ARTÍCULO BREVE

Construcción de la función Digamma por medio de la definición de derivada

Michael Morales
Departamento de Matemáticas, Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Humanidades, Universidad del Valle de Guatemala

RESUMEN: Las funciones Digamma, $\psi(x)$, y Poligamma, $\psi^{(n)}(x)$, tienen aplicación en áreas como Mecánica Estadística, Astrofísica o Teoría de Cuerdas. Estas son definidas tradicionalmente a partir de la derivada del logaritmo de la función Gamma. En este artículo se presenta un procedimiento distinto obteniendo una expresión alternativa de la función Digamma partiendo de la definición misma de la derivada de una función, utilizando en el proceso propiedades conocidas de la función Gamma y función Beta. Se presenta, además, la expresión en términos de funciones hipergeométricas y expresiones alternativas para la función Poligamma.

PALABRAS CLAVE: Función Digamma; Función Poligamma; Función Beta; Función hipergeométrica; Definición de Derivada.

Construction of the digamma function by derivative definition

ABSTRACT: Digamma and Poligamma functions are applied in different areas of statistical mechanics or string theory. These functions are usually obtained by deriving the logarithm of the Gamma function. In this paper an alternative expression for the Digamma function is obtained starting from the traditional definition of derivative of a function, applying in the process known properties of the Gamma and Beta function. In addition, an expression in terms of hypergeometric function and an alternative expression for the Poligamma function.

KEYWORDS: Digamma function; Polygamma function, Beta function; Hipergeometric function; Derivative definition.

Objetivos

El objetivo de este artículo es la obtención de una expresión alternativa de la función Digamma y Poligamma a partir de la propia definición de derivada utilizando expresiones elementales e identidades conocidas.

Introducción

En términos simples, puede decirse que la función Gamma, $\Gamma(z)$, es una generalización del factorial, donde una de las definiciones usuales es la versión integral:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1}$$

donde z es un número real excepto enteros negativos o cero. Cuando z es un número entero, n, (positivo) la anterior integral se reduce al factorial, $\Gamma(n)=(n-1)!$, (Arfken, 2005). A pesar de que la anterior ecuación puede extenderse al dominio complejo, este artículo se enfoca en el domino de los números reales. Esta función es de mucha utilidad en estadística o mecánica estadística, apareciendo habitualmente en distintos tipos de cálculos. La función Beta, de aplicación en teoría de cuerdas (Zwiebach, 2004), mientras tanto, se definió en principio al buscar una identidad de la función Gamma que simplificara la suma de argumentos, es decir que _$(z+h)$ pudiera escribirse proporcional al producto $\Gamma(z)\ \ \Gamma(h)$, encontrándose (Arfken, 2005) la expresión:

$$B(z,h)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(h)}{\Gamma(z+h)} \tag{2}$$

La función Beta ha servido para definir la *Amplitud de Veneziano,* que indica la interacción entre *taquiones*. Se dice incluso que es con esta función en que la teoría de cuerdas tuvo sus orígenes (Di Vecchia, 2008). Mientras tanto, la función Digamma, $\psi(x)$, que como se verá es la derivada del logaritmo de la función Gamma, tiene su importancia en aplicaciones de estadística y astrofísica, por ejemplo en análisis de error de datos de corrimiento al rojo de galaxias (Efstathiou, et. al. 1988), en Electrodinámica cuántica (Dunne, 2001), o en energías de enlace (Sparenberg, 2013).

Hasta ahora para construir y definir a la función Digamma, $\psi(x)$, se parte de la definición de Límite Infinito de la función Gamma de Euler

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+1)(z+2)...(z+n)} n^z \quad (3)$$

donde $z \in R, z \neq ...,-3,-2,-1,0$ para luego tomar el logaritmo y a su vez la derivada, respecto a z, obteniéndose:

$$\varphi(z) = \frac{d(\ln \Gamma(z))}{dz} = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n-z)} \quad (4)$$

donde γ = 0.57721 es la constante Euler-Mascheroni. Este es la manera usual de introducir la función Gamma, como puede encontrarse en Arfken (2005), Chaudhry (2002), o Ross (2002). Sin embargo, no se ha intentado obtener a partir de la definición de derivada de una función $f(x)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (5)$$

que es en donde este artículo se enfoca, en obtener una definición de la función Digamma basándose en la definición elemental de derivada, usando en el proceso la aplicación de expansión en series de Taylor elementales de funciones conocidas, no relacionadas directamente a la función Gamma, e identidades de la función Gamma y Beta.

Proceso

Como se ha mencionado, para utilizar la definición de derivada se necesitarán identidades de la función Beta, que pueden encontrarse en Arfken, (2005), equivalentes para la función Beta:

$$B(z,h) = \frac{z+h}{h} B(z,h+1) \quad (6)$$

y una de las formas integrales de la misma función Beta

$$B(z,h) = 2\int_0^1 (1-u^2)^{z-1} u^{2h-1} du \quad (7)$$

En esta última se puede utilizar en el integrando la serie binomial para $(1\text{-}u^2)^{z\text{-}1}$ (Stewart, 2002) para obtener:

$$B(z,h) \approx 2\int_0^1 [1-(1-z)u^2 + \frac{(z-1)(z-2)}{2!}u^4 - \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{3!}u^6]u^{2h-1}du \quad (8)$$

que equivale a:

$$B(z,h) \approx \frac{1}{h} - \frac{z-1}{h-1} - \frac{(z-1)(z-2)}{2!(h+2)} - \frac{(z-1)(z-2)(z-3)}{3!(h+3)} + ... \quad (9)$$

De manera similar se tiene:

$$B(z,h+1) \approx \frac{1}{z} - \frac{h}{z+1} + \frac{h(h-1)}{2!(z+2)} - \frac{h(h-1)(h-2)}{3!(z+3)} + ... \quad (10)$$

Habiéndose obtenido algunas expresiones útiles concernientes a la función Beta se puede proceder a aplicar de definición de derivada a la función Gamma,

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(z+h) - \Gamma(z)}{h} \quad (11)$$

la cual, utilizando la definición de función Beta, ecuación (5), se puede escribir como:

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(z+h)-\Gamma(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\Gamma(z)\Gamma(h)}{B(z,h)} - \Gamma(z)}{h} = \Gamma(z)\lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(h)-B(z,h)}{hB(z,h)}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \lim_{h\to 0}\frac{\Gamma(h)-B(z,h)}{(z+h)B(z,h+1)}$$

Nótese que a la izquierda de la igualdad de la ecuación (12) se tiene la notación para la función Digamma ya que $\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$, mientras que a la derecha de la igualdad se utiliza la ecuación (6). Antes de continuar el desarrollo en el lado derecho de la ecuación, se usa la definición de Weierstrass de la función Gamma y una aproximación aplicada a la función exponencial (Stewart, 2002) en $\Gamma(h)$:

$$\lim_{h\to 0}\Gamma(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}e^{\gamma h}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{h}{n})^{-1}e^{\frac{h}{n}}$$

$$\lim_{h\to 0}\Gamma(h) \approx \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-\gamma h + O(h^2))\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{h}{n})^{-1}e^{\frac{h}{n}}$$

$$\lim_{h\to 0}\Gamma(h) \approx \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h} - \gamma \quad (13)$$

éste resultado es sustituido en la ecuación (12), y al evaluar el límite, se obtiene finalmente:

$$\varphi(z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!n} \prod_{i=1}^{n} (z-i) \qquad (14)$$

la cual es una expresión alternativa de la función Digamma.

Variantes y la función Poligamma

Puede demostrarse que:

$$\prod_{i=1}^{n} (z-i) = -(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(1-z)} \qquad (15)$$

$$\prod_{i=1}^{n} (z-i) = -(-1)^{n+1} (1-z)_n \qquad (16)$$

donde de la ecuación (15) a la ecuación (16) se usó la notación del símbolo de Pochhammer (Hansen, 1975, ecuación 89.1.1). Utilizando ese resultado se escribe la ecuación (14) como:

$$\varphi(z) = \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)_n}{n!n} \qquad (17)$$

o en término de funciones hipergeométricas:

$$\varphi(z) = \gamma - (1-z)_3 F_2(2-z,1,1;2,2;1) \qquad (18)$$

Finalmente, se tiene que la función Poligamma es la derivada de *l*-ésimo orden de la función Digamma, por lo que se escribe:

$$\varphi^l(z) = -\frac{d^l}{dz^l}((1-z)_3 F_2(2-z,1,1;2,2;1)) \qquad (19)$$

donde $l=1,2,3,\ldots$

Discusión de resultados y Conclusiones

Se ha demostrado que es posible obtener una expresión nueva y alternativa de la función Digamma a partir de la definición elemental de derivada, un enfoque que no había sido considerado con anterioridad probablemente por la posible complejidad algebraica del proceso. Aunque puede argumentarse que el uso de expansiones en series es de hecho utilizar derivadas, como en la ecuación (7) y ecuación (13), estas no se utilizaron en funciones directamente relacionadas con la función Gamma o Beta, sino en expresiones *periféricas*. La obtención de esta expresión de la función Digamma ha permitido derivar más expresiones en base a la ecuación (14), ya sea en términos de hipergeométricas o definir la función Poligamma, ecuaciones (18) y (19), respectivamente.

Bibliografía

Arfken G, H Weber (2005) *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier

Chaudhry M, S Zubair (2002) *On a class of incomplete Gamma functions with applications*. Chapman & Hall/CRC

Di Vecchia P (2008) The birth of string theory In: *String Theory and Fundamental Interactions*(pp. 59-118) Springer.

Dunne GV, C Schubert (2002) *Closed-form two-loop Euler–Heisenberg Lagrangian in a self-dual background* Physics Letters B,526 (1) 55-60

Efstathiou G. R Ellis, B Peterson (1988) *Analysis of a complete galaxy redshift survey – II. The field-galaxy luminosity function* Mon. Not. R. Ast. Soc. 232, 431-461

Hansen E (1975) *A table of series and products* Prentince Hall

Ross B (1978) *The Psi Function* Mathematics magazine 51 (3)176-179

Sparenberg JM, P Capel, D Baye (2010) *Influence of low-energy scattering on loosely bound states* Physical Review C, 81(1), 011601

Stewart J (2002) *Calculus* Brooks Cole

Zwiebach B (2004) *A first course on string theory* Cambridge University Press

Michael Morales
mrmorales@uvg.edu.gt