UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Generalizaciones del Teoerema Fundamental del Cálculo en las teorías de Lebesgue y Kurzweil-Henstock

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Jose Fernando Ramos Aldana
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala,
2021

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Generalizaciones del Teoerema Fundamental del Cálculo en las teorías de Lebesgue y Kurzweil-Henstock

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Jose Fernando Ramos Aldana
para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala,
2021

Vo.Bo.:

(f) ______________________________

Lic. Dorval José Manuel Carías Samayoa

Tribunal Examinador:

(f) ______________________________

Lic. Dorval José Manuel Carías Samayoa

(f) ______________________________

Lic. Alan Gerardo Reyes-Figueroa

(f) ______________________________

Lic. Cristian Eduardo Valdez Santos

Fecha de aprobación: Guatemala, 1 de mayo de 2021.

Prefacio

La elaboración de esta tesis surgió debido a un gran interés y pasión por el análisis matemático. Es un área de la matemática que engloba una gran parte de las herramientas usadas en el estudio de las ciencias naturales. Dos pilares centrales del análisis matemático son las teorías de integración y diferenciación. Es de gran interés la relación que hay entre ambas áreas.

Entre los principales resultados del trabajo se incluyen los teoremas de consistencia de Lebesgue y Kurzweil-Henstock que nos dicen que ambas integrales son más generales que la integral de Riemann. También resultados importantes son los teoremas de convergencia que nos garantizan la integrabilidad de series acotadas y continuas.

Se incluyen ejemplos de funciones que son derivadas y acotadas pero no son integrables bajo Riemann por lo que no se puede aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo en su caso. A lo largo del trabajo se discuten propiedades deseables de una integral más general y también condiciones bajo las cuales sería deseable que se cumpla el Teorema Fundamental.

Agradecimientos

A Dios y a mis papás, a toda mi familia y a mis profesores.

Índice

Prefacio . . . . . . **iii**

Agradecimientos . . . . . . **iv**

Lista de figuras . . . . . . **vii**

Resumen . . . . . . **viii**

1 Introducción **1**

2 Objetivos **3**
2.1 Objetivo general 3
2.2 Objetivos específicos 3

3 Justificación **4**

4 Desarollo histórico del cálculo integral **5**

5 Teoría de integración de Riemann según Darboux **9**
5.1 Cauchy 9
5.2 Integral de Riemann 10
5.3 Integral de Riemann según Darboux 10
5.4 Propiedades de la integral de Darboux 12
5.5 Teoremas de convergencia 14
5.5.1 Aplicación del teorema para series: 15
5.5.2 Series y convergencia uniforme 15
5.6 Teorema fundamental del cálculo 15
5.6.1 Primera parte 15
5.6.2 Segunda parte 16

6 Limitaciones de la teoría de integración de Riemann **17**
6.1 Un conjunto de medida positiva pero denso en ninguna parte 17
6.2 Integrales impropias 18
6.2.1 Intervalos no acotados 18
6.2.2 Funciones no acotadas 18
6.3 La función de Dirichlet 19
6.3.1 La función de Dirichlet como el límite puntual de una sucesión de funciones . 19
6.4 Teoremas de convergencia 20
6.5 Incompletitud 20
6.5.1 El conjunto de funciones Riemann integrables es un espacio vectorial 20
6.5.2 Existencia de una sucesión de funciones que no converge dentro del espacio . 21
6.6 Limitaciones del teorema fundamental del cálculo 21
6.6.1 La integral no es un operador inverso de la derivada 21

7 Integral en la teoría de Lebesgue **24**
7.1 Integral y funciones integrables 24
7.2 Teorema de consistencia 24
7.3 Lebesgue y las limitaciones de Riemann 25
7.3.1 Dirichlet y Lebesgue 25
7.3.2 Teorema de convergencia 26
7.3.3 Completitud 26
7.4 TFC desde Lebesgue 27
7.4.1 Derivada no acotada no integrable 28

8 Integral de Kurzweil-Henstock y el TFC **29**
8.1 Teorema de consistencia 30
8.2 Función de Dirichlet 30
8.3 Teoremas de convergencia 31
8.4 TFC 31

Conclusiones **34**

Bibliografía **35**

Anexos **37**
.1 Teoremas y definiciones auxiliares 37
.2 Espacios de medida 37
.3 Medida de Lebesgue 39
.4 Funciones medibles 39

Lista de figuras

4.1 Función de Volterra 6
4.2 Derivada de la función de Volterra 7

6.1 Función con primitiva, que no es Riemann integrable 22
6.2 Derivada no acotada, que no es Riemann integrable 23

7.1 Derivada no acotada, que no es Lebesgue integrable 28

Resumen

Este trabajo tiene como finalidad presentar dos generalizaciones del teorema fundamental del cálculo. Presenta las definiciones de la integral de Riemann, Lebesgue y Kurzweil-Henstock, en ese orden. Se incluyen las principales propiedades de las integrales y teoremas importantes, como lo son los de convergencia, de consistencia y el Teorema Fundamental del Cálculo.

Se muestran funciones y conjuntos que ejemplifican las limitaciones de la integral de Riemann y Lebesgue. Se presentan ejemplos que tienen como finalidad mostrar por qué la derivada y las integrales de Riemann y de Lebesgue no pueden ser consideradas como operaciones inversas. Finalmente, se utiliza la integral de Kurzweil-Henstock para integrar las funciones mencionadas anteriormente.

Entre los teoremas importantes están los de convergencia que incluyen el de convergencia acotada, el de convergencia uniforme y el de convergencia dominada. Por otro lado, se muestra una sucesión de funciones que no converge dentro del espacio de funciones Riemann integrables, demostrando la incompletitud del espacio vectorial. Se presenta el teorema de completitud de los espacios L_p.

Se demuestra que la funcion de Dirichlet no es integrable bajo Riemann, pero sí lo es de manera natural para Lebesgue. Por otro lado, se muestra como Kurzweil-Henstock la puede integrar usando un gauge apropiado. Además se relaciona la inadecuación de la integral de Riemann al no poder integrar la función de Dirichlet con la falta de un teorema de convergencia más general que el de convergencia uniforme.

Finalmente, se presentan las demostraciones de las diferentes versiones del Teorema fundamental del cálculo para las tres integrales.

CAPÍTULO 1

Introducción

El cálculo es la base de otras áreas de la matemática que la ciencia utiliza en el día a día, por ejemplo las ecuaciones diferenciales y teoría de probabilidades. El teorema más conocido es el que relaciona la derivada con la integral. Este tiene como nombre el teorema fundamental del cálculo. La definición de la integral de Cauchy fue la primera; sin embargo, no fue popular y tiene deficencias. La integral de Riemann le siguió y sí fue muy popular en el análisis matemático, pero tiene varias limitaciones. Entre estas se encuentran que no podemos integrar funciones no acotadas y que no podemos integrar sobre intervalos no acotados.

En el capítulo cuatro se le da una idea al lector sobre el contexto histórico del cálculo integral y de la importancia de redefinir la integral para generalizar los resultados que producen las teorías. Se enfatiza la importancia de un teorema fundamental del cálculo más general. Comienza relatando los inicios del cálculo integral bajo Leibniz y Newton y cómo, con un ejemplo, Bernoulli resolvió el problema de la braquistocrona usando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) sin integrar explícitamente. Luego se relata la definición de Cauchy que es muy limitada. Sin embargo fue la primera definición que no necesitaba de la derivada y generó ideas que Riemann utilizó en su definición. El capítulo prosigue relatando cómo Lebesgue creó una nueva teoría de integración, pero no resuelve completamente las limitaciones del TFC. Finalmente, se menciona cómo la teoría de Kurzweil-Henstock presenta una integral que tiene un teorema fundamental del cálculo más general que los anteriores.

En el quinto capítulo trata sobre la teoría integral de Riemann según Darboux. Presenta la definición de Riemann y sus propiedades siendo la útlima sección el Teorema Fundamental del Cálculo. El sexto capítulo se llama las limitaciones de la integral de Riemann. La primera sección incluye un ejemplo de un conjunto denso que será sumamente importante para el resto del trabajo. Las demás secciones incluyen temas como integrales impropias, funciones no integrables como la función de Dirichlet, teoremas de convergencia y la incompletitud del espacio vectorial de funciones Riemann integrables. Termina con la sección que trata con las limitaciones del Teorema Fundamental del Cálculo.

El siguiente capítulo trata sobre la integral de Lebesgue y cómo resuelve parcialmente las limitaciones de la integral de Riemann. Tiene teoremas de convergencia más generales, el espacio de funciones Lebesgue integrables es completo, el conjunto de funciones Lebesgue integrables es considerablemente mayor que el de Riemann, incluye la función de Dirichlet. Finalmente se generaliza el TFC; sin embargo, no garantiza que una derivada es integrable, se presenta un ejemplo de una derivada que no es acotada y que no es Lebesgue integrable.

El capítulo final introduce la definición de la integral de Kurzweil-Henstock, algunos resultados como los teoremas de consistencia y un teorema de convergencia. El teorema de consistencia indica que la integral de Lebesgue y Kurzweil-Henstock son equivalentes salvo la integrabilidad condicional, equivalentemente se puede decir que una función no negativa y medible es Lebesgue integrable si y solo si es Kurzweil-Henstock integrable. Para cada uno de estos teoremas se presentaron demostraciones. Finaliza con un teorema fundamental del cálculo generalizado. Además, como un ejemplo de una aplicación, se calcula la integral a una derivada no acotada que no es Lebesgue integrable.

CAPÍTULO 2

Objetivos

2.1. Objetivo general

- Presentar dos generalizaciones de la teoría de integración de Riemann.
- Extender las principales propiedades de la teoría de integración de Riemann para teorías con conjunto de funciones integrables más amplio.

2.2. Objetivos específicos

- Presentar el desarrollo histórico de las principales generalizaciones de la teoría de integración.
- Generalizar los principales resultados de la teoría de integración de Riemann.
- Presentar las demostraciones de las versiones del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en las teorías de Lebesgue y de Kurzweil-Henstock.

CAPÍTULO 3

Justificación

La integral de Riemann presenta limitaciones teóricas y prácticas, por lo que se precisa modificar la forma en que se define para ampliar el conjunto de funciones integrables y fortalecer la herramienta analítica. La teoría de la medida es muy importante tanto histórica como teóricamente. Entre sus principales aportes destaca la teoría de probabilidades y sentó las bases para la Estadística Matemática. Por su parte, la teoría de integración de Kurzweil-Henstock presenta generalizaciones teóricas y operacionales que permiten solventar parcialmente las limitaciones de las integrales de Riemann y Lebesgue.

El tema surgió debido al interés en el análisis matemático y las ecucaciones diferenciales. También en el deseo de entender a profundidad el teorema fundamental del cálculo y cuáles son las condiciones necesarias para que la derivada y la integral se puedan considerar como operadores inversos. Es de suma importancia el teorema fundamental del cálculo ya que nos da una forma de evaluar la integral y obtener el resultado exacto sin tener que usar métodos númericos o métodos de aproximación.

CAPÍTULO 4

Desarollo histórico del cálculo integral

El cálculo de Newton y Leibniz abrió el camino para la resolución de muchos problemas en física, especialmente en mecánica, como lo son la braquistocrona, trayectorias, cálculo de variaciones, etc. Estos mismos problemas de física fueron los que motivaron al desarrollo de esta teoría. A pesar de que se tenía la noción de la antiderivada y la relación existente entre la derivada y el área bajo la curva, no existía una teoría formal para estos conceptos. Por ejemplo, el problema de la braquistocrona pregunta cuál es la forma de la rampa por la cual se debe deslizar (sin fricción) una pelota que cae desde el reposo y acelerada por la gravedad, tal que el tiempo de caída sea mínimo.[15] La solución propuesta por Bernoulli se obtiene al resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}dy$$

donde r es un parámetro.[6] Nótese que encontrar las funciones $x(t), y(t)$ que cumplen con la ecuación es un problema de ecuaciones diferenciales por lo que requiere de integración. Bernoulli reconoció las funciones x, y en la ecuación como la parametrización de un segmento del cicloide, dado que usaban exhaustivamente el cálculo diferencial. Newton, Leibniz y otros matemáticos contemporaneos consideraban la integral como el operador inverso de la derivada. Sin embargo, como se verá más adelante en este trabajo, esto no es siempre cierto.

En 1820, junto con la introducción del concepto de límite, el cálculo integral cambió. Augustin Cauchy fue el primero en definir la derivada y la integral como conceptos distintos. La definición de Cauchy de la integral, se dio como el límite de una suma de Cauchy cuando la medida de cada subintervalo se acerca a cero. La suma de Cauchy es una suma de Riemann donde la etiqueta es el extremo inferior del subintervalo. Sin embargo, estaba definida solamente para funciones continuas y el valor que tiene es que no requería del concepto de derivada sino del límite. [10]

En 1850 Riemann publicó dos trabajos que lo convirtió en profesor asociado en la Universidad de Göttingen. El primero de estos trabajos estudiaba las series de Fourier. Una condición que se requería para los resultados del trabajo era que la función estudiada fuera integrable. Al carecer de esta definición, él la definió en el trabajo. Fue una generalización de la integral de Cauchy ya que podía integrar funciones con una cantidad finita de discontinuidades. Además, no requiere del concepto de límite. Esta definición de la integral es la que se utiliza en muchas clases introductorias de cálculo y análisis de variable real hoy en día. Es muy popular ya que la teoría que esta definición produce es bastante rica en propiedades deseables. Sin embargo, sigue sin ser capaz de integrar tales funciones como la de Dirichlet. En las palabras de Riemann, integrar la función de Dirichlet era una pérdida de tiempo. [2]

Por otro lado, en este trabajo se presentan ambas formas de la integral de Riemann. La primera es la de Gaston Darboux. Darboux se basó en propiedades del supremo y el ínfimo mientras que la propuesta de Riemann usa las ideas de ϵ, δ que utilizaban Cauchy y Weierstrass al hablar de límites y continuidad.

Sin quitarle el mérito a la integral de Riemann, ya que goza de muchas propiedades que nos interesan, sigue sin ser capaz de integrar la función de Dirichlet y muchas otras que son variaciones de la misma. Además, el teorema fundamental del cálculo es válido solamente cuando las restricciones impuestas en la premisa son muy fuertes. En 1881, Vito Volterra, un estudiante de la Scuola Normale Superiore di Pisa, presentó una función diferenciable cuya derivada es acotada pero no es integrable [10]. Se verifica en la sección 6.6.1, en el segundo ejemplo, que esta función no es integrable según Riemann.

A continuación se presenta el ejemplo de Volterra [9]. Sea $x_1 \in (0, 1/2]$ el mayor número tal que $x_1^2 \sin(\frac{1}{x_1})$ es un máximo de la función $x^2 \sin(\frac{1}{x})$, de la misma forma, sea $x_2 \in [1/2, 1)$ el menor número tal que $(1-x_2)^2 \sin(\frac{1}{(1-x_2)})$ es un máximo de la función $(1-x)^2 \sin(\frac{1}{(1-x)})$.

$$f : [0,1] \to R \text{ tal que } f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, x = 1 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \in (0, x_1) \\ x_1^2 \sin(\frac{1}{x_1}) & x \in [x_1, x_2] \\ (1-x)^2 \sin(\frac{1}{(1-x)}) & x \in (x_2, 1) \end{cases}$$

La derivada de f es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(1/x) & x \in (0, x_1] \\ 0 & x \in (x_1, x_2), x = 1, 0 \\ 2(1-x) \sin(\frac{1}{(1-x)}) - \cos(1/(1-x)) & x \in (x_2, 1) \end{cases}$$

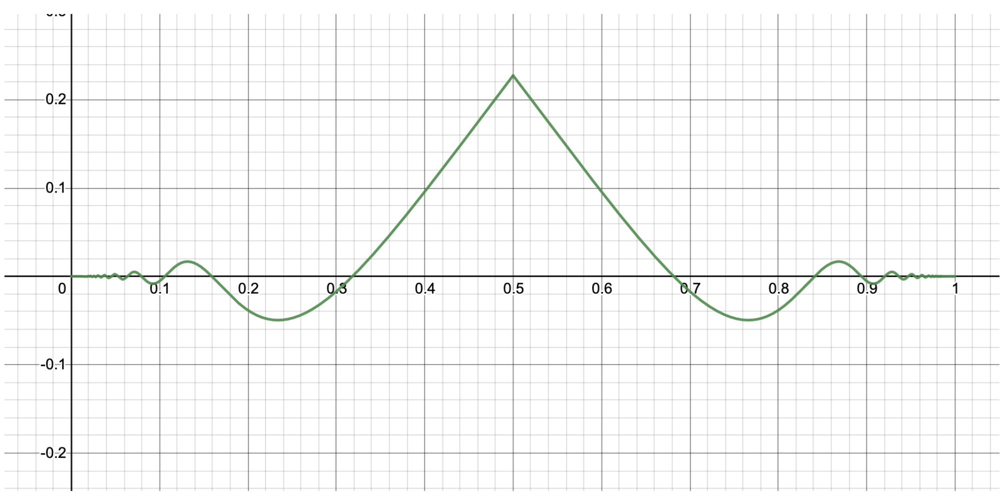

Figura 4.1: Función de Volterra

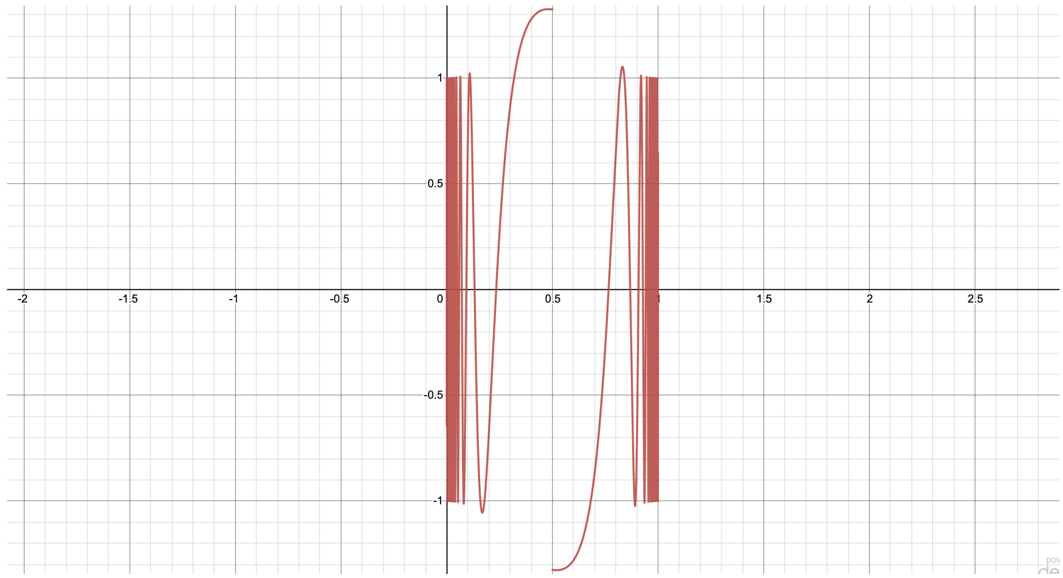

Figura 4.2: Derivada de la función de Volterra

Estas razones motivaron a Henri Lebesgue, un matemático francés, a crear nueva teoría que busca integrar la función de Dirichlet. En 1902, Lebesgue publica su trabajo «Intégrale, longueur, aire», donde desarrolla la teoría de la medida y la integral. En el mismo trabajo, Lebesgue menciona el ejemplo de Volterra y argumenta que por esta razón la integral de Riemann y la derivada no pueden considerarse operaciones inversas. Benedetto argumenta que esta fue la mayor motivación de Lebesgue para definir la nueva integral. [3] Sin embargo, la integral de Lebesgue hizo poco para generalizar el teorema fundamental del cálculo. No nos da condiciones suficientes para asegurar integración para derivadas no acotadas.

La integral de Lebesgue resolvió parcialmente dos problemas existentes. El primero es el poder aumentar el conjunto de funciones integrables. Lebesgue mencionó que le interesaba investigar cuáles derivadas con valores finitos eran integrables. El segundo es que generaliza el teorema fundamental del cálculo. [5] La nueva teoría de Lebesgue abrió paso a una teoría mucho más amplia como lo es el espacio dual de los espacios L_p, interpolación de Marcinkiewicz, espacios de Hilbert y sus operadores.

La integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann y su mayor ventaja es que podemos integrar funciones con valores reales que tienen como dominio un espacio de medida. R^n es un espacio de medida cuando se toma en cuenta la medida de Lebesgue. Además de esta ventaja, es capaz de integrar la función de Dirichlet y lo hace de forma natural debido a la manera en que se definen las σ-álgebras de Borel, que son las σ-álgebra generadas por una topología sobre el conjunto sobre el que se integra. Entonces, obtenemos una σ-álgebra sobre R al tomar en cuenta la topología usual. Además de darnos una nueva integral más general, la integral de Lebesgue fundamentó el camino para la teoría de probabilidad que fue desarrollada en su mayoría durante la primera mitad del siglo XX.

En 1912, Arnaud Denjoy, matemático francés desarrolló la integral que hoy se conoce como integral de Denjoy. Independientemente, Oskar Perron desarrolló una integral equivalente. Esta es una integral que resulta ser equivalente a la integral del Gauge o de Kurzweil-Henstock que se presenta en este trabajo.

Finalmente, en la segunda mitad del siglo pasado, Jaroslav Kurzweil y Ralph Henstock desarrollaron de manera independiente la integral que lleva el nombre de ambos. Kurzweil fue el primero en desarrollarla cuando trabajaba en ecuaciones diferenciales. Henstock la desarrolló después de manera independiente y a un mayor alcance.

Esta integral también se suele llamar la integral del gauge y pertenece a una teoría relativamente moderna. Esta se obtiene al modificar levemente la integral de Riemann, en cambio la de Lebesgue tiene que crear una nueva teoría, definir σ-álgebras, conjuntos medibles y medidas. Además, la integral de Kurzweil-Henstock es más general que la integral de Lebesgue, siempre y cuando consideremos a Lebesgue integrando sobre R. Esta integral nos garantiza que cada derivada es integrable.

CAPÍTULO 5

Teoría de integración de Riemann según Darboux

Se presentan las integrales propuestas por Cauchy y de Riemann y Darboux. Para las pruebas se utiliza la versión de la integral de Darboux. Para el teorema de convergencia acotada se utiliza el lema de sucesión de conjuntos acotados encajados. Para la demostración de la primera versión del TFC se utiliza el teorema del valor medio.

5.1. Cauchy

Cauchy fue el primero que propuso una definición de la integral que fuera independiente de la derivada. Sin embargo, solo la definió para funciones continuas. El valor de esta integral es que no depende de la derivada, ya que son dos conceptos distintos e independientes. Además, utiliza el concepto de límite que nunca había sido usado para la definición de integral [10]. Esta integral fue un muy buen primer intento. Sin embargo, se demuestra a continuación por qué no es un buena definición.

Definición 5.1.1. Una **partición** de un conjunto $[a, b] \subset R$ es de la forma $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ si es que $a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.
Se dice que P' es más fina que P si es que $P \subset P'$. Es equivalente a decir que P es más gruesa que P'.
Un refinamiento de P, es cualquier partición más fina que P.

Definición 5.1.2. Una **suma de Cauchy** de una función continua f sobre el intervalo $[a, b]$ tiene la forma $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Donde cada $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$.

Definición 5.1.3. Una función es **Cauchy integrable** si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe.

Definición 5.1.4. La **integral de Cauchy** se define como $\lim_{n\to\infty} S_n$, $m([x_i, x_{i+1}]) \to 0$ cuando n, es decir el tamaño de la partición crece.

Cauchy argumentó que la partición es irrelevante siempre y cuando el límite de $m([x_i, x_{i+1}])$ se aproxima a 0 cuando el tamaño de la partición crece. Esto lo argumentó fundamentandose en el teorema del valor medio. Sin embargo, esto solo es válido cuando la función es diferenciable. Si es que quisieramos integrar funciones como el valor absoluto de x, entonces se pueden tomar funciones que son diferenciables excepto posiblemente en una cantidad de puntos finita. [11]. Sin embargo, hay funciones que son continuas en todo punto pero no son diferenciables en ninguno, por ejemplo la función de Weierstrass. Por otro lado esta integral genera ciertas inconsistencias. Se verifican a continuación.

Nota 5.1.1. Sea $f(x) = \chi_Q$, considerese la partición de $[0, 1]$ $P = \{0 = x_1, x_2, ..., x_n = 1\}$ tal que $x_{i+1} - x_i = q_i \in Q$, para algún $q_i \in Q$. Entonces, notemos que la suma de Cauchy de esta partición es $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i) = x_n - x_1 = 1$, esto es porque es una suma telescópica y el primer y último término son números racionales, Además, hay que tomar en cuenta que $m([x_{i+1}, x_i]) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces se tiene que la integral de la función de Dirichlet sobre $[0, 1]$ es 1.

Por otro lado, considerese la integral sobre $[r, e]$ tal que $r - e$ es irracional y también e, r lo son. Entonces, escogemos la partición del intervalo como puntos irracionales. Entonces $f(x_i) = 0$ para todo i. Se concluye que la integral de Cauchy sobre el intervalo $[r, e]$ es 0, siempre que tomemos particiones de esta manera. Notemos que si tomamos un punto irracional en la partición, el valor de la «integral» cambia, es decir que esta suma no tiene un valor único.

5.2. Integral de Riemann

La integral de Riemann fue la primera que tuvo importancia en el análisis matemático. Esto fue porque nadie había definido la integral de manera rigurosa. La integral de Cauchy solo podía integrar funciones diferenciables excepto posiblemente en una cantidad finita de puntos. Además, la integral de Cauchy de la función de Dirichlet tiene valor 0 cuando los puntos de la partición son irracionales y 1 cuando los puntos son racionales.

El valor agregado que tiene la integral de Riemann es que no es el límite de una suma, si no que se basa en las propiedades de ínfimo y supremo que caracterizan a los números reales. Esto permite que se puedan tomar refinamientos de las particiones y no como límite. Este valor agregado es el que le permite que la integral haya tenido cierta permanencia hasta el día de hoy en los libros de análisis real introductorio.

Definición 5.2.1. Sea $P = \{x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $f : [a, b] \to R$ una función y las etiquetas $\{t_i : i \in N, 1 \leq i \leq n$ y sea $t_i \in [x_i, x_{i+1}]\}$. Entonces una **suma de Riemann** de f sobre $[a, b]$ con respecto de la partición P y las muestras $\{t_i\}$ es

$$S(f, P, \{t_i\}) = \sum_{i} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Definición 5.2.2. Una función $f : [a, b] \to R$ es **Riemann integrable** si existe un número real A tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si una partición P cumple con que $\delta > \max(\{x_{i+1}-x_i : i \in N, 1 \leq i \leq n\})$ entonces se cumple que $|S(f, P, \{t_i\}) - A| < \epsilon$. La integral de f sobre $[a, b]$ se define como A.

5.3. Integral de Riemann según Darboux

La integral de Riemann requiere que se conozca el valor de la integral previamente para poder saber si es integrable. Por lo que la integral de Darboux presenta una forma alternativa pero equivalente de la integral. Su definición no requiere de un valor pre existente.

La integral de Riemann se define únicamente para las funciones acotadas en un intervalo compacto.

Definición 5.3.1. Dada una función $f(x)$ acotada en el intervalo $[a,b]$, y una partición de $[a,b]$ llamada P, definimos la suma superior de Darboux: $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$ donde $M_i = \sup_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$.

Analogamente, definimos la suma inferior de Darboux.

Definición 5.3.2. Dada una función $f(x)$ acotada en el intervalo $[a,b]$, y una partición de $[a,b]$ llamada P, definimos la suma inferior de Darboux: $L(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ donde $m_i = \text{ínf}_{[x_i,x_{i+1}]} f(x)$.

Definición 5.3.3. Dada una función acotada $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, la integral superior es $\overline{\int_a^b} f := \text{ínf}\{U(f,P) : \forall \text{ partición } P \text{ de } [a,b]\}$.

De nuevo, de forma analoga, se define la integral inferior.

Definición 5.3.4. Dada una función acotada $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, la integral inferior es $\underline{\int_a^b f} := \sup\{L(f,P) : \forall \text{ partición } P \text{ de } [a,b]\}$.

Ahora, se define la integrabilidad de una función acotada según Darboux.

Definición 5.3.5. Integrabilidad e integral [7]
Se dice que una función es Darboux integrable cuando la integral inferior es igual a la integral superior. De otra manera, se dirá que no es Darboux integrable. La integral de f sobre $[a,b]$ se define como el valor de la integral inferior (o superior).

Nota 5.3.1. **Ejemplos de funciones Darboux integrables:**
Para las siguientes demostraciones se hace uso de las propiedades de la siguiente sección.

1. $f(x) \in P[x]$, es integrable sobre $[a,b]$, para todo $a,b \in R$. $P[x]$ es el conjunto de polinomios de una variable con coeficientes reales.
   dem:
   Paso 1:
   Considere $f(x) = c$ una función constante. Entonces sea P una partición de $[a,b]$. SPG, dado que f es constante, tomemos $L(f,P) = \sum_i m_i(x_{i+1} - x_i) = c\sum_i(x_{i+1} - x_i) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$. Entonces la integral inferior es $c(b-a)$ y de la misma manera calculamos la integral superior. Se cumple que $f(x) = c$ es integrable.
   Paso 2:
   Sea $f(x) = x$, ahora dado $\epsilon > 0$, entonces escojamos un $n \in N$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$, sea P una partición con n subintervalos tal que cada subintervalo tiene medida $\frac{1}{n}$. Entonces tomando las sumas inferiores y superiores de Darboux, se tiene que $U(P,f) - L(P,f) = \sum_i M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_i m_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_i(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i(x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \epsilon$. Entonces $f(x) = x$ es integrable y también las funciones de la forma $f(x) = cx$ con c un número real.
   Paso 3:
   Dado que cx es integrable y que la multiplicación de funciones integrables son integrables entonces $f(x) = cx^n$ es integrable.
   Paso 4:
   Dado que la combinación lineal de funciones integrables es integrable entonces un polinomio $f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ es integrable.

2. $\sin(x), \cos(x)$, para todo $[a,b] \subset R$.
   dem:
   Expansión de Taylor
   Notemos que $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Recordemos que si $||f_n - f||_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces f_n converge uniformemente a f. Entonces, demostremos

que $\cos(x)$ converge uniformemente, la prueba es igual para $\sin(x)$. Dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $m \in Z^+$ tal que $||f_m - \cos(x)||_\infty = ||\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}||_\infty = \sup_{[a,b]}(|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}|) \leq \frac{\text{máx}(\{b,a\})^{2m}}{(2m)!}$. Por el teorema de convergencia uniforme para series, y dado que cada término (un polinomio) es integrable, entonces ambas funciones son integrables.

3. $e^x, \ln(x)$ sobre todo $[a,b] \subset R$.
4. $\frac{1}{x^n}, n \in Z^+$ sobre el conjunto $[a,b] \subset R$ donde $0 < a < b$.
5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sobre $[a,b] \subset R$.

5.4. Propiedades de la integral de Darboux

Propiedad 5.4.1. ***Linealidad*** *[12]*
La integral es una transformación lineal. Es decir, si $f(x), g(x)$ son funciones Darboux integrables, y $a \in R$ entonces

$$\int (f + ag) = \int f + a \int g$$

Propiedad 5.4.2. *Sea $f : R \to R$ tal que $f(a)$ está bien definida. Entonces se cumple que*

$$\int_a^a f = 0$$

.

Propiedad 5.4.3. *Sea f una función Darboux integrable sobre $[a,b]$, sea $c \in R \ni a \leq c \leq b$. Entonces*

$$\int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Propiedad 5.4.4. ***Unicidad***
Cuando una función es Darboux integrable, el valor de la integral es único.

Propiedad 5.4.5. ***Desigualdades***
Sean $f(x), g(x)$ funciones Darboux integrables tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $a, b \in R \ni a < b$ entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

dem:
Si $f \leq g$ sobre $[a,b]$ entonces se tiene que $\sup_{[x_{x-1},x_k]} f \leq \sup_{[x_{x-1},x_k]} g$ para cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, de igual forma se cumple para los ínfimos. Entonces podemos concluir que $U(f,P) \leq U(g,P)$ y que $L(f,P) \leq L(g,P)$ para toda partición P de $[a,b]$. Como f,g son integrables entonces las integrales superiores e inferiores respetan las desigualdes y se tiene que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

La propiedad anterior nos indica que la integral respeta las desigualdades de funciones.

Propiedad 5.4.6. ***Positividad***
Sea $f(x)$ una función Darboux integrable sobre $[a,b]$, y no negativa. Entonces

$$\int_a^b g \geq 0$$

dem:
Se aplica el teorema anterior con $f = 0$.

Propiedad 5.4.7. *Sea f una función integrable sobre $[a, b]$ entonces f^2 es integrable.*
dem:
Sea $K > 0$ tal que $K > 2|f| > |f(x) \pm f(y)|$ para todo $x, y \in [a, b]$

$$U(f^2, P) - L(f^2, P) = \sum_k (M_k^2 - m_k^2)(x_{k+1} - x_k) = \sum_k (M_k + m_k)(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) <$$

$$K \sum_k (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < K\epsilon$$

Propiedad 5.4.8. *Sean f, g funciones integrables sobre $[a, b]$. Entonces fg es integrable sobre $[a, b]$.*
dem:
Notese que $(f - g)^2$ y $(f + g)^2$ son integrables. Entonces $\frac{1}{4}(-(f - g)^2 + (f + g)^2) = fg$ también es integrable.

Como corolario a la propiedad anterior se obtiene el siguiente resultado.

Propiedad 5.4.9. *Si $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones integrables entonces $f(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x)$ es integrable.*

Propiedad 5.4.10. *Supongamos que f es monotona creciente sobre $[a, b]$ entonces $f(x)$ es Darboux integrable sobre $[a, b]$.*

Propiedad 5.4.11. *Sea $f(x)$ integrable sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre todo subintervalo de $[a, b]$.*

Teorema 5.4.1. ***Equivalencia de Riemann y Darboux***
f es integrable según Darboux si y solo si es Riemann integrable.
dem:
Suponga que f es Darboux integrable entonces, sean, $A = \int f$ $\epsilon > 0$ por lo que existen P'', P' tal que $A - \epsilon < L(f, P')$ y $A + \epsilon > U(f, P'')$. Tomese $P = P'' \cup P'$ entonces $A - \epsilon < L(f, P') \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P'') < A + \epsilon$. Por lo que si $S(f, P, \{t_i\}$ es una suma de Riemann, se tiene que $A - \epsilon < L(f, P) \leq S(f, P, \{t_i\}) \leq U(f, P) < A + \epsilon$. Por lo que es Riemann integrable.
Ahora, suponga que f es Riemann integrable. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ tal que si P es un refinamiento de P_ϵ entonces se tiene que $-\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - A < \epsilon$ y también $-\epsilon < A - S(P, f, \{t'_k\}) < \epsilon$ para dos diferentes conjuntos de muestras $\{t_k\}, \{t'_k\}$. Entonces sumando las desigualdades, se tiene que

$$-2\epsilon < S(P, f, \{t_k\}) - S(P, f, \{t'_k\}) = \sum_k (f(t_k) - f(t'_k))(x_{[k+1} - x_k) < 2\epsilon$$

para todas las muestras t_k, t'_k. Sin embargo, $M_k - m_k = \sup(\{f(t_k) - f(t'_k) : \forall t_k, t'_k \in [x_k, x_{k+1}]\}$. Entonces, por propiedades del supremo, se tiene que $U(f, P) - L(f, P) < 2\epsilon$ por lo que f es Darboux integrable.

Teorema 5.4.2. ***Funciones continuas***
Una función continua f es integrable.
dem:
Sea $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ahora, tomemos

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_k (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \epsilon(b - a)$$

cuando $x_{k+1} - x_k < \delta$ para cada k.

Teorema 5.4.3. *Sea $|f|$ una función integrable sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces se cumple que*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| < \infty$$

dem:
Usando la propiedad anterior de desigualdades, sabiendo que si $f \leq g$ sobre $[a,b]$ entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, como $f \leq |f|$, se tiene que $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Por otro lado, como $-|f| \leq f$, se tiene que $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Entonces $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

5.5. Teoremas de convergencia

Teorema 5.5.1. ***Teorema de Convergencia Acotada***
Sea $f_n(x)$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, donde cada f_n es Riemann integrable tal que $f_n(x) \to f(x)$ puntualmente. Si f es Riemann integrable entonces

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

dem:[8]
Dado que f_n está uniformemente acotada, sea M el número real que cumple con esa cota. Sin pérdida de generalidad asumase que $f_n \geq 0$ y que $f = 0$.
Dado $\epsilon > 0$, defínase

$$A_n = \{x : f_k(x) \geq \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \text{ para al menos un } k \geq n\}$$

Nótese que son intervalos acotados y encajados. Entonces se aplica el lema de sucesión de conjuntos acotados encajados. Usando $\epsilon > 0$, escogemos N tal que si $n > N$ entonces para cada subconjunto elemental E de A_n, se tiene que $m(E) < \frac{\epsilon}{2M}$.
A probar: $\int_a^b f_n \leq \epsilon$
Sea $s(x)$ una función simple tal que es una combinación lineal de funciones indicadores de intervalos acotados, además le pedimos a s que sea menor que f_n sobre $[a,b]$. Entonces

$$K = \{x : s(x) \geq \frac{\epsilon}{2(b-a)}\}$$

es un subconjunto de A_n y además es un subconjunto elemental. Dado que s está definida de esta forma, entonces es integrable sobre $[a,b], K$ y K^c. Entonces, tenemos que

$$\int_a^b s = \int_K s + \int_{K^c} s \leq \int_K M + \int_{K^c} \frac{\epsilon}{2(b-a)} \leq M(m(K)) + \frac{\epsilon}{2} = M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dado que f es integrable, la integral es igual a su integral inferior, entonces se tiene el resultado.

Teorema 5.5.2. ***Convergencia uniforme***
Sea $f_n(x)$ una sucesión de funciones Riemann integrables sobre $[a,b]$ que convergen uniformemente a $f(x)$, entonces $f(x)$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$ y además tenemos la siguiente igualdad.

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

dem:
Dado $\epsilon > 0$ existe $k \in N$ tal que si $n > k$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ entonces $f_n(x) - \epsilon < f(x) < \epsilon + f_n(x)$ por lo que $U(f,P) < U(\epsilon + f_n, P)$ y $L(f_n(x) - \epsilon, P) < L(f,P)$, pero entonces se tiene que $U(f,P) - L(f,P) < U(\epsilon + f_n, P) - L(f_n(x) - \epsilon, P) = 2(b-a)\epsilon + U(f_n,P) - L(f_n,P)$. Como f_n es integrable, entonces se cumple que f es integrable.
Como ya se sabe que f es integrable y que converge unif. entonces $|\int f_n - \int f| = |\int f_n - f| \leq \int |f_n - f| < \epsilon(b-a)$. Por lo que $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$.

Este teorema tiene como corolario el siguiente teorema.

Teorema 5.5.3. ***Series***
Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ *una serie que converge uniformemente. Si cada* $f_n(x)$ *es Riemann integrable sobre* $[a,b]$ *entonces* $f(x)$ *es Riemann integrable sobre* $[a,b]$ *y además tenemos la siguiente igualdad.*

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$$

dem:
Si cada f_n *es integrable entonces una suma finita de las primeras* n *funciones es también integrable. Por lo que las sumas parciales* $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ *son integrables sobre* $[a,b]$*. Ahora por el teorema anterior y dado que las* $S_n \to f$ *uniformemente, entonces* $f(x)$ *es integrable. Además* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.

Podemos decir informalmente que cuando una serie converge uniformemente, entonces la integral y la serie se pueden intercambiar de orden. Este enunciado es muy poderoso y nos ayuda a calcular integrales de funciones cuya antiderivada no tiene representación como función elemental. A continuación se da un ejemplo.

5.5.1. Aplicación del teorema para series:

Sea $f(x) = e^{-x^2}$, entonces usando la expansión de la serie de Taylor, tenemos que $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, como $f(x)$ es acotada y la sucesión de sumas parciales converge puntualmente, entonces converge uniformemente. Por lo tanto,

$$\int_a^b e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx$$

5.5.2. Series y convergencia uniforme

A pesar de que el teorema anterior es muy útil, tuvo un precio que pagar muy alto, la convergencia uniforme. La convergencia uniforme es una condición muy fuerte para imponerle a una sucesión de funciones ya que es un conjunto limitado el que cumple con estas características.

Sería ideal poder tener la igualdad del teorema 4.3.3 sin requerir que la sucesión de funciones converja uniformemente.

5.6. Teorema fundamental del cálculo

5.6.1. Primera parte

Teorema 5.6.1. *Suponga que* $f : [a,b] \to R$ *y que* $f' : [a,b] \to R$ *es integrable sobre* $[a,b]$*, entonces se cumple la siguiente ecuación*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

dem:

Sabemos que f es diferenciable sobre $[a,b]$ entonces dada una partición P, f es diferenciable sobre cada $[x_{i+1}, x_i]$. Por el teorema del valor medio, existe un valor t_i tal que $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$. Por lo tanto, $S(f', P, \{t_i\}) = \sum_i f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(b) - f(a)$. Entonces, dada cualquier partición podemos encontrar etiquetas adecuadas para que la suma de Riemann sea igual a $f(b) - f(a)$.

5.6.2. Segunda parte

Teorema 5.6.2. *Si $f : [a,b] \to R$ es Riemann integrable sobre $[a,b]$, entonces la función $F(x)$ definida como*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

es continua sobre $[a,b]$, además si $f(x)$ es continua en $x = x_0 \in [a,b]$ entonces $F'(x_0) = f(x_0)$.
dem:
Escojamos a $M > 0$ tal que M mayora a $f(x)$ sobre $[a,b]$. Asuma que $x \leq y$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \int_x^y |f| \leq M|y - x|$$

por lo que $F(x)$ es una función Lipschitz. Entonces se cumple que $F(x)$ es uniformemente continua. Por otro lado, asuma que $f(x)$ es continua en $x = r$. Entonces si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - r| < \delta$ se cumple que $|f(x) - f(r)| < \epsilon$. Por lo que $\left| \frac{F(x)-F(r)}{x-r} - f(r) \right| = \left| \frac{1}{x-r}(F(x) - F(r)) - (x-r)f(r) \right| = \left| \frac{1}{x-r} \right| \left| \int_a^x f - \int_a^r f - \int_x^r f(r)dt \right| = \left| \frac{1}{x-r} \right| \left| \int_r^x (f(t) - f(r))dt \right| < \frac{1}{|x-r|} \left| \int_x^r \epsilon \right| = \epsilon$ Entonces $f(x) = F'(x)$ cuando $f(x)$ es continua.

CAPÍTULO 6

Limitaciones de la teoría de integración de Riemann

6.1. Un conjunto de medida positiva pero denso en ninguna parte

Definición 6.1.1. [16]
Un conjunto es **denso en ninguna parte** si la cerradura de su interior es vacío.

Sea $D \subset [0,1]$ el conjunto de fracciones diádicas. Es decir, el conjunto de fracciones de la forma $z_{m,a} = \frac{a}{2^m}$ donde $m \in N, a \in Z^+$ y z es una fracción reducida. [14]

Remuévase del intervalo $[0,1]$ el conjunto de intervalos de la forma $(z_{m,a} - \frac{1}{2^{2m+1}}, z_{m,a} + \frac{1}{2^{2m+1}}) = H_{m,a}$.

Por otro lado, definase $H = \cup_{m,a} H_{m,a}$ y también $J = [0,1] - H$. Para cada n fijo, hay 2^{n-1} diferentes $z_{n,a}$. Entonces, se tiene que

$$m(\cup_a H_{n,a}) \leq \sum_a m(H_{n,a}) \leq 2^{n-1}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{1+n}}$$

Por lo tanto,

$$0 < m(H) \leq \sum_{n \in N} \frac{1}{2^{1+n}} = \frac{1}{2}$$

entonces

$$0 < m([0,1] - H) = m(J)$$

Dado que $m(H) \leq \frac{1}{2}, H = [0,1] - J$, se cumple que

$$m(J) \geq \frac{1}{2}$$

El conjunto J es cerrado con medida positiva. [3]

Nótese que (a,b) no pertenece a J ya que las fracciones diádicas en (a,b) fueron removidas. Esto aplica para todo $a, b \ni 0 < a < b < 1$. Entonces dado que J no contiene intervalos abiertos, tiene interior vacío. Este es un ejemplo de un conjunto con medida positiva y denso en ninguna parte.

6.2. Integrales impropias

Dado que la integral de Riemann está definida para integrar sobre intervalos compactos y funciones acotadas, para aumentar el conjunto de funciones integrables sobre diferentes dominios se debe proponer la siguiente definición.

Definición 6.2.1. Una **singularidad** de una función $f : R^n \to R^k$ en $x = a \in R^n$ es cuando $f(a)$ no está definida.

Nota 6.2.1. **Ejemplo:** $f(x) = \frac{1}{x}$ tiene una singularidad en $x = 0$.

Definición 6.2.2. Sea $f(x)$ una función con una singularidad en $x = a$. La **integral impropia** de $f(x)$ sobre (a, b) donde $b > a$ se define como $\lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$.

Definición 6.2.3. Por otro lado, si queremos integrar a $f(x)$ sobre el conjunto no acotado (a, ∞) donde $a \in R$, entonces la **integral impropia** se define como $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$.

Notemos que en la definición anterior, se puede aplicar la misma lógica para integrar sobre $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, o (c, a) donde $c < a$ y la función $f(x)$ tiene una singularidad en $x = a$.

6.2.1. Intervalos no acotados

Para poder integrar sobre un conjunto no acotado, por ejemplo $[a, \infty)$, se debe definir la integral impropia.

Ejemplo:

En este ejemplo se utiliza el teorema fundamental del cálculo para poder calcular la integral.

Sea $f(x) = e^{-x}$, entonces sabemos que el conjunto de puntos $\{(x, y) \subset R^2 : x > 0, 0 < y < e^{-x}\}$ tiene área finita. Sin embargo, no podemos usar la definición de Riemann ya que el conjunto sobre el cual queremos integrar no es acotado. Usando, la definición de integral impropia, obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}|_0^t = \lim_{t\to\infty} e^0 - e^{-t} = 1$$

6.2.2. Funciones no acotadas

La integral de Riemann se definió para funciones acotadas, por lo que no se puede integrar funciones que tienen singularidades y asíntotas. En este caso, ni siquiera es posible usar el límite de una integral impropia, porque integrabilidad de Riemann implica acotación.

Ejemplos:

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ tiene una singularidad en x=0.
2. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^{1/3}}}$ también tiene singularidad en x=0.

En la definición de la integral de Riemann decimos que una función acotada es integrable si la integral superior es igual a la integral inferior. Es decir, que una función no puede ser integrable si no es acotada. Esto limita el conjunto de funciones integrables.

6.3. La función de Dirichlet

Definición 6.3.1. Una función característica χ_A de un conjunto A, es dada por la siguiente regla de asignación.

$$\chi_A := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

Definición 6.3.2. Definimos la función de Dirichlet como la función característica del conjunto de los numeros racionales, χ_Q.

Se verifica a continuación que la integral de Riemann no puede integrar la función de Dirichlet.

Recordemos que para que una función sea integrable, entonces las integrales superiores e inferiores deben coincidir.

Sea $[a,b]$ cualquier intervalo y sea P cualquier partición del mismo. Entonces $U(\chi_Q, P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$. Dado que entre cada par de números reales, existe un racional, entonces $M_i = 1$, no importa la partición de $[a,b]$ que consideremos. Entonces $U(\chi_Q, P) = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} - x_i) = x_n - x_1 = b - a$. Claramente el ínfimo de las integrales superiores es $b - a$.

Por otro lado, ahora tomaremos la integral inferior. $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$, ahora, sabemos que así como entre cada par de números reales existe un racional, sucede lo mismo con los irracionales. Entonces el ínfimo de la función de Dirichlet entre cada x_i, x_{i+1} es 0. Entonces $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n-1} 0(x_{i+1} - x_i) = 0$. Por lo tanto, el supremo de las sumas inferiores es cero, podemos concluir que la integral de χ_Q no existe por lo tanto no es Riemann integrable.

Así como existe esta función, podemos crear muchas más que no son Riemann integrables. Considere $j \in Q^c$, entonces $Q + j$ es el conjunto de los racionales trasladado por una distancia de j. Este conjunto es diferente de Q y además, χ_{Q+j} no es integrable sobre ningún intervalo de la forma $[a,b]$.

6.3.1. La función de Dirichlet como el límite puntual de una sucesión de funciones

Se sabe gracias al teorema de integración y convergencia uniforme que si $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente, entonces se cumple que $\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. Entonces vamos a relacionar la deficiencia de Riemann al no cumplirse este teorema para convergencia puntual con Dirichlet.

Sea $\{q_k : k \in N\}$ una enumeración de los números racionales. Defínase para $n \in N$

$$f_n(x) : [0,1] \to R = \begin{cases} 1 & x = q_k, k \leq n \text{ para algún } k \in N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Propiedad 6.3.1. (f_n) ***converge a*** χ_Q ***puntualmente***

Sea $x \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$. Si x es irracional, entonces $f_n(x) = \chi_Q(x)$. Ahora, si $x \in Q$, entonces $x = x_k$ para algún $k \in N$. Nótese que $f_m(x) = 1 = \chi_Q(x)$ para todo $m \geq k$. Entonces $|f_n(x) - \chi_Q(x)| = 0 < \epsilon$ para todo $n \geq k$.

Sería sumamente útil un teorema que nos asegurara que la integral de Riemann del límite de funciones es igual al límite de las integrales de Riemann de las funciones, sin embargo esto no ocurre y debemos ir en busca de una integral más poderosa que logre esto.

6.4. Teoremas de convergencia

Como fue discutido anteriormente, la integral de Riemann carece de un teorema de convergencia más general. Note que como se mencionó la función de Dirichlet es el límite puntual de una sucesión uniformemente acotada de funciones Riemann integrables cuyo límite puntual (la función de Dirichlet) no es Riemann integrable.

6.5. Incompletitud

6.5.1. El conjunto de funciones Riemann integrables es un espacio vectorial

Sea $R[a,b]$ el conjunto de funciones Riemann integrables. Considere la función $f \equiv 0$. Además se cumplen las siguientes propiedades para todo $\lambda, \mu \in R$, $u, v \in R[a,b]$:

1. $u + v = v + u$

   dem:
   Dado que $u(x), v(x) \in R$, por la conmutatividad de R, y por la definición de operadores sobre R se tiene que:
   $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = v(x) + u(x) = (u+v)(x)$,

2. $u + v \in R[a,b]$

   dem:
   Sabemos que las integrales superiores e inferiores son transformaciones lineales, entonces, suponga que $u, v \in R[a,b]$:
   $\overline{\int} u + v = \overline{\int} u + \overline{\int} v = \int u + \int v$
   $\underline{\int} u + v = \underline{\int} u + \underline{\int} v = \int u + \int v$, por lo que las integrales superior e inferior de $u+v$ coinciden y se tiene que $u+v$ es integrable.

3. $(u+v) + w = u + (v+w)$

   dem:
   Si $u, v, w \in R[a,b]$ y $x \in [a,b]$ entonces $((u+v)+w)(x) = (u+v)(x) + w(x) = u(x) + v(x) + w(x) = u(x) + (v+w)(x) = (u+(v+w))(x)$.

4. $0 + v = v + 0 = v$.

   dem:
   Sea $\mathbf{0} : [a,b] \to R$ tal que $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Nótese que $\mathbf{0}$ está acotada ya que es constante, por lo que $\mathbf{0} \in R[a,b]$ entonces $(v + \mathbf{0})(x) = v(x) + \mathbf{0}(x) = v(x)$

5. $(\forall v \in V)(\exists -v \in V)(v + (-v) = 0)$

   dem:
   Para $v \in R[a,b]$ defínase $-v := -1 \cdot v$, entonces $(v - v)(x) = v(x) - v(x) = 0 = \mathbf{0}(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

6. $\lambda(u+v) = (\lambda u + \lambda v)$

dem:
$\lambda(u+v)(x) = \lambda(u(x)+v(x)) = \lambda u(x) + \lambda v(x) = (\lambda u + \lambda v)(x)$

7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

   dem:
   $((\lambda+\mu)v)(x) = (\lambda+\mu)(v(x)) = \lambda v(x) + \mu v(x) = (\lambda v + \mu v)(x)$

8. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

   dem:
   $(\lambda(\mu v))(x) = \lambda(\mu v)(x) = \lambda(\mu(v(x))) = (\lambda\mu)(v(x)) = ((\lambda\mu)(v))(x)$

9. $1v = v$

   dem:
   Si $v \in R[a,b]$ entonces $(1v)(x) = 1v(x) = v(x)$, para todo $x \in [a,b]$ y para todo $v \in R[a,b]$ por lo que $1v = v$.

Por lo tanto, $R[a,b]$ es un espacio vectorial. Además lo podemos dotar de una semi-métrica:

$$|f-g| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Aunque se formaran clases de equivalencia para que la semi-métrica sea una métrica e induzca una norma, el espacio no sería completo. Se verifica a continuación que el espacio en efecto no es completo.

6.5.2. Existencia de una sucesión de funciones que no converge dentro del espacio

Sea $f_n = \text{mín}\{n, \frac{1}{\sqrt{x}}\}$. Entonces nótese que, si dado un $\epsilon > 0$ y además se cumple que $n > m$, $\frac{1}{m} < \epsilon$ se tiene que

$$\int |f_n - f_m| = \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n-m) + \int_{1/n^2}^{1/m^2} \frac{1}{\sqrt{x}} - m = \frac{n-m}{n^2} + \frac{n^2 - 2mn + m^2}{mn^2} =$$

$$\frac{n-m}{n^2} + \frac{(n-m)^2}{mn^2} = \frac{n-m}{n^2}(1 + \frac{n-m}{m}) = \frac{n-m}{n^2}(\frac{n}{m}) = \frac{n-m}{nm} \leq \frac{1}{m} < \epsilon$$

Entonces se tiene que $(f_n) \subset R[a,b]$ es una sucesión de Cauchy. Sin embargo, el límite de la sucesión, que es $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no se encuentra dentro del espacio de funciones acotadas, por lo que no puede ser Riemann integrable. Es decir, el espacio no es completo.

6.6. Limitaciones del teorema fundamental del cálculo

6.6.1. La integral no es un operador inverso de la derivada

Tomando la primera parte del teorema fundamental del cálculo, notemos que el enunciado requiere que f' sea Riemann integrable sobre $[a,b]$. Nótese que se están haciendo dos requisitos, el primero es que la función f sea diferenciable sobre $[a, b]$. Además, se requiere que f' sea Riemann integrable.

Es deseable que se cumpla el TFC solo sabiendo que f' existe, i.e. si f es diferenciable, entonces f' es integrable y además

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Ejemplos

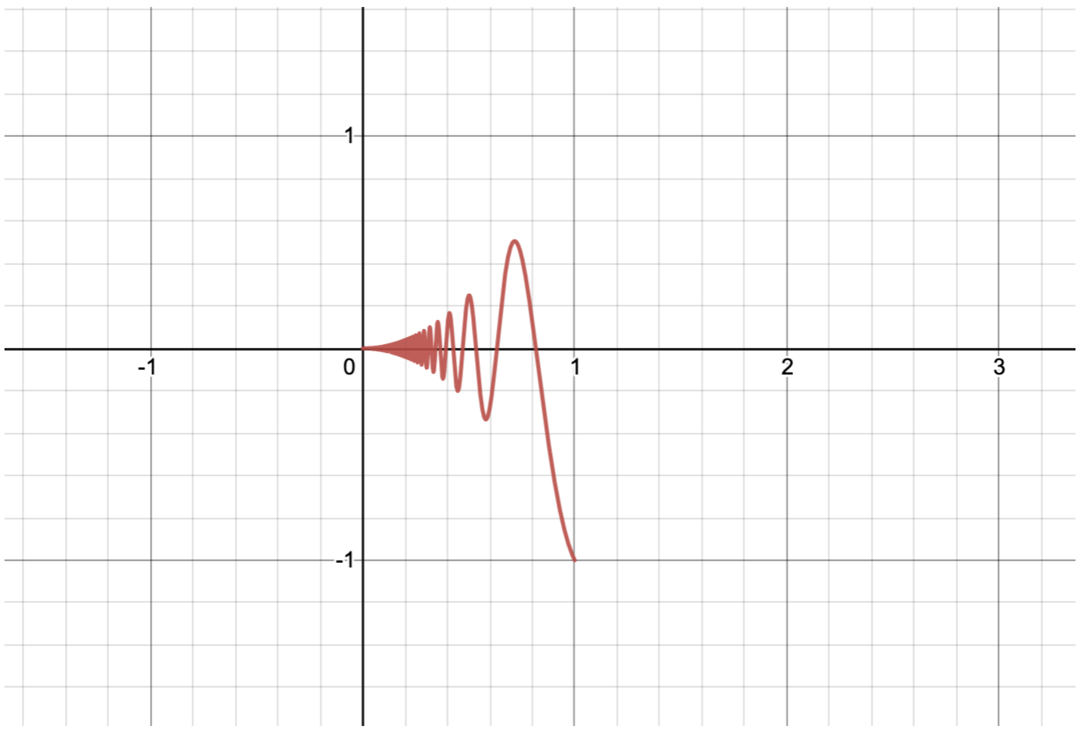

Figura 6.1: Función con primitiva, que no es Riemann integrable

1. Considere $f(x) : [0, 1] \to R$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & x \in (0, 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ En efecto, se verifica que $f(x)$ es diferenciable.
   Claramente, dado que x^2 y $\cos(\frac{\pi}{x^2})$ son ambas diferenciables sobre $(0, 1]$ entonces la multiplicación de ambas lo es también. Además, la derivada de $f(x)$ en el intervalo $(0, 1]$ es $f'(x) = 2(x \cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{\pi}{x} \sin(\frac{\pi}{x^2}))$
   Por otro lado, para verificar la diferenciabilidad en $x = 0$ aplicamos la definición.
   $$\lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos(\pi/h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cos(\frac{\pi}{h^2})$$
   Ahora, para encontrar el límite, se procede a utilizar el teorema de encaje. Nótese que como $|\cos(a)| \leq 1$ para todo $a \in R$ se cumple que $-x \leq x \cos(\frac{\pi}{x^2}) \leq x$ para todo $x \in (0, 1]$. Entonces, tomando el límite de cuando x tiende a 0 tenemos que este es igual a 0, por lo que
   $$\lim_{h \to 0} h \cos(\frac{\pi}{h^2}) = 0 = f'(0)$$
   Por lo tanto, se concluye que $f'(x)$ es una función sobre $[0, 1]$.

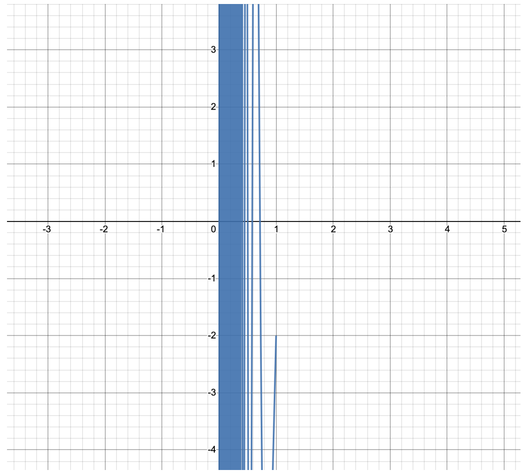

Figura 6.2: Derivada no acotada, que no es Riemann integrable

Sin embargo a pesar de que $f(x)$ es diferenciable para todo $x \in [0,1]$, $f'(x)$ no está acotada, entonces $f'(x)$ no es Riemann integrable.

2. El siguiente ejemplo proviene de [4]

   Considere $\{G_n = (a_n, b_n) : n \in N\}$ abiertos disjuntos del $(0,1)$ tal que $\overline{\cup_n G_n} = [0,1]$, $G = \cup G_n$, $0 < m(G) \leq \frac{1}{2}$. Además, sea $J = G^c$. Entonces, para cada $G_i = (a,b)$, se procede a definir una función
   $$f(x) := (x-a)^2 \sin(\frac{1}{x-a})$$
   en todos los puntos x tales que $a < x < \alpha$ donde $\alpha < \frac{b+a}{2}$ y además $f'(\alpha) = 0$. Ahora, en el intervalo $[\alpha, \frac{b+a}{2}]$ se define $f(x)$ como el valor constante $f(\alpha)$. Se define $f(x)$ sobre el intervalo $(\frac{b+a}{2}, b)$ por simetría sobre el eje $x = \frac{b+a}{2}$. Se define $f(a) = f(b) = 0$. Todo esto es para cada abierto G_i de la cubierta abierta. Por último, si $x \in J$, se define $f(x) = 0$.

   A probar: $f(x)$ es diferenciable. Notese que $f'(x)$ existe sobre cada G_i, es decir es diferenciable sobre H.
   $$f'(x) = 2(x-a)\sin(\frac{1}{x-a}) - \cos(\frac{1}{x-a})$$
   Ahora, cuando $b-a$ es pequeño, entonces $|f'(x)| < 1+\epsilon$ para algún $\epsilon > 0$.

   Falta verificar que $f(x)$ sea diferenciable sobre J. Sea $\epsilon > 0$, entonces si $|x-t| < \epsilon$, con $x \in J, t \in H$ entonces $f(x) = 0$, por lo tanto $\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = \left|\frac{f(t)}{t-x}\right| \leq \left|\frac{(t-x)^2}{t-x}\right| = |t-x| < \epsilon$, ahora, si $t \in J$, se cumple que $\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = 0$, entonces $f(x)$ es diferenciable sobre $[0,1]$.
   Sin embargo, $f'(x)$ sobre J no es continua, y $0 < m(J)$ por lo tanto $f(x)$ no es Riemann integrable.

Lo anterior ejemplifica que existen funciones acotadas que tienen función primitiva, sin embargo no se cumple el teorema fundamental del cálculo en su caso.

CAPÍTULO 7

Integral en la teoría de Lebesgue

En la siguiente sección se tomará el espacio de medida como $(R^n, B, m) = (X, B, \mu)$ donde B es el álgebra de Borel de R^n y m es la medida de Lebesgue. Se presentan demostraciones para el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, el de consistencia y para el teorema fundamental del cálculo. Para el de convergencia, se utiliza el lema de Fatou y propiedades del supremo e ínfimo. Para el teorema de consistencia se hace uso del teorema de aproximación de funciones medibles y del teorema de convergencia. Finalmente, para el Teorema fundamental se utiliza el teorema del valor medio, el teorema de convergencia y el teorema de aproximación de funciones medibles.

7.1. Integral y funciones integrables

Definición 7.1.1. [13] Una función simple es una que toma una cantidad de valores finitos. En otras palabras la imagen es un conjunto finito. Se puede definir equivalentemente como una combinación lineal de funciones características.

Definición 7.1.2. [13] Sea $h : X \to R$ una función medible y simple. La integral de h sobre un conjunto medible E se define como $\int_E h d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$, con $\alpha_i \in R$, y cada A_i un conjunto medible.

Definición 7.1.3. [13] Sea $f : X \to R$ una función medible, no necesariamente simple. Entonces la integral de sobre un conjunto medible E, se define como $\int_E f d\mu := \sup_{s<f}\{\int_E s d\mu\}$, donde el supremo recorre las funciones medibles que son menores puntualmente que f. Se dice que f es una función Lebesgue integrable cuando $\int_X |f| < \infty$.

7.2. Teorema de consistencia

Teorema 7.2.1. *Sea $f : I \to R$ una función Riemann integrable sobre $I = [a, b]$. Entonces f es Lebesgue integrable sobre $I = [a, b]$. Además, las integrales coinciden.*
dem:
Sea $\{P_k\}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que:

1. $\text{máx}(\{x_{i+1} - x_i : i \in Z^+, 1 \leq i \leq n\}) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$

2. $\lim_{k\to\infty} L(f,P_k) = \underline{\int_a^b} f$

3. $\lim_{k\to\infty} U(f,P_k) = \overline{\int_a^b} f$

Ahora defínase, para cada partición P_k, las funciones simples y medibles

$$u_k(x) = \sum_i M_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}(x_{i+1}-x_i) + M_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x_n - x_{n-1})$$

$$l_k(x) = \sum_i m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}(x_{i+1}-x_i) + m_n \chi_{[x_{n-1},x_n]}(x_n - x_{n-1})$$

$$l_k(x) = \sum_i m_i (x_{i+1}-x_i)$$

. Entonces nótese que las integrales de Lebesgue sobre $[a,b]$ de $\lim_{k\to\infty} u_k$, y de $\lim_{k\to\infty} l_k$, son $\int_a^b \lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b u_k = U(f,P) = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = L(f,P) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b l_k = \int_a^b \lim_{k\to\infty} l_k$. Entonces dado que $\lim_{k\to\infty} l_k \leq f \leq \lim_{k\to\infty} u_k$ se tiene que f es Lebesgue integrable y la integral es igual a la de Riemann.

7.3. Lebesgue y las limitaciones de Riemann

A continuación se discute como Lebesgue resuelve algunos de los problemas que no puede resolver Riemann.

7.3.1. Dirichlet y Lebesgue

Medida de los racionales

Sea $\epsilon > 0$, y sea $(q_1, q_2 ...)$ una enumeración de los racionales. Entonces consideremos la cubierta abierta del conjunto $Q, G = \cup_{i\in Z^+} B_{2^{-i}\epsilon}(q_i)$. Por lo tanto, $Q \subset G = \cup_{i\in Z^+} B_{2^{-i}\epsilon}(q_i)$ y por propiedades de la medida de Lebesgue, $m(Q) \leq m(G) \leq \sum_{i\in Z^+} 2^{-i}\epsilon = \epsilon$. Dada la arbietrariedad de ϵ, se puede concluir que el conjunto de los números racionales tiene medida 0.

Sabemos que si $A \cup A^c = X$, entonces $m(A) + m(A^c) = m(X)$. Aplicando esto a el intervalo [0,1] y su partición en los racionales e irracionales, obtenemos que la medida de los irracionales es 1.

Procedemos a calcular la integral de Lebesgue de la función de Dirichlet.

Integral de la función de Dirichlet

$$\int \chi_Q dm = 1 \cdot m(Q) + 0 \cdot m(Q^c) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Se puede ver que la integrar de Lebesgue ha resuelto un problema importante que no pudo resolver la integral de Riemann, además integró la función de Dirichlet de manera natural. Esto es porque la misma es una función simple, en particular es la función característica de los racionales, siendo la integral sobre $[0,1]$ la medida de $Q \cap [0,1]$.

7.3.2. Teorema de convergencia

Teorema 7.3.1. ***Teoremas de convergencia dominada de Lebesgue***
Sea $f_n(x) : R^k \to R$ una sucesión de funciones integrables tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ donde g es integrable. Sea $f(x)$ el límite puntual de $f_n(x)$. Entonces f es integrable y además se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \int_E f dm$$

para todo subconjunto $E \subset R^n$ medible.
dem:[13]
Se sabe que el límite de una sucesión de funciones medibles es medible entonces f es medible. Por otro lado como $|f_n| \leq g$ entonces $|f| \leq g$, y se tiene que f es integrable sobre R^n y también, cada $E \subset R^n$ medible. Por el lema de Fatou, se tiene que, si $E \subset R^n$ es medible, entonces

$$\int_E 2g = \int_E \liminf (2g - |f_n - f|) \leq \liminf \int_E 2g - |f_n - f| = \liminf \int_E 2g - \limsup \int_E |f_n - f|$$

$$\int_E 2g - \limsup \int_E |f_n - f|$$

, entonces

$$\lim \int_E |f_n - f| = 0$$

y se tiene que

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E f_n - f \right| \leq \int_E |f_n - f|$$

por lo que se concluye que el límite de las integrales es la integral del límite.

Teorema 7.3.2. ***Series***
Sea $f_n(x) : R^n \to [0, \infty]$ una sucesión de funciones medibles. Defínase $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Por otro lado, sea $E \subset R^n$ cualquier subconjunto medible y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ donde (E_n) es una sucesión de subconjuntos disjuntos medibles. Sea $g : R^n \to [0, \infty]$ una función medible. Entonces tenemos que

$$\int_E f dm = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dm$$

y además

$$\int_E g dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} g dm$$

7.3.3. Completitud

Teorema 7.3.3. ***Desigualdad de Minkowski***
Sea $1 \leq p < \infty$ entonces si $f, g : R^n \to [0, \infty]$ son funciones medibles, se cumple la desigualdad de Minkowski:

$$\left(\int_{R^n} (f+g)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^n} (f)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{R^n} (g)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Se define, $\mathcal{L}_1(R, m) := \{f : R \to R \text{ tal que } (\int_R |f| dm) < \infty\}$.

$\mathcal{L}_1$ con la suma cumple con los axiomas de un espacio vectorial, sin embargo, $d(f, g) = |f - g| := \int_R |f - g| dm$ puede anularse aunque $f \neq g$. Entonces, se procede a definir un nuevo espacio L_1 bajo la relación de equivalencia $f \sim g$ cuando $f = g$ m-en casi todo punto. Esto corrige el problema y se obtiene que $|f - g| = 0$ si y solo si $f = g \in L_1$.

Teorema 7.3.4. ***Completitud:***
El espacio L_1 es completo. Es decir las sucesiones de Cauchy son convergentes dentro del espacio.

7.4. TFC desde Lebesgue

Teorema 7.4.1. *Sea $f : [a, b] \to R$ que es diferenciable y además f' es acotada sobre $[a, b]$. Entonces se cumple que*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Dem:

Se sabe que f' es acotada y como es una derivada es medible. Como f' es acotada existe $M \geq 0$ tal que $|f'| \leq M$ y además como f' es medible existe una sucesión de funciones simples medibles (s_n) tal que $s_n \leq f'$ y además $s_n \to f'$. Dado que cada s_n es simple, entonces es integrable. Por otro lado, notese que $M(t) : [a, b] \to R$ tal que $M(t) = M$ es una función constante y como el dominio es un compacto, entonces es integrable. Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue f' es integrable.

Extiendase $f(t)$ sobre $[b, b+1]$ tal que $f(t) = f(b)$. Ahora defínase $f_n(t) = \frac{f(t+1/n)-f(t)}{1/n}$, nótese que $f_n(t) \to f'(t)$ para cada $t \in [a, b+1]$. Como f' es acotada, entonces (f_n) es uniformemente acotada y por el Teorema de Convergencia Monótona, se tiene que

$$\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b nf_n(t+1/n) - f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{a+1/n}^{1/n+b} nf_n(t)dt - \lim_{n\to\infty} \int_a^b nf_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{1/n} \int_b^{b+1/n} f_n(t)dt - \frac{1}{1/n} \int_a^{a+1/n} f_n(t)dt$$

Sin embargo, como cada f_n es continua, es Riemann integrable, entonces por el teorema de valor medio aplicado a la siguiente integral, se tiene que $\frac{1}{1/n} \int_b^{b+1/n} f_n(t)dt = f(b_n)$ para algún $b_n \in [b, b + 1/n]$. De la misma manera, existe $a_n \in [a, a + 1/n]$ tal que $\frac{1}{1/n} \int_a^{a+1/n} f_n(t)dt = f(a_n)$. Entonces

$$\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} f(b_n) - f(a_n) = f(b) - f(a)$$

El TFC nos garantiza que Lebesgue puede integrar cualquier derivada acotada. Es algo que la integral de Riemann no nos ofrece. Lastimosamente, el teorema fundamental del cálculo bajo la integral de Lebesgue es incapaz de garantizar integrabilidad para derivadas no acotadas.

7.4.1. Derivada no acotada no integrable

Además la integral de Lebesgue es incapaz de integrar la derivada de la función presentada en el capítulo anterior:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se demuestra a continuación que la integral de Lebesgue no la puede integrar.

Se sabe que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x\cos(\frac{\pi}{x^2}) + \frac{2\pi}{x}\sin(\frac{\pi}{x^2}) & x \in (0,1] \end{cases}$$

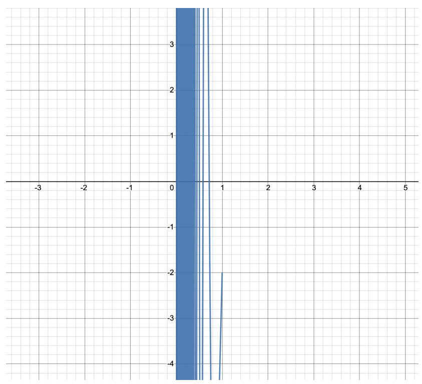

Figura 7.1: Derivada no acotada, que no es Lebesgue integrable

Sea $a_k = \sqrt{\frac{2}{4k+1}}$ y $b_k = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, entonces nótese que $\int_{a_k}^{b_k} f' = \frac{1}{2k}$, entonces

$$\int_0^1 |f'| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} f' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty$$

se concluye que f' no es Lebesgue integrable.

CAPÍTULO 8

Integral de Kurzweil-Henstock y el TFC

Definición 8.0.1. [1] Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto. Una partición etiquetada P de I es una de la forma $P = \{(I_i, t_i) : i = 1, ..., n; t_i \in I_i = [x_i, x_{i+1}]; a = x_1 < ... < x_n = b\}$. Claramente, cada partición P tiene infinitas particiones etiquetadas asociadas.

Definición 8.0.2. Sea $I = [a, b]$ y $\delta : I \to R$. Se dice que δ es un **gauge** sobre I si $\delta(t) > 0, \forall t \in I$. Se dice que el intervalo alrededor de $t \in I$ **controlado por el gauge** δ es $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$.

Definición 8.0.3. Sea $I = [a, b]$ y P una partición etiquetada de I. Si δ es un gauge sobre I, decimos que P es $\delta-$fina si $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$ para todo i entre 1 y n.

En la siguiente lista de ejemplos veremos por qué las funciones gauge hacen toda la diferencia.

Nota 8.0.1. **Ejemplos:**

1. $\delta(t) = d > 0$ la función identidad es un gauge sobre todo I.
   Notemos que si $x_{i+1} - x_i \leq 2d$ entonces P es $\delta-$fina.

2. Sean δ_1, δ_2 dos gauges sobre I. Entonces $\delta(t) := \text{mín}(\delta_1(t), \delta_2(t))$ es un gauge sobre I. Notemos que si P es $\delta-$fina, entonces es δ_1-fina y δ_2-fina.

3. **Se tiene cierto control sobre los puntos que son la etiqueta de cada subintervalo**[7]. Consideremos el intervalo $[0, 1]$ y el gauge

$$\delta(t) := \begin{cases} \frac{1}{4} & t = 0 \\ \frac{t}{2} & t > 0 \end{cases}$$

   Consideremos el primer sub-intervalo de cualquier partición $\delta-$fina, $[0, x_2]$. Sea t_1 la etiqueta de este sub-intervalo, supongamos por el absurdo que la etiqueta es distinta de 0. Entonces, dado que la partición es $\delta-$fina,

$$[0, x_2] \subset [t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [t_1 - \frac{t_1}{2}, t_1 + \frac{t_1}{2}] = \left[\frac{t_1}{2}, \frac{3t_1}{2}\right]$$

   Esto es una contradicción, entonces la única etiqueta para $[0, x_2]$ es $t_1 = 0$.

Definición 8.0.4. Sea $I = [a, b]$, $f : I \to R$ y P una partición etiquetada de I. Entonces la suma de Riemann asociada a esta partición está dada por $S(P, f) := \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$.

Definición 8.0.5. Sea $f : I \to R$ una función, sea $A \in R$. Entonces se dice que f es KH integrable si para todo $\epsilon > 0$ existe un gauge δ_ϵ sobre I tal que si P es cualquier partición etiquetada que es $\delta_\epsilon-$fina, entonces se cumple que
$$|S(P, f) - A| < \epsilon$$
. La integral de f sobre I es A.

8.1. Teorema de consistencia

Para evitar confusiones en las siguientes pruebas, se denotará con $L\int_I f$ la integral de Lebesgue de f sobre I y la notación usual para KH.

Teorema 8.1.1. *Riemann*
Si una función es Riemann integrable, entonces es KH integrable.
dem:
Sea $f : [a, b] \to R$ Riemann integrable, entonces existe $A \in R$ tal que $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que si P es una partición que cumple con $m(P, [a, b]) < \delta_\epsilon$, entonces se tiene que $|S(P, f) - A| < \epsilon$. Ahora, la prueba consiste en definir una función $\delta : [a, b] \to R$ que actúe como gauge. Notemos que como $m(P, [a, b])$ es mayor que el tamaño de cualquier subintervalo, entonces $|x_{i+1} - x_i| < \delta_\epsilon$ si $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces $[x_i, x_{i+1}] \subset (t_i - \delta_\epsilon, \delta_\epsilon + t_i)$ por lo que si definimos $\delta(t) := \delta_\epsilon$ se cumple el criterio para la integrabilidad de Kurzweil Henstock.

Entonces se acaba de demostrar que la integral KH es una natural generalización de la integral de Riemann. La función gauge, δ se asocia al ϵ de manera natural. De esta manera nos damos cuenta que la integral de Kurzweil Henstock, al definir un gauge además de dar más control sobre los puntos etiquetas de la partición, nos permite acotar con usando la medida del intervalo que define el gauge. Esto se ejemplificará al integrar la función de Dirichlet la siguiente sección.

Teorema 8.1.2. *Lebesgue*
Sea $f : [a, b] \to R$ una función medible no negativa. Entonces f es Lebesgue integrable si y solo si f es KH integrable.
dem:
Paso 1: Suponga que** $f < M$ **para algún M real
Entonces existe una sucesión g_k de funciones medibles y simples tal que $g_k \to f$ en casi todo punto. Dado que son funciones simples, entonces son integrables bajo Lebesgue y Kurzweil Henstock y además son iguales las integrales. Gracias al teorema de convergencia acotada, se tiene que f es integrable bajo Lebesgue y Kurzweil y coinciden.
Paso 2: Sea** f **una función medible.
Defínase $f_k(x) = \min\{f(x), k\}\chi_{[-k,k]}(x)$. Nótese que cada f_k es acotada, por el caso anterior, es integrable según Lebesgue y KH. Además $L\int_I f_k = \int_I f_k$. Dado que $0 \leq f_k \leq f$, es decir que $f_k(x)$ es creciente para cada x, entonces por el teorema de convergencia monotona, se tiene que
$$\lim L\int f_k = L\int f = \lim \int f_k = \int f$$

8.2. Función de Dirichlet

Debemos construir un gauge δ_ϵ para cada $\epsilon > 0$, tiene que cumplir con que $|S(P, \chi_Q)| < \epsilon$ para cada partición P, que sea $\delta_\epsilon-$fina.

Sean $\epsilon > 0$ y $\{q_k : k \in Z^+\}$ una enumeración de los números racionales, defínase
$$\delta_\epsilon(t) := \begin{cases} \frac{\epsilon}{2^{1+k}} & t = q_k, k \in Z^+ \\ 1 & t \in Q^c \end{cases}$$

Claramente la función definida anteriormente es un gauge sobre I. Ahora, consideremos $A = 0$, y una partición P que sea δ-fina entonces

$$|S(P, \chi_Q) - A| = |S(P, \chi_Q)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \chi_Q(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{1+k}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Por lo tanto, se concluye que la función de Dirichlet es KH integrable y además su integral sobre $[0, 1]$ vale 0.

8.3. Teoremas de convergencia

Teorema 8.3.1. ***Teorema de convergencia dominada***
Sea $f_k : I = [a, b] \to R$ una sucesión de funciones KH integrables tal que $g \leq f_k \leq h$ en casi todo punto donde $g, h : I \to R$ son KH integrables y que f converge puntualmente en casi todo punto. Entonces si se define

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x) & \textit{cuando el límite existe} \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Se cumple que

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k$$

dem:[14]
Por el lema de Fatou, se tiene que $\int_I \liminf f_k \leq \liminf \int_I f_k$. Por otro lado, dado que $f_k \leq h$ en casi todo punto, entonces $\limsup f_k$ existe en casi todo punto. Por lo que $\limsup \int_I f_k \leq \int_I \limsup f_k$, sin embargo $\limsup f_k = \liminf f_k = \lim f_k = f$, entonces

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k$$

8.4. TFC

El siguiente teorema será utilizado para la demostración del TFC.

Propiedad 8.4.1. ***Teorema de horcajadas:***
Sea $f : [a, b] \to R$ diferenciable, entonces dado $\epsilon > 0$ y $t \in [a, b]$ existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ tal que si

$$t - \delta \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta$$

entonces

$$|f(v) - f(u) - f'(t)(v - u)| \leq \epsilon(v - u)$$

Teorema 8.4.1. ***TFC Versión 1***
Suponga que $f : [a, b] \to R$ es diferenciable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

dem:

Sea $\epsilon > 0$, entonces para cada $t \in [a,b]$ existe δ_t que cumple con el teorema de horcajadas. Defínase un gauge sobre $[a,b]$ de la siguiente manera:

$$\gamma(t) = \delta_t$$

Suponga que $P = \{(t_i, [x_{i+1}, x_i] : 0 \leq i \leq n+1\}$ es una partición etiquetada de $[a,b]$ $\gamma-$fina. Entonces por el teorema de horcajadas, se tiene que

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(b) - f(a))\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))\right|$$

usando desigualdad triangular y dado que P es $\gamma-$fina, se puede acotar y se obtiene que

$$\sum_{i=0}^{n} |f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \sum_{i=0}^{n} \epsilon(x_{i+1} - x_i) = \epsilon(b-a)$$

por definición de la integral de Kurzweil Henstock,

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Teorema 8.4.2. ***TFC Versión 2***
Suponga que F, f son dos funciones definidas sobre $[a,b]$ en R tal que F es continua y $F' = f$ excepto posiblemente en un conjunto contable. Entonces se cumple que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

dem:

Sea C el conjunto enumerable donde $F' \neq f$ o donde F' se indefine. Sea $C = \{c_k : k \in N\}$ una enumeración de C. Sea $\epsilon > 0$ y $t \in C$ entonces como F es continua, se tiene que existe $\delta(t)$ tal que si $|x - t| < \delta(t)$ entonces $|F(x) - F(t)| = |F(x) - F(c_k)| < \epsilon 2^{-k-3}$ y además $f(c_k)|x - c_k| < \epsilon 2^{-k-3}$, la segunda condición se puede asegurar dado que $\delta(t)$ puede ser menor que la que asegura la primera condición. Para $t \in [a,b] - C$, se escoge un $\delta(t)$ que cumple con el teorema de horcajadas.

Se define el gauge sobre $[a,b]$ como $\gamma(t) = \delta(t)$. Sea P una partición etiquetada $\gamma-$fina, y se va a dividir la partición en P_1 donde las etiquetas pertenecen a C y P_2 donde no pertenecen a C. Entonces se tiene gracias al teorema de horcajadas que

$$\left|\sum_{t_i \in P_2} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (F(x_{i+1}) - F(x_i))\right| \leq \sum_{t_i \in P_2} |f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (F(x_{i+1}) - F(x_i))|$$
$$\leq \sum_{t_i \in P_2} \epsilon(x_{i+1} - x_i) \leq \epsilon(b-a)$$

por otro lado,

$$|F(x_{i+1}) - F(x_i) - f(t_i)(x_{i+1} - x_i)| \leq |F(x_{i+1}) - F(c_k)| + |f(c_k)(x_{i+1} - x_i)| + |F(c_k) - F(x_i)|$$
$$< 3\epsilon 2^{-k-3} < \epsilon 2^{-k-1}$$

entonces para P_1 se tiene que

$$\sum_{t_i \in P_1} |f(t_i)(x_{i+1} - x_i) + F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon$$

Finalmente, al sumar las dos desigualdades y aplicando desigualdad triangular para atrás, se tiene que

$$|F(b) - F(a) - \sum_{i=0}^{n} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)| < \epsilon(1 + b - a)$$

Ejemplos de aplicaciones a derivadas no acotadas y con variación no acotada

1. Si $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Entonces extendemos la función sobre el intervalo $[0,1]$ de la siguiente manera
   $g(x) : [0,1] \to R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
   Por lo tanto, se calcula la integral:
   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2$$

2. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x^2}) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, entonces
   $$\int_0^1 f'(x) dx = f(x)|_0^1 = -1$$

Conclusiones

1. En las matemáticas existe una clara tendencia a generalizar una teoría existente. Esto se hace con el objetivo de generar nueva teoría para resolver problemas que en la teoría existente no tiene solución y hacer crecer las matemáticas.

2. Cauchy, fue de los primeros en proponer una definición mediante límites para la integral, además esta definición es independiente de la derivada. Sin embargo, esta integral solo podía integrar funciones diferenciables por lo que en el afán de generalizar, Riemann propuso otra definición, la cual podía integrar cualquier función continua, sin importar su diferenciabilidad.

3. El valor agregado de la integral de Riemann es que dejó por un lado el concepto de límite del número de elementos de una partición y aprovechar la propiedad de supremo que caracteriza a los números reales.

4. Al considerar la integral de Riemann, existen derivadas acotadas que no son integrables, el espacio vectorial de funciones Riemann es incompleto y los teoremas de convergencia se cumplen únicamente bajo condiciones bastante fuertes. Para ello surgieron dos generalizaciones más, la de Lebesgue y Kurzweil Henstock, que resuelven parcialmente estas limitaciones.

5. La integral de Kurzweil Henstock generaliza los teoremas de convergencia. Al igual que la integral de Lebesgue, genera un espacio vectorial de funciones integrables que es completo y finalmente, generaliza el Teorema Fundamental del Cálculo resultando en que ya no es necesario que la derivada sea integrable ni acotada. Este resultado justifica que la derivada y la integral se tomen como operadores inversos.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert Gardner: *A modern theory of integration*, volumen 32. American Mathematical Soc., 2001.

[2] Bastian, Ryan: *An Introduction to The Generalized Riemann Integral and Its Role in Undergraduate Mathematics Education*, Dec 2016. `https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_etd/send_file/send?accession=auhonors1482504144122774&disposition=inline`.

[3] Benedetto, John: *Real variable and integration: with historical notes*. Springer-Verlag, 2013.

[4] Gordon, Russell A.: *A Bounded Derivative That Is Not Riemann Integrable*. Mathematics Magazine, 89(5):364–370, 2016. `https://doi.org/10.4169/math.mag.89.5.364`.

[5] Hawkins, T: *Dictionary of Scientific Biography*, 1990.

[6] Icaza Herrera, Miguel de: *Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem*. Revista Mexicana de Física, 40(3):459–475, 1993.

[7] Kurts, DS y CW Swartz: *Theories of integration*, 2004.

[8] Lewin, Jonathan W: *A truly elementary approach to the bounded convergence theorem*. The American Mathematical Monthly, 93(5):395–397, 1986.

[9] Memoria, RIEMANN nella sua: *Sui principii del calcolo integrale*. Giornale di matematiche, 19:333–372, 1881.

[10] Ponce-Campuzano, Juan Carlos y Miguel Ángel Maldonado-Aguilar: *Vito Volterra's construction of a nonconstant function with a bounded, non-Riemann integrable derivative*. BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 30(2):143–152, 2015. `https://doi.org/10.1080/17498430.2015.1010771`.

[11] Ruch, Dave: *The Definite Integrals of Cauchy and Riemann*, Aug 2020. `https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1011&context=triumphs_analysis`.

[12] Rudin, Walter *y cols.*: *Principles of mathematical analysis*, volumen 3. McGraw-hill New York, 1964.

[13] Salamon, Dietmar: *Measure and integration*. European Mathematical Society, 2016.

[14] Swartz, Charles W: *Measure, integration and function spaces*. World Scientific, 1994.

[15] Weisstein, Eric: *Brachistochrone Problem*. `https://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html`.

[16] Yee, Lee Peng, Rudolf Vỳbornỳ, Rudolf Vyborny *y cols.*: *Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, volumen 14. Cambridge University Press, 2000.

Anexos

.1. Teoremas y definiciones auxiliares

Definición .1.1. Un conjunto **elemental** es una unión finita de intervalos acotados.

Teorema .1.1. ***Lema de sucesión de conjuntos acotados encajados***
Suponga que A_n es una sucesión de conjuntos acotados tal que $... \subset A_2 \subset A_1$. con intersección vacía. Defínase

$$a_n = \sup\{m(E) : E \subset A_n\}$$

donde E es un subconjunto elemental de A_n. Entonces $a_n \to 0$.

Teorema .1.2. *Sea $f(x)$ continua sobre $[a, b]$. Entonces $f(x)$ es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

Teorema .1.3. ***Teorema de convergencia monótona***
Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \to f$ converge puntualmente en casi todo punto. Además, $f_1 \leq f_2 \leq ...$ entonces se cumple que

$$\int_E f = \lim \int_E f_n$$

Nota .1.1. El teorema anterior está enunciado para la integral de Lebesgue, sin embargo tiene sus versiones respectivas en la teoría de Riemann y Kurzweil Henstock.

.2. Espacios de medida

Definición .2.1. Sea X un conjunto. Una clase de subconjuntos $A \subset P(X)$ es una σ-álgebra si se cumple lo siguiente:

- $X \in A$
- Si $F \in A$ entonces $F^c \in A$
- Si $\{F_i\}_{i=0}^{\infty} \subset A$ entonces $\cup_{i=0}^{\infty} F_i \in A$

A la pareja ordenada, (X, A) se le llama espacio medible. A los elementos de la $\sigma-$álgebra se les conoce como conjuntos medibles.

Definición .2.2. Sea U una clase de subconjuntos de X, definimos a $\sigma(U)$ como la $\sigma-$álgebra más pequeña que contiene a U.

Definición .2.3. Una topología U sobre X, es una clase de subconjuntos que cumple con que:

- $X, \emptyset \in U$
- Si f,g$\in U$ entonces $f \cap g \in U$
- Si $\{f_i\}_{i \in I}$ es cualquier clase de elementos de U, entonces, $\cup_{i \in I} f_i \in U$

A los elementos de una topología se les llama abiertos. Se le llama la topología usual a aquella que se induce mediante una métrica.

Nota .2.1. El $\sigma-$álgebra de Borel de R^n se define como $\sigma(U)$, donde U es la topología usual sobre R^n. De ahora en adelante, siempre nos vamos a referir a (R^n, B) como R^n con su $\sigma-$álgebra de Borel.

Definición .2.4. Sea (X, A) un espacio medible. Una función $\mu : A \to [0, \infty]$ es una medida, si se cumple que:

- $\exists F \in A$, tal que $\mu(F) < \infty$
- Dada una colección contable de conjuntos medibles $\{F_i\}$ y disjuntos a pares, se cumple que $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(F_i) = \mu(\cup_{i=0}^{\infty}(F_i))$. Esta es la $\sigma-$aditividad.

A la terna (X, A, μ) se le llama espacio de medida.

A continuación presentamos propiedades sobre medidas.

Propiedad .2.1. *Los siguientes enunciados son válidos para cualquier espacio de medida (X, A, μ).*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(C \cup B) = \mu(C) + \mu(B)$, *donde* $C, B \in A$ *y* $C \cap B = \emptyset$
3. *Si* $C \subset B$, *entonces* $\mu(C) \leq \mu(B)$

dem:

1. Sea $B_1 \in A$ tal que la medida de B_1 es finita. Definamos la cola de la sucesión B_n como $B_i = \emptyset$ para $i > 1$.
Entonces, dada la disjunción por pares, tenemos que $\mu(\cup B_i) = \mu(B_1) = \mu(B_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\emptyset) < \infty$, por lo que $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Sea $E_1 = B, E_2 = C, E_i = \emptyset$, para $i > 2$. Entonces dada la $\sigma-$aditividad, tenemos que $\mu(\cup_{i=0}^{\infty} E_i) = \mu(C \cup B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i) = \mu(C) + \mu(B)$.

3. Sean C,B conjuntos medibles.
Entonces $C^c \cap B$ es medible y además $C \cup (B \cap C^c) = B, C \cap (B \cap C^c) = \emptyset$. Dado que $\mu(A) = [0, 1]$, tenemos que $\mu(F) \geq 0, \forall F \in A$. Aplicando 2. obtenemos $\mu(C \cup (B \cap C^c)) = \mu(C) + \mu(B \cap C^c) = \mu(B) \geq \mu(C) + 0 = \mu(C)$.

A partir de ahora, cada vez que hablemos de un espacio X, está implícito que tiene una $\sigma-$álgebra y una medida μ.

Supongamos que tenemos un conjunto medible de medida cero. Entonces los subconjuntos de este conjunto medible son despreciables también. Sin embargo, no siempre se da el caso que los subconjuntos son conjuntos medibles. Esto motiva la siguiente definición.

Definición .2.5. Un espacio de medida completo es uno donde si $B \subset M$ tal que M es un conjunto medible y tiene medida 0, entonces B también es medible y tiene medida 0.

Hemos llegado a la hora que debemos definir la medida de Lebesgue.

Definición .2.6. Sea X un conjunto. Una función $v : P(X) \to [0, \infty]$ es una medida externa si satisface las siguientes condiciones:

1. $v(\emptyset) = 0$
2. $A \subset B \subset X \to v(A) \leq v(B)$
3. Si tenemos una colección contable $\{B_i\}$ de conjuntos medibles, entonces $v(\cup_i B_i) \leq \sum_i v(B_i)$

Definición .2.7. Sea v una medida externa sobre X, entonces un subconjunto $D \subset X$ es $v-$medible si $v(D) = v(D \cap A) + v(D \cap A^c)$ para todo subconjunto $A \subset X$.

.3. Medida de Lebesgue

Definición .3.1. La **medida externa de Lebesgue** se define $\nu : 2^{R^n} \to [0, \infty]$ como

$$\nu(A) := \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}_n (Q_i) \, | A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\}$$

donde cada Q_i es un cuboide en R^n.

Definición .3.2. La medida de Lebesgue m corresponde a la medida externa restringida a los conjuntos medibles de R^n.

Definición .3.3. Casi en todo punto
Una propiedad se cumple en casi en todo punto de un conjunto X si no se cumple a lo sumo en un conjunto de medida 0.

.4. Funciones medibles

Definición .4.1. Una función simple es una que toma una cantidad de valores finitos. En otras palabras la imagen es un conjunto finito.

Nota .4.1. La función de Dirichlet es una de las funciones medibles más conocidas:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in Q^c \end{cases}$$

Definición .4.2. Una función $f : (X, A_X) \to (Y, A_X)$ es medible cuando $B \in A_Y \Rightarrow f^{-1}(B) \in A_X$.

Esto es bastante parecido a la definición de función continua por lo cual enunciamos el siguiente teorema.

Teorema .4.1. ***Aproximación***
Sea $f(x) : R^n \to [0, \infty]$ *una función. Entonces* $f(x)$ *es medible si y solo si existe una sucesión de funciones medibles* $s_1(x) \leq s_2(x) \leq ... \leq f(x)$ *tal que* $s_n(x) \to f(x)$ *para cada* $x \in R^n$.

Teorema .4.2. *Cada función continua es medible.*