

Conducción de calor en una aleta bidimensional

Manuel Eduardo Ruano Pérez

Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle de Guatemala

RESUMEN: En este trabajo se obtiene la solución de la ecuación diferencial de conducción bidimensional de calor en una aleta en estado estacionario. Las condiciones de frontera son: temperatura conocida en la base de la aleta y disipación de calor por convección en las otras superficies. La solución proporciona la distribución de temperatura en la aleta. A partir de la temperatura se obtiene la tasa de disipación de calor, la eficiencia y la efectividad. El diseño de aletas se basa en las ecuaciones obtenidas mediante la suposición de conducción unidimensional de calor, por ser más simples. El objetivo de este trabajo, por tanto, es investigar la exactitud de las ecuaciones unidimensionales al compararlas con las bidimensionales. La solución de la ecuación diferencial se obtiene usando la técnica de separación de variables y los resultados son dados en forma adimensional. Se ha usado hojas de Excel para los cálculos. El error de la ecuación unidimensional en la temperatura de la punta de la aleta es de -0.5% cuando el número de Biot es igual a 0.01 para una longitud adimensional de aleta de 20, y aumenta rápidamente con el número de Biot. El error en la tasa de disipación de calor, en la eficiencia y en la efectividad es de 0.2% para los mismos parámetros anteriores.

PALABRAS CLAVE: aleta, temperatura, calor, eficiencia, efectividad.

has an error of -0.5 % for temperature when Biot number equals 0.01 and non-dimensional length equals 20. Error is 0.2 % for heat rate, efficiency and effectiveness. Errors increase rapidly for larger Biot numbers.

KEY WORDS: fin, temperature, heat, efficiency, effectiveness.

Introducción

El análisis de la conducción de calor en aletas ha sido tradicionalmente unidimensional, debido a la sencillez de las ecuaciones obtenidas. Sin embargo, es importante conocer hasta qué punto este análisis es suficientemente exacto.

El problema fue tratado inicialmente por Harper y Brown (1921) quienes determinaron que el error en el cálculo de la eficiencia cometido al tratar una aleta como unidimensional y con su punta aislada térmicamente es, en el peor de los casos, menor que 0.6 %. En este cálculo asumieron que la aleta estaba hecha de acero, con una conductividad térmica de 0.1 cal/s cm °C (42 W/m °C), el coeficiente de convección era 0.008 cal/s cm² °C (335 W/m² °C), la longitud de la aleta 3 cm y su espesor 0.5 cm (relación longitud/espesor igual a 6).

En este trabajo se pretende calcular en una forma sistemática los errores cometidos al considerar la aleta como unidimensional con disipación de calor en la punta. Los errores son calculados para la temperatura, la tasa de disipación de calor, la eficiencia y la efectividad de la aleta.

Metodología

Considérese una aleta longitudinal de perfil rectangular (figura 1). La ecuación diferencial bidimensional de conducción de calor en estado estacionario sin generación de calor, en coordenadas cartesianas, con propiedades constantes, es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (1)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq t$$

Heat conduction in a two-dimensional fin

ABSTRACT: The solution to the two-dimensional heat conduction differential equation in steady state in a fin is obtained. Boundary conditions are: known temperature at fin base and heat transfer by convection at other surfaces. Solution gives the temperature distribution in the fin from which heat rate, efficiency and effectiveness are calculated. Fin design is based in one-dimensional equations due to their simplicity. The purpose of this work is to compare the results from the one-dimensional equations to those from the two-dimensional one. The solution of the differential equation is obtained by separation of variables technique. Results are given in non-dimensional terms. Excel spreadsheets have been used for computation. The one-dimensional equation

Para resolver la ecuación diferencial por medio del método de separación de variables y obtener una solución particular, se necesita tres condiciones de frontera homogéneas, mientras la cuarta condición es no homogénea. En este caso, la dirección no homogénea es la dirección x y la homogénea es la y .

La coordenada x se mide a partir de la punta de la aleta, que es la condición de frontera homogénea en esa dirección (condición convectiva), para hacer más simple la solución final (Arpaci, 1966). Por tanto, la base de la aleta, fija a la superficie primaria, está localizada en $x=L$, al contrario de lo normalmente empleado en este tipo de problemas. La temperatura de la base es T_0 (condición no homogénea).

La coordenada y se mide a partir de la mitad de la aleta porque en ese caso la temperatura es simétrica con respecto al eje x , de manera que la condición de frontera más simple (condición de simetría o aislamiento térmico) corresponda a $y=0$. La mitad del espesor de la aleta es t , por lo que la segunda condición de frontera homogénea en la dirección y (condición convectiva) corresponde a $y=t$.

Las condiciones de frontera correspondientes a la ecuación (1) son

$$k \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = h[T(0, y) - T_\infty] \quad \dots (2)$$

$$T(L, y) = T_0 \quad \dots (3)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \dots (4)$$

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial y} = h[T(x, t) - T_\infty] \quad \dots (5)$$

Para hacer homogéneas las condiciones de frontera convectivas, se realiza el cambio de variable

$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty \quad \dots (6)$$

de manera que la ecuación diferencial y sus correspondientes condiciones de frontera son ahora

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (7)$$

$$k \frac{\partial \theta(0, y)}{\partial x} = h\theta(0, y) \quad \dots (8)$$

$$\theta(L, y) = \theta_0 = T_0 - T_\infty \quad \dots (9)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \dots (10)$$

$$-k \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial y} = h\theta(x, t) \quad \dots (11)$$

Separando las variables independientes en dos funciones propias,

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \quad \dots (12)$$

Substituyendo en la ecuación diferencial (7),

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

O bien,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función solamente de x , mientras el derecho lo es sólo de y . Como estas variables son independientes, la igualdad es posible únicamente si ambos lados de la ecuación son iguales a una constante. Sea λ^2 esta constante (constante de separación); luego,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \pm \lambda^2$$

Para obtener un problema de valor característico en la dirección homogénea (dirección y), se escoge el signo $+$ para la constante de separación. Las dos ecuaciones diferenciales ordinarias separadas y sus correspondientes condiciones de frontera obtenidas son, en la dirección x ,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = 0 \quad \dots (13)$$

$$k \frac{dX(0)}{dx} = hX(0) \quad \dots (14)$$

$$X(L)Y(y) = \theta_0 \quad \dots (15)$$

y en la dirección y ,

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \dots (16)$$

$$\frac{dY(0)}{dy} = 0 \quad \dots (17)$$

$$-k \frac{dY(t)}{dy} = hY(t) \quad \dots (18)$$

La solución general de la ecuación diferencial (16) es

$$Y(y) = C_3 \operatorname{sen}(\lambda y) + C_4 \cos(\lambda y) \quad \dots (19)$$

Derivando esta ecuación con respecto a y ,

$$\frac{dY}{dy} = C_3 \lambda \cos(\lambda y) - C_4 \lambda \operatorname{sen}(\lambda y)$$

Aplicando la condición de frontera (17)

$$\frac{dY(0)}{dy} = C_3 \lambda = 0$$

Como λ no puede ser 0 (para no obtener una solución trivial de la ecuación (12)),

$$C_3 = 0 \quad \dots (20)$$

Aplicando la condición de frontera (18) a la solución (19),

$$-k[-C_4 \lambda \operatorname{sen}(\lambda t)] = h C_4 \cos(\lambda t)$$

Simplificando, se obtiene la ecuación característica de la constante de separación

$$\lambda t \operatorname{tg}(\lambda t) = \frac{ht}{k}$$

El parámetro adimensional ht/k es reconocido como el número de Biot, basado en la mitad del espesor de la aleta, t . La ecuación característica resulta

$$\lambda t \operatorname{tg}(\lambda t) = Bi \quad \dots (20)$$

La ecuación (20) da un número infinito de soluciones para la constante λ . La figura 2 muestra las funciones $\operatorname{tg}(\lambda t)$ y $Bi/\lambda t$ para $Bi = 1$. Los puntos de intersección corresponden a las primeras dos raíces: 0.86033358902 y 3.4256184595.

La solución particular correspondiente a la solución general (19) es

$$Y(y) = C_4 \cos(\lambda y) \quad \dots (21)$$

Por ser finito, el dominio en la dirección x , la solución general de la ecuación diferencial (13) se representa en términos de funciones hiperbólicas:

$$X(x) = C_1 \operatorname{senh}(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) \quad \dots (22)$$

Derivando con respecto a x ,

$$\frac{dX}{dx} = C_1 \lambda \cosh(\lambda x) + C_2 \lambda \operatorname{senh}(\lambda x)$$

Aplicando la condición de frontera (14),

$$k(C_1 \lambda) = h C_2$$

$$\therefore C_2 = \frac{k\lambda}{h} C_1$$

Substituyendo C_2 en la ecuación (22),

$$X(x) = C_1 \left[\operatorname{senh}(\lambda x) + \frac{k\lambda}{h} \cosh(\lambda x) \right] \quad \dots (23)$$

Substituyendo las ecuaciones (23) y (21) en la ecuación (12),

$$\theta(x, y) = C_5 \left[\operatorname{senh}(\lambda x) + \frac{k\lambda}{h} \cosh(\lambda x) \right] \cos(\lambda y)$$

donde $C_5 = C_1 C_4$. Para poder satisfacer la condición de frontera (9), es necesario tomar todos los valores posibles de la constante de separación y formar una serie infinita de Fourier:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\operatorname{senh}(\lambda_n x) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n x) \right] \cos(\lambda_n y) \quad \dots (24)$$

Aplicando la condición de frontera (9), la ecuación (24) da

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\operatorname{senh}(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L) \right] \cos(\lambda_n y)$$

Multiplicando ambos lados de esta ecuación por $\cos(\lambda_m y)$ e integrando desde $y = 0$ hasta $y = t$,

$$\theta_0 \int_0^t \cos(\lambda_m y) dy =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\operatorname{senh}(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L) \right] \int_0^t \cos(\lambda_m y) \cos(\lambda_n y) dy$$

La propiedad de ortogonalidad de las funciones seno y coseno es

$$\int_0^t \cos(\lambda_m y) \cos(\lambda_n y) dy = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

La serie infinita de la penúltima ecuación desaparece y es diferente de 0 sólo para $n = m$:

$$\theta_0 \int_0^t \cos(\lambda_n y) dy = C_n \left[\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L) \right] \int_0^t \cos^2(\lambda_n y) dy$$

Después de integrar,

$$\theta_0 \text{sen}(\lambda_n t) = C_n \left[\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L) \right] \left[\frac{1}{4} \text{sen}(2\lambda_n t) + \frac{1}{2} \lambda_n t \right]$$

Despejando C_n ,

$$C_n = 2\theta_0 \frac{\text{sen}(\lambda_n t)}{\left[\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L) \right] \left[\frac{1}{2} \text{sen}(2\lambda_n t) + \lambda_n t \right]}$$

Substituyendo C_n en la ecuación (24),

$$\theta(x, y) = 2\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\lambda_n x) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n x)}{\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L)} \frac{\text{sen}(\lambda_n t) \cos(\lambda_n y)}{\frac{1}{2} \text{sen}(2\lambda_n t) + \lambda_n t} \quad \dots (25)$$

Para facilitar los resultados numéricos, es conveniente utilizar variables y parámetros adimensionales. Por tanto, se define los siguientes términos:

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad \dots (26)$$

$$\bar{y} = \frac{y}{L} \quad \dots (27)$$

$$\bar{L} = \frac{L}{L} \quad \dots (28)$$

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\theta(x, y)}{\theta_0} = \frac{T(x, y) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \quad \dots (29)$$

$$0 \leq \bar{x} \leq \bar{L} \quad 0 \leq \bar{y} \leq 1$$

$$\lambda_n t = u_n \quad \dots (30)$$

La ecuación característica resulta

$$u_n t g(u_n) = Bi \quad \dots (31)$$

El parámetro $k\lambda_n/h$ se transforma a

$$\frac{k\lambda_n}{h} = \frac{u_n}{Bi} \quad \dots (32)$$

La temperatura adimensional, finalmente, es

$$\bar{T}(\bar{x}, \bar{y}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(u_n \bar{x}) + \frac{u_n}{Bi} \cosh(u_n \bar{x})}{\sinh(u_n \bar{L}) + \frac{u_n}{Bi} \cosh(u_n \bar{L})} \frac{\text{sen}(u_n) \cos(u_n \bar{y})}{\frac{1}{2} \text{sen}(2u_n) + u_n} \quad \dots (33)$$

El calor que disipa la aleta se puede calcular mediante el calor que entra en la base por conducción:

$$\dot{Q} = 2 \int_0^t kb \frac{\partial T(L, y)}{\partial x} dy \quad \dots (34)$$

donde b es el ancho de la aleta. De la ecuación (25) se puede obtener $T(x, y)$ y de esta última $\partial T(x, y) / \partial x$:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 2(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\cosh(\lambda_n x) + \frac{k\lambda_n}{h} \sinh(\lambda_n x)}{\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L)} \frac{\text{sen}(\lambda_n t) \cos(\lambda_n y)}{\frac{1}{2} \text{sen}(2\lambda_n t) + \lambda_n t} \quad \dots (35)$$

Después de substituir la ecuación (35) en la (34) e integrar,

$$\dot{Q} = 4kb(T_0 - T_\infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \sinh(\lambda_n L)}{\sinh(\lambda_n L) + \frac{k\lambda_n}{h} \cosh(\lambda_n L)} \frac{\text{sen}^2(\lambda_n t)}{\frac{1}{2} \text{sen}(2\lambda_n t) + \lambda_n t}$$

Esta última ecuación se puede escribir en los términos adimensionales definidos anteriormente:

$$\bar{Q} = \frac{\dot{Q}}{kb(T_0 - T_\infty)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(u_n \bar{L}) + \frac{u_n}{Bi} \sinh(u_n \bar{L})}{\sinh(u_n \bar{L}) + \frac{u_n}{Bi} \cosh(u_n \bar{L})} \frac{\text{sen}^2(u_n)}{\frac{1}{2} \text{sen}(2u_n) + u_n} \quad \dots (36)$$

La eficiencia de la aleta se obtiene a partir de su definición: la relación de la tasa del calor realmente disipado a la que disiparía si toda la aleta estuviera a la temperatura de la base. En forma de ecuación,

$$\eta = \frac{\dot{Q}}{hPL(T_0 - T_\infty) + hA(T_0 - T_\infty)}$$

En la ecuación anterior, P (m) es el perímetro de la sección transversal de la aleta y A (m^2), su área. El primer término del denominador representa la tasa del calor máximo disipado por la superficie lateral de la aleta y el segundo término, la tasa máxima disipada por la superficie de la punta de la aleta. El perímetro está dado por

$$P = 2(b + 2t) \cong 2b$$

La aproximación en la ecuación anterior se debe a que el espesor de una aleta longitudinal es, normalmente, mucho menor que su ancho. El área de sección transversal es

$$A = bt$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación de la eficiencia y usando términos adimensionales,

$$\eta = \frac{\bar{Q}}{2Bi(\bar{L} + 1)} \quad \dots (37)$$

Finalmente, otro parámetro importante en el análisis de aletas es la efectividad, la cual se define como la relación entre la tasa de disipación de calor de la aleta a la tasa de disipación de una superficie cuya área es el área de la base de la aleta. Si la efectividad es mayor que 1, es conveniente instalar una aleta en esta superficie, y si la efectividad es menor que 1, es inconveniente la instalación de una aleta, pues causaría un aislamiento térmico en esa superficie. En forma de ecuación,

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{hA(T_0 - T_\infty)}$$

En términos adimensionales,

$$\varepsilon = \frac{\bar{Q}}{2Bi} \quad \dots (38)$$

Para comparar las ecuaciones de la aleta bidimensional, desarrolladas anteriormente, se presenta ahora las correspondientes a una unidimensional. Estas ecuaciones son presentadas en libros de texto de Transferencia de Calor (Holman, 1988).

La distribución de temperatura en una aleta unidimensional, longitudinal y de perfil rectangular, con disipación de calor en la punta, está dada por:

$$\frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\cosh[m(L - x')] + \frac{h}{mk} \sinh [m(L - x')]}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk} \sinh (mL)}$$

donde

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

x' = coordenada a lo largo de la aleta, medida desde la base

$$x' = L - x$$

En los términos adimensionales usados en este trabajo,

$$m(L - x') = \sqrt{Bi} \bar{x}$$

$$mL = \sqrt{Bi} \bar{L}$$

$$\frac{h}{mk} = \sqrt{Bi}$$

La distribución de temperatura es, finalmente,

$$\bar{T}(\bar{x}) = \frac{T(x) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \frac{\cosh(\sqrt{Bi} \bar{x}) + \sqrt{Bi} \sinh (\sqrt{Bi} \bar{x})}{\cosh(\sqrt{Bi} \bar{L}) + \sqrt{Bi} \sinh (\sqrt{Bi} \bar{L})} \quad \dots (39)$$

La tasa de disipación de calor es

$$\dot{Q} = \sqrt{hPkA}(T_0 - T_{\infty}) \frac{\sinh(mL) + \frac{h}{mk} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk} \sinh(mL)}$$

En los términos adimensionales de este trabajo,

$$\bar{Q} = \frac{\dot{Q}}{kb(T_0 - T_{\infty})} = 2\sqrt{Bi} \frac{\sinh(\sqrt{Bi} \bar{L}) + \sqrt{Bi} \cosh(\sqrt{Bi} \bar{L})}{\cosh(\sqrt{Bi} \bar{L}) + \sqrt{Bi} \sinh (\sqrt{Bi} \bar{L})} \quad \dots (40)$$

Tanto la eficiencia como la eficacia de la aleta unidimensional están dadas por las mismas ecuaciones de la aleta bidimensional, (37) y (38).

Resultados

Resultados para la temperatura

Los parámetros adimensionales en el análisis de la aleta son el número de Biot (Bi) y la longitud adimensional, L . Para tener una idea de los valores numéricos representativos, considérese el caso típico de una aleta de aluminio de 1 mm de espesor, 10 mm de longitud, operando en un ambiente en el cual el coeficiente de convección es igual a 30 W/m² °C; por tanto,

$$Bi = \frac{30 * 0.0005}{200} = 0.000075$$

$$\bar{L} = \frac{10}{0.5} = 20$$

Un caso extremo, que no se da en la aplicación de aletas, sería el de una aleta con las mismas dimensiones anteriores, pero hecha de un material de baja conductividad térmica, como el vidrio ($k = 1 \text{ W / m}^2\text{C}$) operando en un ambiente con un alto coeficiente de convección ($h = 2000 \text{ W / m}^2\text{C}$):

$$Bi = \frac{2000 * 0.0005}{1} = 1$$

En este trabajo se considerará números de Biot entre 0.0001 y 10, y longitudes adimensionales entre 1 y 200.

Las figuras 3 a 5 muestran las distribuciones de temperaturas adimensionales en una aleta bidimensional, para números de Biot desde 0.0001 hasta 0.01-y para una longitud adimensional igual a 20. Las gráficas dan $T(x,y)$ en función de y para varios valores de x . Para estos tres valores de Bi la temperatura casi no varía con y , por lo cual la aleta unidimensional es una buena aproximación; en el caso de $Bi = 0.0001$, la temperatura varía con x dentro de un 2 % (véase la figura 3). Nótese que las escalas verticales en las figuras 3, 4 y 5 son diferentes.

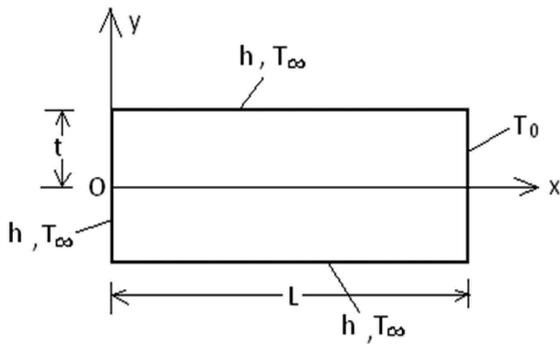


Figura 1. Aleta longitudinal de perfil rectangular, mostrando el sistema de coordenadas y las condiciones de frontera

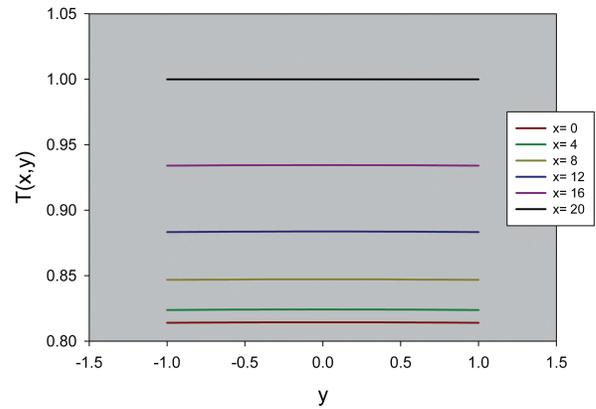


Figura 4. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ para $Bi = 0.001, \bar{L} = 20$

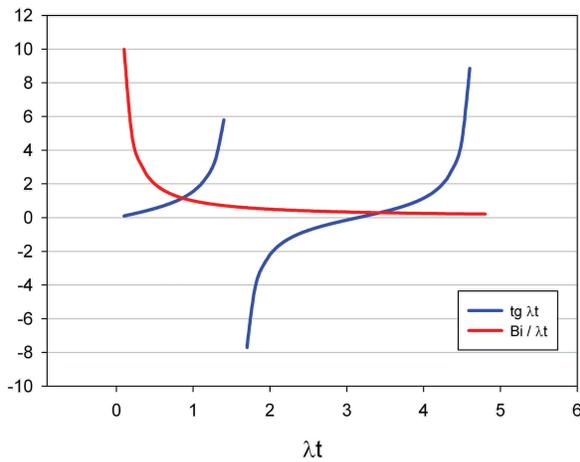


Figura 2. Gráfica de las funciones $\text{tg } \lambda t$ y $Bi / \lambda t$ para $Bi = 1$. Los puntos de intersección son las primeras dos raíces de la ecuación característica

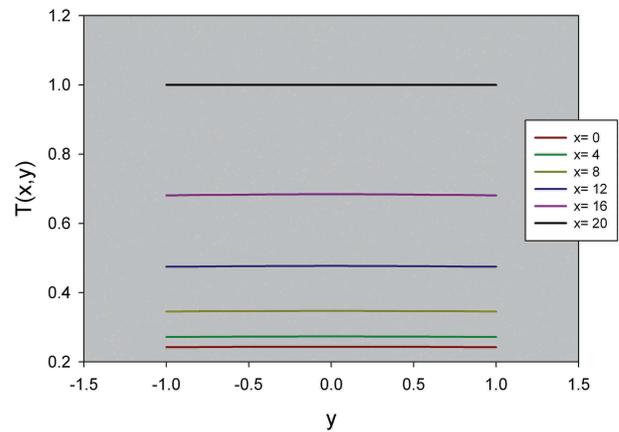


Figura 5. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ para $Bi = 0.01, \bar{L} = 20$

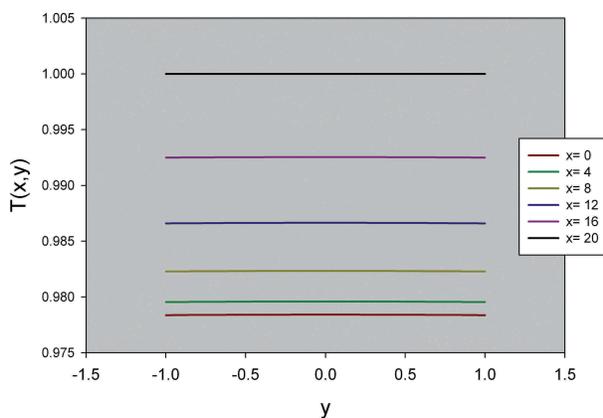


Figura 3. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ para $Bi = 0.0001, \bar{L} = 20$

Cuando $Bi=0.1$ y $\bar{L}=20$, la temperatura en la punta de la aleta es, prácticamente, la temperatura del fluido ($\bar{T}(0,0) = (0.0030558279878)$); es decir, para este número de Biot esta aleta es demasiado larga. Se considerará, por tanto, una aleta de perfil cuadrado, $\bar{L}=2$, para números de Biot desde 0.1 hasta 10. Este perfil no se utiliza en la aplicación normal de aletas, pero sirve para ilustrar la importancia del número de Biot en la validez de las suposiciones unidimensional o bidimensional de una aleta. Al examinar las figuras 6, 7 y 8, se nota la fuerte dependencia de la temperatura en las dos variables independientes, \bar{x} y \bar{y} ; en estos casos, una aleta no podría ser considerada como unidimensional.

La serie infinita que da la temperatura converge rápidamente para valores bajos de Bi , como 0.0001, y para valores de $\bar{x} < 20$. En estos casos, sólo se necesita 1 término de la serie infinita.

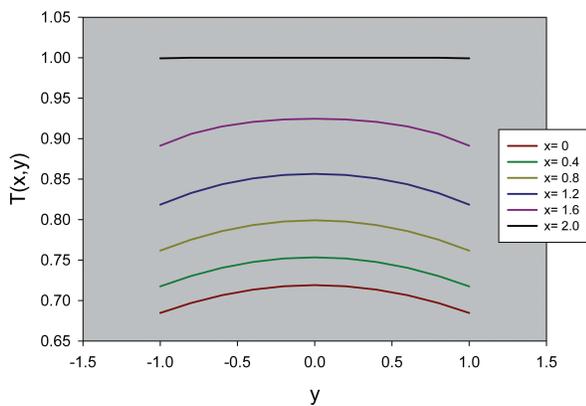


Figura 6. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x},\bar{y})$ para $Bi=0.1$, $\bar{L}=2$

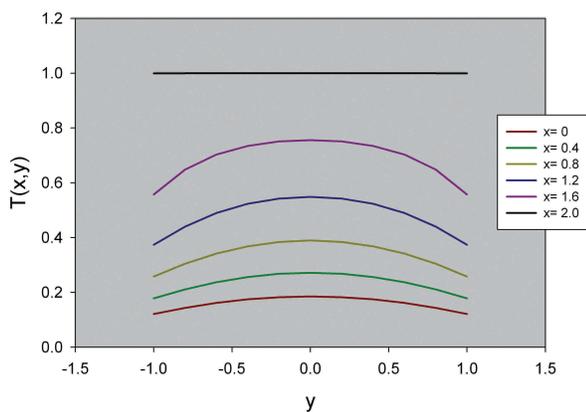


Figura 7. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x},\bar{y})$ para $Bi=1$, $\bar{L}=2$

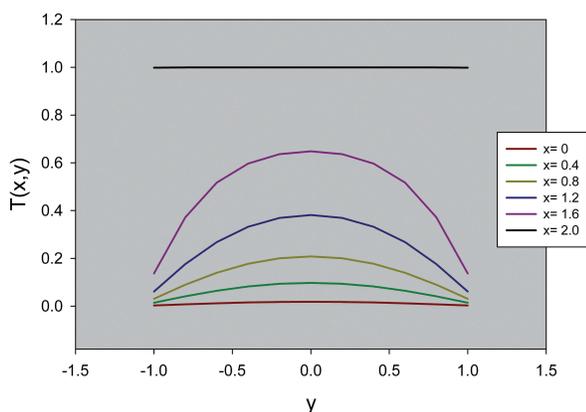


Figura 8. Distribución de temperaturas $\bar{T}(\bar{x},\bar{y})$ para $Bi=10$, $\bar{L}=2$

Cuando $\bar{x} = \bar{L} = 20$ (en la base de la aleta), la serie debe convergir a un valor $\bar{T} = 1$, y la convergencia es un poco más lenta. Véase la figura 9, donde se grafica $\bar{T}(\bar{x} = 20, \bar{y})$ en función del número de términos de la serie infinita, n . Al aumentar el número de Biot, la convergencia es aún más lenta. Véase la figura 10 para $Bi = 10$, en la cual la escala horizontal es logarítmica. La convergencia se muestra para dos valores de \bar{y} : 0 y 1. El primer valor corresponde al centro de la aleta y el segundo a su superficie convectiva lateral.

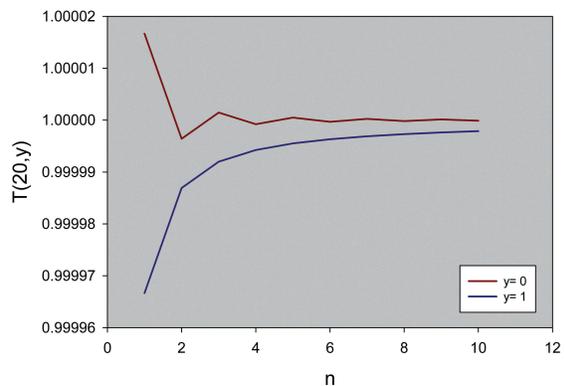


Figura 9. Convergencia de la serie infinita para las temperaturas de la base de la aleta. $Bi = 0.0001$, $\bar{L} = 20$

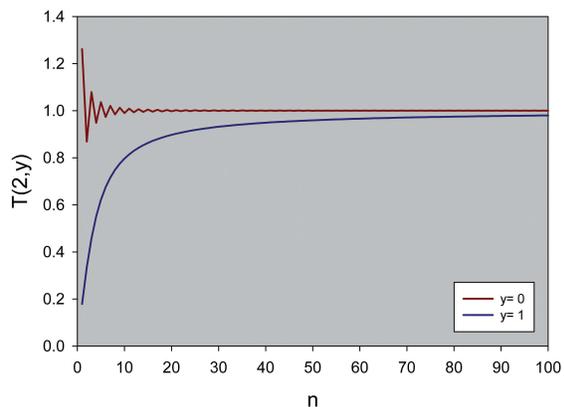


Figura 10. Convergencia de la serie infinita para las temperaturas de la base de la aleta. $Bi = 10$, $\bar{L} = 2$

Resultados para la tasa de disipación de calor

La ecuación (36), que da Q para una aleta bidimensional, ha sido graficada en la figura 11 en función de \bar{L} , para 6 diferentes valores de Bi . Se puede observar que Q aumenta con \bar{L} para valores de Bi hasta 0.1, alcanzando valores asintóticos. Luego disminuye para valores de Bi de 1 o más. Esto último se debe a que la aleta causaría un aislamiento térmico en la superficie primaria en vez de un aumento de la tasa de disipación de calor (véase el análisis de la efectividad). El error en el cálculo de Q al usar la solución unidimensional se puede ver en la figura 12, en función del número de Bi , para $\bar{L} = 20$.

Resultados para la eficiencia

La eficiencia de la aleta se calcula usando la ecuación (37), tanto para la aleta bidimensional como para la unidimensional, usando los correspondientes valores de Q . La figura 13 muestra la eficiencia de la aleta bidimensional en función de \bar{L} , para diferentes valores de Bi . El error en el que se incurre con la aleta unidimensional se muestra en la figura 14 en función de Bi para un valor $\bar{L} = 20$. Como puede apreciarse, el error es apreciable a partir de $Bi=0.1$, haciéndose muy grande para $Bi=10$.

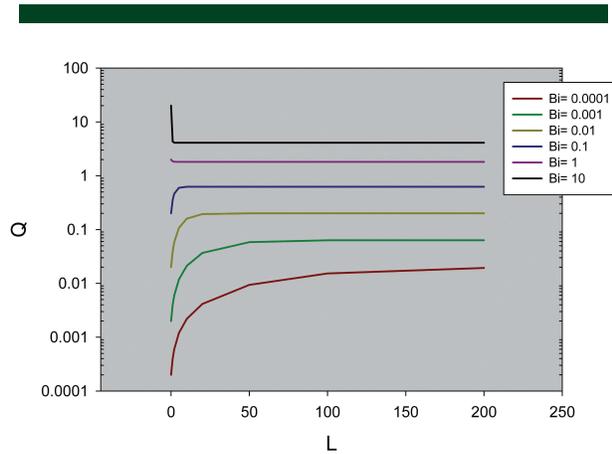


Figura 11. Calor disipado, \bar{Q} , en función de \bar{L} , para seis valores de Bi

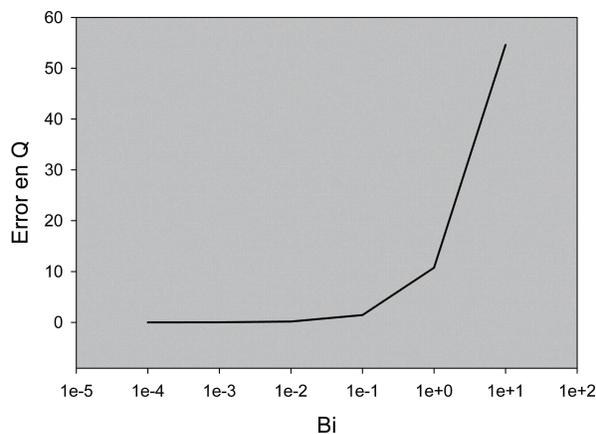


Figura 12. Porcentaje de error en \bar{Q} de la solución unidimensional, en función de Bi , para $\bar{L}=20$

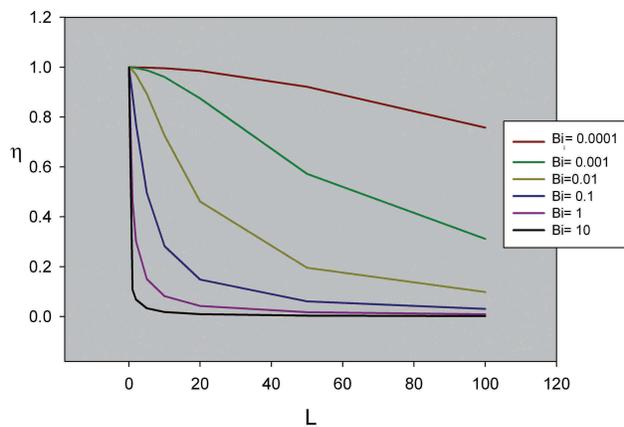


Figura 13. Eficiencia de la aleta bidimensional en función de \bar{L} , para seis valores de Bi

Resultados para la efectividad

La efectividad se puede calcular usando la ecuación (38), tanto para la aleta bidimensional como para la unidimensional, usando los respectivos valores de Q . La figura 15 muestra la

efectividad para una aleta bidimensional en función de L , para varios valores de Bi . Para valores de $Bi=0.1$ o menores, la efectividad aumenta con \bar{L} hasta alcanzar valores asintóticos; para valores de $Bi=1$ o mayores, la efectividad disminuye con \bar{L} , hasta alcanzar valores asintóticos. Las ecuaciones de la aleta unidimensional predicen que la efectividad es 1 cuando $Bi=1$ para cualquier valor de \bar{L} , lo cual difiere del resultado de la aleta bidimensional. La figura 16 muestra el error en la efectividad, cuando se usa la solución unidimensional, en función de Bi , para $\bar{L}=20$.

Discusión de resultados y conclusiones

En las condiciones normales en las cuales son usadas las aletas, el error producido por el modelo unidimensional es despreciable. Cuando $Bi=0.01$ y $\bar{L}=20$, el error en la distribución de temperatura es del orden de -0.5% y en la tasa de disipación de calor, en la eficiencia y en la efectividad de 0.2% . Los errores comienzan a ser apreciables cuando $Bi=0.1$ y aumentan rápidamente a partir de ese valor.

La efectividad de una aleta es menor que 1 cuando el número de Biot es 1. Esto difiere ligeramente de lo que predice el modelo unidimensional, según el cual la efectividad es 1 cuando el número de Biot es 1.

La convergencia de las series infinitas que dan la temperatura, la tasa de disipación de calor, la eficiencia y la efectividad es muy rápida cuando el número de Biot es pequeño; solo se requiere 1 término de las series cuando $Bi=0.0001$. La convergencia se vuelve más lenta cuando el número de Biot aumenta; se requiere hasta 1200 términos para la temperatura cuando $Bi=10$ y $\bar{L}=2$ según se observa en la figura 10.

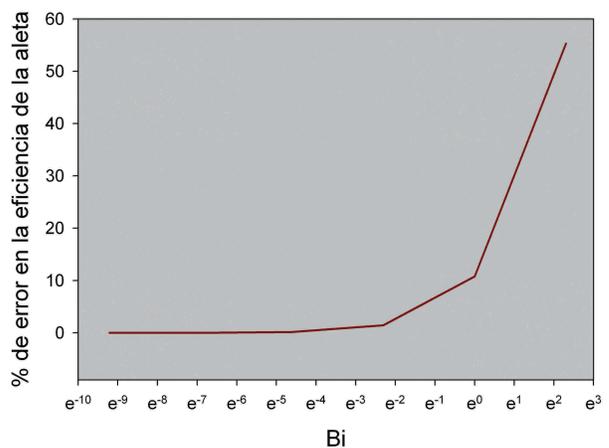


Figura 14. Porcentaje de error en la eficiencia de la solución unidimensional, en función de Bi , para $\bar{L}=20$

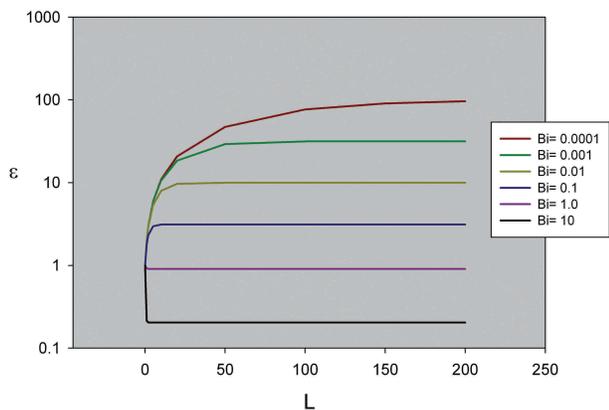


Figura 15. Efectividad de la aleta bidimensional en función de \bar{L} , para seis valores de Bi

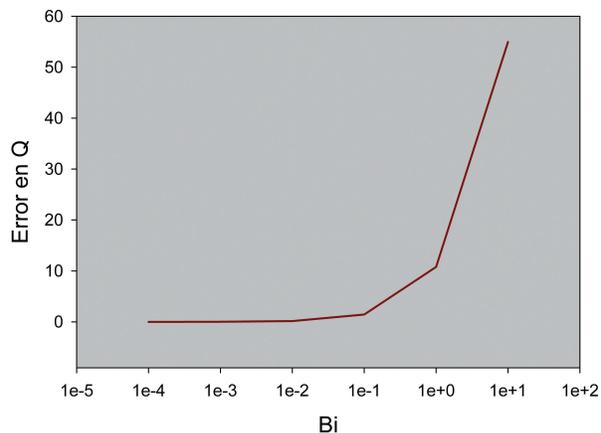


Figura 16. Porcentaje de error en la efectividad de la solución unidimensional, en función de Bi , para $\bar{L}=20$

Bibliografía

- Arpaci VS (1966) *Conduction Heat Transfer* section 4-6: Selection of coordinate Axes Addison-Wesley Publ Co
- Harper DR; WB Brown (1921) *Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins of Air-Cooled Engines* Washington DC Bureau of Standards NACA report no. 158 pp 677-707
- Holman JP (1998) *Transferencia de Calor* ecuaciones (2.34) y (2.37) 8a Ed PdA Martínez de Morentín (Trad) McGraw-Hill Madrid



Manuel Eduardo Ruano Pérez
meruano@uvg.edu.gt