{0,1\},v,\wedge,\sim>$ álgebra de Boole entonces, $< S,\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana.

Demostración: Nótese que $<\{0,1\},\leq>$ álgebra de Boole es un conjunto parcialmente ordenado. Defínase la relación $\leq$ en S tal que: Sea $x,y\in S$, $x\leq y$ ssi $x(t)\leq y(t)$, $\forall t\in\mathbb{N}$.

i) Sea $x\in S$. Nótese que $x\leq x$ ya que $x(t)\leq x(t),\forall t\in\mathbb{N}$ por ser $\leq$ reflexiva en $\{0,1\}$.

ii) Si $x\leq y$ y $y\leq x \Rightarrow x(t)\leq y(t)$ y $y(t)\leq x(t)$, $\forall t\in\mathbb{N} \Rightarrow x(t)=y(t),\forall t\in\mathbb{N}$ por ser $\leq$ antisimétrica en $\{0,1\} \Rightarrow x=y$ por definición de igualdad de funciones.

iii) Si $x\leq y$ y $y\leq z \Rightarrow x(t)\leq y(t)$ y $y(t)\leq z(t)$, $\forall t\in\mathbb{N} \Rightarrow x(t)\leq z(t),\forall t\in\mathbb{N}$ por ser $\leq$ transitiva en $\{0,1\}$ $\Rightarrow x\leq z$ por definición de $\leq$. Por lo tanto, $<S,\leq>$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $x,y\in S$. Como $x(t)\leq x(t)vy(t)$ y $y(t)\leq x(t)vy(t)$, $\forall t\in\mathbb{N} \Rightarrow x\leq x\vee y$ y $y\leq x\vee y \Rightarrow x\vee y$ es cota superior de x e y. Sea c una cota superior de x e y $\Rightarrow x\leq c$ y $y\leq c \Rightarrow x(t)\leq c(t)$ y $y(t)\leq c(t)$, $\forall t\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $x(t)vy(t)\leq c(t)$, $\forall t\in\mathbb{N} \Rightarrow x\vee y\leq c \Rightarrow x\vee y$ es el supremo de x e y. Pruébese ahora que el supremo es único. Sea a el supremo de x e y $\Rightarrow x\vee y\leq a$ por lo anterior $\Rightarrow x\vee y=a$ por definición de supremo de x e y.

Sea $x,y\in S$. Como $x(t)\wedge y(t)\leq x(t)$ y $x(t)\wedge y(t)\leq y(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow x\wedge y\leq x$ y $x\wedge y\leq y \Rightarrow x\wedge y$ es cota inferior de x e y. Sea c una cota inferior de x e y $\Rightarrow c\leq x$ y $c\leq y \Rightarrow c(t)\leq x(t)$ y $c(t)\leq y(t)$, $\forall t\in N$ $\Rightarrow c(t)\leq x(t)\wedge y(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow c\leq x\wedge y \Rightarrow x\wedge y$ es el ínfimo de x e y. Pruébese ahora que el ínfimo es único. Sea a el ínfimo de x e y $\Rightarrow a\leq x\wedge y$ por lo anterior $\Rightarrow x\wedge y=a$ por definición de ínfimo de x e y. Por lo tanto, $<S,\vee,\wedge>$ es un retículo.

Sea $x\in S$. Defínase $1:N\to\{0,1\}$ tal que $1(t)=1$, $\forall t\in N$. Como $x(t)\leq 1=1(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow x\leq 1$. Por lo tanto, 1 es mayor cota universal.

Sea $x\in S$. Defínase $0:N\to\{0,1\}$ tal que $0(t)=0$, $\forall t\in N$. Como $0(t)=0\leq x(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow 0\leq x$. Por lo tanto, 0 es menor cota universal.

Sean $x,y,z\in S$. Nótese que $(x\wedge(y\vee z))(t)=x(t)\wedge(y\vee z)(t)=x(t)\wedge(y(t)\vee z(t))=(x(t)\wedge y(t))\vee(x(t)\wedge z(t))=$ $(x\wedge y)(t)\vee(x\wedge z)(t)=((x\wedge y)\vee(x\wedge z))(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$. Por lo anterior se tiene: $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ ya que $<S,\vee,\wedge>$ es un retículo. Por lo tanto, $<S,\vee,\wedge>$ es un álgebra distributiva con 0 y 1.

Sea $x\in S$. Luego $0(t)=0=f(t)\wedge\sim f(t)=f(t)\wedge(\sim f)(t)=(f\wedge\sim f)(t)$ y $1(t)=1=f(t)\vee\sim f(t)=f(t)\vee(\sim f)(t)$ $=(f\vee\sim f)(t)$, $\forall t\in N \Rightarrow 0=f\wedge\sim f$ y $1=f\vee\sim f$. Por lo tanto $\sim f$ es el complemento de f y es único porque $<S,\vee,\wedge>$ es un álgebra distributiva con 0 y 1. Con lo cual, $<S,\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana□

<u>Definición</u>: Sea $<S,\vee,\wedge,\sim>$ un álgebra booleana. Se define $\oplus:S\times S\to S$ tal que $(x\oplus y)(t)=x(t)\oplus y(t)$, $\forall x,y\in S$.

2. <u>Corolario</u>: Dado $<S,\vee,\wedge,\sim>$ un álgebra booleana se tiene las siguientes propiedades:

i) $x \oplus y = y \oplus x$, $\forall x,y \in S$,

ii) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $\forall x,y,z \in S$,

iii) $x \oplus 0 = 0$, $x \oplus x = 0$, y $x \oplus {\sim}x = 1$, $\forall x \in S$,

iv) $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$, $\forall x,y,z \in S$,

v) $x \vee y = (x \oplus y) \oplus (x \wedge y)$, $\forall x,y \in S$,

<u>Demostración</u>: Sean $x,y \in S$ y $t \in \mathbb{N}$. Luego, $(x \oplus y)(t) = x(t) \circledast y(t) = \{x(t) \wedge {\sim}y(t)\} \vee \{{\sim}x(t) \wedge y(t)\} = (x \wedge {\sim}y)(t) \vee ({\sim}x \wedge y)(t) = [(x \wedge {\sim}y) \vee ({\sim}x \wedge y)](t)$. Por lo tanto, $x \oplus y = (x \wedge {\sim}y) \vee ({\sim}x \wedge y)$. Por lema I.B.10 queda demostrado□

<u>Definición</u>: La derivada de primer orden $\frac{\partial x}{\partial t}$ de una señal discreta x en el tiempo es una señal discreta tal que $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = x(t+1) \circledast x(t)$, $\forall t \in \mathbb{N}$.

<u>Definición</u>: La derivada de orden n de la señal discreta x en el tiempo es la expresión de la forma $\frac{\partial^n x}{\partial t^n} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{n-1} x}{\partial t^{n-1}}\right)$.

3. <u>Lema</u>: Para cualquier $x,y \in S$. Entonces:

i) $\frac{\partial(x \oplus y)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} \oplus \frac{\partial y}{\partial t}$,

ii) $\frac{\partial(x \wedge y)}{\partial t} = x \wedge \frac{\partial y}{\partial t} \oplus \frac{\partial x}{\partial t} \wedge y \oplus \frac{\partial x}{\partial t} \wedge \frac{\partial y}{\partial t}$,

iii) $\frac{\partial(x \vee y)}{\partial t} = {\sim}x \wedge \frac{\partial y}{\partial t} \oplus \frac{\partial x}{\partial t} \wedge {\sim}y \oplus \frac{\partial x}{\partial t} \wedge \frac{\partial y}{\partial t}$,

iv) $\frac{\partial({\sim}x)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$.

<u>Demostración</u>: Sean $x,y \in S$. Luego,

i) Sea $t \in \mathbb{N}$. Entonces, $\frac{\partial(x \oplus y)}{\partial t}(t) = (x \oplus y)(t+1) \circledast (x \oplus y)(t) = \{x(t+1) \circledast y(t+1)\} \circledast \{x(t) \circledast y(t)\} =$

$\{x(t+1)\oplus x(t)\}\oplus\{y(t+1)\oplus y(t)\}=\frac{\partial x}{\partial t}(t)\oplus\frac{\partial y}{\partial t}(t)=\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t}(t)$. Por lo tanto, $\frac{\partial(x\oplus y)}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t}$.

ii)Sea $t\in\mathbb{N}$. Entonces, $\frac{\partial(x\wedge y)}{\partial t}(t)=(x\wedge y)(t+1)\oplus(x\wedge y)(t)=\{x(t+1)\wedge y(t+1)\}\oplus\{x(t)\wedge y(t)\}=$ $\{x(t+1)\wedge y(t+1)\}\oplus\{0\oplus[x(t)\wedge y(t)]\}=\{x(t+1)\wedge y(t+1)\}\oplus\{x(t+1)\wedge y(t)\oplus[\{x(t+1)\wedge y(t)\}\oplus\{x(t)\wedge y(t)\}]\}=\{[x(t+1)\wedge y(t+1)]\oplus[x(t+1)\wedge y(t)]\}\oplus[\{x(t+1)\oplus x(t)\}\wedge y(t)]=[x(t+1)\wedge\{y(t+1)\oplus y(t)\}]\oplus$ $[\frac{\partial x}{\partial t}(t)\wedge y(t)]=[\{x(t+1)\wedge\frac{\partial y}{\partial t}(t)\}\oplus 0]\oplus[\frac{\partial x}{\partial t}(t)\wedge y(t)]=[\{x(t+1)\wedge\frac{\partial y}{\partial t}(t)\}\oplus\{x(t)\wedge\frac{\partial y}{\partial t}(t)\}]\oplus\{[x(t)$ $\wedge\frac{\partial y}{\partial t}(t)\}]\oplus[\frac{\partial x}{\partial t}(t)\wedge y(t)]\}=\{\frac{\partial x}{\partial t}(t)\wedge\frac{\partial y}{\partial t}(t)\}\oplus\{(x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})(t)\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y)(t)\}=((x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y))($ $t)\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})(t)=(((x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y))\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t}))(t)$. Por lo tanto, $\frac{\partial(x\wedge y)}{\partial t}=$ $((x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y))\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})$.

iii) $\frac{\partial(x\vee y)}{\partial t}=\frac{\partial(x\oplus y\oplus(x\wedge y))}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t}\oplus\frac{\partial(x\wedge y)}{\partial t}=(\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(x\wedge\frac{\partial y}{\partial t}\oplus\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y\oplus\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t}$ $)=\{\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t}\}\oplus\{((x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y))\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\}=\{\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\frac{\partial y}{\partial t}\}\oplus\{\{(x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y)\}\oplus$ $\{\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t}\}\}=[\{\frac{\partial y}{\partial t}\oplus\{x\wedge\frac{\partial y}{\partial t}\}\}\oplus\{\frac{\partial x}{\partial t}\oplus\{\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y\}\}]\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})=[\{(1\oplus x)\wedge\frac{\partial y}{\partial t}\}\oplus\{\frac{\partial x}{\partial t}\wedge($ $1\oplus y)\}]\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})=[\{\sim x\wedge\frac{\partial y}{\partial t}\}\oplus\{\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\sim y\}]\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})=((\sim x\wedge\frac{\partial y}{\partial t})\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge y))\oplus(\frac{\partial x}{\partial t}\wedge\frac{\partial y}{\partial t})$.

iv) $\frac{\partial(\sim x)}{\partial t}=\frac{\partial(1\oplus x)}{\partial t}=\frac{\partial 1}{\partial t}\oplus\frac{\partial x}{\partial t}=0\oplus\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}$ □

C. Peso de la derivada

Considérese una serie de métodos de proyectar circuitos. La eficiencia de cada uno de ellos aumenta en comparación con los anteriores.

El método de cascada basado en la descomposición de Shannon

$f(y_1,\ldots y_k, y_{k+1},\ldots y_n)=\bigvee_{\forall(s_1,s_2,\ldots,s_k)} y_1^{s_1}\wedge y_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge y_k^{s_k}\wedge f(s_1,s_2,\ldots,s_k, y_{k+1},\ldots y_n)$,

permite , al existir los bloques de exclusión de k variables, reducir la realización de una función booleana de n variables a la realización de una función booleana de n−k, k≥1, variables. La dimensión de funciones residuales f($s_1,s_2,\ldots,s_k,y_{k+1},\ldots y_n$) puede bajarse al excluir t variables, etc, hasta que las funciones residuales tengan la forma simple.

La complejidad de funciones residuales depende del grado de exclusión de variables. En una función booleana dada f($y_1,\ldots y_k,y_{k+1},\ldots y_n$), el número de todos los posibles procedimientos de exclusión de variables aumenta de modo combinatorio. Por ejemplo, si se utilizan sólo bloques que excluyen una misma variable en cada nivel, este número es igual a n!. Sin embargo, en todo nivel se puede excluir tanto una misma variable como también distintas. Luego, a cada paso se puede excluir diverso número de variables. Escoger la exclusión óptima de variables mediante el sondeo de todos los procedimientos de exclusión es un proceso que requiere trabajo de mucha laboriosidad.

Una exclusión óptima, se busca empleando el criterio heurístico, uno de los cuales se basa en el empleo de la noción de la derivada de una función booleana.

El criterio de exclusión óptima de las variables en el método de cascada consiste, primero, en la exclusión de variables. Con la conmutación de las mismas, la función booleana se conmuta con el número máximo de condiciones. El número máximo, se determina por el peso de la derivada.

<u>Definición</u>: Llámese peso de la derivada de la función booleana el número de átomos de esta

derivada.

Al emplear los bloques que excluyen k variable, se hallan las derivadas de orden k de una función realizable y se busca el valor máximo del peso de la derivada $P(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})})$, que determina variables para excluir. Para las funciones booleana residuales obtenidas, se vuelve a hallar las derivadas, se determinan los pesos, mientras que la derivada de la función residual a examinar que tiene peso máximo, determina variables correspondientes, que en este nivel se excluyen para esta función residual, etc., hasta que las funciones residuales tengan realización simple.

El criterio de exclusión óptima de variables tiene carácter heurístico. Este se basa en las siguiente suposición: cuanto mayor es el peso de una derivada $P(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, tanto más la función f depende de la variable x_i. Si existen bloques de exclusión de k variables, la construcción del circuito se realiza de modo análogo, calculando el peso de las derivadas de orden k, $P(\frac{\partial^k f}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})})$.

D. Función de error

Considérese un esquema lógico de dos entradas que se conmutan simultáneamente. Para más precisión, examínese la transición $(0,0) \to (1,1)$. La condición de conmutación simultánea de los canales de entrada x_1 y x_2 es ideal. En realidad, con la probabilidad casi igual a la unidad, cambia primero una entrada y, dentro de un rato otra. En dependencia del orden de su conmutación, el cambio (0,0) a (1,1) puede pasar a través de (1,0) ó (0,1).

Analícense dos casos:

1. Las funciones f(0,0) y f(1,1) no son iguales. La señal de salida antes y después de la conversión es diferente. Entonces, en los estados intermedios puede tener lugar el valor viejo de la señal ó el valor nuevo. Si en el esquema faltan picos, en principio no puede haber señal falsa.

2. Las funciones f(0,0) y f(1,1) son iguales. La señal de salida antes y después de la conversión es igual. Es decir, en la salida de la conversión "no se siente". Pero si en los estados intermedios la señal de salida se difiere de f(0,0) a f(1,1), durante la conmutación puede aparecer señal falsa, la conversión es crítica. Este fenómeno se denominará riesgo en el esquema lógico. El camino por el cual la señal pasará del estado (0,0) al (1,1), depende de los parámetros fisicos de las señales del esquema y de la suerte, ya que los parámetros tienen carácter estadístico.

Según Bochmann, pónganse las condiciones necesarias y suficientes de la conversión crítica. Para que la conversión del estado (s_1,s_2) en el $(\sim s_1,\sim s_2)$ $(s_1,s_2=0,1)$ sea crítica es necesario y suficiente que

i) $f(s_1,s_2)=f(\sim s_1,\sim s_2)$;

ii) $f(\sim s_1,s_2)\neq f(\sim s_1,\sim s_2)$ o $f(s_1,\sim s_2)\neq f(\sim s_1,\sim s_2)$.

Es fácil enunciar estas condiciones empleando las derivadas. En caso de la conversión crítica se tiene:

i) la conmutación simultánea de ambas entradas: $\frac{\partial x_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_2}{\partial t}=1$;

ii) el valor de la señal de salida antes y después de la conversión es igual: $\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1,x_2)}=0$;

iii) la conmutación solamente de una entrada lleva a la conmutación de la salida: $\frac{\partial f}{\partial x_1}\vee\frac{\partial f}{\partial x_2}=1$.

Por lo tanto, el error se expresa del modo siguiente:

$$\Delta f=\frac{\partial x_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_2}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\vee\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1,x_2)}\right)$$

donde Δf es la función del error.

En la expresión Δf, la señal discreta $\frac{\partial x_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_2}{\partial t}$ determina las propiedades de la señal, la cual se denominará miembro de señal. La función booleana $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\vee\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_1,x_2)}\right)$ determina las propiedades de la función que se realiza. En adelante, se denominará miembro funcional de la fórmula que define el error.

Uno de los procedimientos para aumentar el rendimiento del ordenador, es el incremento de la frecuencia de trabajo de los elementos utilizados. Los elementos electrónicos moleculares modernos, tienen frecuencia de trabajo de miles de megahertzios. Durante el funcionamiento de los esquemas lógicos, el retardo en el circuito de los elementos se hace comparable con el período de trabajo del esquema, lo que lleva a la necesidad de tomar en consideración las señales falsas determinadas por la expresión Δf.

El error no surge, si $\Delta f=0$, para lo cual es necesario hacer restricciones en el miembro de señal o en el funcional de la fórmula.

Examínese el caso de los esquemas lógicos, en los cuales tres canales de entrada se conmutan simultáneamente. Según Δf, el error tiene lugar cuando se conmutan dos entradas arbitrarias. Por consiguiente, en la conmutación de tres entradas x_a, x_b, x_c la función de error contiene los siguientes miembros:

$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\vee\frac{\partial f}{\partial x_b}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_b)}\right)$$
$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_c)}\right)$$
$$\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_b}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b,x_c)}\right)$$

La fórmula que determina las condiciones en que surgen los errores al conmutar tres entradas, contiene otro miembro que tiene en cuenta la conmutación simultánea de tres entradas:

$$\frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_b)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_c)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b,x_c)}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^3 f}{\partial(x_a,x_b,x_c)}\right).$$

Por lo tanto, para la conmutación de tres entradas la función de error tiene forma:

$$\Delta f = \frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\vee\frac{\partial f}{\partial x_b}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_b)}\right)\vee\frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_a}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_c)}\right)\vee$$
$$\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial f}{\partial x_b}\vee\frac{\partial f}{\partial x_c}\right)\wedge\sim\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b,x_c)}\right)\vee\frac{\partial x_a}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_b}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_c}{\partial t}\wedge\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_b)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_a,x_c)}\vee\frac{\partial^2 f}{\partial(x_b,x_c)}\right)$$
$$\wedge\sim\left(\frac{\partial^3 f}{\partial(x_a,x_b,x_c)}\right).$$

Generalizando la función de error para el caso de conmutación de n entradas en el esquema lógico, se tiene:

$$F(x_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_n})=(\bigvee_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}=x_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_n};i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial(i_1,i_2,\ldots,i_{n-1})})\wedge\sim(\frac{\partial^n f}{\partial(i_1,i_2,\ldots,i_n)})$$

y la función de error tiene forma

$$\Delta f = (\bigvee_{i_1,i_2=x_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_n};i_1<i_2} \frac{\partial i_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial i_2}{\partial t}\wedge F(i_1,i_2))\vee(\bigvee_{i_1,i_2,i_3=x_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_n};i_1<i_2<i_3} \frac{\partial i_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial i_2}{\partial t}\wedge\frac{\partial i_3}{\partial t}\wedge F(i_1,i_2,i_3))\vee\ldots\vee\frac{\partial x_{a_1}}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_{a_2}}{\partial t}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial x_{a_n}}{\partial t}\wedge F(x_{a_1},x_{a_2},\ldots,x_{a_n}).$$

De la fórmula anterior se desprende que con el aumento del número de canales de entrada que se conmutan aumenta la probabilidad de la conversión crítica.

IV. UN ANALOGO AL TEOREMA DE TAYLOR PARA FUNCIONES BOOLEANAS Y SEÑALES DISCRETAS

A. Análogo al teorema de Taylor para funciones booleanas

Definición: Sea $<\{0,1\},\mathrm{v},\wedge,\sim>$ álgebra de Boole. Se define $\bullet:\{0,1\}\times\mathscr{F}_n\rightarrow\mathscr{F}_n$ tal que $a\bullet f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=a\wedge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\forall\ a\in\{0,1\}$ y $\forall f\in\mathscr{F}_n$

1. Lema: Para cualquier $f,g\in\mathscr{F}_n$, se tiene $(a\bullet f)\wedge g=a\bullet(f\wedge g)$, $\forall a\in\{0,1\}$.

Demostración: Sean $f,g\in\mathscr{F}_n$ y $a\in\{0,1\}$. Luego, $(a\bullet f)\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(a\bullet f)(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\{a\wedge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\}\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=a\wedge\{f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\wedge g(y_1,y_2,\ldots,y_n)\}=a\wedge$ $(f\wedge g)(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\{a\bullet(f\wedge g)\}(y_1,y_2,\ldots,y_n\}$, $\forall(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Por lo tanto, $(a\bullet f)\wedge g=$ $a\bullet(f\wedge g)\square$

2. Lema: Para cualquier $f\in\mathscr{F}_n$ se tiene: $a\bullet f\oplus b\bullet f=(a\oplus b)\bullet f$, $\forall a,b\in\{0,1\}$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_n$ y $a,b\in\{0,1\}$. Luego $a\bullet f\oplus b\bullet f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=a\bullet f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $\oplus b\bullet f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=a\wedge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\oplus b\wedge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(a\oplus b)\wedge f(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(a\oplus b)\bullet f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\forall(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Por lo tanto, $a\bullet f\oplus b\bullet f=(a\oplus b)\bullet f\square$

3. Lema: Para todo $f\in\mathscr{F}_n$ se tiene: $1\bullet f=f$ y $0\bullet f=\mathbf{0}$ donde $\mathbf{0}\in\mathscr{F}_n$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_n$ y $(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Luego $1\bullet f(y_1,y_2,\dots,y_n)=1\wedge f(y_1,y_2,\dots,y_n)$ $=f(y_1,y_2,\dots,y_n)$ y $0\bullet f(y_1,y_2,\dots,y_n)=0\wedge f(y_1,y_2,\dots,y_n)=0=\mathbf{0}(y_1,y_2,\dots,y_n)$. Entonces, $1\bullet f=f$ y $0\bullet f=\mathbf{0}$□

4. Lema: Para todo $a\in\{0,1\}$ y $f\in\mathscr{F}_n$, se tiene $\Phi(a\bullet f)=a\bullet\Phi(f)$ donde Φes el isomorfimo entre $\mathscr{F}_n$ y $\mathscr{E}$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_n$ y $a\in\{0,1\}$.

Caso I: Si a=0, entonces $\Phi(a\bullet f)=\Phi(0\bullet f)=\Phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}=0\bullet\Phi(f)=a\bullet\Phi$ por ser Φun isomorfismo y por el lema IV.A.3.

Caso II: Si a=1, entonces $\Phi(a\bullet f)=\Phi(1\bullet f)=\Phi(f)=1\bullet\Phi(f)=a\bullet\Phi$por el lema IV.A.3□

5. Lema: Para cualquier $f\in\mathscr{F}_{n+1}$, $g\in\mathscr{F}_n$ y $a\in\{0,1\}$ tal que $g(y_1,\dots,y_n)=f(y_1,\dots,y_n,a)$, $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Entonces, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(y_1,\dots,y_n,a)=\dfrac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(y_1,\dots,y_n)$, $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$ y $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_{n+1}$, $g\in\mathscr{F}_n$ y $a\in\{0,1\}$ tal que $g(y_1,\dots,y_n)=f(y_1,\dots,y_n,a)$, $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$.

Arguméntese por inducción.

i) Sea $(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(y_1,\dots,y_n,a)=f(y_1,\dots,y_{i_1-1},1,y_{i_1+1},\dots,y_n,a)\oplus f(y_1,\dots,y_{i_1-1},0,$ $y_{i_1+1},\dots,y_n,a)=g(y_1,\dots,y_{i_1-1},1,y_{i_1+1},\dots,y_n)\oplus g(y_1,\dots,y_{i_1-1},0,y_{i_1+1},\dots,y_n)=\dfrac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(y_1,\dots,y_n)$. Entonces, $\dfrac{\partial f}{\partial x_{i_1}}(y_1,\dots,y_n,a)==\dfrac{\partial g}{\partial x_{i_1}}(y_1,\dots,y_n)$, $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$.

ii) Por hipótesis de inducción: $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(y_1,\dots,y_n,a)=\dfrac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}(y_1,\dots,y_n)$, $\forall(y_1,\dots,y_n)\in\{0,1\}^n$.

iii) Sea $(y_1,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$. Luego, $\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}(y_1,\ldots,y_n,a)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\right)(y_1,\ldots,y_n,a)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},1,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n,a)\oplus\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},0,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n,a)=\frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},1,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n)\oplus\frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},0,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\right)(y_1,\ldots,y_n)=\frac{\partial^{k+1}g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}(y_1,\ldots,y_n)$ por hipótesis de inducción. Entonces, $\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}(y_1,\ldots,y_n,a)=\frac{\partial^{k+1}g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}(y_1,\ldots,y_n)$, $\forall(y_1,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$ □

6. Teorema: Para todo $f\in\mathscr{F}_n$, se tiene $f = f(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s \oplus\ldots\oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet\ x_1 i\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$.

Demostración: Arguméntese por inducción.

i) Sea $f\in\mathscr{F}_1$. Nótese que $f(y_1)=f(0)\wedge\sim y_1\oplus f(1)\wedge y_1=f(0)\wedge(1\oplus y_1)\oplus f(1)\wedge y_1=f(0)\wedge 1\oplus\{f(1)\oplus f(0)\}\wedge y_1=f(0)\wedge 1(y_1)\oplus\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\wedge x_1(y_1)=\{f(0)\bullet 1\}(y_1)\oplus\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\bullet x_1\}(y_1)=[\{f(0)\bullet 1\}\oplus\{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\bullet x_i\}](y_1),\forall y_1\in\{0,1\}$. Luego, $f=f(0)\bullet 1\oplus\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)\bullet x_i$.

ii) Hipótesis de inducción: $\forall f\in\mathscr{F}_n$. Entonces, $f = f(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i\oplus\sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus\sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\ldots\oplus\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$.

iii) Sea $f\in\mathscr{F}_{n+1}$. Por el teorema II.A.2 se tiene: $f=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_{n+1})\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_{n+1}^{s_{n+1}}$ donde $F=\{(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1}):\ f(y_1,y_2,\ldots,y_{n+1})=1\}$. Como $<\mathscr{F}_{n+1},\vee,\wedge,\sim>$ es un álgebra booleana se tiene: $f=\{(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge x_{n+1}\}\vee\{(\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\wedge\sim x_{n+1}\}$ donde $M=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n): f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)=1\}$ y $N=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n): f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)=1\}$.

Nótese que $\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}, \bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\in\mathscr{E}$. Entonces, $\exists g,h\in\mathscr{F}_n$ tal que $\Phi(g)=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in M} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ y $\Phi(h)=$

$\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in N} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$.

Por hipótesis de inducción se tiene: g = $g(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i\oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 g}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\ldots\oplus\frac{\partial^n g}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$ y h = $h(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 h}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\ldots\oplus\frac{\partial^n h}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$. Con lo cual, $\Phi(g) = g(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 g}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s \oplus\ldots\oplus \frac{\partial^n g}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$ y $\Phi(h) = h(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i\oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 h}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\ldots\oplus\frac{\partial^n h}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_n$.

Como $f = \{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\}\vee\{\Phi(h)\wedge\sim x_{n+1}\}$, entonces $f=\{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\}\oplus\{\Phi(h)\wedge\sim x_{n+1}\}\oplus \{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\wedge\Phi(h)\wedge\sim x_{n+1}\}=\{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\}\oplus\{\Phi(h)\wedge\sim x_{n+1}\}=\{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\}\oplus\{\Phi(h)\wedge(1\oplus x_{n+1})\}=\{\Phi(g)\wedge x_{n+1}\}\ominus\{\Phi(h)\oplus\{\Phi(h)\wedge x_{n+1}\}\}=\Phi(h)\oplus\{(\Phi(g)\oplus\Phi(h))\wedge x_{n+1}\}$.

Considérese $A=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n): g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=1\}$ y $B=\{(y_1,y_2,\ldots,y_n): h(y_1,y_2,\ldots,y_n)=1\}$. Pruébese que A=M y B=N. Sea $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in M \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\leq\Phi(g) \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}=\Phi^{-1}(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\leq g \Rightarrow 1=x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}(s_1,s_2,\ldots,s_n)\leq g(s_1,s_2,\ldots,s_n)\Rightarrow g(s_1,s_2,\ldots,s_n)=1\Rightarrow(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in A$. Entonces, $M\subseteq A$.

Sea $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in A$. Supóngase que $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\notin M$. Luego, $x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}\leq g \Rightarrow x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}=\Phi(x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n})\leq\Phi(g) \Rightarrow 1=x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)\leq \Phi(g)(s_1,s_2,\ldots,s_n,1)=0$, lo que implica una contradicción. Entonces, $A\subseteq M$. Por lo tanto, A=M.

De igual manera, se tendría que B=N. Con lo cual, $g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)$ y $h(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)$ $,\forall(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n \Rightarrow \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,y_2,\ldots,y_n,1)$ y $\frac{\partial^k h}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,y_2,\ldots,y_n,0)$,

$\forall(y_1 y_2,\dots y_n)\in\{0,1\}^n$ y $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Como $f = \Phi(h)\oplus\{(\Phi(g)\oplus\Phi(h))\wedge x_{n+1}\}$ entonces, $f = \{\ h(0,\dots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(0,\dots,0)\bullet x_i\oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 h}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\dots\oplus\frac{\partial^n h}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\ \}\ \oplus\ \{\ [\ g(0,\dots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(0,\dots,0)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\ \oplus\ \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 g}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\ \oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n g}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\ \oplus\ h(0,\dots,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial x_i}(0,\dots,0)\bullet x_i\oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 h}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\ \oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n h}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,]\wedge x_{n+1}\ \}=\{\ f(0,\dots,0,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,\}\oplus\{\ [f(0,\dots,0,1)\bullet 1\oplus\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,1)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,1)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,1)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,1)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\ \oplus\ f(0,\dots,0,0)\bullet 1\ \oplus\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,]\wedge x_{n+1}\ \}=\ \{\ f(0,\dots,0,0)\bullet 1\oplus\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\ \oplus\ \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\ \oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,\}\oplus\{\ [\{f(0,\dots,0,1)\oplus f(0,\dots,0,0)\}\bullet 1\ \oplus\ \sum_{i=1}^{n}\{\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,1)\oplus\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,0)\}\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,1)\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,0)\}\bullet x_i\wedge x_j\ \oplus\ \sum_{1=i<j<s}^{n}\{\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,1)\oplus\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,0)\}\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\ \oplus\dots\oplus\ \{\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,1)\oplus\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,0)\}\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,]\wedge x_{n+1}\ \}=\{\ f(0,\dots,0,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\ \oplus\ \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\ \oplus\dots\oplus\ \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n}(0,\dots,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,\}\oplus\{\ [\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0,\dots,0,0)\bullet 1\ \oplus\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_{n+1}}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\ \oplus\ \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_{n+1}}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\ \oplus\ \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^4 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s\partial x_{n+1}}(0,\dots,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus\dots\oplus\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n\partial x_{n+1}}(0,\dots,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge\dots\wedge x_n\,]\wedge$

$$x_{n+1}\}=f(0,...,0,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,...,0,0)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}$$
$$(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s \oplus...\oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}(0,...,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge...\wedge x_n \oplus \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_{n+1}\oplus$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_{n+1} \oplus \sum_{1=i<j}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_{n+1} \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\wedge x_{n+1} \oplus...\oplus \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge...\wedge x_n\wedge$$
$$x_{n+1}=f(0,...,0,0)\bullet 1\oplus \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(0,...,0,0)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n+1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j \oplus$$
$$\sum_{1=i<j<s}^{n+1}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(0,...,0,0)\bullet x_i\wedge x_j\wedge x_s\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n\partial x_{n+1}}(0,...,0,0)\bullet x_1\wedge x_2\wedge...\wedge x_n\wedge x_{n+1}\ \square$$

<u>Definición</u>: Se define $\zeta:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^n$ tal que $\zeta(y_1,...,y_i,...,y_n)=(y_1\oplus\sigma_1,...,y_i\oplus\sigma_i\ ,...,y_n\oplus\sigma_n)$, $\forall(y_1,...,y_n)\in\{0,1\}^n$ con $(\sigma_1,...,\sigma_i,...,\sigma_n)\in\{0,1\}^n$.

6. <u>Lema</u>: Para todo $f,g\in\mathscr{F}_n$. Por tanto:

i) $x_i\circ\zeta=x_i\oplus\sigma_i$, $\forall i\in\{1,2,...,n\}$.

ii) $f\circ\zeta\in\mathscr{F}_n$,

iii) $(f\circ\zeta)\circ\zeta=f$,

iv) $(f\oplus g)\circ\zeta=(f\circ\zeta)\oplus(g\circ\zeta)$,

v) $(f\wedge g)\circ\zeta=(f\circ\zeta)\wedge(g\circ\zeta)$,

vi) $(f\vee g)\circ\zeta=(f\circ\zeta)\vee(g\circ\zeta)$,

vii) $(\sim f)\circ\zeta=\sim(f\circ\zeta)$,

viii) $(a\bullet f)\circ\zeta=a\bullet(f\circ\zeta)$, $\forall a\in\{0,1\}$

<u>Demostración</u>: Sean $f,g\in\mathscr{F}_n$.

i) Sea $(y_1,...y_n)\in\{0,1\}^n$, entonces $x_i\circ\zeta(y_1,...y_n)=x_i(\zeta(y_1,...y_n))=x_i(y_1\oplus\sigma_1,...y_n\oplus\sigma_n)=y_i\oplus\sigma_i$ $=x_i(y_1,...y_n)\oplus\sigma_i(y_1,...y_n)=(x_i\oplus\sigma_i)(y_1,...y_n)$. Por lo tanto, $x_i\circ\zeta=x_i\oplus\sigma_i$, $\forall i\in\{1,2,...,n\}$.

ii) Como f$\in\mathscr{F}_n$. De tal forma, f=$\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}$ donde F={ $(y_1,y_2,\ldots y_n)$: f$(y_1,y_2,\ldots y_n)$=1} por teorema II.A.2. Luego, f∘ζ$(y_1,\ldots y_n)$=f(ζ$(y_1,\ldots y_n)$)=f$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$ $=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} x_1^{s_1}\wedge x_2^{s_2}\wedge\ldots\wedge x_n^{s_n}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)=\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} (x_1\oplus\sigma_1)^{s_1}\wedge(x_2\oplus\sigma_2)^{s_2}\wedge\ldots\wedge$ $(x_n\oplus\sigma_n)^{s_n}(y_1,\ldots y_n)$, $\forall(y_1,\ldots y_n)\in\{0,1\}^n$. Por lo tanto , f∘ζ = $\bigvee_{\forall(s_1,\ldots,s_n)\in F} (x_1\oplus\sigma_1)^{s_1}\wedge$ $(x_2\oplus\sigma_2)^{s_2}\wedge\ldots\wedge(x_n\oplus\sigma_n)^{s_n}\in\mathscr{F}_n$.

iii) Sea $(y_1,\ldots y_n)\in\{0,1\}^n$, entonces [(f∘ζ)∘ζ]$(y_1,\ldots y_n)$=(f∘ζ)(ζ$(y_1,\ldots y_n)$)=(f∘ζ) $(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=f (ζ$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$)=f($[y_1\oplus\sigma_1]\oplus\sigma_1,\ldots,[y_n\oplus\sigma_n]\oplus\sigma_n$)=f$(y_1,\ldots y_n)$. Por lo mismo, (f ∘ζ)∘ζ=f.

iv) Sea $(y_1,\ldots y_n)\in\{0,1\}^n$, entonces [(f⊕g)∘ζ]$(y_1,\ldots y_n)$=(f⊕g)(ζ$(y_1,\ldots y_n)$)= (f⊕g)$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=(f⊕g)$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=f$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$⊕g$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$= (f∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$⊕(g∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$= [(f∘ζ)⊕(g∘ζ)]$(y_1,\ldots y_n)$. Por lo tanto, (f⊕g)∘ζ=(f∘ζ)⊕(g∘ζ).

v) Sea $(y_1,\ldots y_n)\in\{0,1\}^n$, entonces [(f∧g)∘ζ]$(y_1,\ldots y_n)$=(f∧g)(ζ$(y_1,\ldots y_n)$)=(f∧g) $(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=(f∧g)$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_n\oplus\sigma_n)$=f$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_n\oplus\sigma_n)^g(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$= (f∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$^(g∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$= [(f∘ζ)∧(g∘ζ)]$(y_1,\ldots y_n)$. Por lo tanto, (f∧g)∘ζ=(f∘ζ)∧(g∘ζ).

vi) (f∨g)∘ζ=({f⊕g}⊕{f∧g})∘ζ={(f∘ζ)⊕(g∘ζ)}⊕{(f∘ζ)∧(g∘ζ)}=(f∘ζ)∨(g∘ζ) por ii), iv) y v).

vii) (~f)∘ζ=(1⊕f)∘ζ=(1∘ζ)⊕(f∘ζ)=1⊕(f∘ζ)=~(f∘ζ) por ii) y iv)

viii) Sean $(y_1,\ldots y_n)\in\{0,1\}^n$ y a∈{0,1}. De manera que, (a•f)∘ζ$(y_1,\ldots y_n)$=(a•f) (ζ$(y_1,\ldots y_n)$)=(a•f)$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=a^f$(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$=a^(f∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$= a•(f∘ζ)$(y_1,\ldots y_n)$. Por lo tanto, (a•f)∘ζ=a•(f∘ζ)□

7. <u>Lema</u>: Para cualquier f$\in\mathscr{F}_n$ entonces, $\dfrac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots y_n)=\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots y_n\oplus\sigma_n)$

, $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $\forall\,(y_1,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_n$ y $(y_1,\ldots,y_n)\in\{0,1\}^n$.

Arguméntese por inducción.

i) $\frac{\partial(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}}(y_1,\ldots,y_{i_1-1},y_{i_1},y_{i_1+1},\ldots,y_n)=(f\circ\zeta)(y_1,\ldots,y_{i_1-1},1,y_{i_1+1},\ldots,y_n)\oplus(f\circ\zeta)(y_1,\ldots,y_{i_1-1},0,y_{i_1+1},\ldots,y_n)$ $=f(\zeta(y_1,\ldots,y_{i_1-1},1,y_{i_1+1},\ldots,y_n))\oplus f(\zeta(y_1,\ldots,y_{i_1-1},0,y_{i_1+1},\ldots,y_n))=f(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_1-1}\oplus\sigma_{i_1-1},1\oplus\sigma_{i_1},$ $y_{i_1+1}\oplus\sigma_{i_1+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)\oplus f(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_1-1}\oplus\sigma_{i_1-1},0\oplus\sigma_{i_1},y_{i_1+1}\oplus\sigma_{i_1+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)=f(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_1-1}\oplus$ $\sigma_{i_1-1},\sim\sigma_{i_1},\ y_{i_1+1}\oplus\sigma_{i_1+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)\oplus f(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_1-1}\oplus\sigma_{i_1-1},\sigma_{i_1},y_{i_1+1}\oplus\sigma_{i_1+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)=\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}($ $y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_1}\oplus\sigma_{i_1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)$ ya que $\sigma_{i_1}\in\{0,1\}$.

ii) Por hipótesis de inducción se tiene: $\frac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_n\oplus\sigma_n)$.

iii) $\frac{\partial^{k+1}(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}(y_1,\ldots,y_n)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}(\frac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}})(y_1,\ldots,y_n)=\frac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},1,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n)$ $\oplus\frac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1},0,y_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1}\oplus\sigma_{i_{k+1}-1},1\oplus\sigma_{i_{k+1}},y_{i_{k+1}+1}\oplus\sigma_{i_{k+1}+1},$ $\ldots,y_n\oplus\sigma_n)\oplus\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1}\oplus\sigma_{i_{k+1}-1},0\oplus\sigma_{i_{k+1}},y_{i_{k+1}+1}\oplus\sigma_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$ $(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1}\oplus\sigma_{i_{k+1}-1},\sim\sigma_{i_{k+1}},y_{i_{k+1}+1}\oplus\sigma_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)\oplus\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}-1}\oplus\sigma_{i_{k+1}-1},\sigma_{i_{k+1}},$ $y_{i_{k+1}+1}\oplus\sigma_{i_{k+1}+1},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}})(y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}}\oplus\sigma_{i_{k+1}},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}}($ $y_1\oplus\sigma_1,\ldots,y_{i_{k+1}}\oplus\sigma_{i_{k+1}},\ldots,y_n\oplus\sigma_n)$ por hipotesis de inducción y $\sigma_{i_{k+1}}\in\{0,1\}$□

8. Corolario: Para cualquier $f\in\mathscr{F}_n$ y $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in\{0,1\}^n$. Entonces, $f=f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet 1\oplus$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet(x_i\oplus\sigma_i)\oplus\sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet(x_i\oplus\sigma_i)\wedge(x_j\oplus\sigma_j)\oplus$ $\sum_{1=i<j<s}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_s}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet(x_i\oplus\sigma_i)\wedge(x_j\oplus\sigma_j)\wedge(x_s\oplus\sigma_s)\oplus\ldots\oplus\frac{\partial^n f}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet$ $(x_1\oplus\sigma_1)\wedge(x_2\oplus\sigma_2)\wedge\ldots\wedge(x_n\oplus\sigma_n)$.

Demostración: Sean $f\in\mathscr{F}_n$ y $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\in\{0,1\}^n$. Como $f\circ\zeta\in\mathscr{F}_n$ se tiene: $f\circ\zeta=$ $(f\circ\zeta)(0,\ldots,0)\bullet 1\oplus\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f\circ\zeta)}{\partial x_i}(0,\ldots,0)\bullet x_i\oplus\sum_{1=i<j}^{n}\frac{\partial^2(f\circ\zeta)}{\partial x_i\partial x_j}(0,\ldots,0)\bullet x_i\wedge x_j$

$\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3(f\circ\zeta)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(0,\ldots,0)\bullet x_i \wedge x_j \wedge x_s \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n(f\circ\zeta)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(0,\ldots,0)\bullet x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ por teorema IV.A.5. Además, $\frac{\partial^k(f\circ\zeta)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(0,\ldots,0)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $\forall k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ por lema IV.A.7. Con lo cual, $f\circ\zeta = f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet 1 \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_i \wedge x_j$ $\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_i \wedge x_j \wedge x_s \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$.

Luego, $f=(f\circ\zeta)\circ\zeta = \{f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet 1 \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_i \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ $\bullet x_i \wedge x_j \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet x_i \wedge x_j \wedge x_s \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ $\bullet x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n\}\circ\zeta = f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet 1 \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_i\circ\zeta) \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_i\circ\zeta)\wedge(x_j\circ\zeta) \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_i\circ\zeta)\wedge(x_j\circ\zeta)\wedge(x_s\circ\zeta) \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_1\circ\zeta)\wedge(x_2\circ\zeta)\wedge\ldots\wedge(x_n\circ\zeta) = f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet 1 \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_i\oplus\sigma_i)$ $\oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_i\oplus\sigma_i)\wedge(x_j\oplus\sigma_j) \oplus \sum_{1=i<j<s} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ $\bullet (x_i\oplus\sigma_i)\wedge(x_j\oplus\sigma_j)\wedge(x_s\oplus\sigma_s)\oplus\ldots\oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\bullet (x_1\oplus\sigma_1)\wedge(x_2\oplus\sigma_2)\wedge\ldots\wedge(x_n\oplus\sigma_n)$ por lema IV.A.6□

9. <u>Corolario</u>: Para toda x función booleana en el tiempo de orden n tal que $x(t)=f(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $\forall t\in\mathbb{N}$ donde $f\in\mathcal{F}_n$ y $x_1,x_2,\ldots,x_n\in S$. Así que, $\frac{\partial x}{\partial t}(t)=[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet \frac{\partial x_i}{\partial t} \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet \frac{\partial x_i}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_j}{\partial t} \oplus$ $\sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet \frac{\partial x_i}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_j}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_s}{\partial t} \oplus\ldots\oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(x_1(t),x_2(t),\ldots,$ $x_n(t))\bullet \frac{\partial x_1}{\partial t}\wedge\frac{\partial x_2}{\partial t}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial x_n}{\partial t}](t)$, $\forall t\in\mathbb{N}$.

<u>Demostración</u>: Sea x una función booleana en el tiempo de orden n tal que $x(t)=f(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $\forall t\in\mathbb{N}$ donde $f\in\mathcal{F}_n$ y $x_1,x_2,\ldots,x_n\in S$. Como $(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\in\{0,1\}^n$, entonces $f = f(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet 1 \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet (x_i\oplus x_i(t)) \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))\bullet (x_i\oplus x_i(t))\wedge(x_j\oplus x_j(t))$

$\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet (x_i \oplus x_i(t)) \wedge (x_j \oplus x_j(t)) \wedge (x_s \oplus x_s(t)) \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$ $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet (x_1 \oplus x_1(t)) \wedge (x_2 \oplus x_2(t)) \wedge \ldots \wedge (x_n \oplus x_n(t))$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Por lo anterior, se tiene que $f(x_1(t+1), x_2(t+1), \ldots, x_n(t+1)) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge (x_i(t+1) \oplus x_i(t))$ $\oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \{ (x_i(t+1) \oplus x_i(t)) \wedge (x_j(t+1) \oplus x_j(t)) \} \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}$ $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \{ (x_i(t+1) \oplus x_i(t)) \wedge (x_j(t+1) \oplus x_j(t)) \wedge (x_s(t+1) \oplus x_s(t)) \} \oplus \ldots \oplus$ $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \{ (x_1(t+1) \oplus x_1(t)) \wedge (x_2(t+1) \oplus x_2(t)) \wedge \ldots \wedge (x_n(t+1) \oplus x_n(t)) \}$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Con lo cual, $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = f(x_1(t+1), x_2(t+1), \ldots, x_n(t+1)) \oplus f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) =$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \frac{\partial x_i}{\partial t}(t) \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \{ \frac{\partial x_i}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_j}{\partial t}(t) \}$ $\oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \wedge \{ \frac{\partial x_i}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_j}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_s}{\partial t}(t) \} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(x_1(t), x_2(t)$ $, \ldots, x_n(t)) \wedge \{ \frac{\partial x_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_2}{\partial t} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial t}(t) \} = [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet \frac{\partial x_i}{\partial t} \oplus \sum_{1=i<j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}($ $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet \frac{\partial x_i}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_j}{\partial t} \oplus \sum_{1=i<j<s}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_s}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet \frac{\partial x_i}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_j}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_s}{\partial t}$ $\oplus \ldots \oplus \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \bullet \frac{\partial x_1}{\partial t} \wedge \frac{\partial x_2}{\partial t} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x_n}{\partial t}](t)$, $\forall t \in \mathbb{N}$ □

B. Análogo al teorema de Taylor para señales discretas

Definición: Se define $\bullet:\{0,1\}\times S\rightarrow S$ tal que $(a\bullet x)(t)=a\wedge x(t)$, $\forall a\in\{0,1\}$ y $\forall x\in S$.

1. Lema: Para cualquier $x,y\in S$ y $a\in\{0,1\}$. Entonces,

i) $a\bullet(x\oplus y)=(a\bullet x)\oplus(a\bullet y)$,

ii) $\frac{\partial}{\partial t}(a\bullet x)=a\bullet\frac{\partial x}{\partial t}$

Demostración: Sean $x,y\in S$ y $a\in\{0,1\}$.

i) Sea $t\in\mathbb{N}$. Luego, $[a\bullet(x\oplus y)](t)=a\wedge(x\oplus y)(t)=a\wedge\{x(t)\oplus y(t)\}=\{a\wedge x(t)\}\oplus\{a\wedge y(t)\}=(a\bullet x)(t)\oplus(a\bullet y)(t)=[(a\bullet x)\oplus(a\bullet y)](t)$. Por lo tanto, $a\bullet(x\oplus y)=(a\bullet x)\oplus(a\bullet y)$.

ii) Sea $t\in\mathbb{N}$. Luego, $\frac{\partial}{\partial t}(a\bullet x)(t)=(a\bullet x)(t+1)\oplus(a\bullet x)(t)=\{a\wedge x(t+1)\}\oplus\{a\wedge x(t)\}=a\wedge\{x(t+1)\oplus x(t)\}=a\wedge\frac{\partial x}{\partial t}(t)=(a\bullet\frac{\partial x}{\partial t})(t)$. Por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial t}(a\bullet x)=a\bullet\frac{\partial x}{\partial t}$ □

Definición: Se define $t^0:\mathbb{N}\rightarrow\{0,1\}$ tal que $t^0(t)=1$, $\forall t\in\mathbb{N}$.

Nota: $t^0=1$.

Definición: Para cualquier $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Se define $t^n:\mathbb{N}\rightarrow\{0,1\}$ tal que

i) $t^n(0)=0$,

ii) $t^n(t+1)=t^n(t)\oplus t^{n-1}(t)$, $\forall t\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Utilizando las definiciones se tiene:

$\mathbb{N}$	t^0	t^1	t^2	t^3	t^4	t^5	t^6	t^7	t^8	t^9	t^{10}	t^{11}	t^{12}	t^{13}	t^{14}	t^{15}	t^{16}	t^{17}	t^{18}	t^{19}	t^{20}	t^{21}	t^{22}	t^{23}	t^{24}	t^{25}	t^{26}	t^{27}	t^{28}	t^{29}	t^{30}	t^{31}
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
25	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
26	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
27	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
28	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
29	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
30	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Definición: Para cualquier a,n∈$\mathbb{N}$. Se define $(t-a)^n:\mathbb{N}\setminus\{0,...,a-1\}\to\{0,1\}$ tal que $(t-a)^n(\mathrm{t})=t^n(\mathrm{t}-a)$, $\forall\mathrm{t}\in:\mathbb{N}\setminus\{0,...,a-1\}$.

2. Lema: Para cualquier $a\in\mathbb{N}$ y n∈$\mathbb{N}\setminus\{0\}$, se tiene $\frac{\partial}{\partial t}((t-a)^n) = (t-a)^{n-1}$.

Demostración: Sean $a\in\mathbb{N}$, n∈$\mathbb{N}\setminus\{0\}$ y t∈$\mathbb{N}\setminus\{0,...,a-1\}$.Luego, $\frac{\partial}{\partial t}((t-a)^n)(\mathrm{t})=(t-a)^n(\mathrm{t}+1)\oplus$ $(t-a)^n(\mathrm{t})=t^n([\mathrm{t}-a]+1)\oplus t^n(\mathrm{t}-a)=\{t^n(\mathrm{t}-a)\oplus t^{n-1}(\mathrm{t}-a)\}\oplus t^n(\mathrm{t}-a)=t^{n-1}(\mathrm{t}-a)\oplus\{t^n(\mathrm{t}-a)\oplus$

$t^n(\text{t}-a)\}=t^{n-1}(\text{t}-a)$ por definición. Por lo tanto, $\dfrac{\partial}{\partial t}((t-a)^n) = (t-a)^{n-1}$ □

3. <u>Lema</u>: Para cualquier $a\in\mathbb{N}$, se tiene que: $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(t-a)^n(\text{t})=0$, $\forall \text{t}\in\{a,a+1,\ldots, a+(\text{n}-1)\}$.

<u>Demostración</u>: Sean $a\in\mathbb{N}$.

Arguméntese por inducción.

i) Nótese que $(t-a)^1(a)=t^1(a-a)=t^1(0)=0$ por definición. Por lo tanto, $(t-a)^1(\text{t})=0$, $\forall \text{t}\in\{a\}$.

ii) Hipótesis de inducción: $(t-a)^n(\text{t})=0$, $\forall \text{t}\in\{a,a+1,\ldots,a+(\text{n}-1)\}$.

iii) Nótese que $(t-a)^{n+1}(a)=t^{n+1}(a-a)=t^{n+1}(0)=0$ por definición. Como $(t-a)^{n+1}(\text{t}+1)=t^{n+1}(\text{t}+1-a)=t^{n+1}(\text{t}-a)\oplus t^n(\text{t}-a)=(t-a)^{n+1}(\text{t})\oplus(t-a)^n(\text{t})=(t-a)^{n+1}(\text{t})\oplus 0=(t-a)^{n+1}(\text{t})$, $\forall \text{t}\in\{a,a+1,\ldots,a+(\text{n}-1)\}$ por hipótesis de inducción y por definición. Entonces, $(t-a)^{n+1}(a+\text{n})=(t-a)^{n+1}(a+(\text{n}-1))=\ldots=(t-a)^{n+1}(a+1)=(t-a)^{n+1}(a)=0$. Con lo cual, $(t-a)^{n+1}(\text{t})=0$, $\forall \text{t}\in\{a,a+1,\ldots,a+\text{n}\}$□

4. <u>Teorema</u>: Para cualquier $\text{x}\in\text{S}$ y $a\in\mathbb{N}$ se tiene que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{x}=\text{x}(a)\bullet 1\oplus\dfrac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus\ldots\oplus\dfrac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n$, $\forall \text{t}\in\{a,a+1,\ldots,a+\text{n}\}$.

<u>Demostración</u>: Sea $a\in\mathbb{N}$.

Arguméntese por inducción.

i) Sea $\text{x}\in\text{S}$. Nótese que $\text{x}(a)=\text{x}(a)^\wedge 1=\text{x}(a)^\wedge 1(a)=[\text{x}(a)\bullet 1](a)$. Por lo tanto , $\text{x}=\text{x}(a)\bullet 1$, $\forall \text{t}\in\{a\}$.

ii) Hipótesis de inducción: $\forall \text{x}\in\text{S}$, $\text{x}=\text{x}(a)\bullet 1\oplus\dfrac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus\ldots\oplus\dfrac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet$

$(t-a)^n$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n}\}$.

iii) Sea $x\in S$. Luego, $[x(a)\bullet 1\oplus \frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus \frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}](\mathrm{t})=[x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n](\mathrm{t})\oplus \frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}(\mathrm{t})=x(\mathrm{t})\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\wedge(t-a)^{n+1}(\mathrm{t})=x(\mathrm{t})\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\wedge 0=x(\mathrm{t})\oplus 0=x(\mathrm{t})$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n}\}$ por hipótesis de inducción y lema IV.B.3. Por lo tanto, $x=x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n}\}$. Como $\frac{\partial x}{\partial t}\in S$, entonces $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x}{\partial t})(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial x}{\partial t})(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n}{\partial t^n}(\frac{\partial x}{\partial t})(a)\bullet(t-a)^n$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n}\}$ por hipótesis de inducción. Con lo cual, $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^n$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n}\}$ por definición. Por lo anterior se tiene: $x(a+(\mathrm{n}+1))=\frac{\partial x}{\partial t}(a+\mathrm{n})\oplus x(a+\mathrm{n})=\{\frac{\partial x}{\partial t}\oplus x\}(a+\mathrm{n})=\{\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^n\}\oplus\{x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}\}(a+\mathrm{n})=\{x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet\{(t-a)^1\oplus 1\}\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet\{(t-a)^2\oplus(t-a)^1\}\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet\{(t-a)^{n+1}\oplus(t-a)^n\}\}(a+\mathrm{n})=x(a)\bullet 1(a+\mathrm{n})\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet\{(t-a)^1\oplus 1\}(a+\mathrm{n})\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet\{(t-a)^2\oplus(t-a)^1\}(a+\mathrm{n})\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet\{(t-a)^{n+1}\oplus(t-a)^n\}(a+\mathrm{n})=x(a)\bullet 1(a+(\mathrm{n}+1))\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1(a+(\mathrm{n}+1))\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2(a+(\mathrm{n}+1))\oplus...\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}(a+(\mathrm{n}+1))=[x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}](a+(\mathrm{n}+1))$. Por lo tanto, $x=x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus\frac{\partial^{n+1}x}{\partial t^{n+1}}(a)\bullet(t-a)^{n+1}$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n},a+(\mathrm{n}+1)\}$□

5. <u>Corolario</u>: Para cualquier $x\in S$ y $a\in\mathbb{N}$, se tiene que $x=x(a)\bullet 1\oplus\frac{\partial x}{\partial t}(a)\bullet(t-a)^1\oplus\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(a)\bullet(t-a)^2\oplus...\oplus\frac{\partial^n x}{\partial t^n}(a)\bullet(t-a)^n\oplus...$, $\forall t\in\{a,a+1,...,a+\mathrm{n},...\}$.

V. BIBLIOGRAFIA

Liu, C.L. Elementos de Matemática Discreta. 2a. ed. México D. F. (México), 1995 Editorial Mc-GrawHill. 432 pp.

Ross, Kenneth A. Matemáticas Discretas. 2a. ed. México D. F. (México), 1990 Editorial Prentice Hall. Segunda Edición. México. 673 pp.

Gorbátov, V.A. Fundamentos de la matemática discreta. Moscú (URSS), 1988 Editorial Mir. 335 pp.

Johnsonbaugh, Richard. Matemáticas Discretas. 2a. ed. México D. F. (México), 1988 Editorial Iberoamérica. México. 506 pp.