

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Excelencia que trasciende

DELVALLE
GRUPO EDUCATIVO

REGLAS DE FEYNMAN PARA TEORÍAS CON SIMETRÍA U(1)

Trabajo de graduación presentado por
Alvaro Rolando Torres Caballeros
para optar al grado académico de
Licenciado en Física

Guatemala
2017

Reglas de Feynman para teorías con simetría U(1)

*A mis padres Rolando y Lorena,
por su apoyo incondicional.*

*Al Ing. Otto Hurtarte,
por abrirme las puertas a la física.*

Universidad del Valle de Guatemala
FACULTAD DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



REGLAS DE FEYNMAN PARA TEORÍAS CON SIMETRÍA U(1)

Trabajo de graduación presentado por
Alvaro Rolando Torres Caballeros
para optar al grado académico de
Licenciado en Física

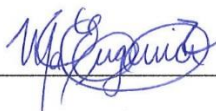
Guatemala
2017

Vo.Bo.:



Dra. María Eugenia Cabrera

Tribunal Examinador:



Dra. María Eugenia Cabrera



M.Sc. Zaida Urrutia



Dr. Juan Ponciano

Fecha de aprobación:

Guatemala, 30 de noviembre de 2017

PREFACIO

El trabajo de graduación, o como le decimos con los compañeros, *el challenge*, es una carrera contra el reloj, lo que lo hace un proceso en su mayoría estresante y desgastante. No obstante, este trabajo me ayudó en muchos aspectos, entre ellos, a poder percatarme cuán vasta y grande es la física, a darme cuenta a qué querer dirigir mis estudios de postgrado, a reforzar mis conocimientos en algunos temas, a exigirme persistir en algunos problemas que en ocasiones se tornaban frustraciones y conocer lo gratificante que se siente el superar estas dificultades, entre otros.

En esta sección me gustaría tomar la oportunidad para primero agradecerle a Dios y a mis padres por darme la oportunidad de estudiar física, así como también haberme apoyado a lo largo de mis estudios. También quisiera darle un agradecimiento especial a mi asesora, la Dra. María Eugenia Cabrera, por haberme guiado en la elección del tema del trabajo, por haberse tomado el tiempo de ayudarme a resolver algunas dudas y por sus correcciones y comentarios que fueron de mucha utilidad para poder escribir el presente. Por otro lado, quisiera darle las gracias al ingeniero Otto Hurtarte por sus innumerables lecciones y por exhortarme a seguir la licenciatura en Física. Por último quisiera agradecerle a todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron a que fuera posible escribir este trabajo; nombrar a cada una de estas personas conformaría una lista muy larga con lo que prefiero mencionar solamente algunas de ellas para no volver demasiado extenso este prefacio. Entre estas personas está mi directora de carrera, la Lic. Zaida Urrutia, quien nos brindó su apoyo a mis compañeros y a mi desde *Couching* hasta el último año. También están mis catedráticos, en particular el Lic. José Carlos Chiquín, por sus consejos y buenas formas de enseñar química, el Lic. Alan Reyes por sus conocimientos de matemática que me brindó y a la Lic. Irene Aguilar por haberme prestado a inicios de la carrera el libro de *Surely You're Joking Mr. Feynman* y haberme introducido de este modo, en mi opinión, a uno de los mejores físicos de todos los tiempos. Al Dr. V. Balakrishnan del IIT Madras, aunque lo más probable es que nunca lea este trabajo, pero me gustaría agradecerle por la calidad de sus clases en línea. A mis amigos de promoción de licenciatura en Física, Victor Tzorín y Diego Liska y de licenciatura en Matemáticas, Luis Emilio Méndez, Gaspar Yataz, Sofía Domínguez y en especial, a Sergio Zapeta por haberme ayudado a pasar la última parte de mis notas a \LaTeX . Por último, a mis demás amigos y colegas, entre ellos

a Diego Contreras, Oscar Caceros, María Andrea Bolaños, Derek Vleeming, Byron Contreras y al Lic. Rodrigo Castillo, ya que sin ustedes no hubiese sido igual.

Para concluir, me gustaría citar a uno de los físicos más reconocidos de nuestros tiempos que además tuvo la dicha de conocer a R. Feynman. Leonard Susskind dijo: "*Feynman truly believed that if you couldn't explain something simply, you didn't understand it.*"

Debo decir que comparto esta filosofía y que este trabajo está basado en este pensamiento, por lo que espero que el lector comparta la idea acerca de la sencillez en cuanto a la redacción y el desarrollo de cálculos en este trabajo. Para esto, debo de mencionar que el presente supone que el lector ha tenido, como mínimo, contacto con lo que es Mecánica Cuántica básica y Relatividad Especial básica. Sin más que agregar, espero que tras leer este trabajo, al lector le termine gustando el tema tanto como a mi.

ÍNDICE

PREFACIO	I
LISTA DE FIGURAS	IV
RESUMEN	VI
I. INTRODUCCIÓN	1
II. MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA	3
A. Relatividad especial y covarianza de Lorentz	3
B. Ecuación de Klein-Gordon	12
C. Solución para la partícula libre de la ecuación de Klein-Gordon	14
D. Densidad de probabilidad y densidad de corriente de probabilidad para la partícula libre de la ecuación de Klein-Gordon	15
E. Ecuación de Dirac	17
1. Hermiticidad y antihermiticidad:	19
2. Traza igual a cero:	20
3. Autovalores:	20
4. Las matrices α^λ tienen dimensión par:	20
F. Solución de la ecuación de Dirac para el caso de la partícula en reposo	24

G. Densidad de probabilidad y densidad de corriente de probabilidad de la ecuación de Dirac	25
III. CUANTIZACIÓN CANÓNICA	27
A. Teoría clásica de campos	27
B. La necesidad de recurrir a los campos cuánticos	32
C. Cuantización canónica	32
IV. CAMPO ESCALAR LIBRE	35
A. Oscilador armónico cuántico	35
B. Modos, fonones y cuantización de sistemas mecánicos	39
1. Caso discreto:	39
2. Caso continuo de longitud finita:	45
C. Cuantización de sistema continuo de longitud infinita	50
D. El campo escalar real (Klein-Gordon)	58
V. FUNCIÓN HEAVISIDE, FUNCIONES DE GREEN Y TEOREMA DE WICK	61
A. Función Heaviside	61
B. Funciones de Green	64
1. Operador $L = \frac{d^2}{dx^2}$:	66
2. Operador laplaciano $L = \nabla^2$:	68
3. Operador de Helmholtz $L = \nabla^2 + k^2$:	70
C. Teorema de Wick	73
1. Caso $n=2$:	73

2. Caso $n=3$:	75
3. Caso $n=4$:	75
4. El teorema de Wick:	77
5. Demostración del teorema de Wick:	78
VI. CAMPOS EN INTERACCIÓN	81
A. Introducción a teoría de perturbaciones	82
B. Enfoque de interacción	89
C. Operador \hat{S}	93
1. La expansión de Dyson:	96
D. Aplicación a teoría "ABC"	101
1. Proceso No.1, el decaimiento $C \rightarrow A + B$:	102
2. Proceso No. 2, la deflexión de trayectorias de dos partículas $A + B \rightarrow A + B$:	107
3. Primera y segunda Regla de Feynman para la teoría ABC:	121
4. Proceso $A + B \rightarrow A + B$, extremos sueltos:	124
5. Tercera Regla de Feynman para la teoría ABC:	126
VII. CUANTIZACIÓN DE CAMPOS CON SIMETRÍA U(1)	127
A. Teoría electromagnética y transformaciones gauge	127
B. Simetría U(1)	129
C. Simetría de gauge en mecánica cuántica	132
D. Simetría global U(1) del Campo Escalar Complejo: Partículas y antipartículas	134
E. El campo de Dirac y la conexión con el teorema de estadística de espín	144

F. El campo de Maxwell $A^\mu(x)$	149
G. Cuantización del campo de Maxwell $A^\mu(x)$	153
H. Introducción a interacciones electromagnéticas	159
I. Primeras Reglas de Feynman en Electrodinámica Cuántica:	162
VIII. RADIACIÓN OSCURA	167
A. Introducción al Modelo Estándar	167
B. Posible interacción con fotones oscuros	167
IX. CONCLUSIONES	171
X. BIBLIOGRAFÍA	173
XI. ANEXOS	177
A. Expansión explícita de la ecuación (VI.108)	177

LISTA DE FIGURAS

II.1. Rotación de un sistema de coordenadas	4
II.2. Observador O' moviéndose con velocidad constante en dirección $+x^1$	6
III.1. Trayectoria de una partícula a lo largo del tiempo	28
III.2. Dominio del campo ϕ	29
III.3. Campo escalar ϕ	29
IV.1. Sistema de dos partículas	39
IV.2. Partículas después de desplazarse una distancia q_1 y q_2 , respectivamente	40
IV.3. Cambio de longitud	47
V.1. Trayectoria para $t < 0$	62
V.2. Trayectoria para $t > 0$	63
V.3. Trayectorias para integral de contorno	72
VI.1. Estados de energía antes de la perturbación	84
VI.2. Estados de energía después de la perturbación	84
VI.3. Potencial cúbico	88
VI.4. Colisión de partículas	94
VI.5. Descripción gráfica del operador \hat{S}	94

VI.6. Región de integración de la integral doble (previo a tomar los límites $\lim_{t \rightarrow \infty}$ y $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty}$)	97
VI.7. Izquierda: marco de referencia arbitrario. Derecha: marco de referencia de C	104
VI.8. Interpretación gráfica del primer orden de corrección	108
VI.9. Diagrama No. 1 asociado a la ecu. (VI.114)	112
VI.10. Diagrama No. 2 asociado a la ecu. (VI.115)	112
VI.11. Diagrama No. 3 asociado a la ecu. (VI.116)	113
VI.12. Diagrama No. 4 asociado a la ecu. (VI.117)	113
VI.13. Diagrama No. 5 asociado a la ecu. (VI.118)	113
VI.14. Descripción gráfica del operador \hat{S}	114
VI.15. Diagramas asociados a las ecuaciones (VI.115) y (VI.114), respectivamente, en donde se muestra un <i>intercambio</i> de momentum	120
VI.16. Diagrama de aniquilación	123
VI.17. Posible diagrama si se considera más órdenes de corrección	124
VI.18. Diagrama de absorción y reemisión de un fotón γ	124
VI.19. Posibles interacciones al considerar correcciones de g^4	125
VII.1. Transformación U(1) (global)	130
VII.2. Las partículas A y las antipartículas B	141
VII.3. Casos incluidos en el propagador de Feynman.	143
VII.4. Diagrama de Feynman para intercambio de Yukawa	161
VII.5. Diagrama de Feynman de absorción y reemisión.	161
VII.6. Diagrama de Feynman de aniquilación y reemisión.	162

VII.7. Propagador - Espín 0	163
VII.8. Propagador - Espín $\frac{1}{2}$	163
VII.9. Propagador - Fotón	163
VII.10.Vértice - Espín 0 (tipo 1)	164
VII.11.Vértice - Espín 0 (tipo 2)	164
VII.12.Vértice - Espín $\frac{1}{2}$	165
VIII.1.Possible diagrama para proceso $e^-e^+ \rightarrow \gamma_{SM}\gamma_D$	169

RESUMEN

Este trabajo empieza con un capítulo de mecánica cuántica relativista, en donde se repasan conceptos de relatividad especial y se observa el problema de consistencia entre mecánica cuántica y relatividad especial. Es ahí donde se proponen algunas soluciones para tal discrepancia, pero se obtiene la necesidad de desarrollar una teoría alterna para explicar algunos de los resultados que se tienen al proponer estas soluciones, esto es Teoría Cuántica de Campos. En el tercer capítulo se discute un poco acerca del enfoque que se tomará para el desarrollo de esta teoría. En el siguiente capítulo se empieza a estudiar un campo clásico específico y luego se procede a transformar este campo en un operador de campo, lo que se conoce como cuantizar al campo. Posteriormente se le agregan ciertas condiciones a dicho campo con lo cual se finaliza con una expresión que describe a bosones que no interactúan. En el quinto capítulo se desarrollan ciertos tópicos físico-matemáticos los cuales serán necesarios en el siguiente capítulos. En el siguiente capítulo, capítulo sexto, se basa en desarrollar la teoría necesaria para estudiar campos que interactúan y en utilizar un modelo simple (con partículas sin espín) que permite visualizar cómo se procede a hacer los cálculos para campos más complejos, lo cual se conoce como *Teoría ABC*. En el séptimo capítulo, se aplica la Teoría ABC, a campos más complejos en donde ya se concideran partículas con espín. Este capítulo finaliza con la cuantización de un campo muy conocido, el campo electromagnético. Por último, en el octavo capítulo se discute de una aplicación de esta teoría a una teoría más moderna, la interacción oscura.

I. INTRODUCCIÓN

Alrededor del año de 1894, el físico ganador del Premio Nobel, Albert Michelson dijo:

"The more important fundamental laws and facts of physical science have all been discovered, and these are so firmly established that the possibility of their ever being supplanted in consequence of new discoveries is exceedingly remote."

Hoy en día se sabe que lo que dijo Michelson era sumamente erróneo, ya que después del descubrimiento de la teoría electromagnética se descubrió en 1905 lo que hoy en día se conoce como Relatividad Especial y alrededor de año de 1920 se descubrió la Mecánica Cuántica, las cuales forman la base para teorías más modernas. Como es bien sabido, tras pasar los años, la física ha ido evolucionando y se han podido explicar mejor algunos fenómenos de la naturaleza. A medida que se efectuaban más y más experimentos acerca de estas dos teorías, cada vez más la comunidad científica se percataba que estas teorías eran ciertas. Sin embargo, al tratar de unir estas dos teorías en una sola se obtuvo una incongruencia por lo que obligó a los científicos desarrollar otra teoría que usara a estas dos teorías como base. Esta teoría hoy en día se conoce como Teoría Cuántica de Campos, y aplicada a la Teoría Electromagnética se llama Electrodinámica Cuántica, la cual se conoce como una de las teorías más exactas alguna vez desarrollada por el ser humano.

Este trabajo pretende explicar el formalismo de la teoría cuántica de campos relativista para campos escalares libres y campos en interacción, además de explicar algunas interacciones de partículas tipo fermiones y discutir una posible aplicación de esta teoría a teorías más modernas como lo es la interacción de fotones oscuros.

II. MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA

El objetivo de este capítulo es dar a conocer el desarrollo que existe al momento de considerar ciertas partículas que viajan a altas velocidades por lo que es preciso describirla con una mecánica cuántica que obedezca los postulados de la relatividad especial. Además, este capítulo dará a conocer la notación que se utilizará a lo largo de este trabajo.

A. Relatividad especial y covarianza de Lorentz

De la mecánica clásica se sabe que si las leyes de Newton son válidas para un observador A que se encuentra en un marco de referencia inercial con un sistema de coordenadas dadas, estas también deben de ser válidas para un observador B, quien también se encuentra en el mismo marco de referencia inercial de A pero cuyo sistema de coordenadas difiere por una traslación y/o una rotación.

Notación: Las coordenadas espaciales x, y, z de un punto P se escribirán de la siguiente forma x^1, x^2, x^3 respectivamente.

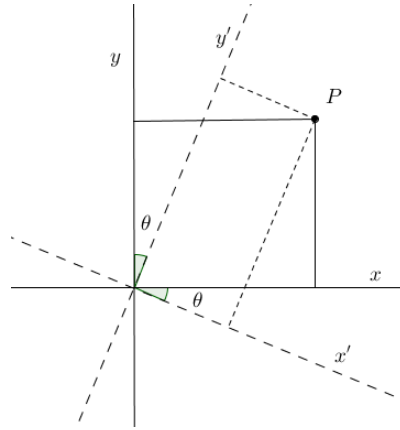
Regresando al caso de los observadores A y B, si hacemos una rotación respecto al eje x^3 las nuevas coordenadas serán (Figura II.1):

$$\begin{aligned}x^{1'} &= \cos(\theta)x^1 + \sin(\theta)x^2 \\x^{2'} &= -\sin(\theta)x^1 + \cos(\theta)x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}\tag{II.1}$$

Notamos entonces que la magnitud o la distancia entre el origen 0 y el punto P queda invariante.

$$(\vec{x})^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2 = (\vec{x}')^2\tag{II.2}$$

Figura II.1: Rotación de un sistema de coordenadas



Supongamos ahora que el observador A cuenta con una ecuación de la forma

$$F = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \quad (\text{II.3})$$

para describir algún fenómeno y se desea saber la forma que tendrá esta ecuación para el observador B. Dado que en (II.1) los componentes x^1, x^2, x^3 pueden sustituirse por F_x, F_y, F_z , respectivamente entonces $F^{1'}$ estaría dado por

$$F^{1'} = \cos(\theta)F^1 + \sin(\theta)F^2 \quad (\text{II.4})$$

pero

$$\begin{aligned} F^{1'} = m \frac{d^2 x^1}{dt^2} &\Rightarrow F^{1'} = \cos(\theta)m \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \sin(\theta)m \frac{d^2 x^2}{dt^2} \\ &= m \left(\cos(\theta) \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \sin(\theta) \frac{d^2 x^2}{dt^2} \right) \\ &= m \frac{d^2}{dt^2} (\cos(\theta)x^1 + \sin(\theta)x^2) \\ F^{1'} &= m \frac{d^2 x^{1'}}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Siguiendo un argumento similar para las demás componentes, notamos que

$$\vec{F}' = m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} \quad (\text{II.6})$$

El ejemplo anterior es válido para cualquier rotación, con lo cual observamos que las ecuaciones de Newton son *covariantes* ante rotaciones rígidas de los ejes de coordenadas. Se dice que una

ecuación es *covariante* cuando ambos lados de la ecuación se transforman de la misma manera. Sin embargo, se debe de hacer la distinción entre ser *invariante* y ser *covariante* ya que si una cantidad es invariante, entonces se está diciendo que esta cantidad no cambia bajo alguna transformación. Por ejemplo el punto situado en (0,0) en un sistema de referencia es invariante ante rotaciones pero es covariante con el resto de puntos del plano, o del espacio, ante traslaciones.

Notación: Se usará la convención de suma de Einstein, con lo cual cada vez que exista índices (latinos) repetidos se entenderá que existe una suma implícita (Aitchison, 1972), por ejemplo

$$\sum_{i=1}^3 A^i B^i = A^i B^i \quad (\text{II.7})$$

El caso anteriormente visto no es más que una reformulación al principio de relatividad con la cual debe de cumplir las leyes de la física. El principio de relatividad establece que: *“El movimiento de todos los objetos en un sistema coordinado es el mismo ya sea que este sistema esté en reposo o en movimiento constante rectilíneo.”* Clásicamente se decía entonces que si las leyes de Newton obedecían o cumplían con las transformaciones galileanas entonces este principio se satisfacía. Sin embargo, dos hechos demostraron lo contrario. El primero fue el experimento de Michelson y Morley, el cual demostraba que la velocidad de la luz era la misma en todos los marcos de referencia inercial. El segundo hecho fue las ecuaciones de Maxwell, las cuales expresaban que la velocidad de la luz era en efecto constante bajo cualquier sistema de referencia inercial. Posteriormente, se descubrió que las ecuaciones o leyes de la física debían de obedecer las transformaciones de Lorentz en vez de las transformaciones galileanas para que el principio de la relatividad se cumpliera.

Una diferencia crucial de las transformaciones de Lorentz con las transformaciones galileanas es que las transformaciones de Lorentz mezclan el espacio y el tiempo tal y como si fuese dos diferentes coordenadas. Es por esto que se introduce la coordenada temporal $x^0 = ct$. A continuación se escribirán las transformaciones de Lorentz para el caso en que un observador O' se mueve paralelamente al eje x^1 de un observador O a velocidad constante v , lo cual comúnmente se le conoce como *“boost”* (Figura II.2). No obstante, es conveniente hacer algunas definiciones antes.

Definición: Un tetravector es un conjunto de cantidades de la forma $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ tal que obedecen las transformaciones de Lorentz. Los tetravectores se denotan por índices griegos (Aitchison, 1972).

Definición: Un tetra vector denotado por A_μ será por definición

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \quad (\text{II.8})$$

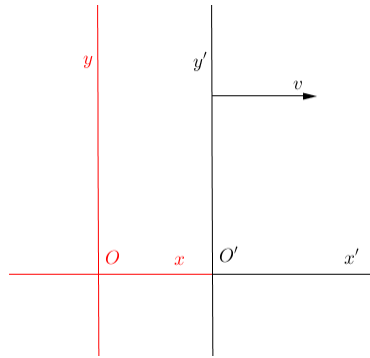
y un tetra vector denotado por A^μ , será por definición

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) \quad (\text{II.9})$$

por lo que $A_\mu B^\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$. Tetra vectores de la forma A^μ se les llama tensores contravariantes y tetra vectores de la forma A_μ se les llama tensores covariantes.

Entonces, para el caso en que un observador O' se mueve paralelamente al eje x^1 de un observador O a velocidad constante v (Figura II.2), las transformaciones de Lorentz son

Figura II.2: Observador O' moviéndose con velocidad constante en dirección $+x^1$



$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x^1) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta ct) \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$. Las transformaciones anteriores es posible escribirlas de forma matricial, con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Tal y como se dijo anteriormente, la ecuación (II.11) representa las transformaciones de Lorentz para el caso de movimiento paralelo al eje x . Claramente no es el caso más general, no obstante, no se pierde generalidad con esta ecuación ya que siempre es posible rotar los ejes de tal manera que el movimiento siempre sea en el sentido de $+x^1$ sin cambiar la forma de las ecuaciones, tal y como se vió en la ecuación (II.6). (Cheng, 2010)

Considerando este tipo de transformaciones es necesario preguntarse qué sucede con la norma de algún tetra vector. Esta debe de ser invariante de Lorentz, ya que se desea que las cantidades físicas se mantengan. Para ello se examinará primero la norma más natural, la euclidiana extendida a \mathbb{R}^4 .

Primero se debe notar que las transformaciones de Lorentz de la ecuación (II.11) pueden escribirse de forma tensorial como

$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\text{II.12})$$

donde el tensor de rango dos Λ_{ν}^{μ} es la matriz

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Es decir,

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\ x^{1'} &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\ x^{2'} &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\ x^{3'} &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3 \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

con $\Lambda_0^0 = \Lambda_1^1 = \gamma$; $\Lambda_0^1 = \Lambda_1^0 = -\gamma\beta$; $\Lambda_2^2 = \Lambda_3^3 = 1$ y cero para cualquier otro componente

de la matriz. Sea $I = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ entonces aplicándole la norma euclidiana se obtiene,

$$\begin{aligned}
(I')^2 &= (x^{0'})^2 + (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2 \\
&= (\gamma x^0 - \gamma \beta x^1)^2 + (-\gamma \beta x^0 + \gamma x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(x^0)^2 - 2\gamma^2\beta x^0 x^1 + \gamma^2\beta^2(x^1)^2 + \gamma^2\beta^2(x^0)^2 - 2\gamma^2\beta x^0 x^1 + \gamma^2(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(x^0)^2 + \gamma^2\beta^2(x^0)^2 + \gamma^2(x^1)^2 + \gamma^2\beta^2(x^1)^2 - 4\gamma^2\beta x^0 x^1 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= (\gamma^2 + \gamma^2\beta^2)(x^0)^2 + (\gamma^2 + \gamma^2\beta^2)(x^1)^2 - 4\gamma^2\beta x^0 x^1 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \\
&= (\gamma^2 + \gamma^2\beta^2)[(x^0)^2 + (x^1)^2] - 4\gamma^2\beta x^0 x^1 + (x^2)^2 + (x^3)^2
\end{aligned} \tag{II.15}$$

pero $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = (1 - \beta^2)$ por lo que $(\gamma^2 + \gamma^2\beta^2) = 1$ con lo que se obtiene

$$(I')^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 - 4\gamma^2\beta x^0 x^1 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \neq (I)^2 \tag{II.16}$$

La ecuación (II.16) muestra claramente que la norma euclidiana no es invariante de Lorentz.

Considérese ahora la norma pseudo-euclidiana dada por:

$$(I)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{II.17}$$

procediendo de igual manera se tiene que

$$\begin{aligned}
(I')^2 &= (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 \\
&= (\gamma x^0 - \gamma \beta x^1)^2 - (-\gamma \beta x^0 + \gamma x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(x^0)^2 - 2\gamma^2\beta x^0 x^1 + \gamma^2\beta^2(x^1)^2 - [\gamma^2\beta^2(x^0)^2 - 2\gamma^2\beta x^0 x^1 + \gamma^2(x^1)^2] - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(x^0)^2 - 2\gamma^2\beta x^0 x^1 + \gamma^2\beta^2(x^1)^2 - \gamma^2\beta^2(x^0)^2 + 2\gamma^2\beta x^0 x^1 - \gamma^2(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(x^0)^2 + \gamma^2\beta^2(x^1)^2 - \gamma^2\beta^2(x^0)^2 - \gamma^2(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= \gamma^2(1 - \beta^2)(x^0)^2 - \gamma^2(1 - \beta^2)(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\
&= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (I)^2
\end{aligned} \tag{II.18}$$

lo cual muestra que esta norma es invariante.

En algunos libros I recibe el nombre de intervalo invariante. Sería conveniente poder escribir esta cantidad en forma de una suma, sin embargo hay tres signos menos que lo impiden. Para solucionar

este problema se introduce la métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu}$, la cual es una matriz de 4×4 de la siguiente forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Con lo que I puede reescribirse como:

$$I = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (\text{II.20})$$

Asímismo es posible reformular la definición que se dio anteriormente de tensor covariante como

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{II.21})$$

con lo que se obtiene

$$I = x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu \quad (\text{II.22})$$

Algunos autores prefieren definir la métrica de Minkowski como $-g_{\mu\nu}$, sin embargo, esto no afecta ya que si I es invariante entonces $-I$ también lo es. (Griffiths, 2010)

A continuación se definirá un nuevo parámetro, el cual se llamará *tiempo propio*, τ , y permitirá el desarrollo de otras cantidades invariantes de Lorentz. El tiempo propio se define como:

$$d\tau = \frac{dS}{c} \quad (\text{II.23})$$

donde dS es un diferencial de distancia en el espacio de Minkowski (Cheng, 2010). A partir de esta definición es posible derivar la siguiente propiedad, cuyo desarrollo puede ser encontrado en (Cheng, 2010), esta propiedad será útil posteriormente.

$$d\tau = \gamma dt \quad (\text{II.24})$$

Entonces la velocidad relativista de una partícula se define como:

$$U^i = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma\vec{v} \quad (\text{II.25})$$

Si se extiende dicha cantidad a un tetravector se debe de hayar la componente x^0 :

$$U^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{1/\gamma dt} = \gamma c \quad (\text{II.26})$$

Por lo que

$$U^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \quad (\text{II.27})$$

Ahora se mostrará que U^μ es covariante de Lorentz, para ello se considera,

$$U^\mu U_\mu = \gamma^2(c^2 - (v_x)^2 - (v_y)^2 - (v_z)^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right) = c^2 \quad (\text{II.28})$$

La ecuación (II.28) muestra que U^μ es covariante de Lorentz. Este hecho es muy interesante ya que se debe de observar que sea cual sea la velocidad de la partícula, la norma cuadrada es c^2 , a lo cual se le llama un escalar de Lorentz. La ecuación (II.28) puede interpretarse como que todos los objetos poseen un tetravector de magnitud igual a la velocidad de la luz, un objeto inmóvil, su tetravector U^μ apunta en dirección temporal, mientras que el tetravector de otro objeto en movimiento, con respecto al primero, apunta en dirección temporal y espacial y su norma es igual a la norma del tetravector del objeto anterior.

Debido a que estamos trabajando con otra velocidad, es conveniente definir el momentum relativista. El momentum toma la forma de

$$p^\mu = mU^\mu \quad (\text{II.29})$$

con $p^0 = mc\gamma = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Tomando la serie de Taylor de esta componente se obtiene

$$\begin{aligned} mc\gamma &= mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Si $v \ll c$ (límite clásico), el paréntesis puede aproximarse a $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ que es la energía cinética más un término al cual se le llama energía de reposo. Entonces si se define la energía como

$$E = mc^2\gamma \quad (\text{II.31})$$

entonces al expandir este término en su serie de Taylor daría justamente $\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots \right)$, lo cual se puede ver también en la ecuación (II.30). Si se toma el límite clásico de esta expresión entonces se convierte nuevamente en la energía cinética clásica para una partícula libre más una constante, lo cual concuerda con la ecuación (II.31) al modelar partículas con velocidades no relativistas. Por otro lado, se debe de mencionar que en mecánica clásica nos interesa únicamente cambios de energía, por lo que el término constante mc^2 se puede obviar ya que siempre se trabaja con partículas que poseen una masa (Griffiths, 2010).

Ahora bien, regresando al momentum relativista, la componente cero de este puede entonces escribirse como $p^0 = \frac{E}{c}$ y p^μ con lo que la ecuación (II.29) se convierte en

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (\text{II.32})$$

el cual se denomina tetравector de energía-momentum. Como es de esperarse, la norma cuadrada de dicho vector es covariante de Lorentz y de hecho es también una constante de Lorentz.

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 \vec{v}^2 \gamma^2 \\ &= c^2 m^2 \gamma^2 - m^2 \vec{v}^2 \gamma^2 \\ &= m^2 (c^2 \gamma^2 - \vec{v}^2 \gamma^2) \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= m^2 c^2 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\therefore p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (\text{II.34})$$

B. Ecuación de Klein-Gordon

En mecánica cuántica se tienen operadores para la energía y para el momentum los cuales son:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \hat{p} &= -i\hbar \nabla \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

donde \hbar es la constante de Planck dividida dentro de 2π . Las ecuaciones escritas en (II.35) permiten escribir el tensor energía-momentum anteriormente encontrado como:

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \begin{bmatrix} \partial_{x^0} \\ -\partial_{x^1} \\ -\partial_{x^2} \\ -\partial_{x^3} \end{bmatrix} = i\hbar g_{\mu\nu} \partial_\nu = i\hbar \partial^\mu \quad (\text{II.36})$$

donde $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Estos operadores, escritos en (II.35) conforman la ecuación de Schrödinger, la cual tiene la forma de

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi \quad (\text{II.37})$$

A continuación se mostrará que dicha ecuación no es covariante de Lorentz.

Sea

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right) \\ x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x^{1'}} \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Por lo que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi \xrightarrow{\text{transf. de Lorentz}} i\hbar \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \Psi = -\frac{\hbar}{2m} \gamma^2 \nabla'^2 \Psi \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \Psi &= -\frac{\hbar}{2m} \gamma \nabla'^2 \Psi \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

con lo que se demuestra que la ecuación de Schrödinger no es invariante de Lorentz. Esto se pudo haber observado también desde un inicio, ya que la ecuación (II.37) está basada en una relación de energía-momentum no relativista.

Para tratar de solucionar esto podemos tomar la relación energía-momentum desarrollada anteriormente, la cual se vio que efectivamente es invariante de Lorentz.

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = c^2 m^2 \Rightarrow E^2 = c^4 m^2 + c^2 \vec{p}^2 \Rightarrow (i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = c^4 m^2 \Psi - c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi &= c^4 m^2 \Psi - c^2 \hbar^2 \nabla^2 \Psi \\ -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi &= c^2 m^2 \Psi - \hbar^2 \nabla^2 \Psi \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} \Psi &= c^2 m^2 \Psi - \hbar^2 \nabla^2 \Psi \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[c^2 m^2 + \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2} \right) \right] \Psi \\ \left[\frac{c^2 m^2}{\hbar^2} + \partial^\mu \partial_\mu \right] \Psi &= 0 \end{aligned}$$

o bien

$$\left[\frac{c^2 m^2}{\hbar^2} + \square^2 \right] \Psi = 0 \quad (\text{II.44})$$

donde $\square^2 = \partial^\mu \partial_\mu$, el cual se denomina el D'lambertiano. La ecuación anterior, (II.44) se le conoce como la ecuación de Klein-Gordon y describe partículas cuyo espín es 0 (Griffiths, 2010).

C. Solución para la partícula libre de la ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon es muy parecida a la ecuación de onda, por lo que se propone una solución de la forma

$$\Psi(\vec{x}, t) = A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} \quad (\text{II.45})$$

una onda plana, donde $A \in \mathbb{C}$. Entonces la relación que debe satisfacer Ψ es

$$\frac{1}{c^2}(\partial^t)^2\Psi - (\partial^i)^2\Psi = \frac{-m^2c^2}{\hbar^2}\Psi \quad (\text{II.46})$$

Usando la propuesta (ecuación [II.45](#)) se obtiene

$$\frac{(i\omega)^2}{c^2}\Psi - (i\vec{k})^2\Psi = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi \quad (\text{II.47})$$

con lo que

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4 \quad (\text{II.48})$$

Entonces para un \vec{k} dado

$$\omega = \pm \frac{(\hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4)^{1/2}}{\hbar} \quad (\text{II.49})$$

Entonces notamos que el eigenvalor asociado al eigenestado Ψ del operador $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ es sin pérdida para 1D:

$$\hat{p}\Psi = \mathbf{p}\Psi \Rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^1}\Psi = \mathbf{p}\Psi \rightarrow \mathbf{p} = \hbar\vec{k} \quad (\text{II.50})$$

y el eigenvalor asociado al eigenestado Ψ del operador \hat{E} es

$$\hat{E}\Psi = \epsilon\Psi \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \epsilon\Psi \rightarrow \epsilon = \hbar\omega \quad (\text{II.51})$$

Entonces es posible obtener las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} 1) \Psi_1 &= A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i(\hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4)^{1/2}t/\hbar} & E &= +(\hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4)^{1/2} & \vec{p} &= \hbar\vec{k} \\ 2) \Psi_2 &= A e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{+i(\hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4)^{1/2}t/\hbar} & E &= -(\hbar^2c^2\vec{k}^2 + m^2c^4)^{1/2} & \vec{p} &= \hbar\vec{k} \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

En las soluciones expuestas en [\(II.52\)](#) es donde se puede empezar a observar el problema con esta ecuación y es que se obtiene de ella energías negativas. ¿Cómo se deben de interpretar estas? Se desarrollará un breve análisis a continuación de la densidad de probabilidad que presenta este tipo de soluciones con el fin de buscar alguna respuesta a este problema (Aitchison, 1972).

D. Densidad de probabilidad y densidad de corriente de probabilidad para la partícula libre de la ecuación de Klein-Gordon

Para la ecuación de Schrödinger se sabe que la ecuación de conservación de la probabilidad está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{II.53})$$

donde $\rho = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi(\vec{x}, t)\Psi^*(\vec{x}, t)$ es la densidad de probabilidad y $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*(\vec{x}, t)\nabla\Psi(\vec{x}, t) - \Psi(\vec{x}, t)\nabla\Psi^*(\vec{x}, t))$ es la densidad de corriente de probabilidad. Ahora se buscará dicha ecuación para la ecuación de Klein-Gordon de la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (\text{II.54})$$

cuya conjugada es

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} - \nabla^2 \Psi^* + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* = 0 \quad (\text{II.55})$$

Entonces

$$\frac{1}{c^2} \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi^* \nabla^2 \Psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi = 0$$

—

$$\frac{1}{c^2} \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} - \Psi \nabla^2 \Psi^* + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \Psi^* = 0 \quad (\text{II.56})$$

$$\frac{1}{c^2} \left[\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} \right] + [\Psi \nabla^2 \Psi^* - \Psi^* \nabla^2 \Psi] = 0$$

Nótese que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} \\ &= \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{II.57})$$

y que

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [\Psi(\nabla\Psi^*) - \Psi^*(\nabla\Psi)] &= \Psi\nabla \cdot (\nabla\Psi^*) + (\nabla\Psi^*) \cdot (\nabla\Psi) - \nabla \cdot (\nabla\Psi)\Psi^* - (\nabla\Psi) \cdot (\nabla\Psi^*) \\
&= \Psi\nabla \cdot (\nabla\Psi^*) - \nabla \cdot (\nabla\Psi)\Psi^* \\
&= \Psi\nabla^2\Psi^* - \Psi^*\nabla^2\Psi
\end{aligned} \tag{II.58}$$

De lo anterior se obtiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{II.59}$$

donde $\rho = \frac{i\hbar}{c}(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^0})$ y $\vec{j} = \frac{i\hbar}{c}(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = \frac{\hbar}{ic}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = \frac{-i\hbar}{c}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$ en donde las constantes se agregaron por conveniencia.

Esta ecuación es posible escribirla de forma covariante como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{II.60}$$

donde $j^\mu = \frac{i\hbar}{c}(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$. Sustituyendo en [\(II.60\)](#) las soluciones anteriormente encontradas, [\(II.52\)](#), se observa que para la solución No. 1 se tiene que tomando $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ y $\frac{E}{c} = \sqrt{p^2 + m^2c^2}$,

$$\begin{aligned}
j^0 &= \frac{i\hbar}{c} [A^* e^{(-i\vec{k}\cdot\vec{x})+iEt/\hbar} A \frac{-iE}{\hbar c} e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})-iEt/\hbar} - A e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})-iEt/\hbar} A^* \frac{iE}{\hbar c} e^{(-i\vec{k}\cdot\vec{x})+iEt/\hbar}] \\
&= \frac{i\hbar}{c^2} \left[-A^* A i \frac{E}{\hbar} - A^* A i \frac{E}{\hbar} \right] \\
&= \frac{i\hbar}{c^2} \left[\frac{-2|A|^2 i}{\hbar} E \right] \quad \text{y ya que } p^0 = \frac{E}{c}
\end{aligned} \tag{II.61}$$

$$j^0 = \left[\frac{2|A|^2}{c} p^0 \right]$$

Si siguiendo este procedimiento para las demás componentes, j^μ para Ψ_1 resulta ser

$$j^\mu = \frac{2|A|^2}{c} \left(+ \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \tag{II.62}$$

mientras que para Ψ_2

$$j^\mu = \frac{2|A|^2}{c} \left(-\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (\text{II.63})$$

o bien,

$$j^\mu = \frac{2|A|^2}{c} (p^0, \vec{p}) \quad \text{con } p^0 = \frac{E}{c} \quad (\text{II.64})$$

con lo cual es posible ver que para la ecuación de Klein-Gordon, la energía tiene el mismo signo que la densidad de probabilidad. Es decir, si la energía es negativa, como se vio anteriormente, se obtiene una densidad de probabilidad negativa y no es posible interpretar esta cantidad negativa como probabilidad (Aitchison, 1972).

La razón por la cual se obtuvo este resultado se debe a que se empezó con una relación que no era lineal para la energía, es decir $\hat{E}^2 = c^2 \hat{p}^2 + m^2 c^4$. Debido a que \hat{E} es $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, se debe de buscar entonces una ecuación que sea lineal respecto de $\frac{\partial}{\partial t}$. Este razonamiento fue el que Dirac tomó para formular su ecuación de onda relativista con la cual logró describir parátículas de espín $\frac{1}{2}$. A continuación se desarrollará dicha ecuación (Griffiths, 2010).

E. Ecuación de Dirac

La estrategia que Dirac tomó fue tratar de "factorizar" la ecuación de Klein-Gordon, lo que implica factorizar la relación $p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0$. Si solo se tuviese una coordenada, por ejemplo la temporal p^0 , esto sería muy sencillo ya que

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \rightarrow (p^0)^2 - m^2 c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \quad (\text{II.65})$$

No obstante, el problema es más complicado cuando se tiene todas las componentes de p^μ , el cual es el caso más general y es el que se necesita resolver. Se busca entonces factorizar $p^\mu p_\mu - m^2 c^2$ con lo que se propone

$$(\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\alpha^\lambda p_\lambda - mc) \quad (\text{II.66})$$

donde se supondrá que β^κ y α^λ son constantes. Siguiendo esta línea de pensamiento, al multiplicar

estos dos productos debería de dar como resultado la ecuación (II.34), por lo que

$$\begin{aligned} &= \beta^\kappa p_\kappa \alpha^\lambda p_\lambda - mc(\beta^\kappa p_\kappa) + mc \alpha^\lambda p_\lambda - m^2 c^2 \\ &= \beta^\kappa p_\kappa \alpha^\lambda p_\lambda - mc[\beta^\kappa - \alpha^\kappa] p_\kappa - m^2 c^2 \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

pero se busca términos de p elevados al cuadrado, ya que

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \quad (\text{II.68})$$

entonces $\beta^\kappa = \alpha^\kappa$ con lo que se tiene que

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2 c^2 &= \alpha^\kappa \alpha^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2 c^2 \\ p^\mu p_\mu &= \alpha^\kappa \alpha^\lambda p_\kappa p_\lambda \end{aligned} \quad (\text{II.69})$$

de tal forma que

$$(\alpha^\kappa p_\kappa + mc)(\alpha^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad (\text{II.70})$$

expandiendo los coeficientes de la ecuación (II.69), se tiene

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\alpha^0)^2 (p^0)^2 + (\alpha^0)(\alpha^1) p^0 p^1 + \\ &(\alpha^0)(\alpha^2) p^0 p^2 + (\alpha^0)(\alpha^3) p^0 p^3 + \\ &(\alpha^1)(\alpha^0) p^1 p^0 + (\alpha^1)^2 (p^1)^2 \\ &+ (\alpha^1)(\alpha^2) p^1 p^2 + (\alpha^1)(\alpha^3) p^1 p^3 \\ &+ (\alpha^2)(\alpha^0) p^2 p^0 + (\alpha^2)(\alpha^1) p^2 p^1 \\ &+ (\alpha^2)^2 (p^2)^2 + (\alpha^2)(\alpha^3) p^2 p^3 \\ &+ (\alpha^3)(\alpha^0) p^3 p^0 + (\alpha^3)(\alpha^1) p^3 p^1 \\ &+ (\alpha^3)(\alpha^2) p^3 p^2 + (\alpha^3)^2 (p^3)^2 \\ &= (\alpha^0)^2 (p^0)^2 + (\alpha^1)^2 (p^1)^2 + (\alpha^2)^2 (p^2)^2 + (\alpha^3)^2 (p^3)^2 \\ &+ (\alpha^0 \alpha^1 + \alpha^1 \alpha^0) p_0 p_1 + (\alpha^0 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^0) p_0 p_2 \\ &+ (\alpha^0 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^0) p_0 p_3 + (\alpha^1 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^1) p_1 p_2 \\ &+ (\alpha^1 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^1) p_1 p_3 + (\alpha^2 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^2) p_2 p_3 \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha^0)^2 &= 1 \quad y \quad \alpha^0 \alpha^1 + \alpha^1 \alpha^0 = 0 \\ \alpha^0 \alpha^2 + \alpha^2 \alpha^0 &= 0 \\ \alpha^0 \alpha^3 + \alpha^3 \alpha^0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

$$\begin{aligned}
(\alpha^1)^2 = (\alpha^2)^2 = (\alpha^3)^2 = -1 \quad y \quad \alpha^1\alpha^2 + \alpha^2\alpha^1 = 0 \\
\alpha^1\alpha^3 + \alpha^3\alpha^1 = 0 \\
\alpha^2\alpha^3 + \alpha^3\alpha^2 = 0
\end{aligned} \tag{II.73}$$

pero no existe ningún $\alpha \in \mathbb{C}$ que satisfaga estas condiciones. Es decir, la suposición que se hizo antes de la ecuación (II.67) de que α^λ son constantes no puede hacerse, ya que ninguna constante puede satisfacer estas condiciones simultáneamente. Dirac resolvió este problema de una manera brillante pensando en que los α^μ no tienen por qué ser números. Dirac tomó a los α^μ como matrices, con lo que de la ecuación (II.69) se encuentra que estas matrices no son matrices cualesquiera sino que deben de cumplir cuatro propiedades que a continuación se desarrollarán (Aitchison, 1972).

1. Hermiticidad y antihermiticidad: Primero, nótese que para que la ecuación (II.70) se satisfaga, basta que uno de los dos términos sea cero. Para probar las siguientes propiedades se tomará el término $\alpha^\lambda p_\lambda - mc$. Además nótese que este término es posible escribirlo como

$$\alpha^\lambda p_\lambda - mc = 0 \Rightarrow \alpha^0 p_0 = \alpha^i p_i + mc \Rightarrow \alpha^0 \alpha^0 p_0 = \alpha^0 \alpha^i p_i + \alpha^0 mc \tag{II.74}$$

Debido a la interpretación matricial de α^μ las condiciones que se muestran en la ecuación (II.72) y (II.73) deben de transformarse para matrices, con lo que 1 es ahora I , donde I es la matriz identidad. Entonces usando estas condiciones y definiendo a la matriz $\vartheta^i = \alpha^0 \alpha^i$, la ecuación (II.74) toma la forma de

$$p_0 = \vartheta^i p_i + \alpha^0 mc \tag{II.75}$$

Pero se debe de notar que el operador de energía $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -i\hbar c \vartheta^i \partial_i + \alpha^0 mc \tag{II.76}$$

Debido a que se desean eigenvalores reales del problema de eigenvalores al aplicar el operador \hat{E} , las matrices α^0 y ϑ^i deben ser hermíticas, es decir estas matrices deben ser igual a su transpuesta conjugada. (El operador $-i\hbar \partial_i = -i\hbar \nabla$ ya es hermítico).

2. **Traza igual a cero:** Luego, de las condiciones que muestran las ecuaciones (II.72) y (II.73) se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha^i \alpha^0 + \alpha^0 \alpha^i &= 0 \quad y \quad (\alpha^0)^2 = I \\ \Rightarrow \alpha^i &= -\alpha^0 \alpha^i \alpha^0 \Rightarrow Tr(\alpha^i) = Tr(-\alpha^0 \alpha^i \alpha^0) \\ &= -Tr(\alpha^0 \alpha^i \alpha^0) = -Tr(\alpha^i \alpha^0 \alpha^0) = -Tr(\alpha^i (\alpha^0)^2) = -Tr(\alpha^i)\end{aligned}\tag{II.77}$$

Con lo que se demuestra que la traza debe ser cero.

3. **Autovalores:** Los autovalores de las matrices α^i deben ser igual a $\pm i$ y los autovalores de la matriz α^0 deben de ser igual a ± 1 . Esta propiedad puede ser probada fácilmente si se considera la diagonalización de dichas matrices,

$$\begin{aligned}(\alpha^0)^2 &= I \xrightarrow{\text{diagonalizando}} PD^2P^{-1} = I \\ D^2 &= P^{-1}P = I \\ (\alpha^i)^2 &= -I \xrightarrow{\text{diagonalizando}} PD^2P^{-1} = -I \\ D^2 &= P^{-1}P = -I\end{aligned}\tag{II.78}$$

con lo que se puede ver que los autovalores, los cuales se encuentran en la diagonal de las matrices diagonales D , únicamente pueden tomar valores de ± 1 y $\pm i$.

4. **Las matrices α^λ tienen dimensión par:** Esta propiedad es debido a que si se diagonaliza α^0 , por ejemplo, y se considera su traza, esta por la propiedad probada en la ecuación (II.77) debe ser igual a cero con lo que,

$$\alpha^0 = PDP^{-1} \Rightarrow Tr(PDP^{-1}) = Tr(DPP^{-1}) = Tr(D) = 0\tag{II.79}$$

Ahora bien, D solamente tiene componentes no nulos en su diagonal, los cuales son precisamente los eigenvalores, que por la propiedad mostrada en en la ecuación (II.78) pueden ser únicamente ± 1 por lo que debe de existir un número par de ellos para que la suma sea cero. El mismo argumento se aplica para α^i .

Una vez que Dirac identificó tales propiedades, propuso las siguientes matrices

$$\alpha^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

donde I es la matriz identidad de dimensión 2×2 .

$$\vartheta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vartheta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.81})$$

$$\vartheta^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli. Debido a que se definió a $\vartheta^i = \alpha^0 \alpha^i$ entonces es posible

encontrar a las matrices $\alpha^i = [\alpha^0]^{-1} \vartheta^i$, con lo que se obtiene que

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.82})$$

$$\alpha^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{bmatrix}$$

donde los σ_i son de nuevo las matrices de Pauli. Nótese que ahora las matrices α^i son antihermíticas, es decir que el negativo de cada una de estas matrices es igual a su transpuesta conjugada. Además obsérvese que todas las condiciones desarrolladas en las ecuaciones (II.72) y (II.73) se satisfacen, a continuación se probarán algunas.

$$(\alpha^0)^2 = (\alpha^0)(\alpha^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (\text{II.83})$$

$$(\alpha^0)(\alpha^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.84})$$

$$(\alpha^1)(\alpha^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

$$(\alpha^0)(\alpha^1) + (\alpha^1)(\alpha^0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.86})$$

etcétera.

Finalmente, regresando a la ecuación (II.70) y tomando el término

$$\alpha^\mu p_\mu - mc = 0 \quad (\text{II.87})$$

por convención, se puede sustituir de nuevo las variables por operadores cuánticos aplicados a una función de onda Ψ con lo que la ecuación anterior se vuelve

$$i\hbar\alpha^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0 \quad (\text{II.88})$$

donde Ψ ahora tiene 4 componentes, es decir,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{II.89})$$

el cual toma el nombre de "Dirac-spinor" o "bi-spinor".

La ecuación (II.88) se denomina la ecuación de Dirac y describe partículas con espín $\frac{1}{2}$. Esta ecuación también se suele representar por las matrices γ^i con lo cual toma la siguiente forma

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\hbar c(\gamma^i\nabla + \alpha^0)\Psi \quad (\text{II.90})$$

Con la ecuación de Dirac se corrige el hecho de densidades de probabilidad negativas, lo cual se mostrará en la sección G, sin embargo, vale la pena resolver antes el caso más sencillo de esta ecuación para discutir su importancia.

F. Solución de la ecuación de Dirac para el caso de la partícula en reposo

Ya que la partícula yace en reposo, Ψ es independiente de la posición, es decir

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{II.91})$$

en otras palabras, se está describiendo el caso en que la partícula tiene momentum $\vec{p} = 0$. La ecuación de Dirac a resolver tiene la forma de

$$\frac{i\hbar}{c} \alpha^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} - mc\Psi = 0 \quad (\text{II.92})$$

Susituyendo α^0 se obtiene

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{-imc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (\text{II.93})$$

con $\Psi_A = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ y $\Psi_B = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$. Entonces,

$$I \frac{\partial \Psi_A}{\partial t} = -i \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \Psi_A, \quad -I \frac{\partial \Psi_B}{\partial t} = -i \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \Psi_B, \quad (\text{II.94})$$

La solución entonces es,

$$\begin{aligned} \Psi_A(t) &= A e^{-i(mc^2/\hbar)t} \\ \Psi_B(t) &= B e^{+i(mc^2/\hbar)t} \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

Debido a que la partícula está en reposo, su energía es $E = mc^2$ por lo que justamente lo que se tiene arriba es

$$\Psi_{A,B}(t) = C e^{\mp i(E/\hbar)t} \quad (\text{II.96})$$

Es preciso percatarse entonces que aún se sigue teniendo el problema de energías negativas. Además, al resolver el problema anterior de eigenvalores, se necesita que la base a la cual se está proyectando Ψ sea completa, lo cual impide desechar la solución con energía negativa y llamarla una "solución física no aceptable" (Griffiths, 2010). Las soluciones con energía positiva no son por sí solas un conjunto completo. Dirac se dio cuenta que esta anomalía en la solución se debía a

la existencia de antimateria, partículas con la misma masa, con espín $\frac{1}{2}$ pero con carga opuesta. Las soluciones (ignorando el factor de normalización)

$$\Psi^{(1)} = e^{-it(mc^2/\hbar)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi^{(2)} = e^{-it(mc^2/\hbar)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

$$\Psi^{(3)} = e^{+it(mc^2/\hbar)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi^{(4)} = e^{+it(mc^2/\hbar)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.98})$$

describen a un electrón con espín "up" ($\Psi^{(1)}$), un electrón con espín "down" ($\Psi^{(2)}$), un positrón con espín "down" ($\Psi^{(3)}$) y un positrón con espín "up" ($\Psi^{(4)}$), en reposo.

G. Densidad de probabilidad y densidad de corriente de probabilidad de la ecuación de Dirac

El objetivo de esta sección es demostrar que aun cuando se obtienen energías negativas de la ecuación de Dirac, tal y como se vio en las ecuaciones (II.97) y (II.98), se obtiene de ella siempre densidades de probabilidad positivas al contrario de la ecuación de Klein-Gordon.

El procedimiento para hallar la densidad de probabilidad de la ecuación de Dirac es similar al que se realizó en las ecuaciones (II.56) y (II.57) para la ecuación de Klein-Gordon. Debido a esto no se enfatizará en los detalles del desarrollo.

Considérese entonces la ecuación de Dirac representada de la forma en que se hizo en la ecuación (II.90). Debido a que ahora existen matrices en la ecuación se debe de considerar ahora la conjugada hermítica de dicha ecuación en lugar de solamente la conjugada con lo que se tiene que

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\hbar c (\not{\partial}^i \nabla + \alpha^0) \Psi \quad (\text{II.99})$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar c \left([\vartheta^i]^\dagger \nabla + [\alpha^0]^\dagger \right) \Psi \quad (\text{II.100})$$

Pero se vio anteriormente (ecuación [II.76](#)), que estas matrices son hermíticas. Entonces, multiplicando la ecuación [II.99](#) por Ψ^\dagger , multiplicando la ecuación [II.100](#) por Ψ y restándolas, se obtiene que

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) = -i\hbar c (\Psi^\dagger \vartheta^i \nabla \Psi + \Psi \vartheta^i \nabla \Psi^\dagger) \quad (\text{II.101})$$

Defínase entonces la densidad de probabilidad $\rho = \Psi^\dagger \Psi$ y la densidad de corriente de probabilidad $\vec{j} = \Psi^\dagger \vartheta^i \Psi$ con lo que se vuelve a obtener la ecuación [II.59](#). Y por último, nótese entonces que ρ es un producto interno de Ψ con Ψ^\dagger por lo que esta cantidad nunca puede ser negativa, con lo que se demuestra que para la ecuación de Dirac siempre se obtienen densidades de probabilidad positivas (Aitchison, 1972).

III. CUANTIZACIÓN CANÓNICA

Una persona que empieza a estudiar teoría cuántica de campos (QFT) es natural que se haga dos preguntas, ¿qué es un campo? y ¿por qué existe la necesidad de modelar y cuantizar dichos campos? En este capítulo se responderán estas dos preguntas. Además se desarrollará uno de los métodos de cuantización de campos, el cual será el que se utilizará a lo largo del trabajo, el método de cuantización canónica.

A. Teoría clásica de campos

Antes de ahondar en la cuantización de los campos, primero es necesario introducir algunos conceptos previos, los cuales yacen en el área de teoría clásica de campos.

Un campo es una variable observable, una cantidad medible, la cual depende del espacio y del tiempo, es decir, varía de un lugar a otro y varía a medida que el tiempo pasa. Algunos ejemplos pueden ser la temperatura o la velocidad del viento. La temperatura varía de un lugar a otro y conforme pasa el tiempo. La temperatura es un ejemplo de lo que se conoce como un *campo escalar*. Por otro lado, la velocidad del viento también cambia al pasar el tiempo y también varía de un lugar a otro, únicamente que en dos puntos diferentes del espacio la velocidad del viento puede ir en direcciones diferentes. La velocidad del viento es un ejemplo de lo que se denomina como un *campo vectorial*. Estos ejemplos ayudan a construir una definición un tanto más formal la cual suele enunciarse de la siguiente manera: Un campo es una función de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la cual le asigna a cada punto en el espacio un valor (campo escalar) o un vector (campo vectorial).

Usualmente, se denota a un campo como

$$\phi(x^i, t) \tag{III.1}$$

con i coordenadas espaciales y una coordenada temporal. Ahora bien, recordando de la mecánica analítica cómo es el movimiento de una partícula bajo un potencial, era necesario recurrir al

principio de la mínima acción.

La acción se define como

$$S = \int_a^b L dt \quad (\text{III.2})$$

en donde L es el lagrangiano del sistema. Para una partícula que cuenta con una energía cinética y se mueve bajo un potencial V , el lagrangiano toma la forma de

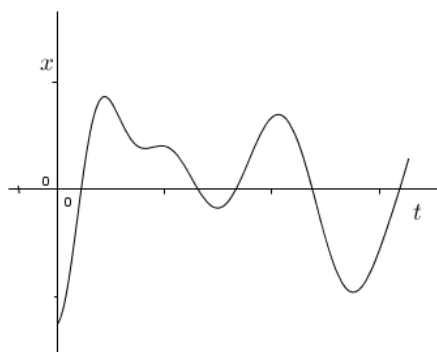
$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (\text{III.3})$$

Entonces para saber la trayectoria que minimizaba la acción, se recurría a la ecuación de Euler-Lagrange dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (\text{III.4})$$

en donde L es función de x y \dot{x} . Al resolver dicha ecuación se encuentra la trayectoria, que como se dijo antes, minimiza la acción dejando fijo a los extremos, es decir, dejando fijos a los puntos a y b . Esto también puede interpretarse como que se está moviendo y reconfigurando varios puntos de x entre a y b para hayar la mínima trayectoria (Figura III.1).

Figura III.1: Trayectoria de una partícula a lo largo del tiempo



Regresando a mecánica clásica de campos, el objetivo de esta es trabajar con objetos continuos. De hecho, muchos libros llaman a la mecánica clásica de campos como mecánica del medio continuo. Entonces, se debe de reformular las ecuaciones anteriormente mencionadas en este capítulo para objetos continuos que permean el espacio-tiempo, es decir campos. Considérese entonces a

$\phi(x^i, t)$. Anteriormente se contaba con $x(t)$, ahora se tiene que la función depende de tres parámetros más (Figura III.3) con lo cual se observa que ya no se está trabajando con una curva, como en la Figura III.1, sino con una superficie.

Figura III.2: Dominio del campo ϕ

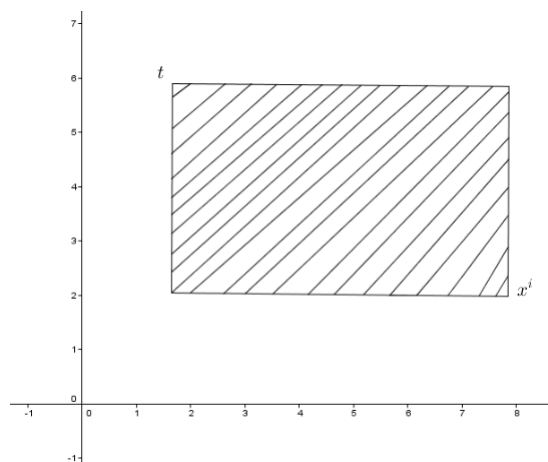
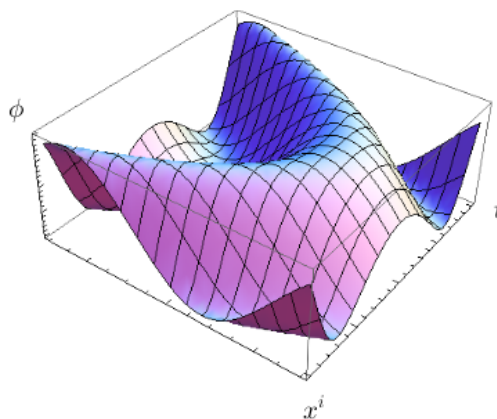


Figura III.3: Campo escalar ϕ



Observando la Figura III.2 y la Figura III.3, nótese que se desea saber el campo restringido a una región (en este caso la región es un rectángulo tal y como se observa en la Figura III.2). Entonces se debe de torcer, mover y deformar la superficie hasta hayar una que minimice la acción. Esta superficie comúnmente se denomina la *historia* de un campo en el espacio-tiempo. Si este último es el espacio-tiempo clásico, este se designa usualmente como un espacio $3 + 1$, tres coordenadas espaciales y una temporal.

Se sabe, por el teorema de *Noether* que si el lagrangiano depende explícitamente del tiempo

entonces no se conserva la energía; por lo que los nuevos lagrangianos para campos que se desarrollarán más adelante no deberán depender explícitamente del tiempo. Además debido a que ahora las coordenadas espaciales son variables independientes al igual que la coordenada temporal t , entonces por analogía a este último caso, los lagrangianos para campos también no deberán de depender explícitamente de ninguna coordenada espacial, ya que si lo hacen, no existiría una simetría ante traslaciones por lo que el momentum lineal no se conservaría.

Se debe de notar algo importante y es que ahora la acción no solo dependerá del tiempo, sino que deberá depender de todas las variables, es decir de t y de x^i ; en otras palabras, la integral de la acción ahora no solo será respecto de dt sino que dado que se cuenta con una superficie, la acción será respecto de dx , dy , dz y dt . Entonces,

$$S = \int \mathcal{L} dz dy dx dt \quad (\text{III.5})$$

donde \mathcal{L} es la densidad lagrangiana del sistema y se define como

$$L = \int \mathcal{L} dx dy dz \quad (\text{III.6})$$

Entonces, ¿de qué debe depender \mathcal{L} ? Por analogía al caso de una partícula, \mathcal{L} debe de depender del campo ϕ y debe de depender del cambio del campo respecto a la cuatro coordenadas, es decir

$$S = \int \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) d^4x = \int \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) d^4x \quad (\text{III.7})$$

Por lo que siguiendo la misma estrategia, la ecuación de Euler-Lagrange toma la forma de

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Es importante mencionar por último que se debe de agregar una restricción más y es que \mathcal{L} debe ser un escalar de Lorentz. Un ejemplo de una densidad lagrangiana de este tipo puede ser el oscilador

armónico considerado en una dimensión mayor, de la forma

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + M^2 \phi^2 \right] \right) \quad (\text{III.9})$$

Otro ejemplo que vale la pena considerar es la densidad lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{III.10})$$

donde ρ tiene unidades de densidad de masa y c de velocidad, las cuales se introdujeron para que la densidad lagrangiana conservara sus unidades. Si se introduce esta densidad lagrangiana en la ecuación (III.8) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III.11})$$

la cual es la ecuación de onda para un medio continuo.

Siguiendo con el desarrollo de los términos importantes de mecánica del medio continuo, es necesario encontrar la forma que tiene ahora el hamiltoniano. Al momento de construir la ecuación de Euler-Lagrange para campos (III.8), se vio que existe una analogía entre mecánica analítica y mecánica clásica de campos. A continuación se enunciará las propiedades desarrolladas en mecánica analítica pero generalizadas para campos. Esto se conoce en la literatura como *teoría hamiltoniana para campos*.

Para el caso de una partícula, se sabe que el momentum de esta, está dado por $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ entonces, se define el momentum conjugado como

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \quad (\text{III.12})$$

Nótese que se está utilizando a t como una variable aislada lo cual se podría pensar que va en contra de la invarianza de Lorentz. No obstante, a pesar que la invarianza de Lorentz no se "manifieste" o sea explícita, al momento de trabajar con ϕ y Π es posible generar cantidades invariantes de Lorentz. Un argumento más detallado puede encontrarse en la referencia (Weinberg, 1996).

Entonces por analogía una vez más, es posible construir una *densidad hamiltoniana* como

$$\mathcal{H}(\phi, \Pi) = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (\text{III.13})$$

Por último, para finalizar este acercamiento a mecánica clásica de campos, se enunciará las ecuaciones de movimiento de hamilton análogas a campos. Estas son:

$$\dot{\Pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \quad (\text{III.14})$$

B. La necesidad de recurrir a los campos cuánticos

En cierta parte, la teoría cuántica de campos es mecánica cuántica aplicada a campos de sistemas dinámicos en el mismo sentido que la mecánica cuántica está enfocada en la cuantización de sistemas dinámicos de partículas. Se trabaja entonces con partículas a escalas de mecánica cuántica, es decir, relativamente pequeñas a energías muy grandes (relativistas). No obstante, es válido hacerse la pregunta, ¿por qué se debe cuantizar los campos? ¿Por qué no solamente se cuantiza las partículas relativistas como se hizo anteriormente?

Esta pregunta puede responderse de la siguiente manera. En cualquier proceso relativista no es posible asegurar que dicho proceso puede ser explicado en términos de una sola partícula. Varios fenómenos de la mecánica relativista necesitan de dos o más partículas para poder ser explicados a nivel microscópico. Al cuantizar los campos, las relaciones vistas anteriormente de energía positivas y negativas de la ecuación de Klein-Gordon o de la ecuación de Dirac cobran sentido y se puede ver que las partículas pueden *aniquilarse* o se pueden *crear* tratando a su masa tal y como si fuese únicamente energía. La teoría cuántica de campos ayuda entonces a proveer en una manera natural la existencia de antipartículas para que esta *creación* o *aniquilación* de partículas pueda llevarse a cabo (Peskin, 1995).

C. Cuantización canónica

Es preciso mencionar que la cuantización canónica no es la única manera de cuantizar un campo. Existen varios métodos, entre ellos están la cuantización de Gupta-Bleuler, la cuantización por

medio de integrales de camino, la cuantización de Becchi-Rouet-Stora-Tyupin o la cuantización de Batalin-Vilkovisky (Kaku, 1993). Todas ellas, incluyendo la cuantización canónica, poseen ventajas y desventajas. Sin embargo, se trabajará con la cuantización canónica debido a que presenta la forma más adecuada de cómo iniciar los estudios en teoría cuántica de campos.

En mecánica cuántica se utiliza de hecho la cuantización canónica para cuantizar una teoría clásica. Simplemente se toma variables dinámicas, digamos p y q y se sustituyen por operadores \hat{p} y \hat{q} . Luego estos operadores cumplen ciertas reglas de conmutación análogas a los braquets de Poisson (Tong, 2006), los cuales son

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b] = [\hat{p}^a, \hat{p}^b] = 0, \quad [\hat{q}_a, \hat{p}^b] = i\hbar \delta_a^b \quad (\text{III.15})$$

donde δ_a^b es la delta de Kronecker definida como

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Entonces, para el caso de cuantizar un campo clásico se procede a hacer lo mismo. La idea es combinar la teoría desarrollada anteriormente de mecánica clásica de campos, la cual se vio está muy ligada a la mecánica analítica, con la teoría cuántica. Para esto se necesita trabajar en la formulación de Heisenberg de la mecánica cuántica, ya que como se sabe, existe una relación muy cercana entre dicha formulación y la mecánica analítica.

En esta formulación los operadores dependen del tiempo y además si \hat{A} es un operador independiente del tiempo en la formulación de Schrödinger, entonces

$$\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = \dot{\hat{A}} = -i\hbar[\hat{A}, \hat{H}] \quad (\text{III.17})$$

donde \hat{H} es el operador hamiltoniano. Entonces, para el caso de campos, se efectúa una cuantización canónica de la misma manera que se realiza en mecánica cuántica, la cual propone como coordenadas generalizadas al campo $\phi(x^i, t)$ y a su momentum conjugado $\Pi(x^i, t)$ y las asocia con operadores respectivos $\hat{\phi}(x^i, t)$ y $\hat{\Pi}(x^i, t)$. Análogamente al caso discreto estos operadores deben cumplir las siguientes relaciones de conmutación para un mismo tiempo t :

$$[\hat{\phi}(x^i, t), \hat{\phi}(y^i, t)] = [\hat{\Pi}(x^i, t), \hat{\Pi}(y^i, t)] = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$[\hat{\phi}(x^i, t), \hat{\Pi}(y^i, t)] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{III.19})$$

donde δ es la distribución Delta de Dirac definida como

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{III.20})$$

o bien,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{III.21})$$

es importante mencionar una de las propiedades más importante de la Delta de Dirac,

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \quad (\text{III.22})$$

En las relaciones de conmutación se pide que sea para un mismo tiempo ya que regresando a mecánica cuántica, dos operadores que conmutan es posible interpretarse como si fuese posible conocer ambas cantidades, relacionadas a ambos operadores de $|\Psi\rangle$, simultáneamente. Es por esto que se coloca la restricción de conmutar en un mismo tiempo. Si por el contrario, un tiempo (lo suficientemente grande) separa a x y a y entonces es posible siempre conocer ambas cantidades.

Por último, se debe de hacer énfasis en que las funciones de onda $|\psi\rangle$ en teoría cuántica de campos ya no son funciones como se trabajaba en mecánica cuántica, sino son funcionales, es decir, funciones de todas las posibles configuraciones del campo ϕ .

IV. CAMPO ESCALAR LIBRE

Para llevar a cabo la cuantización del primer campo se empezará por el caso más sencillo en el cual se considera un sistema mecánico descrito por un número finito de grados de libertad. Posteriormente se hará tender este número al infinito con lo cual se estará describiendo a un campo continuo. No obstante, los pasos que se seguirán al momento de cuantizar los campos, serán los mismos. Estos son:

1. Describir el sistema identificando sus grados de libertad.
2. Aplicar teoría cuántica a dichos sistemas.

Considerando que es necesario aplicar teoría cuántica se desarrollará un resumen del oscilador armónico cuántico en la siguiente sección debido a que será de utilidad posteriormente.

A. Oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico cuántico es uno de los problemas clásicos que se desarrolla en mecánica cuántica. Este se basa en resolver la ecuación de Schrödinger $\hat{H}\Psi = E_n\Psi$ con un potencial de la forma $V = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$. Como es bien sabido, existe dos formas de resolver este problema. El primer método es a base de proponer a Ψ como una serie de potencias y de esta forma resolver la ecuación diferencial. El segundo método es un método algebraico y cabe mencionar que es un método más simple para atacar este problema. Este método algebraico conlleva a definir operadores para resolver la ecuación de Schrödinger con lo que se logra visualizar desde una perspectiva más general el problema y sus soluciones. Es por esta razón que se resolverá de forma algebraica el caso del oscilador armónico cuántico.

Se desea resolver

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2\Psi = E\Psi \quad (\text{IV.1})$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{1}{2m}[\hat{p}^2 + (m\omega q)^2] = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} \right)^2 + (m\omega q)^2 \right] \Psi = E\Psi \quad (\text{IV.2})$$

Si se trata de "factorizar" dicha ecuación se obtiene

$$a_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} + im\omega q \right), \quad a_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} - im\omega q \right) \quad (\text{IV.3})$$

Pero nótese que con estos operadores no es posible factorizar correctamente la ecuación.

$$\begin{aligned} (a_- a_+) f(q) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} + im\omega q \right) \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} - im\omega q \right) f(q) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} + im\omega q \right) \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{df(q)}{dq} - im\omega q f(q) \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \hbar m \omega \frac{d}{dq} (qf) - \hbar m \omega q \frac{df}{dq} + (m\omega q)^2 f \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} \right)^2 + (m\omega q)^2 + \hbar m \omega \right] f(q) \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Esto se debe a que los operadores no necesariamente son conmutativos. La ecuación del oscilador se convierte entonces en

$$\left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \hbar \omega \right) \Psi = E\Psi \quad (\text{IV.5})$$

o bien, dado que

$$[a_-, a_+] = a_- a_+ - a_+ a_- = \hbar \omega \quad (\text{IV.6})$$

$$\left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \hbar \omega \right) \Psi = E\Psi \quad (\text{IV.7})$$

Ahora es preciso notar que si Ψ satisface la ecuación entonces $a_+ \Psi$ también,

$$\begin{aligned}
 \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \hbar \omega \right) a_+ \Psi &= \left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} \hbar \omega a_+ \right) \Psi \\
 &= a_+ \left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \hbar \omega + \hbar \omega \right) \Psi \\
 &= a_+ \left(\left(a_- a_+ - \frac{1}{2} \hbar \omega \right) \Psi + \hbar \omega \Psi \right) \\
 &= a_+ (E \Psi + \hbar \omega \Psi) \\
 &= (E + \hbar \omega) (a_+ \Psi)
 \end{aligned} \tag{IV.8}$$

en donde al eigenvalor E se le debe de sumar una constante, $\hbar \omega$. De igual forma $a_- \Psi$ satisface dicha ecuación pero al eigenvalor E se le debe de restar la constante $\hbar \omega$. Una forma de interpretar estos operadores es que dan como resultado soluciones con energías más grandes o más pequeñas. Pero, siguiendo esta lógica, si se sigue aplicando este proceso con el operador a_- multiples veces, se llegará a encontrar que la energía es menor que cero lo cual resultara como si $a_- \Psi$ no es normalizable (Griffiths, 1995). Esto sugiere que debe de existir un Ψ_0 tal que

$$a_- \Psi_0 = 0 \tag{IV.9}$$

Es decir, un estado con la mínima energía, un estado cero, lo que significa que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{d\Psi_0}{dq} - im\omega q \Psi_0 \right) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{d\Psi_0}{dq} &= -\frac{m\omega}{\hbar} q \Psi_0 \\
 \Rightarrow \Psi_0 &= A_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2}
 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

Además, Ψ_0 tiene una energía igual a

$$\left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \hbar \omega \right) \Psi_0 = E_0 \Psi_0 \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \tag{IV.11}$$

Por lo que el eigenestado de cualquier estado excitado de este sistema estará dado por

$$\Psi_n(q) = A_n (a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2}, \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \tag{IV.12}$$

Por otro lado, estos operadores (ecuación (IV.3)) pueden reescribirse mediante manipulaciones algebraicas como

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{m\omega} \hat{q} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right) \quad (\text{IV.13})$$

donde se tomó a $\hbar = 1$. El hamiltoniano del sistema puede escribirse como

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \omega = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (\text{IV.14})$$

Entonces, si se escribe el n-ésimo estado excitado como $|n\rangle$, se tiene que

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (\text{IV.15})$$

En esta notación, el resultado de la ecuación (IV.8) se ve como

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= (E_n + \omega)(\hat{a}^\dagger |n\rangle) \\ \hat{H}(\hat{a} |n\rangle) &= (E_n - \omega)(\hat{a} |n\rangle) \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

y la condición (IV.9) toma la forma de

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Como se dijo anteriormente, esta condición representa el estado más bajo posible del sistema. El primer estado excitado sería entonces

$$|1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle \quad (\text{IV.18})$$

con una energía igual a $(1 + \frac{1}{2}) \omega$. Los estado deben estar normalizados, es decir,

$$\langle n|n\rangle = 1 \quad (\text{IV.19})$$

El factor de normalización viene dado por $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ con lo que

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{IV.20})$$

Definiendo a $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ como el operador numérico, de tal forma que

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad (\text{IV.21})$$

entonces,

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \Rightarrow \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) \omega |n\rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega |n\rangle \quad (\text{IV.22})$$

Si se considera un sistema con N osciladores armónicos independientes, entonces la energía total del sistema será

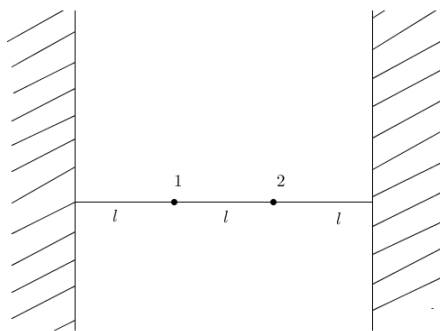
$$E = \sum_{r=1}^N \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \omega_r \quad (\text{IV.23})$$

B. Modos, fonones y cuantización de sistemas mecánicos

Habiendo revisado los conceptos fundamentales que se utilizarán de mecánica cuántica se empezará por cuantizar un sistema compuesto por dos partículas, luego se generalizará para N partículas y por último se tratará el caso en que se considera infinitas partículas (caso continuo).

1. Caso discreto: Suponga que se cuenta con un sólido relativamente pequeño el cual está únicamente compuesto por dos partículas, las cuales equidistan de ellas mismas y del borde del sólido tal y como la Figura IV.1 lo indica.

Figura IV.1: Sistema de dos partículas



Estas dos partículas, por simplicidad, pueden moverse solamente de forma vertical. Además, ambas poseen masa m y están conectadas por una cuerda tensa de masa despreciable, la cual está atada en los bordes.

Suponga ahora que cada partícula se desplaza una distancia q_1 y q_2 , respectivamente y se desea calcular la energía total que tiene ahora el sistema. Tómese las distancias q_1 y q_2 lo suficientemente pequeñas de modo que la tensión permanece constante.

La energía total del sistema no es más que la suma de la energía cinética de las partículas más su energía potencial.

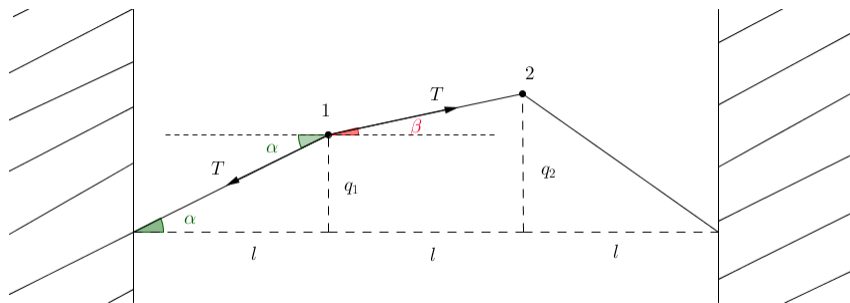
$$E = K + U \quad (\text{IV.24})$$

Por un lado,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \quad (\text{IV.25})$$

Para calcular U es necesario realizar un diagrama de cuerpo libre del cual se obtiene

Figura IV.2: Partículas después de desplazarse una distancia q_1 y q_2 , respectivamente



$$F_1 = T \sin(\alpha) - T \sin(\beta) \quad (\text{IV.26})$$

donde se está tomando a la tensión T como constante. Dado a que se está trabajando con pequeñas variaciones se tiene que

$$\sin(\alpha) \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + l^2}} \approx \frac{q_1}{l} \quad \sin(\beta) = \frac{q_2 - q_1}{\sqrt{l^2 + (q_2 - q_1)^2}} \approx \frac{q_2 - q_1}{l} \quad (\text{IV.27})$$

Es importante notar que en la aproximación anterior los términos $(\frac{q_1}{l})^3$, $(\frac{q_2}{l})^3$ o de mayor orden

fueron despreciados. La ecuación (IV.26) toma la forma de

$$F_1 = k(2q_1 - q_2) \quad (\text{IV.28})$$

donde $k = \frac{T}{l}$. Similarmente se tiene,

$$F_2 = k(2q_2 - q_1) \quad (\text{IV.29})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= k(2q_1 - q_2) \\ m\ddot{q}_2 &= k(2q_2 - q_1) \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

dado que

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial q_1} \\ m\ddot{q}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_1} &= -k(2q_1 - q_2) \\ \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_2} &= -k(2q_2 - q_1) \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Donde a ambas ecuaciones se multiplicaron por el factor (-1) para poder interambiar los índices de integración al resolver para la energía potencial. Resolviendo el sistema de ecuaciones y tomando a $w(q_2)$ como una constante que depende de q_2 se obtiene,

$$\begin{aligned} V &= kq_1^2 - kq_2q_1 + w(q_2) \\ \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_2} &= -kq_1 + \frac{d}{dq_2}w(q_2) = 2kq_2 - kq_1 \\ \Rightarrow w(q_2) &= kq_2^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Por lo que

$$\begin{aligned} V &= kq_1^2 + kq_2^2 - kq_2q_1 \\ V &= k(q_1 + q_2 - q_1q_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Es importante darse cuenta que las ecuaciones anteriores, ecuaciones (IV.30), forman un par de ecuaciones diferenciales lineales acopladas, en donde "lineales" significa que ninguno de los términos q_1, q_2 aparece elevado a alguna potencia, ya sea sumándose o multiplicándose o en las derivadas.

Por ejemplo, términos como q_1^2 , q_1q_2 o bien, \dot{q}_2^2 conllevarían a un movimiento "no lineal". Claro, siempre es posible agregar estos términos desde la aproximación en las ecuaciones (IV.27). Pero esta linealidad es la que permite que se aplique el principio de superposición. Por ejemplo en el caso de Maxwell, aplicando este principio de superposición es como se puede explicar fenómenos como la interferencia o la difracción. Una ecuación no lineal generalmente da como resultado movimiento caótico.

Otra manera de ver esto es que el potencial V únicamente puede depender de términos de q con exponente igual o menor a dos, es decir q_1 , q_2 o bien, q_1q_2 , tal y como se ve en la ecuación (IV.34).

Por otro lado, se debe enfatizar que el término $-kq_1q_2$ de dicha ecuación se debe al acoplamiento de las ecuaciones diferenciales. Físicamente, este término quiere decir que q_1 y q_2 están conectadas por la cuerda. Si este término no estuviese, ambas ecuaciones en (IV.30) describirían dos osciladores armónicos independientes, cada uno con frecuencia $\omega = (2k/m)^{1/2}$. Claramente, se necesita que el sistema esté acoplado ya que de otro modo no sería posible describir desplazamientos de tipo ondulatorio (Aitchison & Hey, 2003).

A continuación se desarrollará una forma de escribir las ecuaciones anteriores de modo que permita escribirlas de forma desacoplada.

$$\begin{aligned} m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) &= -k2q_1 + kq_2 - 2kq_2 + kq_1 \\ &= -k(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

$$\begin{aligned} m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) &= -k2q_1 + kq_2 + k2q_2 - kq_1 \\ &= -3k(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Sea $\ddot{Q}_1 = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2$ y $\ddot{Q}_2 = \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2$

$$\begin{aligned} m\ddot{Q}_1 &= -k\tilde{Q}_1 \Rightarrow m\ddot{Q}_1 + \frac{k}{m}\tilde{Q}_1 = 0 \\ m\ddot{Q}_2 &= -3k\tilde{Q}_2 \Rightarrow m\ddot{Q}_2 + \frac{3k}{m}\tilde{Q}_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

Por lo que

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) \quad \text{con } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \tilde{Q}_2 &= C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t) \quad \text{con } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}\end{aligned}\tag{IV.38}$$

Por convención, sea $Q_1 = \tilde{Q}_1/\sqrt{2}$ y $Q_2 = \tilde{Q}_2/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Q_1 &= A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \quad \text{con } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \Rightarrow Q_2 &= C \cos(\omega_2 t) + D \sin(\omega_2 t) \quad \text{con } \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}\end{aligned}\tag{IV.39}$$

Ahora suponga que las condiciones de frontera son

$$q_1(0) = q_2(0) = a, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0\tag{IV.40}$$

Es decir, las partículas se dejan caer desde una altura a , entonces las soluciones toman la forma de

$$\begin{aligned}\Rightarrow Q_1(t) &= \sqrt{2} a \cos(\omega_1 t) \\ Q_2(t) &= 0\end{aligned}\tag{IV.41}$$

Nótese que el sistema oscila con una misma frecuencia ω_1 . Si un sistema oscila con la misma frecuencia se denomina un "modo normal" o simplemente un "modo".

Al reescribir q_1 y q_2 en términos de Q_1 y Q_2 se dice entonces que q_1 y q_2 están parametrizadas por las "coordenadas normales". Obsérvese que q_1 y q_2 son una superposición de modos.

La energía cinética K puede reescribirse en términos de Q_1 y Q_2

$$K = \frac{1}{2}m\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{Q}_2^2\tag{IV.42}$$

y la energía potencial, tomando en cuenta que $k = m\omega_1^2 = \frac{m}{3}\omega_2^2$, puede reescribirse como

$$U(Q_1, Q_2) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 Q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2 Q_2^2\tag{IV.43}$$

Por lo que

$$E = \left(\frac{1}{2} m \dot{Q}_1 + \frac{1}{2} m \dot{Q}_2 \right) + \frac{1}{2} m (\omega_1 Q_1^2 + \omega_2 Q_2^2) \quad (\text{IV.44})$$

Nótese que la energía total no posee términos de acoplamiento de la forma $Q_1 Q_2$, con lo cual, por la discusión anterior, posee la forma de 2 "objetos" independientes, los cuales no interactúan entre sí. Estos "objetos" en realidad son los dos modos, con lo que se puede ver que los modos no interactúan entre sí, al contrario de las dos partículas iniciales. Esto se puede ver explícitamente en las dos ecuaciones diferenciales desacopladas

$$m \ddot{Q}_1 = \frac{\partial U(Q_1, Q_2)}{\partial Q_1}, \quad m \ddot{Q}_2 = \frac{\partial U(Q_1, Q_2)}{\partial Q_2} \quad (\text{IV.45})$$

Es importante darse cuenta que lo que permite hacer este desacoplamiento y la respectiva sustitución fue el hecho que $V(q_1, q_2)$, y por consiguiente $U(q_1, q_2)$ no tenía términos estrictamente mayor a términos cuadráticos. Si hubiese tenido términos de orden cúbicos, por ejemplo, hubiesen producido efectos *anarmónicos* y los modos hubiesen interactuado. Esto será muy útil en el capítulo VI.

El sistema que se trabajó tenía solamente dos grados de libertad, q_1 y q_2 y en el camino se vio que era realmente conveniente describir estos grados en términos de Q_1 Q_2 . Realmente las coordenadas normales son las relevantes al contar los grados de libertad. La razón por la que se empezó el capítulo de esta manera fue debido a que la generalización para N partículas, y luego para el caso continuo, es inmediata.

Para N partículas la energía total sería

$$E = \sum_{r=1}^N \frac{1}{2} m \dot{q}_r^2 + V(q_1 \dots q_r) \quad (\text{IV.46})$$

Anteriormente se supuso pequeñas oscilaciones, de manera que únicamente los términos de orden cuadrático o menor de V sobrevivieran. De este modo se descubrió que las ecuaciones de movimiento eran lineales. Entonces con una transformación generalizada de la forma

$$Q_r = \sum_{s=1}^N a_{rs} q_s \quad (\text{IV.47})$$

la energía se puede escribir como

$$E = \sum_{r=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{Q}_r^2 + \frac{1}{2} m \omega_r^2 Q_r^2 \right) \quad (\text{IV.48})$$

donde Q_r son las coordenadas normales y ω_r son las frecuencias normales y hay N . Como se vio anteriormente, la energía está escrita como si consistiese en N osciladores armónicos separados. Como siguiente punto se trabajará al sistema con mecánica cuántica.

Cuánticamente, cada oscilador armónico o mejor dicho cada oscilador de modo normal existe únicamente en ciertos estados definidos cuyo valor de energía está representado por un eigenvalor y estos son discretos, es decir, cuantizados. En la sección anterior se vio que

$$\epsilon_r = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad (\text{IV.49})$$

donde $n_r \in \mathbb{N}$. Entonces la energía total es

$$E = \sum_{r=1}^N \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad (\text{IV.50})$$

En mecánica cuántica los estados de energía de n cuerpos oscilantes son caracterizados por N valores enteros (n_1, n_2, \dots, n_N) los cuales determinan la energía del osciladores de "modos". Es decir, para cada oscilador, $\hbar \omega_r$ mide la energía de vibración a nivel cuántico; la energía permitida de tal oscilador está únicamente determinada por el número n_r .

Siguiendo con este argumento puede verse que en lugar de pensar en grados de libertad (q_1, \dots, q_N) se puede pensar que en un sistema con energía $(n_r + \frac{1}{2}) \hbar \omega_r$ hay n_r cuantos presente. Entonces, existen n_1 cuantos en el modo 1, n_2 en el modo 2, ... y n_N cuantos en el modo N. Pero se debe percatar que a pesar que N es un número fijo, n_r no tiene restricciones más que el valor de la energía total.

Por último, los cuantos, resultantes de este proceso, poseen un nombre que depende del campo con el que se está trabajando y representan una excitación cuántica del campo. Para el caso en el que estamos trabajando (el sólido) estos cuantos se llaman fonones, los cuales son excitaciones vibracionales cuánticas elementales (Aitchison & Hey, 2003).

2. Caso continuo de longitud finita: El mismo procedimiento puede ser aplicado para el caso continuo en donde se hace tender el número de partículas, N al infinito y el espacio entre

las partículas tiende a cero de tal manera que la cantidad $Na = L$ se mantenga finita, donde L es el largo de la cuerda y a es el espacio de las partículas. En este caso las vibraciones transversales (se considera el caso unidimensional por simplicidad) serán descritas por el campo $\phi(x, t)$. Nótese que el subíndice r de $q_r(t)$ pasó a hacer un objeto continuo, x .

Como se sabe, al hacer de nuevo la aproximación de pequeños desplazamientos, $\phi(x, t)$ debe de obedecer la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.51})$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda en el medio. Colocando condiciones de frontera similares al caso discreto se obtiene que la solución está dada por funciones de la forma

$$\phi_r(x, t) = A_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \quad (\text{IV.52})$$

por lo que la solución general es

$$\phi(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \sin(\omega_r x) \quad (\text{IV.53})$$

donde $\omega_r = \frac{r\pi c}{L}$ es la frecuencia.

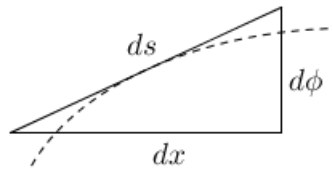
La energía total para el caso continuo viene dada por una integral, la cual sustituye a la sumatoria de la ecuación (IV.53). Por un lado, la energía cinética por unidad de largo está dada por

$$dK = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (\text{IV.54})$$

donde ρ es la densidad de masa por unidad de largo y se supone constante. Por otro lado, la energía potencial por unidad de largo se deduce de la siguiente manera. Primero, se considera que la energía potencial de la cuerda es únicamente su energía elástica y que las vibraciones son tan pequeñas que la tensión T es constante.

Ahora bien, una sección de la cuerda estando en reposo tiene un largo dx y cuando se desplaza del equilibrio tiene un largo $ds = \sqrt{dx^2 + d\phi^2}$.

Figura IV.3: Cambio de longitud



El cambio de longitud es

$$\begin{aligned}
 ds - dx &= \sqrt{dx^2 + d\phi^2} - dx \\
 &= dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2} - 1 \right) \\
 &\approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - 1 \right) \\
 &= dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2
 \end{aligned} \tag{IV.55}$$

Hágase notar que la energía potencial se le está atribuyendo al cambio de la longitud de la cuerda. Dado que son pequeñas vibraciones se está despreciando la energía potencial gravitacional.

Luego, la fuerza de restitución es igual al cambio de la energía potencial, esto es

$$F = \frac{dU}{(ds - dx)} \tag{IV.56}$$

pero la fuerza de restitución es la misma tensión.

$$\begin{aligned}
 T(ds - dx) &= dU \\
 \Rightarrow dU &= \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{IV.57}$$

pero $c = v = (T/\rho)^{1/2}$ con lo que

$$dU = \frac{1}{2} c^2 \rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 dx \tag{IV.58}$$

y la energía total es

$$E = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (\text{IV.59})$$

Una vez más se desea escribir la energía en términos de modos normales por lo que basta con sustituir ϕ en la ecuación (IV.59) por la expansión de modos de ϕ , ecuación (IV.53).

Primero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r(t) \sin \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \left(\frac{r\pi}{L} \right) \sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \cos \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.60})$$

Segundo, se deben recordar las identidades

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned} \quad (\text{IV.61})$$

Tercero, es necesario tomar en cuenta las siguientes dos identidades

$$\begin{aligned} &\int_{-L/2}^{L/2} \sin \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \sin \left(\frac{p\pi x}{L} \right) dx \quad \text{para } r \neq p \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{r\pi x}{L} - \frac{p\pi x}{L} \right) - \cos \left(\frac{r\pi x}{L} + \frac{p\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{(r-p)\pi x}{L} \right) dx - \int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{(r+p)\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{(r-p)\pi x}{L} \right)}{\frac{(r-p)\pi}{L}} \right]_{-L/2}^{L/2} - \left[\frac{\sin \left(\frac{(r+p)\pi x}{L} \right)}{\frac{(r+p)\pi}{L}} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.62})$$

$$\begin{aligned} &\int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{r\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{p\pi x}{L} \right) dx \quad \text{para } r \neq p \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{r\pi x}{L} + \frac{p\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{r\pi x}{L} - \frac{p\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{(r+p)\pi x}{L} \right) dx - \int_{-L/2}^{L/2} \cos \left(\frac{(r-p)\pi x}{L} \right) dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \left(\frac{(r+p)\pi x}{L} \right)}{\frac{(r+p)\pi}{L}} \right]_{-L/2}^{L/2} - \left[\frac{\cos \left(\frac{(r-p)\pi x}{L} \right)}{\frac{(r-p)\pi}{L}} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

Entonces, regresando a sustituir ϕ en la ecuación (IV.59), se obtiene que

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}\rho \int_{-L/2}^{L/2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\rho \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \dot{A}_r(t) \dot{A}_p(t) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r^2(t) \sin^2\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho \sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r^2(t) \int_{-L/2}^{L/2} \sin^2\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\rho \sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r^2(t) \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left(1 - \cos\left(\frac{2r\pi x}{L}\right)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho \sum_{r=1}^{\infty} \dot{A}_r^2(t) \left(\frac{L}{2}\right)
\end{aligned} \tag{IV.64}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left[\sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right) \left(\sum_{r=1}^{\infty} A_r(t) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_r(t) A_p(t) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{r=1}^{\infty} A_r^2(t) \cos^2\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r^2(t) \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(\frac{r\pi x}{L}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r^2(t) \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \left(1 + \cos\left(\frac{2r\pi x}{L}\right)\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \sum_{r=1}^{\infty} A_r^2(t) \left(\frac{L}{2}\right)
\end{aligned} \tag{IV.65}$$

Entonces la energía toma la forma de

$$\left(\frac{L}{2}\right) \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\rho \dot{A}_r^2 + \frac{1}{2}\rho \omega_r^2 A_r^2 \right] \tag{IV.66}$$

donde $\omega_r = \frac{r^2\pi^2 c^2}{L^2}$. Comparando esta última ecuación con la ecuación (IV.48) se puede ver que la

amplitud de la serie de Fourier actúa como coordenada normal con lo que de nuevo se obtiene que el sistema se comporta como un sistema de osciladores desacoplados con la única diferencia que en este caso existen infinitos de ellos. Una vez más, aplicando mecánica cuántica al sistema se obtiene que la energía total es

$$E = \sum_{r=1}^{\infty} \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_r \quad (\text{IV.67})$$

la cual es muy similar a la ecuación (IV.50) con la única diferencia que ahora la sumatoria se extiende al infinito. Ahora lo que se desea hacer es extender $L \rightarrow \infty$, es decir, extender el largo de la cuerda a todo el espacio para acercarse a la idea de un campo. En la sección siguiente se verá que a medida que esto se realiza, la sumatoria se vuelve una integral. Por último, es interesante mencionar que la idea de cuantizar modos independientes puede ser aplicada a una enorme gama de "osciladores". Es posible por ejemplo obtener plasmas al excitar osciladores de plasma o bien "magnones" al excitar osciladores magnéticos, entre otros.

C. Cuantización de sistema continuo de longitud infinita

Ha llegado el momento de cuantizar un campo que no esté confinado en una sola región del espacio. No obstante, la idea está en la misma línea de lo hecho anteriormente, es decir, considerar un campo sujeto a restricciones adecuadas y tratar de reescribir la energía de dicho campo en término de "modos de energía" y por último, cuantizar dichos modos. Por lo que los cuantos resultantes a la excitación del campo se les interpretará como partículas. Más tarde, en capítulos posteriores, se verá que los fotones son cuantos del campo electromagnético excitado y los electrones son también cuantos de un "campo de electrones". No obstante, existe una gran diferencia entre estas dos partículas y es que los fotones pertenecen a la rama de partículas llamadas bosones las cuales poseen espín 1, mientras que los electrones pertenecen a la rama de partículas llamadas fermiones las cuales poseen espín $\frac{1}{2}$ por lo que es realmente difícil crear un sistema mecánico análogo cuyos estados excitados sean cuantos de espín $\frac{1}{2}$. Este caso se tratará en el capítulo 6 junto con la cuantización del campo electromagnético, pero por ahora se desarrollará la idea del campo escalar.

En el capítulo anterior se vio que la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{IV.68})$$

era la ecuación de onda tras aplicarle la ecuación de Euler-Lagrange. Pasando esta ecuación a unidades naturales donde $\rho = c = \hbar = 1$ y aplicándole la cuantización canónica se obtiene que

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{IV.69})$$

con lo cual se llega a la siguiente ecuación de campo

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{IV.70})$$

Para esta densidad lagrangiana se obtiene además que

$$\hat{\Pi}(x, t) = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\hat{\phi}}} = \dot{\hat{\phi}} \quad (\text{IV.71})$$

con lo que la densidad hamiltoniana es

$$\hat{\mathcal{H}} = \Pi\dot{\phi} - \hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 \quad (\text{IV.72})$$

Entonces el hamiltoniano es,

$$\hat{H} = \int \hat{\mathcal{H}} dx = \frac{1}{2} \int \left[\hat{\Pi}^2 + \left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right)^2 \right] dx \quad (\text{IV.73})$$

Con esta última ecuación es difícil ver cómo encontrar los eigenestados y eigenvalores de \hat{H} . Es aquí en donde el desarrollo de modos normales entra en juego. Para esto es necesario escribir el hamiltoniano como una suma de osciladores independientes. En la sección anterior se vio además que la expansión en modos era una expansión de Fourier. Entonces, dado que se está considerando un campo infinito se hace tender ($L \rightarrow \infty$) con lo que se obtiene una integral de Fourier en lugar de una serie de Fourier.

Entonces, se sabe que funciones $\phi(x, t) \propto e^{ikx-i\omega t}$ satisfacen la ecuación de onda. Si se toma $c = 1$ entonces $k = \omega$ y

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} \left[a(k)e^{ikx-i\omega t} + a^*(k)e^{-ikx+i\omega t} \right] \quad (\text{IV.74})$$

con lo cual ϕ debe ser real. Por otro lado,

$$\Pi(x, t) = \dot{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} (-i\omega) \left[a(k)e^{ikx-i\omega t} - a^*(k)e^{-ikx+i\omega t} \right] \quad (\text{IV.75})$$

Es importante notar que aplicando la transformada inversa y utilizando las ecuaciones (IV.74) y (IV.75) se tiene que

$$a(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\omega} e^{-ikx+i\omega t} \left[\phi + \frac{i}{\omega} \Pi \right] dx \quad (\text{IV.76})$$

si $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ y $\Pi \rightarrow \hat{\Pi}$, entonces $a(k)$ toma la forma de la transformada de Fourier de $\hat{a}(k)$ definida en (IV.13) pero generalizada a campos. De igual manera $a^* \rightarrow \hat{a}^\dagger(k)$. Esto sugiere que si se reemplaza los coeficiente de Fourier por los operadores definidos en (IV.13) generalizado para campos, entonces $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ y $\Pi \rightarrow \hat{\Pi}$ con lo que

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} \left[\hat{a}(k)e^{ikx-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx+i\omega t} \right] \quad (\text{IV.77})$$

$$\hat{\Pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi\sqrt{2\omega}} (-i\omega) \left[\hat{a}(k)e^{ikx-i\omega t} - \hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx+i\omega t} \right] \quad (\text{IV.78})$$

insertando (IV.77) y (IV.78) en (IV.73) y definiendo $\frac{1}{B} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega}}$ se obtiene,

$$\begin{aligned} &= \int \frac{dk dk' dx}{2B^2} [(-i\omega\hat{a}(k)e^{ikx-i\omega t} + i\omega\hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx+i\omega t})(-i\omega'\hat{a}(k')e^{ik'x-i\omega't} + i\omega'\hat{a}^\dagger(k')e^{-ik'x+i\omega't}) \\ &+ (ik\hat{a}(k)e^{ikx-i\omega t} - ik\hat{a}^\dagger(k)e^{-ikx+i\omega t})(ik'\hat{a}(k')e^{ik'x-i\omega't} - ik'\hat{a}^\dagger(k')e^{-ik'x+i\omega't})] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dk dk'}{B^2} dx [-\omega\omega'\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{i(k+k')x-i(\omega+\omega')t} + \omega\omega'\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{-i(k-k')x+i(\omega-\omega')t} \\ &+ \omega\omega'\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{i(k-k')x-i(\omega-\omega')t} - \omega\omega'\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{-i(k+k')x+i(\omega+\omega')t} \\ &+ (-k)k'\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{i(k+k')x-i(\omega+\omega')t} + kk'\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{i(k-k')x-i(\omega-\omega')t} \\ &+ kk'\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')e^{-i(k-k')x+i(\omega-\omega')t} + (-k)k'\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{-i(k+k')x+i(\omega+\omega')t}] \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

Agrupando los términos e integrando respecto de dx se tiene que,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{dk dk'}{B^2} dx [(-\omega\omega' - kk')\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{i(k+k')x-i(\omega+\omega')t} + (\omega\omega' + kk')\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')e^{-i(k-k')x+i(\omega-\omega')t} \\
&+ (\omega\omega' + kk')\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{i(k-k')x-i(\omega-\omega')t} + (-\omega\omega' - kk')\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{-i(k+k')x+i(\omega+\omega')t} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dk dk'}{B^2} [(-\omega\omega' - kk')\hat{a}(k)\hat{a}(k')(2\pi)\delta(k+k')e^{i(\omega+\omega')t} + (\omega\omega' + kk')\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')(2\pi)\delta(k-k')e^{i(\omega-\omega')t} \\
&+ (\omega\omega' + kk')\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')(2\pi)\delta(k-k')e^{i(\omega-\omega')t} + (-\omega\omega' - kk')\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')(2\pi)\delta(k+k')e^{i(\omega+\omega')t} \\
&\hspace{15em} \text{(IV.80)}
\end{aligned}$$

Integrando el primer término y el último y usando la propiedad de la Delta de Dirac, estos términos se cancelan, con lo cual solamente permanece

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{2} \int \frac{dk dk'}{B^2} (\delta(k-k')[\omega\omega' + kk'][\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k')e^{-i(\omega-\omega')t} + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{i(\omega-\omega')t}] \\
&\quad + \delta(k+k')[-\omega\omega' - kk'][\hat{a}(k)\hat{a}(k')e^{-i(\omega-\omega')t} + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(k')e^{i(\omega-\omega')t}]) \\
&\hspace{15em} \text{(IV.81)}
\end{aligned}$$

Integrando respecto a dk' con la ayuda de la δ de Dirac se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{1}{2\omega} \int dk ([\omega^2 + k^2][\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)] \\
&\quad + [-\omega^2 + k^2][\hat{a}(k)\hat{a}(-k)e^{-2i\omega t} + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}^\dagger(-k)e^{2i\omega t}]) \\
&\hspace{15em} \text{(IV.82)}
\end{aligned}$$

pero, $k^2 = \omega^2 \Rightarrow -\omega^2 + k^2 = 0$ y $\omega^2 + k^2 = 2\omega^2$.

Entonces,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dk (\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) + \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)) \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{(IV.83)}$$

Una vez con el hamiltoniano, es posible encontrar el espectro de energía. Como en el caso discreto, se debe esperar que

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0, \quad \forall k \quad \text{(IV.84)}$$

Sin embargo, existe un problema y es que si se aplica \hat{H} a $|0\rangle$ este no es cero debido al término $\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)$. Para el caso discreto se usó la relación de conmutatividad entre $\hat{a}(k)$ y $\hat{a}^\dagger(k)$ para escribir \hat{H} en términos de $\hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)$. Usando la misma estrategia para este caso se obtiene

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{2} \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k)\omega \quad \text{(IV.85)}$$

Se sabe que $[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 2\pi\delta(k - k')$, con lo que

$$\hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k) - \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) = 2\pi \Rightarrow \hat{a}(k)\hat{a}^\dagger(k) = 2\pi + \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k) \quad (\text{IV.86})$$

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega + \frac{2\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \lim_{k' \rightarrow k} \delta(k - k')\omega \quad (\text{IV.87})$$

pero $\lim_{k' \rightarrow k} \delta(k - k') = \delta(0)$ con lo cual se indefinire la integral. Entonces, para lidiar con este problema se argumenta que únicamente es relevante las diferencias o cambios de energía respecto del estado cero por lo que es posible ignorar esta constante infinita. Este proceso se llama *ordenamiento normal*. Entonces se define a \hat{H} como

$$\hat{H} = \int \frac{dk}{2\pi} \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)\omega \quad (\text{IV.88})$$

Los eigenvalores de energía tienen la forma de

$$E(k) = \frac{n(k)}{2\pi} \omega \quad (\text{IV.89})$$

en donde $n(k)$ es el número de cuantos el cual proviene del operador $\hat{n}(k) = \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k)$. Como se puede ver, se parece mucho a la forma que tienen los eigenvalores de energía de los osciladores armónicos en el caso discreto. La energía total es entonces

$$E = \int \frac{dk}{2\pi} n(k)\omega \quad (\text{IV.90})$$

Por otro lado, los cuantos, consecuencias de los estados excitados, pueden ser representados por la aplicación del operador $\hat{a}^\dagger(k)$ al estado cero $|0\rangle$, es decir al campo ϕ que cuenta con la energía mínima. Por ejemplo, un estado cuántico que contiene dos cuantos con momentum k_1 y k_2 se puede representar por

$$|k_1, k_2\rangle \propto \hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle \quad (\text{IV.91})$$

donde la constante de proporcionalidad está dada por el factor mencionado en la ecuación (IV.20), es decir

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_1!}} \frac{1}{\sqrt{k_2!}} \hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle \quad (\text{IV.92})$$

Por otro lado, si se tiene un estado con dos cuantos ambos con momentum k_1 , se representa como

$$|2k_1\rangle = \frac{1}{k_1!} [\hat{a}^\dagger(k_1)]^2 |0\rangle = \hat{a}^\dagger(k_1) \hat{a}^\dagger(k_1) |0\rangle \quad (\text{IV.93})$$

En general,

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, \dots\rangle \propto \left(\hat{a}^\dagger(k_1)\right)^{n_1} \left(\hat{a}^\dagger(k_2)\right)^{n_2} \dots \quad (\text{IV.94})$$

La teoría desarrollada anteriormente describe la cuantización de vibraciones de un sólido modelado como un objeto continuo, lo cual se conoce como aproximación de Debye.

Notas:

1. Es importante notar que $\hat{\phi}$ y $\hat{\Pi}$ son operadores de la formulación de Heisenberg con lo que obedecen las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}}(x, t) &= -i[\hat{\phi}, \hat{H}] \\ \dot{\hat{\Pi}}(x, t) &= -i[\hat{\Pi}, \hat{H}] \end{aligned} \quad (\text{IV.95})$$

Pero

$$\dot{\hat{\phi}} = \hat{\Pi} \quad (\text{IV.96})$$

ya que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}} &= -i[\hat{\phi}, \hat{H}] \\ &= -i(\hat{\phi}\hat{H} - \hat{H}\hat{\phi}) \\ &= -i \left[\hat{\phi}(x) \int \frac{1}{2} \left[\hat{\Pi}^2(y) + \left(\frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \right)^2 \right] dy - \int \frac{1}{2} \left[\hat{\Pi}^2(y) + \left(\frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \right)^2 \right] dy \hat{\phi}(x) \right] \\ &= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) + \hat{\phi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) + \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\phi}(x) dy \right] \\ &= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) - \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) dy + \int \hat{\phi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\phi}(x) dy \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.97})$$

De los segundos términos de las integrales se observa que $\hat{\phi}(x)$ y $\hat{\phi}(y)$ conmutan por lo que son

igual a cero. De la primera integral se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) - \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) dy - \int \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) dy + \int \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) \hat{\Pi}(y) dy - \int \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) \hat{\phi}(x) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[\int [\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] \hat{\Pi}(y) dy + \int \hat{\Pi}(y) [\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)] dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[\int i\delta(x-y) \hat{\Pi}(y) dy + \int \hat{\Pi}(y) i\delta(x-y) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[\int i\delta(y-x) \hat{\Pi}(y) dy + \int \hat{\Pi}(y) i\delta(y-x) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} [i\hat{\Pi}(x) + i\hat{\Pi}(x)] = \hat{\Pi}(x)
\end{aligned} \tag{IV.98}$$

Entonces, de las ecuaciones (IV.95) y (IV.96) se tiene que

$$\hat{\dot{\phi}} = -i[\hat{\phi}, \hat{H}] = \hat{\Pi} \Rightarrow \hat{\dot{\Pi}} = -i[\hat{\Pi}, \hat{H}] = \hat{\ddot{\phi}} \tag{IV.99}$$

Por otro lado, se dijo que $\hat{\phi}$ cumplía con la ecuación de onda

$$\hat{\ddot{\phi}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\phi} \tag{IV.100}$$

con lo que en este caso se cumple que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\phi} = -i[\hat{\Pi}, \hat{H}] \tag{IV.101}$$

A continuación se realizará la prueba.

Prueba:

$$-i [\hat{\Pi}, \hat{H}] = \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\Pi}(x) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) + \hat{\Pi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(y) \hat{\Pi}(x) + \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\Pi}(x) dy \right] \tag{IV.102}$$

Dado que $[\Pi(y), \Pi(x)] = 0$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\Pi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\Pi}(x) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[\int \hat{\Pi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\Pi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy \right] \\
&+ \frac{-i}{2} \left[\int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\Pi}(x) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \hat{\Pi}(x) dy \right]
\end{aligned} \tag{IV.103}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-i}{2} \left[\int \frac{\partial}{\partial y} [\hat{\Pi}(x), \hat{\phi}(y)] \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} [\hat{\Pi}(x), \hat{\phi}(y)] dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[-i \int \frac{\partial}{\partial y} (\delta(x-y)) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta(x-y)) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[-i \int \frac{\partial}{\partial y} (\delta(y-x)) \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} dy - \int \frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta(y-x)) dy \right] \quad (\text{IV.104}) \\
&= \frac{-i}{2} \left[-2i \left(\frac{\partial \hat{\phi}(y)}{\partial y} \delta(y-x) \right)_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial^2 \hat{\phi}(y)}{\partial y^2} \delta(y-x) dy \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[2i \int \frac{\partial^2 \hat{\phi}(y)}{\partial y^2} \delta(y-x) dy \right]
\end{aligned}$$

La derivada es posible escribirla como operador por lo que $\frac{\partial}{\partial y} = \hat{g}(y) \Rightarrow \hat{f}(y) = [\hat{g}(y)]^2 \hat{\phi}(y)$ entonces,

$$= \frac{-i}{2} \left[2i \int \hat{f}(y) \delta(y-x) dy \right] = \frac{-i}{2} [2i \hat{f}(x)] = [\hat{g}(x)]^2 \hat{\phi}(x) = \frac{\partial^2 \hat{\phi}(x)}{\partial x^2} \quad (\text{IV.105})$$

q.e.d.

2. Nótese que de esta manera se está estudiando un formalismo que contiene los aspectos de onda y de partícula de la materia. El aspecto de onda es evidente en la expansión de $\hat{\phi}$ lo cual se obtuvo a partir del hecho que $\hat{\phi}$ satisfacía la ecuación de onda. El aspecto de partícula viene del hecho que el espectro de energía está discretizado y además del hecho que se le está asociando operadores a cuantos individuales, es decir partículas.

3. ¿Cuál es el significado del estado $|0\rangle$ para un campo cuántico? Este estado es de hecho igual a $|0, 0, \dots, 0\rangle$ con lo que $n(k) = 0, \forall k$ con lo cual se ve que es el estado que no posee cuantos de excitación, en otras palabras, no hay partículas en él. Es por esto que se le atribuye el significado del vacío.

4. Considérese un estado cuántico de la siguiente forma

$$|k_1, k_2\rangle \propto \hat{a}^\dagger(k_1) \hat{a}^\dagger(k_2) |0\rangle \quad (\text{IV.106})$$

Nótese que el operador \hat{a}^\dagger conmuta en este caso, con lo que se dice que el estado es simétrico mediante el intercambio de $k_1 \leftrightarrow k_2$. Este resultado es una pequeña consecuencia de que los bosones son partículas idénticas (Aitchison & Hey, 2003). Es decir, no son iguales ya que como se ve, una

puede tener diferente momentum que la otra, pero estas tienen las mismas propiedades internas; por ejemplo, ambas tienen su respectivo momentum o su respectivo espín. El significado de partículas idénticas va más por el siguiente camino:

Suponga que se cuenta con dos bosones de igual forma con momentum k_1 y k_2 . Luego de un proceso se obtiene que uno de los dos bosones tiene momentum k_3 y el otro k_4 . Dado que son partículas indistinguibles, es imposible saber si el bosón con momentum k_3 era al inicio el bosón de momentum k_1 o el de momentum k_2 y el mismo caso se aplica para el bosón de momentum k_4 .

D. El campo escalar real (Klein-Gordon)

En la sección anterior por simplicidad se consideró únicamente una coordenada espacial. Ahora se debe de generalizar a tres dimensiones incorporando los aspectos relativistas de las partículas.

Tomando la densidad lagrangiana anterior

$$\mathcal{L}_\rho = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{IV.107})$$

tomando nuevamente $\rho = c = \hbar = 1$ y generalizándolo a cuatro dimensiones se obtiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \quad (\text{IV.108})$$

Al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange, se llega a una ecuación de onda invariante

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0 \quad (\text{IV.109})$$

Pero esta densidad lagrangiana describe a un campo cuyos cuantos no tienen masa. Se necesita encontrar el lagrangiano que de como resultado la ecuación de Klein-Gordon. Dicha densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\text{IV.110})$$

Las soluciones de esta ecuación tienen una frecuencia de la forma

$$\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2 \quad (\text{IV.111})$$

la cual se obtiene al aplicar \hat{p} a Ψ donde p es el tetravector de energía-momentum (Aitchison & Hey, 2003). Debido a esto, la ecuación (IV.111) corresponde a una relación energía-momentum relativista.

Análogo al caso unidimensional el campo ϕ toma la forma de

$$\hat{\phi}(x^i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[\hat{a}(k) e^{-ik \bullet x} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik \bullet x} \right] \quad (\text{IV.112})$$

donde el producto $k \bullet x = \omega t - \vec{k} \cdot x = k^\mu x_\mu$ el cual por simplicidad se escribirá como $k \cdot x$. Similarmente, $\hat{\Pi} = \dot{\hat{\phi}}$ es

$$\hat{\Pi}(x^i, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-i\omega) \left[\hat{a}(k) e^{-ik \cdot x} - \hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right] \quad (\text{IV.113})$$

donde $\omega = +(k^2 + m^2)^{1/2}$. Entonces, el hamiltoniano es

$$\hat{H}_{KG} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_{KG} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\hat{\Pi}^2 + \nabla \hat{\phi} \cdot \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (\text{IV.114})$$

En términos de $\hat{a}(k)$ y $\hat{a}^\dagger(k)$ el hamiltoniano se transforma en

$$\hat{H}_{KG} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{a}(k) \hat{a}^\dagger(k) \right] \omega \quad (\text{IV.115})$$

ordenándolo normalmente se llega a que

$$\hat{H}_{KG} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) \omega \quad (\text{IV.116})$$

Dado que $\hat{\phi}$ no posee grados de libertad respecto a espines, se dice que describe a partículas de espín 0. Además, ya que $\hat{\phi}$ es real ($\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$, donde $\hat{\phi}^\dagger$ es la conjugada hermítica) este campo también se le llama campo escalar real.

Una pregunta que puede surgir es: ¿Existen realmente partículas de espín cero? De hecho sí, por ejemplo los piones o bien los bosones de Higgs satisfacen la ecuación de Klein Gordon. De hecho, esta teoría los describe adecuadamente siempre y cuando estas partículas no interactúen entre ellas mismas o con el mismo campo y no estén restringidas bajo ningún potencial (partículas libres) tal y como se discute en (de Vries, 2009).

V. FUNCIÓN HEAVISIDE, FUNCIONES DE GREEN Y TEOREMA DE WICK

En esta sección se desarrollarán algunas herramientas matemáticas, las cuales serán de gran uso para capítulos posteriores.

A. Función Heaviside

La función Heaviside usualmente se representa como $\theta(t)$ y se define como una función por tramos de la siguiente forma

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

Sin embargo, se desarrollará a continuación una forma de expresar la función Heaviside de una forma analítica que será de utilidad en el próximo capítulo.

Considérese la función $F(t)$ donde t es real,

$$F(t) = \frac{i}{2\pi} \oint_{C=C_1+C_2} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz \quad (\text{V.2})$$

donde ϵ es una cantidad infinitesimalmente pequeña positiva. El objetivo ahora es convertir esta integral de contorno en una integral indefinida. Para esto se usará la ayuda del teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy, con lo cual el valor de la integral permanece igual siempre y cuando se elija una curva cerrada homotópica. En este caso se elijirá que la curva cerrada sea un semicírculo de radio infinito, es decir, se hará tender el radio del semicírculo $R \rightarrow \infty$. Defínase entonces la trayectoria C_1 como un tramo de la recta y a C_2 como un semicírculo de tal forma que $C = C_1 + C_2$ sea una trayectoria cerrada (Figura V.1 y Figura V.2). Ahora bien, supóngase que

$t < 0$ entonces la trayectoria C_2 puede parametrizarse como

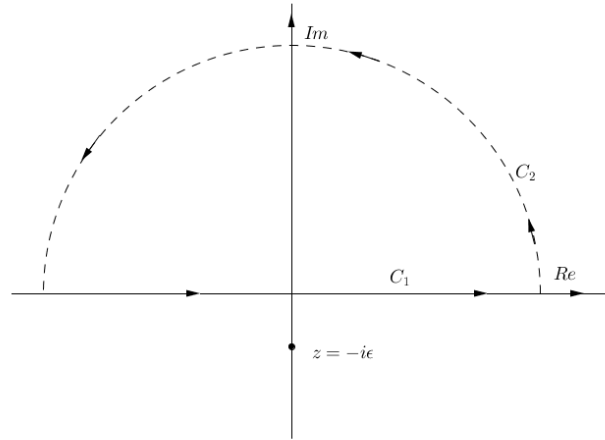
$$z = Re^{i\theta} = R \cos(\theta) + iR \sin(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{V.3})$$

Entonces la integral puede escribirse como

$$\frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} dz = \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{iRe^{i\theta}|t|}}{Re^{i\theta} + i\epsilon} Rie^{i\theta} dz = \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{-R \sin(\theta)|t|} e^{iR \cos(\theta)|t|}}{e^{i\theta} + \frac{i\epsilon}{R}} ie^{i\theta} d\theta \quad (\text{V.4})$$

Nótese que la ecuación anterior, si se toma el límite cuando $R \rightarrow \infty$, es igual a cero ya que el término complejo $e^{iR \cos(\theta)|t|} ie^{i\theta}$ es acotado y el término real $e^{-R \sin(\theta)|t|}$ decrece exponencialmente. Por otro lado, la integral sobre toda la trayectoria C (ecuación (V.2)) sigue siendo una integral cerrada y la singularidad $z = -i\epsilon$ no se encuentra en el interior de la curva (Figura V.1).

Figura V.1: Trayectoria para $t < 0$



Entonces, por el teorema de Cauchy,

$$F(t) = \oint_C \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} dz = 0 \quad \text{para } t < 0 \quad (\text{V.5})$$

Ahora bien, para el caso en que $t > 0$ se tiene que la integral sobre la trayectoria C_2 es

$$\frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} dz = \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{R \sin(\theta)t} e^{-iR \cos(\theta)t}}{e^{i\theta} + \frac{i\epsilon}{R}} ie^{i\theta} d\theta \quad (\text{V.6})$$

De nuevo, si se toma el límite cuando $R \rightarrow \infty$ se tiene que la parte imaginaria sigue estando acotada. Sin embargo, la parte real diverge exponencialmente. Para arreglar este inconveniente es posible parametrizar la curva de la siguiente manera

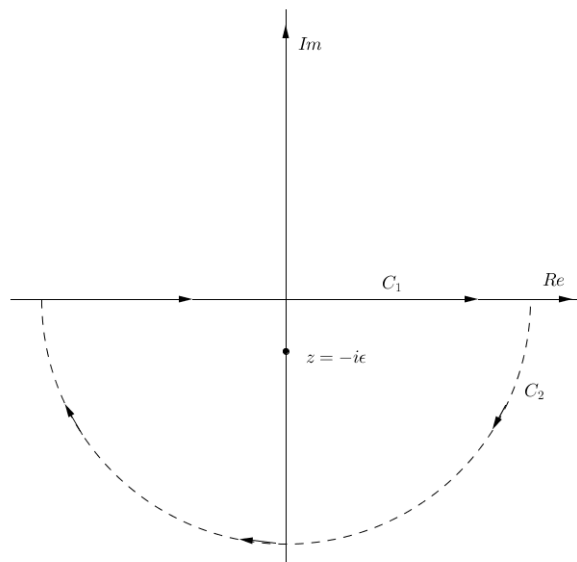
$$z = Re^{i\theta} = R \cos(\theta) + iR \sin(\theta) \quad 0 \geq \theta \geq -\pi \quad (\text{V.7})$$

Debido a que la función $\sin(\theta)$ es impar y $\cos(\theta)$ es par, la ecuación (V.6) con esta parametrización toma la forma de

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} \frac{e^{-R \sin(\theta)t} e^{-iR \cos(\theta)t}}{e^{i\theta} + \frac{i\epsilon}{R}} i e^{i\theta} d\theta \quad (\text{V.8})$$

De esta última ecuación puede observarse que cuando $R \rightarrow \infty$ el término $e^{-R \sin(\theta)t}$ decrece exponencialmente con lo que esta integral tiende a cero. No obstante, al parametrizar de esta forma la trayectoria, la integral de la ecuación (V.2) se vuelve un semicículo en el plano inferior.

Figura V.2: Trayectoria para $t > 0$



Tal y como se puede ver en la Figura V.2, esta vez la singularidad $z = -i\epsilon$ se encuentra en el interior de la curva. Debido a esto, es posible utilizar la fórmula integral de Cauchy con lo que la

integral de la ecuación (V.2) da como resultado

$$F(t) = \frac{i}{2\pi} \oint_C \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz = -2\pi i \frac{i}{2\pi} e^{-\epsilon t} \quad \text{para } t > 0 \quad (\text{V.9})$$

Si se toma el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $F(t) \rightarrow 1$ para $t > 0$.

Por lo tanto, resumiendo lo anterior, se obtuvo que tomando el límite al infinito del radio de la trayectoria del semicírculo ($R \rightarrow \infty$) para $t < 0$, $F(t)$ era igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz + \int_{C_2} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz = 0 \quad (\text{V.10})$$

y para el caso en que $t > 0$ y tomando además el límite cuando ($\epsilon \rightarrow 0$), $F(t)$ era

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_1} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz + \int_{C_2} \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{e^{-izt}}{z+i\epsilon} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(-2\pi i \frac{i}{2\pi} e^{-\epsilon t} \right) = 1 \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Leyendo los dos extremos de la ecuación (V.10) y de la ecuación (V.11) se define la función Heaviside como

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-zt}}{z+i\epsilon} dz \quad (\text{V.12})$$

B. Funciones de Green

Las funciones de Green son muy importantes en física y nacen de la idea intuitiva de poder conocer la inversa de un operador diferencial L . Es decir, si se considera la siguiente ecuación diferencial

$$Lf(x) = g(x) \quad (\text{V.13})$$

donde L es un operador diferencial lineal y donde la función $g(x)$ se conoce, entonces para hayar la función $f(x)$ que satisface dicha ecuación y además que cumple con condiciones de frontera dadas, se debe de encontrar primero L^{-1} de tal forma que la ecuación (V.13) pueda reescribirse como

$$f(x) = L^{-1}g(x) \quad (\text{V.14})$$

Es en esta búsqueda de L^{-1} que se encuentra las funciones de Green. Formalmente, las funciones de Green, $G(x, \xi)$, se definen como funciones que satisfagan la ecuación

$$L(G(x, \xi)) = \delta(x - \xi) \quad (\text{V.15})$$

donde $\delta(x - \xi)$ es la delta de Dirac (Maurette, 2009). Y que además cumplan las siguientes tres propiedades:

1. $G(x, \xi)$ es simétrica, es decir, $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $\forall x, \forall \xi \in [a, b]$.
2. $G(x, \xi)$ es continua $\forall x, \forall \xi \in [a, b]$
3. $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}$ tiene una discontinuidad finita en $x = \xi$ dada por

$$\frac{\partial G(\xi^+, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-, \xi)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\partial G(\xi + \epsilon, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi - \epsilon, \xi)}{\partial x} \right]$$

Nótese que para un operador L de la forma $L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x)$ la discontinuidad es igual a

$$\begin{aligned} \int LG \, dx &= \int_{\xi^-}^{\xi^+} \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{\partial G}{\partial x} \right) dx + \int_{\xi^-}^{\xi^+} r(x)G \, dx = \lim_{a \rightarrow \xi^-} \lim_{b \rightarrow \xi^+} \int_a^b \delta(x - \xi) dx \\ &\Rightarrow p(x) \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{\xi^-}^{\xi^+} + F(x, \xi) \Big|_{\xi^-}^{\xi^+} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\partial G(\xi^+, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi^-, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

donde $F(x, \xi) \Big|_{\xi^-}^{\xi^+} = 0$ ya que $G(x, \xi)$ es continua.

Por otro lado, regresando al objetivo principal, es decir la búsqueda de L^{-1} , se tiene que una vez encontrando la función de Green asociada a un operador L , entonces la solución a la ecuación

(V.13) puede escribirse como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)G(x, \xi)d\xi \quad (\text{V.17})$$

debido a que

$$\begin{aligned} Lf(x) &= L \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)G(x, \xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) (LG(x, \xi)) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\delta(x - \xi)d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\delta(\xi - x)d\xi \\ &= g(x) \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

A partir de las ecuaciones (V.14) y (V.17) se observa entonces que $L^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi)d\xi$.

A continuación se desarrollará algunos ejemplos de funciones de Green para complementar estas definiciones un tanto abstractas.

1. Operador $L = \frac{d^2}{dx^2}$: Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = g(x) \quad x \in [0, 1] \quad (\text{V.19})$$

Con las siguientes condiciones de frontera homogéneas (condiciones de Dirichlet):

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

Entonces, para resolver este problema se parte de que

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (\text{V.21})$$

con lo que

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} A_1x + A_2 & \text{si } 0 \leq x < \xi \leq 1 \\ A_3x + A_4 & \text{si } 0 \leq \xi < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{V.22})$$

Obsérvese que a pesar que $G(x, \xi)$ es lineal respecto de x , esta satisface la ecuación (V.19) debido a que cumple con la condición No. 3, anteriormente escrita, para funciones de Green. Sin embargo, nótese que de las condiciones de Dirichlet se tiene que $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 G(0, \xi)g(\xi)d\xi = \int_0^1 G(1, \xi)g(\xi)d\xi = 0$ y esto es cierto para cualquier función continua $g(\xi)$ por lo que $G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0$ y esto se cumple para cualquier caso de condiciones de frontera de Dirichlet.

Entonces, aplicando condiciones de frontera

$$\begin{aligned} G(0, \xi) &= A_2 = 0 \\ G(1, \xi) &= A_3 + A_4 = 0 \Rightarrow A_3 = -A_4 \end{aligned} \quad (\text{V.23})$$

Además por la propiedad No. 3 de la función de Green, y la propiedad probada en (V.16) para $p(\xi) = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \xi^-} \lim_{b \rightarrow \xi^+} \int_a^b \frac{d^2 G(x, \xi)}{dx^2} dx &= \lim_{a \rightarrow \xi^-} \lim_{b \rightarrow \xi^+} \left[\frac{dG}{dx} \Big|_a - \frac{dG}{dx} \Big|_b \right] = 1 \\ &\Rightarrow A_1 - A_3 = 1 \\ &\Rightarrow A_3 = A_1 - 1 \end{aligned} \quad (\text{V.24})$$

Entonces, por las ecuaciones (V.23) y (V.24)

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} A_1x & \text{si } 0 \leq x < \xi \leq 1 \\ (A_1 - 1)(x - 1) & \text{si } 0 \leq \xi < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

Y dado que $G(x, \xi)$ tiene que ser continua,

$$\lim_{x^- \rightarrow \xi} G(x, \xi) = \lim_{x^+ \rightarrow \xi} G(x, \xi) = G(\xi, \xi) \Rightarrow A_1\xi = (A_1 - 1)(\xi - 1) \Rightarrow A_1 = 1 - \xi \quad (\text{V.26})$$

con lo que la función de Green para el operador $L = \frac{d^2}{dx^2}$ es

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} (1 - \xi)x & \text{si } 0 \leq x < \xi \leq 1 \\ (1 - x)\xi & \text{si } 0 \leq \xi < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{V.27})$$

Y la ecuación (V.19) es posible reescribirla como

$$f(x) = \int_0^1 G(x, \xi)g(\xi)d\xi \quad (\text{V.28})$$

Nótese que no se resolvió la ecuación diferencial, sino que únicamente se transformó la ecuación (V.19) que es una ecuación diferencial en la ecuación (V.28), la cual es una ecuación integral. Para conocer $f(x)$ es necesario resolver dicha integral.

Por ejemplo, para $g(x) = 1$, $f(x)$ es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 G(x, \xi)d\xi = \int_0^x (1 - \xi)x d\xi + \int_x^1 (1 - x)\xi d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 - x) - \frac{x^2}{2}(1 - x) \right) - \frac{x(1 - x)^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{(x^2 - x + 1)}{2} \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

2. Operador laplaciano $L = \nabla^2$: Considérese ahora la ecuación diferencial

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = g(\vec{r}) \quad (\text{V.30})$$

Imponiendo que $G(r, r') \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Esta condición de frontera es frecuente en problemas de física, por ejemplo si $f(r) = \phi$ y $g(\vec{r}) = \rho$, donde ϕ es un potencial eléctrico y ρ la densidad de carga; se esperaría que a medida que uno se aleje de la fuente, el potencial eléctrico tendiese a cero.

Es importante notar que a diferencia del caso anterior, la condición de frontera impuesta no rompe la simetría del problema. Obsérvese que si $r \rightarrow \infty$ entonces $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$ y $G(\vec{r}, \vec{r}')$ debería de ser de la forma $\frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}'|^p}$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{Q}$ de tal forma que $G(\vec{r}, \vec{r}') \rightarrow 0$ a medida que $\vec{r} \rightarrow \infty$. Entonces, $\frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}'|^p} = \frac{ap(p+1)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{p+2}} = \frac{\partial^2}{\partial (\vec{r} - \vec{r}')^2} \frac{a}{|\vec{r} - \vec{r}'|^p}$. Esto muestra que el operador

$\nabla_r^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es invariante ante traslaciones, es decir, $\nabla_{\vec{r}-\vec{r}'}^2 = \nabla_{\vec{r}}^2$. Debido a esto, a que $G(\vec{r}, \vec{r}')$ es función de $|\vec{r} - \vec{r}'|$ y a que las condiciones de frontera son invariantes ante traslaciones es posible hacer la siguiente sustitución:

$$\nabla_r^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \nabla_R^2 G(\vec{R}) = \delta^3(\vec{R}) \quad (\text{V.31})$$

donde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

Ahora bien, dado que $G(\vec{R})$ es una función continua, es posible expresarla como una integral de Fourier,

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(k) \quad (\text{V.32})$$

pero nótese que $\nabla_R^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} = -\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$, entonces

$$\nabla_R^2 G(\vec{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{k}) (-\vec{k})^2 \quad (\text{V.33})$$

Sustituyendo la ecuación (V.33) en la ecuación (V.31) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{k}) (-\vec{k})^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} d^3k \quad (\text{V.34})$$

donde se sustituyó $\delta^3(\vec{R})$ por su definición $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} d^3k$.

Debido a que los $e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{k})$ forman una base completa, ambas integrales deben ser iguales componente a componente con lo que

$$-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \Rightarrow \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \quad (\text{V.35})$$

Sustituyendo la ecuación (V.35) en la ecuación (V.33) e integrando en coordenadas esféricas, se

obtiene

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{k^2} &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i \sin(kR)}{2iR k} dk \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2 R} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kR)}{k} dk \\
&= -\frac{\pi}{4\pi^2 R} \\
&= -\frac{1}{4\pi R} = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}
\end{aligned} \tag{V.36}$$

donde la primera igualdad se obtiene después de haber integrado respecto a ϕ y θ . La segunda igualdad se pudo hacer debido a que $\frac{\sin(kR)}{k}$ es una función par.

Por lo tanto,

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{V.37}$$

con lo que

$$f(\vec{r}) = \int -\frac{g(\vec{r}')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' \tag{V.38}$$

tal y como aparece en los problemas comunes de electrostática.

3. Operador de Helmholtz $L = \nabla^2 + k^2$: Por último, considérese la siguiente ecuación diferencial con la misma condición de frontera que en el ejemplo pasado,

$$(\nabla^2 + k^2) f(\vec{r}) = g(\vec{r}) \tag{V.39}$$

donde k es una constante. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k^2) G(\vec{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q (\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{q}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q (-q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{q})
\end{aligned} \tag{V.40}$$

Sustituyéndolo nuevamente en la ecuación (V.31) se obtiene que

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q (-q^2 + k^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} \tilde{G}(\vec{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} d^3q \tag{V.41}$$

Por el mismo argumento mencionado en el ejemplo anterior,

$$(-q^2 + k^2)\tilde{G}(\vec{R}) = 1 \Rightarrow \tilde{G}(\vec{R}) = \frac{1}{k^2 - q^2} \quad (\text{V.42})$$

Entonces,

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}{k^2 - q^2} \quad (\text{V.43})$$

Integrando de nuevo en coordenadas esféricas se tiene que

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3q \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}{k^2 - q^2} = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi q \sin(Rq)}{R} \frac{1}{q^2 - k^2} dq = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \sin(Rq)}{(q-k)(q+k)} dq \quad (\text{V.44})$$

Ahora bien, esta última integral no es posible integrarla directamente pues tiene dos polos de primer orden en $q = k$ y $q = -k$. Para resolver esta integral se usará la misma técnica de integrales de contorno que se usó en la sección V.1 con lo que se pasará la integral al plano complejo. Además, debido a que los polos son de primer orden se trasladarán tal y como la Figura V.3 lo indica. Para realizar esto primero nótese que, debido a que se pasará esta integral al plano complejo, es posible escribir la función seno como $\sin(qR) = \frac{e^{iqR} - e^{-iqR}}{2i}$. La integral entonces puede ser reescrita como

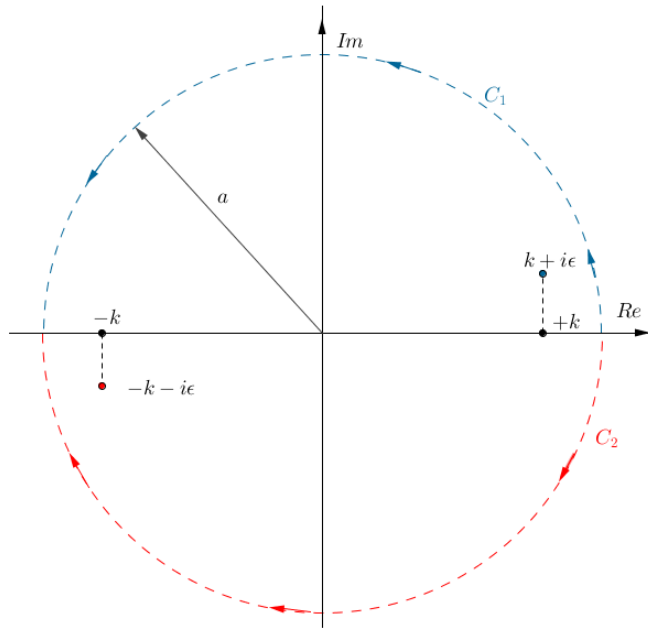
$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{qe^{iRq} - qe^{-iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint \frac{qe^{iRq} - qe^{-iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq \\ &+ \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{qe^{iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq \\ &- \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{qe^{-iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

Luego, sea $C_1 = ae^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq \pi$ y $C_2 = ae^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq 0$, el semicírculo superior y el

semicírculo inferior respectivamente. El valor absoluto de la penúltima integral es

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^\pi \frac{ae^{i\theta} e^{iRa} \cos(\theta) - e^{-iaR} \sin(\theta) aie^{i\theta}}{2i(ae^{i\theta} - [k + i\epsilon])(ae^{i\theta} - [-k - i\epsilon])} d\theta \right| \\
& \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \left| \frac{ae^{i\theta} e^{iRa} \cos(\theta) - e^{-iaR} \sin(\theta) aie^{i\theta}}{2i(ae^{i\theta} - [k + i\epsilon])(ae^{i\theta} - [-k - i\epsilon])} \right| d\theta \\
& \leq \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{e^{-aR} \sin(\theta)}{\left(1 - \frac{|k+i\epsilon|}{R}\right) \left(1 - \frac{k-i\epsilon}{R}\right)} d\theta = 0
\end{aligned} \tag{V.46}$$

Figura V.3: Trayectorias para integral de contorno



El valor absoluto de la última integral es igual a cero también y el procedimiento es análogo. Entonces, debido a que el valor de toda esta integral es cero para la trayectoria elegida cuando el radio tiende al infinito, es posible volver a transformar la integral que muestra la ecuación (V.44) en una integral de contorno y resolverla por medio del teorema del Residuo. (Churchil, 2009)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-a}^a \frac{qe^{iRq} - qe^{-iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint \frac{qe^{iRq} - qe^{-iRq}}{2i(q - [k + i\epsilon])(q - [-k - i\epsilon])} dq \tag{V.47}$$

Resolviendo esta integral por medio del teorema del Residuo como se dijo y aplicando ambos

límites, esta última integral es igual a

$$\frac{ke^{iRk}}{2k2i}(2\pi i) - \frac{(-2\pi i)(-k)e^{ikR}}{(-2k)2i} = \frac{2ke^{iRk}}{2k} \frac{2\pi i}{2i} = \pi e^{iRk} \quad (\text{V.48})$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (V.44) se obtiene que

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\text{V.49})$$

Nótese que si se toma $\lim_{k \rightarrow 0}$ entonces la ecuación (V.49) se convierte en la ecuación (V.37), tal y como se esperaba.

C. Teorema de Wick

En el capítulo siguiente será de gran utilidad saber cómo conmutar operadores de tal forma que se puedan reescribir con un orden normal, tal y como se vio en el capítulo IV. El teorema de Wick es justamente el que establece una relación entre operadores ordenados cronológicamente y los mismos operadores normalmente ordenados. Sin embargo, antes de enunciar dicho teorema y hacer la respectiva prueba, es conveniente introducir cuestiones de notación y resolver algunos ejemplos.

1. **Caso n=2:** Considérese el producto de los operadores $\hat{\phi}(x_1)$ y $\hat{\phi}(x_2)$. Entonces si $x_1^0 > x_2^0$, entonces el operador $T[]$ aplicado a estos operadores coloca su producto en orden cronológico. En este caso,

$$T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)] = \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \quad (\text{V.50})$$

Para el caso en que $x_2^0 > x_1^0$,

$$T[\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)] = \hat{\phi}(x_2)\hat{\phi}(x_1) \quad (\text{V.51})$$

Por otro lado, ya que el operador

$$\hat{\phi}(x_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} \left[\hat{a}(k)e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k)e^{ik \cdot x} \right] \quad (\text{V.52})$$

Es posible definir,

$$\hat{\phi}(x_1)^+ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} [\hat{a}(k)e^{-ik\cdot x}] \quad \hat{\phi}(x_1)^- = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega}} [\hat{a}^\dagger(k)e^{ik\cdot x}] \quad (\text{V.53})$$

tal y como lo hace el libro de (Kaku, 1993). La notación es algo confusa, pero debe notarse que $\hat{\phi}(x_1)^+$ está asociado al operador aniquilación \hat{a} y el operador $\hat{\phi}(x_1)^-$ está asociado al operador creación, \hat{a}^\dagger . Nótese entonces que

$$\hat{\phi}(x_1)^+ |0\rangle = 0 = \langle 0| \hat{\phi}(x_1)^- \quad (\text{V.54})$$

y que

$$[\hat{\phi}(x_1)^+, \hat{\phi}(x_2)^-] = \text{constante} \quad (\text{V.55})$$

Por último, si $\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)$ están ordenados normalmente entonces se denotarán como

$$: \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) : = \hat{\phi}(x_1)^+\hat{\phi}(x_2)^+ + \hat{\phi}(x_1)^-\hat{\phi}(x_2)^+ + \hat{\phi}(x_2)^-\hat{\phi}(x_1)^+ + \hat{\phi}(x_1)^-\hat{\phi}(x_2)^- \quad (\text{V.56})$$

El ordenamiento normal de un número mayor de operadores consiste en tener todos los $\hat{\phi}(x_i)^-$ a la izquierda en orden cronológico y todos los $\hat{\phi}(x_i)^+$ a la derecha, igualmente en orden cronológico. A continuación se hará el ejemplo para un producto de dos, tres y cuatro operadores.

Por simplicidad, en esta subsección se escribirá ϕ_i para referirse al operador $\hat{\phi}(x_i)$. Considérese entonces

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2] &= \phi_1\phi_2 = (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) = \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- \\ &= \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- + \phi_1^+\phi_2^- - \phi_2^-\phi_1^+ \\ &=: \phi_1\phi_2 : + [\phi_1^+, \phi_2^-] \end{aligned} \quad (\text{V.57})$$

Entonces, nótese que

$$\begin{aligned} &= \langle 0| [\phi_1^+, \phi_2^-] |0\rangle = \langle 0| \phi_1^+\phi_2^- |0\rangle = \langle 0| \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- |0\rangle \\ &= \langle 0| \phi_1\phi_2 |0\rangle \quad (\text{V.58}) \\ &= \langle 0| T[\phi_1\phi_2] |0\rangle \end{aligned}$$

Esta última igualdad es importante ya que sin pérdida de generalidad es posible suponer que $x_1^0 > x_2^0$. Luego, la igualdad de la ecuación (V.57) es

$$T[\phi_1\phi_2] = : \phi_1\phi_2 : + \langle 0| T[\phi_1\phi_2] |0\rangle \quad (\text{V.59})$$

2. Caso n=3: Ahora bien, considérese el producto de tres operadores,

$$\begin{aligned} T[\phi_1\phi_2\phi_3] &= (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-)(\phi_3^+ + \phi_3^-) = (: \phi_1\phi_2 : + [\phi_1^+, \phi_2^-]) \phi_3 \\ &= : \phi_1\phi_2 : \phi_3 + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} : \phi_1\phi_2 : \phi_3 + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 &= \phi_1^+ \phi_2^+ \phi_3^+ + \phi_1^- \phi_2^+ \phi_3^+ \\ &\quad + \phi_2^- \phi_1^+ \phi_3^+ + \phi_1^- \phi_2^- \phi_3^+ \\ &\quad + \phi_3^- \phi_1^+ \phi_2^+ + [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_1^+ \\ &\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2^+ + \phi_1^- \phi_3^- \phi_2^+ \\ &\quad + [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_1^- + \phi_2^- \phi_3^- \phi_1^+ \\ &\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2^- + \phi_1^- \phi_2^- \phi_3^- + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \\ &= : \phi_1\phi_2\phi_3 : + [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_1^+ + [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_1^- + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2^+ \\ &\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2^- + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \\ &= : \phi_1\phi_2\phi_3 : + [\phi_2^+, \phi_3^-] \phi_1 + [\phi_1^+, \phi_3^-] \phi_2 + [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \end{aligned} \quad (\text{V.61})$$

Por lo que

$$T[\phi_1\phi_2\phi_3] = : \phi_1\phi_2\phi_3 : + \langle 0| T[\phi_2\phi_3] |0\rangle \phi_1 + \langle 0| T[\phi_1\phi_3] |0\rangle \phi_2 + \langle 0| T[\phi_1\phi_2] |0\rangle \phi_3 \quad (\text{V.62})$$

3. Caso n=4: Por último, el caso para la multiplicación de cuatro operadores es

$$\begin{aligned}
T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] &= [: \phi_1\phi_2\phi_3 : [\phi_2^+, \phi_3^-]\phi_1 + [\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_2 + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3] \phi_4 \\
&= : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^+ + : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^- + [\phi_2^+, \phi_3^-]\phi_1\phi_4 \\
&\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-]\phi_2\phi_4 + [\phi_1^+, \phi_2^-]\phi_3\phi_4 \\
&= : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^+ + : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^- + [\phi_2^+, \phi_3^-] (: \phi_1\phi_4 : + [\phi_1^+, \phi_4^-]) \\
&\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-] (: \phi_2\phi_4 : + [\phi_2^+, \phi_4^-]) + [\phi_1^+, \phi_2^-] (: \phi_3\phi_4 : + [\phi_3^+, \phi_4^-]) \\
&= : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^+ + : \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^- \\
&\quad + [\phi_2^+, \phi_3^-] : \phi_1\phi_4 : + [\phi_1^+, \phi_3^-] : \phi_2\phi_4 : + [\phi_1^+, \phi_2^-] : \phi_3\phi_4 : \\
&\quad + [\phi_1^+, \phi_3^-][\phi_2^+, \phi_4^-] + [\phi_2^+, \phi_3^-][\phi_1^+, \phi_4^-] + [\phi_1^+, \phi_2^-][\phi_3^+, \phi_4^-]
\end{aligned} \tag{V.63}$$

Nótese que el primer término, $: \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^+$ no tiene problemas. Por otro lado, en el ejemplo anterior ϕ^- tuvo problemas con tres términos. Es decir, hubo que mover a ϕ^- "2 casillas" 1 vez y "1 casilla" 2 veces. Si se considera el binomio $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ se podría pensar en relacionar los exponentes de las x con la cantidad de casillas que se deberá mover a ϕ^- y a los coeficientes que acompañan a las x con la cantidad de veces que se tendrá que mover a ϕ^- esa cantidad de casillas. Veamos si es cierto, para el caso a continuación $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, se debería de mover a ϕ^- 1 vez 3 casillas, 3 veces 2 casillas y 3 veces 1 casilla con lo que se tendría un total de 12 conmutadores. A continuación se comprobará esto.

$$\begin{aligned}
: \phi_1\phi_2\phi_3 : \phi_4^- &= \phi_1^+\phi_2^+\phi_3^+\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^+\phi_3^+\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^-\phi_3^+\phi_4^- \\
&\quad + \phi_2^-\phi_1^+\phi_3^+\phi_4^- + \phi_3^-\phi_1^+\phi_2^+\phi_4^- + \phi_2^-\phi_3^-\phi_1^+\phi_4^- \\
&\quad + \phi_1^-\phi_3^-\phi_2^+\phi_4^- + \phi_1^-\phi_2^-\phi_3^-\phi_4^- \\
&= [\phi_3^+, \phi_4^-]\phi_1^+\phi_2^+ + [\phi_2^+, \phi_4^-]\phi_1^+\phi_3^+ + [\phi_1^+, \phi_4^-]\phi_2^+\phi_3^+ \\
&\quad + [\phi_3^+, \phi_4^-]\phi_1^-\phi_2^+ + [\phi_2^+, \phi_4^-]\phi_1^-\phi_3^+ + [\phi_3^+, \phi_4^-]\phi_1^-\phi_2^- \\
&\quad + [\phi_3^+, \phi_4^-]\phi_2^-\phi_1^+ + [\phi_1^+, \phi_4^-]\phi_2^-\phi_3^+ + [\phi_2^+, \phi_4^-]\phi_3^-\phi_1^+ \\
&\quad + [\phi_1^+, \phi_4^-]\phi_3^-\phi_2^+ + [\phi_1^+, \phi_4^-]\phi_2^-\phi_3^- + [\phi_2^+, \phi_4^-]\phi_1^-\phi_3^- + \phi_1^-\phi_2^-\phi_3^-\phi_4^-
\end{aligned} \tag{V.64}$$

Lo cual justamente cumple con la conjetura anterior. Luego, notando que todos los términos que

acompañan a los conmutadores están normalmente ordenados, es posible agrupar términos y obtener

$$\begin{aligned}
 : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : \phi_4^+ + : \phi_1 \phi_2 \phi_3 : + \phi_4^- &= : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 : + [\phi_3^+, \phi_4^-] : \phi_1 \phi_2 : \\
 &+ [\phi_2^+, \phi_4^-] : \phi_1 \phi_3 : + [\phi_1^+, \phi_4^-] : \phi_2 \phi_3 :
 \end{aligned} \tag{V.65}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
 T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] &= : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 : + \langle 0 | T[\phi_3 \phi_4] | 0 \rangle : \phi_1 \phi_2 : \\
 &+ \langle 0 | T[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle : \phi_1 \phi_3 : + \langle 0 | T[\phi_1 \phi_4] | 0 \rangle : \phi_2 \phi_3 : \\
 &+ \langle 0 | T[\phi_2 \phi_3] | 0 \rangle : \phi_1 \phi_4 : + \langle 0 | T[\phi_1 \phi_3] | 0 \rangle : \phi_2 \phi_4 : \\
 &+ \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle : \phi_3 \phi_4 : + \langle 0 | T[\phi_1, \phi_3] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_2 \phi_4] | 0 \rangle \\
 &+ \langle 0 | T[\phi_2 \phi_3] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_1 \phi_4] | 0 \rangle + \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_3 \phi_4] | 0 \rangle \\
 &= : \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 : + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle : \phi_3 \phi_4 : \\
 &+ \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_3 \phi_4] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{V.66}$$

Donde las sumatorias anteriores son respecto a las diferentes permutaciones.

4. El teorema de Wick: El teorema de Wick establece entonces que para una multiplicación par de operadores

$$\begin{aligned}
 T[\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n] &= : \phi_1 \dots \phi_n : + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle : \phi_3 \dots \phi_n : \\
 &+ \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_3 \phi_4] | 0 \rangle : \phi_5 \dots \phi_n : \\
 &\vdots \\
 &+ \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\phi_{n-1} \phi_n] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{V.67}$$

y para el caso de una multiplicación impar de operadores:

$$\begin{aligned}
T[\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n] = & : \phi_1 \dots \phi_n : + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1 \phi_2] | 0 \rangle : \phi_3 \dots \phi_n : \\
& + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_3 \phi_4] | 0 \rangle : \phi_5 \dots \phi_n : \\
& \vdots \\
& + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\phi_{n-2} \phi_{n-1}] | 0 \rangle \phi_n
\end{aligned} \tag{V.68}$$

(Kaku, 1993).

5. Demostración del teorema de Wick: La demostración del Teorema de Wick naturalmente es por inducción, a continuación se realizará la prueba.

El paso base para $n = 2$ ya se desarrolló anteriormente. Entonces, para el paso inductivo, suponga que el teorema vale para $n - 1$ y considérese

$$\begin{aligned}
T[\phi_1 \dots \phi_{n-1} \phi_n] = & : \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n + \sum_{perm} [\phi_1^+, \phi_2^-] : \phi_3 \dots \phi_{n-1} : \phi_n \\
& + \sum_{perm} [\phi_1^+, \phi_2^-] [\phi_3^+, \phi_4^-] : \phi_5 \dots \phi_{n-1} : \phi_n \\
& \vdots \\
& + \sum_{perm} [\phi_1^+, \phi_2^-] \dots [\phi_{n-3}^+, \phi_{n-2}^-] \phi_{n-1} \phi_n
\end{aligned} \tag{V.69}$$

El primer término se puede descomponer como

$$: \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n = (: \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n^+) + (: \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n^-) \tag{V.70}$$

Se vio en los ejemplos pasados que ϕ_n^+ no tendrá problemas y que ϕ_n^- tendrá que conmutar con $2^{n-1} - 1$ términos provenientes de $: \phi_1 \dots \phi_{n-1} :$. Por la analogía que se usó anteriormente y usando el teorema del binomio, es decir $(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$, se tendrán $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k$

términos de la forma $[\phi_{k_i}^+, \phi_n^-] \phi_{k_c}^\pm \dots \phi_{k_m}^\pm$ donde $k_i < n$ y $\phi_{k_c}^\pm \dots \phi_{k_m}^\pm$ están ordenados normalmente por lo que agrupando dichos términos se obtiene

$$\begin{aligned} : \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n &= (: \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n^+) + (: \phi_1 \dots \phi_{n-1} : \phi_n^-) \\ &= : \phi_1 \dots \phi_{n-1} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_2} \dots \phi_{k_{n-1}} : \end{aligned} \quad (V.71)$$

Del segundo término de la ecuación (V.69) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{perm} [\phi_1^+, \phi_2^-] : \phi_3 \dots \phi_{n-1} : \phi_n &= ([\phi_1^+, \phi_2^-] : \phi_3 \dots \phi_{n-1} : \phi_n) \\ &+ ([\phi_1^+, \phi_3^-] : \phi_2 \phi_4 \dots \phi_{n-1} : \phi_n) \\ &+ \dots + ([\phi_{n-2}^+, \phi_{n-1}^-] : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_{n-3} : \phi_n) \\ &= [\phi_1^+, \phi_2^-] \left[: \phi_3 \dots \phi_{n-1} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_3}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_4} \dots \phi_{k_{n-1}} : \right] \\ &+ \dots + \\ &[\phi_{n-2}^+, \phi_{n-1}^-] \left[: \phi_3 \dots \phi_{n-3} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_3}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_4} \dots \phi_{k_{n-1}} : \right] \end{aligned} \quad (V.72)$$

$$= \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_{k_2}^-] : \phi_{k_3} \dots \phi_{k_{n-1}} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_{k_2}^-] [\phi_{k_3}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_4} \dots \phi_{k_{n-1}} : \quad (V.73)$$

Sumando la ecuación (V.71) y la ecuación (V.73) se obtiene

$$\begin{aligned} &: \phi_1 \dots \phi_{n-1} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_2} \dots \phi_{k_{n-1}} : \\ &+ \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_{k_2}^-] : \phi_{k_3} \dots \phi_{k_{n-1}} \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_{k_2}^-] [\phi_{k_3}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_4} \dots \phi_{k_{n-1}} \phi_n : \\ &=: \phi_1 \dots \phi_{n-1} \phi_n : + \sum_{perm} [\phi_1^+, \phi_2^-] : \phi_3 \dots \phi_n : + \sum_{perm k_i} [\phi_{k_1}^+, \phi_{k_2}^-] [\phi_{k_3}^+, \phi_n^-] : \phi_{k_4} \dots \phi_{k_{n-1}} \phi_n : \end{aligned} \quad (V.74)$$

Siguiendo un procedimiento análogo para cada término de la ecuación (V.69) y aplicando el caso

$n = 2$ para el último término de esta ecuación, se llega a que

$$\begin{aligned}
 T[\phi_1\phi_2\dots\phi_n] = & : \phi_1 \dots \phi_n : + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1\phi_2] | 0 \rangle : \phi_3 \dots \phi_n : \\
 & + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \langle 0 | T[\phi_3\phi_4] | 0 \rangle : \phi_5 \dots \phi_n : \\
 & \vdots \\
 & + \sum_{perm} \langle 0 | T[\phi_1, \phi_2] | 0 \rangle \dots \langle 0 | T[\phi_{n-1}\phi_n] | 0 \rangle
 \end{aligned} \tag{V.75}$$

q.e.d.

con lo que el teorema queda demostrado.

VI. CAMPOS EN INTERACCIÓN

En el capítulo IV se consideró campos que no interactuaban. El hecho que no interactuaban se pudo notar de varias maneras. Por ejemplo, el hamiltoniano resultó ser la suma de osciladores armónicos individuales, o bien la energía total del sistema resultó ser la suma del número de cuantos \hat{n} . Debido a esto, se puede ver que el hamiltoniano y el operador \hat{n} conmutan, con lo que se tiene que \hat{n} es costante. Es por esto que si dos ondas del campo (i.e. partículas) se encontrasen frente a frente, ambas ondas pasaría a través y no se desviarían en ningún caso, es decir no interactuarían. Entonces, para arreglar esto, recordando la discusión que se hizo en el capítulo IV, se puede notar que para poder sumar la energía de los osciladores independientes se hizo la suposición que la energía potencial era cuadrática para desplazamientos pequeños de q_r . Esto influyó en poder linealizar la ecuación, además, con esto las soluciones de la ecuación se pudieron superponer para hacer nuevas soluciones. Si se conserva términos de orden mayor el resultado es una ecuación no lineal cuyas soluciones no es posible obtenerlas mediante la superposición que se hizo. Con esto se espera que dos ondas que se encuentren frente a frente, interactúen de una o diferentes formas y que además el número de cuantos no se mantega constante, resultado que se obtiene experimentalmente en los colisionadores de partículas. Sin embargo, el método para resolver este tipo de problemas debe ser por aproximación o por métodos numéricos ya que los calculos se vuelven sumamente complejos. Debido a que en este trabajo se eligió el método de teoría de perturbaciones, se desarrollará esta teoría para operadores independientes y dependientes del tiempo. Para este último caso es útil además introducir un formalismo llamado *enfoque de interacción* el cual se desarrollará también antes de seguir estudiando a los campos.

No obstante, es importante recalcar que existen algunos detalles cuando se aplica teoría de perturbaciones a partículas con espín por lo cual se prefiere que en este capítulo únicamente se consideren modelos simples que involucren campos escalares de manera que se pueda comprender mejor la esencia del enfoque de perturbaciones aplicada a teoría cuántica de campos. Por último, vale la pena mencionar que en los capítulos siguientes se trabajará con unidades naturales con lo cual $\hbar = c = 1$.

A. Introducción a teoría de perturbaciones

Generalmente la cantidad de hamiltonianos de las que se puede encontrar los respectivos eigenvalores y las eigenfunciones explícitamente es muy pequeña. La teoría de perturbación permite resolver ciertos problemas mediante aproximaciones, de tal forma que se pueda hallar los eigenvalores y eigenfunciones, o bien, es útil para poder hallar la probabilidad que haya transiciones de estados iniciales. La teoría de perturbaciones se divide en dos, casos en donde se considera que los operadores independan del tiempo y casos en los cuales no. Para empezar, considérese un hamiltoniano independiente del tiempo, de la forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}' \quad (\text{VI.1})$$

donde \hat{H}_0 es un hamiltoniano del cual es posible conocer sus eigenvalores y eigenvectores de manera analítica y \hat{H}' es una corrección de \hat{H}_0 . Sin embargo, se debe de suponer que esta corrección es bastante pequeña y para esto se introduce el parámetro λ , el cual es una pequeña cantidad (generalmente positiva) de manera que $\lambda\hat{H}'$ sea lo suficientemente pequeño. Es necesario agregar que en esta introducción a teoría de perturbaciones se enfocará únicamente a operadores hamiltonianos no degenerados pues es la que será necesaria en las siguientes secciones.

Si \hat{H}' y \hat{H}_0 conmutan, el problema de hallar los eigenvalores se torna bastante sencillo, debido a que es posible diagonalizar ambas matrices y encontrar una base común de eigenestados. Si no conmuta entonces las cosas se vuelven más interesantes. A continuación se verá un pequeño ejemplo.

Sea,

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2})$$

y supóngase que

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3})$$

En este ejemplo se usará a λ para denotar los eigenvalores y a δ para referirse al parámetro de

perturbación. Entonces, encontrando los eigenvalores del operador

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \delta \\ \delta & E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.4})$$

se tiene que

$$\lambda^2 - \lambda(E_1 + E_2) + E_1 E_2 - \delta^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(E_1 + E_2) \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4\delta^2}}{2} \quad (\text{VI.5})$$

Sin pérdida de generalidad, sea $E_1 > E_2$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(E_1 + E_2) \pm (E_1 - E_2) \sqrt{1 + \frac{4\delta^2}{(E_1 - E_2)^2}} \right] \quad (\text{VI.6})$$

Si $\delta \ll E_1 - E_2$, es posible expandir la raíz de forma binomial con lo que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= E_1 + \frac{\delta^2}{E_1 - E_2} + O(\delta^4) \\ \lambda_2 &= E_2 - \frac{\delta^2}{E_1 - E_2} + O(\delta^4) \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

Nótese que aunque inicialmente la perturbación era lineal, al resolver los eigenvalores se tiene más potencias de δ en los eigenvalores, o bien, en otras palabras, series infinitas. Además, es posible ver que el criterio para conocer qué tan pequeño debe ser δ depende de la diferencia de E_1 y E_2 .

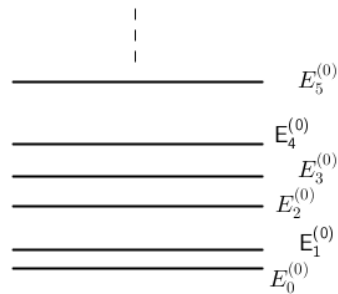
Una vez habiendo visto este sencillo problema para una matriz de 2×2 , se proseguirá para el caso general.

Para esto se debe de suponer que el espectro de energía (los autovalores) de \hat{H}_0 está discretizado, no necesariamente igualmente espaciados, esto es

$$\hat{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^0 |\phi_n^{(0)}\rangle \quad (\text{VI.8})$$

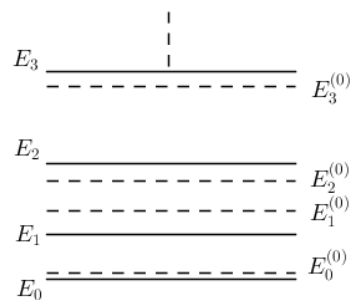
donde el superíndice (0) denota que la eigenfunción o eigenvalor pertenece al operador \hat{H}_0 y el subíndice n denota el grado de excitación de los eigenestados.

Figura VI.1: Estados de energía antes de la perturbación



Cuando se introduce la perturbación, lo que se espera es que los niveles de energía se desplacen o se muevan un poco. Como se dijo anteriormente, para usar teoría de perturbaciones se debe de suponer que la perturbación λ es lo suficientemente pequeña tal que los elementos de la matriz \hat{H}' sean pequeños en comparación con los estados de energía $E_0^{(0)}$, $E_1^{(0)}$, \dots . Debido a esto se supondrá que los estados de energía no se van a entrelazar, es decir que los niveles de energía son distinguibles (Figura No. VI.2).

Figura VI.2: Estados de energía después de la perturbación



Tal y como muestra la Figura No. VI.2, no necesariamente se deben mover todos en una misma dirección.

Entonces, debido a que los estados se desplazarán, se tendrá que

$$\hat{H} |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle \quad (\text{VI.9})$$

Supóngase que $|\phi_n^{(0)}\rangle$ forman una base completa, con lo que es posible que $\langle \phi_n^{(0)} | \phi_l^{(0)} \rangle = \delta_{nl}$, es decir que son ortonormales. Si no lo son, debido a que son una base, es posible construir una a través del método de ortogonalización de Gramm-Schmidt.

Por último, se debe de hacer la siguiente suposición

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad (\text{VI.10})$$

es decir que el eigenvalor E_n es $E_n^{(0)}$ más correcciones de lambda y que es posible representar estas correcciones como una serie de potencias tal y como se hizo en el ejemplo pasado. Esta suposición, además, conlleva a suponer que λ es analítica en $\lambda = 0$ y que dicha serie converge para un radio determinado. Si por ejemplo se descubriese que la primer corrección es proporcional a $\sqrt{\lambda}$ por ejemplo, entonces esta suposición sería errónea y habría que buscar otro método de aproximación u otras alternativas. Regresando a la ecuación (VI.10), los superíndices (1), (2), ... se usan para denotar que $E_n^{(2)}$ es el coeficiente de corrección de λ^2 por ejemplo.

Análogamente a la ecuación (VI.10), se supondrá que

$$|\phi_n\rangle = |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\phi_n^{(2)}\rangle + \dots \quad (\text{VI.11})$$

Ahora bien, si dos series son absolutamente convergentes entonces es posible igualarlas término a término. Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{H} |\phi_n\rangle &= E_n |\phi_n\rangle \\ (\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}') \left[|\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\phi_n^{(1)}\rangle + \dots \right] &= (E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \dots) \left[|\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda |\phi_n^{(1)}\rangle + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda \hat{H}' |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda \hat{H}_0 |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 \hat{H}' |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^3 \hat{H}' |\phi_n^{(2)}\rangle + \\ \lambda^3 \hat{H}_0 |\phi_n^{(3)}\rangle + \lambda^4 \hat{H}' |\phi_n^{(3)}\rangle + \dots = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda E_n^{(0)} |\phi_n^{(1)}\rangle + \\ \lambda E_n^{(1)} |\phi_n^{(0)}\rangle + \lambda^2 E_n^{(0)} |\phi_n^{(2)}\rangle + \lambda^2 E_n^{(1)} |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 E_n^{(2)} |\phi_n^{(0)}\rangle + \\ \lambda^3 E_n^{(0)} |\phi_n^{(3)}\rangle + \lambda^3 E_n^{(1)} |\phi_n^{(2)}\rangle + \lambda^3 E_n^{(2)} |\phi_n^{(1)}\rangle + \lambda^3 E_n^{(3)} |\phi_n^{(0)}\rangle \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 & : \hat{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle \\
\lambda = 1 & : (\hat{H}_0 - E_n^{(0)}) |\phi_n^{(1)}\rangle + (\hat{H}' - E_n^{(1)}) |\phi_n^{(0)}\rangle = 0 \\
\lambda = 2 & : (\hat{H}_0 - E_n^{(0)}) |\phi_n^{(2)}\rangle + (\hat{H}' - E_n^{(1)}) |\phi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(2)} |\phi_n^{(0)}\rangle = 0 \\
\lambda = 3 & : (\hat{H}_0 - E_n^{(0)}) |\phi_n^{(3)}\rangle + (\hat{H}' - E_n^{(1)}) |\phi_n^{(2)}\rangle + E_n^{(2)} |\phi_n^{(1)}\rangle + E_n^{(3)} |\phi_n^{(0)}\rangle = 0 \\
& \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\lambda = m & : (\hat{H}_0 - E_n^{(0)}) |\phi_n^{(m)}\rangle + (\hat{H}' - E_n^{(1)}) |\phi_n^{(m-1)}\rangle + \sum_{k>(n-k)}^n E_n^{(k)} |\phi_n^{(n-k)}\rangle = 0
\end{aligned} \tag{VI.14}$$

Tomando el producto escalar de la primera condición se deduce que

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}_0 - E_n^{(0)} | \phi_n^{(1)} \rangle + \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' - E_n^{(1)} | \phi_n^{(0)} \rangle &= 0 \\
(E_n^{(0)} - E_n^{(0)}) \langle \phi_n^{(0)} | \phi_n^{(1)} \rangle + \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle - E_n^{(1)} &= 0 \\
\Rightarrow E_n^{(1)} = \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle &\equiv H'_{nn}
\end{aligned} \tag{VI.15}$$

donde se usó que $\hat{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle$ (condición $\lambda = 0$) y que $\langle \phi_n^{(0)} | \phi_n^{(0)} \rangle = 1$. Por otro lado, $|\phi_n^{(1)}\rangle$ puede representarse como combinación lineal de la base $|\phi_n^{(0)}\rangle$, con lo que

$$|\phi_n^{(1)}\rangle = \sum_l c_{nl} |\phi_n^{(0)}\rangle \tag{VI.16}$$

Sustituyendo la ecuación (VI.16) en la condición $\lambda = 1$ se tiene que

$$\left(\hat{H}_0 - E_n^{(0)} \right) \sum_l c_{nl} |\phi_l^{(0)}\rangle + \left(\hat{H}' - \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle \right) |\phi_n^{(0)}\rangle = 0 \tag{VI.17}$$

Se debe de encontrar ahora los coeficientes c_{nl} . Para esto se debe de tomar el producto escalar de

ambos lados y suponer que $n \neq m$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m^{(0)} | \sum_l c_{nl} (\hat{H}_0 - E_n^{(0)}) | \phi_l^{(0)} \rangle + \langle \phi_m^{(0)} | \hat{H}' - H'_{nn} | \phi_n^{(0)} \rangle &= 0 \\
(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \sum_l \langle \phi_m^{(0)} | c_{nl} | \phi_l^{(0)} \rangle + \langle \phi_m^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle - H'_{nn} \delta_{mn} &= 0 \\
(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) \sum_l \delta_{ml} c_{nl} + \langle \phi_m^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle - H'_{nn} \delta_{mn} &= 0 \\
(E_m^{(0)} - E_n^{(0)}) c_{nm} + H'_{mn} - H'_{nn} \delta_{mn} &= 0
\end{aligned} \tag{VI.18}$$

$$c_{nm} = \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{VI.19}$$

La ecuación (VI.17) es insuficiente para encontrar c_{nn} , sin embargo este es igual a cero debido a que

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n | \phi_n \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_n^{(0)} | \phi_n^{(0)} \rangle + \lambda \langle \phi_n^{(1)} | \phi_n^{(0)} \rangle + \lambda \langle \phi_n^{(0)} | \phi_n^{(1)} \rangle + \lambda^2 \langle \phi_n^{(1)} | \phi_n^{(1)} \rangle &= 1 \\
1 + \lambda c_{nn} + \lambda c_{nn} + \lambda^2 c_{nn} &= 1 \\
\Rightarrow c_{nn} &= 0
\end{aligned} \tag{VI.20}$$

en donde se utilizó la suposición que $\langle \phi_m^{(0)} | \phi_n^{(0)} \rangle = \delta_{nm}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\phi_n^{(1)}\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\phi_m^{(0)}\rangle \\
E_n^{(1)} &= \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(0)} \rangle = H'_{nn}
\end{aligned} \tag{VI.21}$$

La ecuación (VI.21) muestra las correcciones de primer orden. Siguiendo un procedimiento similar se tiene que las correcciones de segundo orden están dadas por

$$E_n^{(2)} = \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_n^{(1)} \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_m^{(0)} \rangle = \sum_{m \neq n} \frac{H'_{mn} H'_{nm}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{VI.22}$$

O bien, dado que \hat{H}' es hermítico,

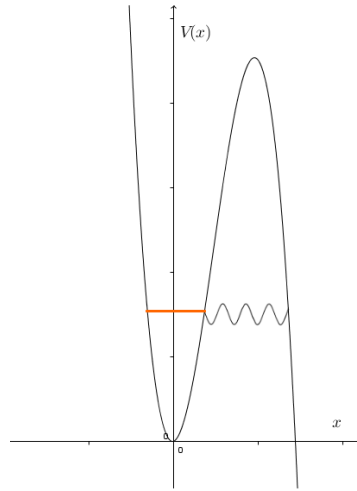
$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{VI.23}$$

con lo que

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda H'_{nn} + \lambda^2 \sum_{m \neq n} \frac{|H'_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} + \dots \quad (\text{VI.24})$$

Una de las aplicaciones que tiene esta teoría es por ejemplo al considerar algún oscilador anarmónico. Generalmente se elige estudiar un hamiltoniano de la forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda x^4$ con $\hat{H}_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Si se eligiese el término λx en lugar de λx^4 no se obtiene mayor resultado debido a que se puede completar al cuadrado y hacer una sustitución con lo cual se caería al caso en el que si solo se estuviese considerando \hat{H}_0 . Si se eligiese el término λx^2 agrupando la expresión se tendría una ecuación equivalente a un oscilador armónico desplazado en el eje de coordenadas. Ahora bien, si se elige λx^3 sucede algo interesante y es que clásicamente se tendría un potencial tal y como lo muestra la Figura No. VI.3. Si la perturbación es lo suficientemente grande la partícula puede irse a $x \rightarrow -\infty$. Cuánticamente también se tiene esto pero además se tiene que existe un efecto túnel. Sin embargo, si el tiempo del efecto túnel es muy grande, es posible aproximar la energía con unos cuantos órdenes de corrección ya que la partícula se encuentra en un estado *metastable* (punto de equilibrio estable).

Figura VI.3: Potencial cúbico



Para el caso de campos, si se considera por ejemplo la densidad lagrangiana

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 - \lambda \hat{\phi}^3 \equiv \hat{\mathcal{L}}_{KG} - \lambda \hat{\phi}^3 \quad (\text{VI.25})$$

con $\lambda > 0$ y el subíndice *KG* haciendo referencia a la ecuación de Klein-Gordon, tal y como se discutió anteriormente, el potencial tiene un estado metastable. Esto quiere decir que para λ

pequeños, el potencial $V(q)$ conserva la forma del oscilador armónico cercano a $q = 0$, pero para q negativo y suficientemente grande, este tenderá a $-\infty$. Análogamente al caso de mecánica cuántica, se tiene además un efecto túnel, sin embargo, las interacciones del tipo $\hat{\phi}^3$ son útiles para describir interacciones entre dos o más campos en lugar de describir interacciones con él mismo. Es decir, si se considera por ejemplo interacciones entre un potencial cuadrático y uno lineal, $\lambda \hat{\phi}_A^2 \hat{\phi}_B$, o bien interacciones entre tres campos, $\lambda \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C$, los problemas anteriormente mencionados no aparecen. Más adelante se especificará qué tipo de interacción es la que se trabajará, pero por el momento se seguirá desarrollando la teoría con $\lambda \hat{\phi}^3$. Por último, debido a que el hamiltoniano asociado es

$$\hat{H} = \hat{H}_{KG} + \hat{H}' \quad (\text{VI.26})$$

y dado que se conoce

$$\hat{H}_{KG} = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}_{KG} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\hat{\Pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] \quad (\text{VI.27})$$

el objetivo será entonces aplicar teoría de perturbaciones a la ecuación (VI.26) escribiendo a \hat{H}' como

$$\hat{H}' = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}' = \lambda \int d^3x \hat{\phi}^3 \quad (\text{VI.28})$$

Sin más que agregar, se procederá a desarrollar el formalismo que será útil para el estudio de teoría de perturbaciones con operadores dependientes del tiempo.

B. Enfoque de interacción

Este enfoque, que se presentará a continuación, fue desarrollado por primera vez por Paul Dirac, el cual representa un paso crucial para la teoría y es que se dijo anteriormente, en el capítulo IV, que se trabajaría con el enfoque de Heisenberg, *HP*, en donde la dependencia del tiempo la tienen los operadores y no los eigenestados $|\Psi\rangle$, como lo es en el enfoque de Schrödinger, *SP*.

Sin embargo, debe de notarse que la dependencia del tiempo del operador ϕ , por ejemplo, fue derivada del hamiltoniano \hat{H}_{KG} , ya que tal y como se probó, debido a que $\hat{\phi}$ cumplía con la definición de $\frac{d}{dt} \hat{\phi}$ del enfoque de Heisenberg, entonces $\hat{\phi}$ cumplía con la ecuación de onda (ecuación (IV.100) y (IV.101)). No obstante, esto ya no es posible afirmarlo ahora ya que no se sabe cómo

$\hat{H} = \hat{H}_{KG} + \hat{H}'$ evoluciona en el tiempo. Se debería de aplicar la ecuación de Euler-Lagrange y encontrar, si la hay, una solución analítica a la ecuación diferencial.

Buscando un alternativa más sencilla, considérese entonces el enfoque de Schrödinger en donde los estados evolucionan de la siguiente manera

$$\hat{\mathcal{H}} |\Psi(t)\rangle = i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \quad (\text{VI.29})$$

En este enfoque los operadores de campo que aparecen en la densidad hamiltoniana $\hat{\mathcal{H}}$ son evaluados en un tiempo fijo, dígase $t = 0$ por convención, con lo cual los dos enfoques son equivalentes.

No obstante, el problema de trabajar de esta forma es que la invarianza de Lorentz no se manifiesta. Al final las cantidades físicas deben de resultar correctas pero es mucho más conveniente tener todo viéndose en orden y consistente a medida que se desarrolla los cálculos. Es por esto que se introduce un tercer enfoque, el enfoque de interacción, en el cual son los operadores y los estados los que son dependientes del tiempo pero en una manera que se adapta perfectamente a la teoría de perturbaciones.

Con este enfoque se pretende dividir en dos la dependencia del tiempo, una dependencia proveniente de \hat{H}_0 y la otra de \hat{H}' de tal manera que tomando el límite cuando $\hat{H}' \rightarrow 0$ se regresa al enfoque de Heisenberg (Aitchison & Hey, 2003).

Se parte entonces considerando el operador unitario $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$ tal y como se hace para el caso de los enfoques de Schrödinger y Heisenberg,

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t} \Rightarrow \hat{A} = e^{-i\hat{H}t} \hat{A}(t) e^{i\hat{H}t} \quad (\text{VI.30})$$

donde \hat{A} es un operador en el enfoque de Schrödinger y $\hat{A}(t)$ el mismo operador pero en el enfoque de Heisenberg. Ahora bien, nótese que la conjugada hermítica de \hat{U} es

$$\hat{U}^\dagger = \left(e^{-i\hat{H}t} \right)^\dagger = e^{i\hat{H}t} = \hat{U}^{-1} \quad (\text{VI.31})$$

Entonces, un operador en el enfoque de interacción se define como

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (\text{VI.32})$$

donde \hat{A} es un operador en el enfoque de Schrödinger. Los operadores que sean descritos en el enfoque de interacción serán denotados por el subíndice I. Análogamente al caso del enfoque de Heisenberg se tiene que

$$\frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} = -i \left[\hat{A}_I(t), \hat{H}_0 \right] \quad (\text{VI.33})$$

Si se desea una expresión que relacione los operadores en el enfoque de Heisenberg con los del enfoque de interacción se debe de tomar la ecuación (VI.32) y sustituir \hat{A} de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \hat{A}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t} \hat{A}(t) e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= e^{-i\hat{H}t} \hat{A}(t) e^{i\hat{H}t} \\ \hat{A}_I(t) &= \hat{U} \hat{A}(t) \hat{U}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

donde ahora $\hat{U} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t} = e^{-i\hat{H}t}$.

Por otro lado, debido a que la definición del momentum conjugado no incluye derivadas temporales explícitas, es posible definirlo de igual manera a como se hizo anteriormente,

$$\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \hat{\phi}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{KG}}{\partial \hat{\phi}} = \hat{\phi}(\vec{x}, t) \quad (\text{VI.35})$$

Ahora bien, considérese

$$\begin{aligned} \left[\hat{\phi}_I(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_I(\vec{y}, t) \right] &= \hat{\phi}_I \hat{\Pi}_I - \hat{\Pi}_I \hat{\phi}_I \\ &= \hat{U} \hat{\phi} \hat{U}^{-1} \hat{U} \hat{\Pi} \hat{U}^{-1} - \hat{U} \hat{\Pi} \hat{U}^{-1} \hat{U} \hat{\phi} \hat{U}^{-1} \\ &= \hat{U} \hat{\phi} \hat{\Pi} \hat{U}^{-1} - \hat{U} \hat{\Pi} \hat{\phi} \hat{U}^{-1} \\ &= \hat{U} \left[\hat{\phi}, \hat{\Pi} \right] \hat{U}^{-1} = \hat{U} i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \hat{U}^{-1} \\ &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{VI.36})$$

Por lo que se puede notar que la relación de conmutación entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\Pi}$ permanece igual en este enfoque.

Prosiguiendo con el desarrollo del enfoque de interacción, los estados se definen como

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle \quad (\text{VI.37})$$

donde $|\Psi(t)\rangle$ es un estado en el enfoque de Schrödinger. Para encontrar como evoluciona $|\Psi(t)\rangle_I$,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I &= i \frac{d}{dt} \left[e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle \right] \\ &= -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle + i e^{i\hat{H}_0 t} \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle \\ &= -\hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle + \hat{H}_0 e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle + \hat{H}' e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle \\ &= \hat{H}'_I |\Psi(t)\rangle_I \quad \text{donde } \hat{H}'_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

con lo que

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = \hat{H}'_I |\Psi(t)\rangle_I \quad (\text{VI.39})$$

Es decir, todos los operadores en el enfoque de interacción depende del tiempo como si se estuviese trabajando en el enfoque de Heisenberg, únicamente que la dependencia está dada por \hat{H}_0 y no por \hat{H} . Por otro lado, los estados evolucionan como si estuviesen en el enfoque de Schrödinger, únicamente que la ecuación de Schrödinger está dada por el operador \hat{H}'_I y no por \hat{H} .

En resumen, en el enfoque de interacción se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{A}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \\ \frac{d\hat{A}_I(t)}{dt} &= -i \left[\hat{A}_I(t), \hat{H}_0 \right] \\ |\Psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi(t)\rangle \\ i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I &= \hat{H}'_I(t) |\Psi(t)\rangle_I \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

C. Operador \hat{S}

Una vez desarrollado el formalismo del enfoque de interacción se desearía aplicar dicho formalismo a procesos de decaimiento o a deflexión de trayectorias de partículas. Para efectuar esto es necesario introducir el operador \hat{S} .

Para esto, considérese el caso en que dos partículas están próximas a encontrarse (Figura No. VI.4)

Para un tiempo lo suficientemente distante, dígame $t \rightarrow -\infty$, se espera que el efecto de la perturbación, es decir de \hat{H}'_I , sea despreciable pues las partículas no han interactuado en absoluto.

De la ecuación (VI.39) se observa que si $\hat{H}'_i(t)$ es despreciable para $t \rightarrow -\infty$ entonces $|\Psi(-\infty)\rangle_I$ del sistema es constante, por lo que es autoestado de \hat{H}_0 . Este autoestado inicial se denotará por

$$|\Psi(-\infty)\rangle_I = |i\rangle \quad (\text{VI.41})$$

A medida que el tiempo avanza, las partículas se aproximan y su trayectoria puede *torcerse*. Luego, para un tiempo lo suficientemente grande, dígame $t \rightarrow \infty$, el efecto de \hat{H}'_I vuelve a ser despreciable con lo que $|\Psi(\infty)\rangle_I$ del sistema vuelve a ser constante, sin embargo, nada nos asegura que el estado de las partículas será igual que al inicio debido a que pudo haber existido interacción entre ellas. Entonces se dirá que el sistema en $t \rightarrow \infty$ es $|\Psi(\infty)\rangle_I$. No obstante, ya que $|\Psi(\infty)\rangle_I$ es constante, puede representarse como una combinación lineal de la base de eigenvectores de \hat{H}_0 ; esta base se representará como $|f\rangle$.

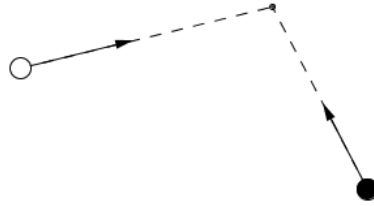
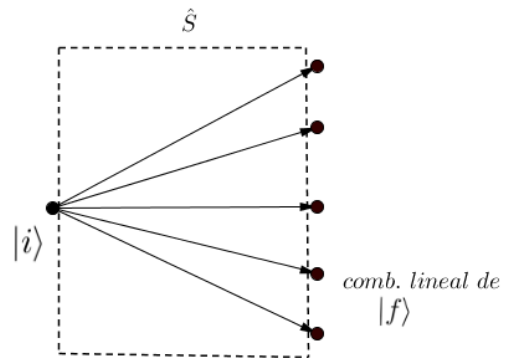
Entonces, el operador $\hat{S}(t, t_0)$ se define como

$$|\Psi(t)\rangle_I = \hat{S}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I \quad (\text{VI.42})$$

En algunos libros este operador porta el nombre de *matriz S*, sin embargo para el desarrollo que viene a continuación se prefiere ver a este como un operador abstracto y es que nótese que \hat{S} es un objeto un tanto complicado, pues contiene información de todas las posibles transiciones de $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, véase la Figura No. VI.5.

Para conocer un poco más acerca de este operador, se prosigue a desarrollar una breve introducción a teoría de perturbaciones para operadores dependientes del tiempo. El problema es el siguiente,

Figura VI.4: Colisión de partículas

Figura VI.5: Descripción gráfica del operador \hat{S} 

se tiene

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}'(t) \quad (\text{VI.43})$$

y se quiere estudiar la transición de los estados. En el enfoque de interacción se tiene que

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I &= \lambda \hat{H}'_I(t) |\Psi(t)\rangle_I \\ i |\Psi(t_0)\rangle_I \frac{\partial}{\partial t} \hat{S}(t, t_0) &= \lambda \hat{H}'_I(t) \hat{S}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

Debido a que se cumple para cualquier $|\Psi(t_0)\rangle_I$, se tiene que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{S}(t, t_0) = \lambda \hat{H}'_I(t) \hat{S}(t, t_0) \quad (\text{VI.45})$$

Por otro lado, la exponencial de un operador se puede definir a partir de su expansión en serie

$$e^{i\hat{H}_0 t} \equiv 1 + i\hat{H}_0 t + \frac{1}{2!}(i\hat{H}_0 t)^2 + \dots \quad (\text{VI.46})$$

con lo cual

$$\hat{H}_0 |\phi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}\rangle \Rightarrow e^{i\hat{H}_0 t} |\phi_n^{(0)}\rangle = e^{iE_n^{(0)} t} |\phi_n^{(0)}\rangle \quad (\text{VI.47})$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |\Psi_n(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t} |\Psi_n(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} |\Psi_n\rangle \\ &= e^{-i\hat{H}' t} |\Psi_n\rangle \\ &= \sum_n c_n e^{-i\hat{H}' t} |\phi_n^{(0)}\rangle \\ &= \sum_n c_n e^{-iE_n' t} |\phi_n^{(0)}\rangle \\ &= \sum_n c_n(t) |\phi_n^{(0)}\rangle \end{aligned} \quad (\text{VI.48})$$

donde $|\phi_n^{(0)}\rangle$ son los autoestados de \hat{H}_0 . Por otro lado, se debe de suponer que estos coeficientes $c_n(t)$ se encuentran a partir de órdenes de corrección con lo que

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{VI.49})$$

Entonces, de la ecuación (VI.48) se tiene que

$$c_n(t) = \langle \phi_n^{(0)} | \Psi(t) \rangle_I = \langle \phi_n^{(0)} | \hat{S} | \Psi(t_0) \rangle_I \equiv S_{ni}(t) \quad (\text{VI.50})$$

$$\Rightarrow i \frac{d}{dt} S_{ni}(t) = \lambda \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}'_I(t) | \Psi(t) \rangle_I = \lambda \langle \phi_n^{(0)} | e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} | \Psi(t) \rangle_I \quad (\text{VI.51})$$

Debido a que $I = \sum_m |\phi_m^{(0)}\rangle \langle \phi_m^{(0)}|$, entonces

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} S_{ni}(t) &= \lambda e^{iE_n^{(0)} t} \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} I | \Psi(t) \rangle_I \\ &= \sum_m \lambda e^{iE_n^{(0)} t} e^{-iE_m^{(0)} t} \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_m^{(0)} \rangle_I \langle \phi_m^{(0)} | \Psi(t) \rangle_I \\ &= \sum_m \lambda e^{i(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}) t} \langle \phi_n^{(0)} | \hat{H}' | \phi_m^{(0)} \rangle_I S_{mi}(t) \end{aligned} \quad (\text{VI.52})$$

Sea $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = \omega_{mn}$, entonces

$$i \frac{d}{dt} S_{ni}(t) = \lambda \sum_m e^{i\omega_{mn}t} H'_{nm} S_{mi}(t) \quad (\text{VI.53})$$

El problema se reduce en encontrar estos coeficientes $S_{ni}(t)$. El desarrollo que se acaba de hacer se conoce dentro de la teoría de perturbaciones como el método de variación de constantes. No obstante, resulta difícil insertar $S_{ni}(t) = S_{ni}^{(0)} + S_{ni}^{(1)}(t) + S_{ni}^{(2)}(t) + \dots$ en la ecuación (VI.53) y encontrar los órdenes de corrección. En vez de esto, se desarrollará un método que se conoce como la expansión de Dyson el cual permite conocer más fácil estos coeficientes.

1. La expansión de Dyson: Regresando a la ecuación (VI.44) e integrando desde $-\infty$ hasta t , se obtiene que

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt'} |\Psi(t')\rangle_I dt' &= |\Psi(t)\rangle_I - |i\rangle \\ \Rightarrow |\Psi(t)\rangle_I &= |i\rangle - i\lambda \int_{-\infty}^t dt' \hat{H}'_I(t') |\Psi(t')\rangle_I \end{aligned} \quad (\text{VI.54})$$

Para resolver esta ecuación integral se utilizará el método de aproximación de Born frecuentemente usado en libros de mecánica cuántica. Este método consiste en tomar un valor inicial para $|\Psi(t)\rangle_I$ y resolver la integral. Posteriormente se inserta nuevamente el valor obtenido del cálculo en $|\Psi(t)\rangle_I$ haciendo así un método iterativo o recursivo. El valor inicial que se tomará es $|\Psi(t_1)\rangle_I = 0$, de tal forma que si $\hat{H}'_I(t_1)$ se anula entonces $|\Psi(t)\rangle_I^{(0)} = |i\rangle$. Entre más iteraciones se hagan, mejor será la aproximación. Las iteraciones tendran la siguiente forma

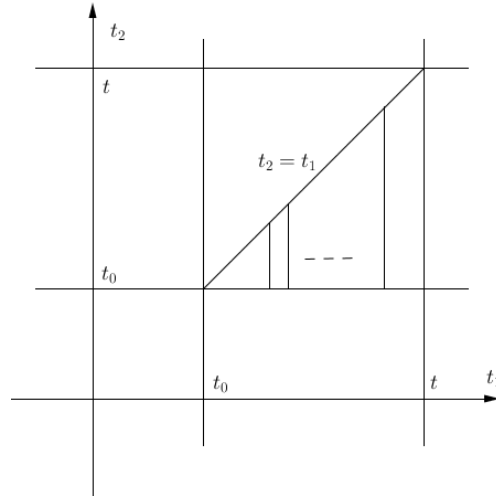
$$|\Psi(t_1)\rangle_I^{(1)} = |i\rangle - i\lambda \int_{-\infty}^t dt_1 \hat{H}'_I(t_1) |i\rangle \quad (\text{VI.55})$$

$$|\Psi(t_1)\rangle_I^{(2)} = \left[1 + \lambda \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1)) dt_1 + \lambda^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1)) (-i\hat{H}'_I(t_2)) \right] |i\rangle \quad (\text{VI.56})$$

Debido a las ecuaciones (VI.41) y (VI.42) se puede escribir a $|\Psi(\infty)\rangle_I$ como

$$|\Psi(\infty)\rangle_I = \hat{S} |i\rangle \quad (\text{VI.57})$$

Figura VI.6: Región de integración de la integral doble (previo a tomar los límites $\lim_{t \rightarrow \infty}$ y $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty}$)



Entonces, tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ y considerando las ecuaciones (VI.55) y (VI.56) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \lim_{t \rightarrow \infty} 1 + \lambda \int_{-\infty}^t (-i\hat{H}'_I(t_1))dt_1 + \lambda^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) + \dots \\ &= 1 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (-i\hat{H}'_I(t_1))dt_1 + \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

donde los puntos suspensivos significan que se debe de hacer el proceso de iteración infinitas veces para conocer el valor exacto. Luego, observando detenidamente los límites, se puede notar que la región de integración es la siguiente (Figura No. VI.6).

Si los operadores $\hat{H}_I(t_1)$ y $\hat{H}_I(t_2)$ conmutaran, entonces se podría integrar en todo el rectángulo y dividir dentro de dos el valor de la integral. No obstante, debido a que estos operadores no conmutan, si se quiere escribir la ecuación (VI.58) como la integral de todo el rectángulo, se debe de partirla

en dos, es decir

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \int_{-t_0}^t dt_1 \int_{-t_0}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) \\ &= \frac{\lambda^2}{2!} \left[\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_2))(-i\hat{H}'_I(t_1)) \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.59})$$

Nótese que el $\frac{1}{2!}$ se debe a que en la ecuación (VI.58) existen 2! formas de ordenar a t_1 y t_2 , $t_2 < t_1$. Para el siguiente término, el cual será una integral triple, existe 3! formas de ordenar los límites de integración por lo que la ecuación (VI.59) sería igual a la suma de seis integrales, todas divididas por $\frac{1}{3!}$. Regresando a la ecuación (VI.59), es posible notar que está ordenada temporalmente, es decir, en la región en donde $t_1 > t_2$, los términos que dependen de t_1 están a la izquierda y los que depende de t_2 a la derecha. Por otra parte, la otra integral que viene a sumarse, representa la región en donde $t_1 < t_2$ y los términos que depende de t_2 ahora están a la izquierda y los que dependen de t_1 ahora están a la derecha.

La ecuación (VI.40) es posible escribirla entonces por medio de la función Heaviside, con lo cual resulta ser igual a

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) \\ &= \frac{\lambda^2}{2!} \left[\int_{-t_0}^t dt_1 \int_{-t_0}^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) + \theta(t_2 - t_1) (-i\hat{H}'_I(t_2))(-i\hat{H}'_I(t_1)) \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

Por último, esta forma de escribir la ecuación (VI.60) es muy parecida a la forma en cómo se ordenaron los operadores $\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)$ en el capítulo anterior bajo el operador T . Entonces,

$$\lambda^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) = \frac{\lambda^2}{2!} \left[\int_{-t_0}^t dt_1 \int_{-t_0}^{t_1} dt_2 T \left[(-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) \right] \right] \quad (\text{VI.61})$$

Si el lector desea, puede comparar este resultado con el resultado que la referencia (Aitchison & Hey, 2003) presenta. Únicamente, como se podrá dar cuenta, la expresión que se encuentra en dicho libro a diferencia a la que se escribirá a continuación, no cuenta con el parámetro λ . Esto es debido a que en ciertas referencias, se escribe la ecuación (VI.1) como $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ y se asume que el

parámetro λ está incluido en los componentes de \hat{H}' . Prosiguiendo con el desarrollo de la integral anterior, se tiene que

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T \left[(-i\hat{H}'_I(t_1))(-i\hat{H}'_I(t_2)) \dots (-i\hat{H}'_I(t_n)) \right] \quad (\text{VI.62})$$

Debido a que

$$H'_I(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'(\vec{x}, t) d^3x = \int \hat{\mathcal{H}}'(x) d^3x \quad (\text{VI.63})$$

la ecuación (VI.62) se puede reescribir como

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \left[(-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1))(-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) \dots (-i\hat{\mathcal{H}}'_I(x_n)) \right] \quad (\text{VI.64})$$

La ecuación (VI.64) es conocida como la expansión de Dyson, o bien como series de Dyson (Aitchison & Hey, 2003). Para encontrar los coeficientes S_{fi} se prosigue a hacer lo siguiente. Usando la ecuación (VI.57),

$$\begin{aligned} |\Psi(\infty)\rangle_I = \hat{S} |i\rangle &= \sum_f |f\rangle \langle f | \hat{S} |i\rangle \equiv \sum_f S_{fi} |f\rangle \\ \Rightarrow S_{fi} &= \langle f | \hat{S} |i\rangle \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

Sustituyendo las series de Dyson, se obtiene

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle f | \hat{H}'_I(t_1) |i\rangle + i^2\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \langle f | \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) |i\rangle + \dots \\ &= \delta_{fi} - i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \langle f | \hat{H}'_I(t_1) |i\rangle - \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \sum_m \langle f | \hat{H}'_I(t_1) |m\rangle \langle m | \hat{H}'_I(t_2) |i\rangle + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.66})$$

De nuevo, tomando

$$\begin{aligned}
\langle f | \hat{H}'_I | i \rangle &= \langle f | e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' e^{-i\hat{H}_0 t} | i \rangle \\
&= e^{i(E_f - E_i)t} \langle f | \hat{H}' | i \rangle \\
&= e^{i(E_f - E_i)t} H'_{fi} \\
&= e^{i\omega_{fi}t} H'_{fi}(t_1)
\end{aligned} \tag{VI.67}$$

Con lo que

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(0)} &= \delta_{fi} \\
S_{fi}^{(1)} &= -i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{fi}t_1} H'_{fi} dt_1 \\
S_{fi}^{(2)} &= (-1)\lambda^2 \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 e^{i\omega_{fm}t_1 + i\omega_{mi}t_2} H'_{fm}(t_1) H'_{mi}(t_2) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{VI.68}$$

y así sucesivamente. La interpretación que se le da a estos coeficientes es que entre más ordenes de corrección se tomen en cuenta, mejor será la aproximación de conocer cómo es la transición del estado inicial al estado final. Esto se verá reflejado en que cada vez se están considerando más y más diferentes posibles transiciones entre estos dos estados. No obstante, las posibles transiciones de órdenes mayores son menos probables debido a que se supuso que esta serie de coeficientes converge. Para aclarar mejor esta idea y el significado de dichos ordenes de corrección, se desarrollarán estos coeficientes para una teoría llamada *Teoría ABC*, la cual es una idealización de un mundo, el cual consta únicamente de tres partículas. No obstante, antes de entrar a tal teoría se definirá lo que es la probabilidad de transición, la cual será útil para secciones posteriores.

La probabilidad de transición del estado $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ viene dada por

$$P_{if}(t) = |S_{fi}(t)|^2 = |S_{fi}^{(1)}(t) + S_{fi}^{(2)}(t) + \dots|^2 \tag{VI.69}$$

Nótese que si $\langle i|i\rangle = 1 = \langle \Psi(\infty)|\Psi(\infty)\rangle_I$, entonces

$$\langle i|i\rangle = 1 = \langle \Psi(\infty)|\Psi(\infty)\rangle_I = \langle i|\hat{S}^\dagger \hat{S}|i\rangle \Rightarrow \hat{S}^\dagger \hat{S} = I \tag{VI.70}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 = \langle i|i \rangle &= \langle i|\hat{S}^\dagger \hat{S}|i \rangle = \sum_k \langle i|\hat{S}^\dagger \hat{S}|k \rangle \langle k|\hat{S}^\dagger \hat{S}|i \rangle = \sum_k \left(\langle k|\hat{S}^\dagger \hat{S}|i \rangle \right)^* \langle k|\hat{S}^\dagger \hat{S}|i \rangle \\ &= \sum_k S_{ki}^* S_{ki} \end{aligned} \quad (\text{VI.71})$$

y debido a que $\langle f|i \rangle = 0 \Rightarrow \sum_k S_{ki}^* S_{ki} = \delta_{fi}$, entonces haciendo $i = f$ se tiene que

$$\sum_k S_{kf}^* S_{ki} = \sum_k |S_{ki}|^2 = 1 \quad (\text{VI.72})$$

lo cual muestra que la suma de todas las probabilidades parciales debe ser igual a uno.

D. Aplicación a teoría "ABC"

La teoría anteriormente desarrollada se discutió que posee inconvenientes al contar con un término $\hat{\phi}^3$ y ser aplicada a un mismo campo en interacción, sin embargo, se debe de aplicar esta teoría a diferentes campos que estén en interacción. Prosiguiendo como lo hace el libro de (Aitchison & Hey, 2003), se aplicará esta teoría a un "mundo" idealizado, el cual contiene únicamente tres tipos de campos escalares cuyas partículas se representan como partículas A, partículas B y partículas C, las cuales poseen una masa m_a , m_b y m_c , respectivamente. Estos campos escalares interactúan entre sí mediante el término $g\hat{\phi}_A\hat{\phi}_B\hat{\phi}_C$, donde g es un constante. De ahora en adelante se omitirá el subíndice I , ya que todos los operadores estarán en el enfoque de interacción.

Entonces, el hamiltoniano a estudiarse es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' \quad (\text{VI.73})$$

donde,

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=A,B,C} \int \left[\hat{\Pi}_i^2 + (\nabla \hat{\phi}_i)^2 + m_i^2 \hat{\phi}_i^2 \right] d^3x \quad (\text{VI.74})$$

$$\hat{H}' = g \int d^3x \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C \equiv \int d^3x \hat{\mathcal{H}}' \quad (\text{VI.75})$$

Cada campo $\hat{\phi}_i$ para $i = A, B, C$ tiene la forma de los campos definidos en el capítulo IV, únicamente que como se dijo, están en el enfoque de interacción.

Es por esto y por la relación que se dedujo en la ecuación (VI.79) que los operadores \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i deben obedecer

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i(k), \hat{a}_j^\dagger(k')] &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ij} \quad i, j = A, B, C \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j] &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.76})$$

Es decir, los operadores asociados a diferentes partículas siempre conmutan. A continuación se estudiarán algunos procesos para este tipo de partículas.

1. Proceso No.1, el decaimiento $C \rightarrow A + B$: Nótese que la constante g desempeña el mismo papel que el parámetro λ en la teoría anteriormente desarrollada. Además, se supone que este parámetro sea pequeño para poder desempeñar teoría de perturbaciones. Entonces, a medida que se calculan los órdenes de corrección de los coeficientes, nótese que el primer orden de corrección depende de g , el segundo de g^2 y así sucesivamente, con lo que se observa que $g > g^2 > g^3 \dots \Rightarrow |\Psi(t)\rangle^{(1)} > |\Psi(t)\rangle^{(2)} > |\Psi(t)\rangle^{(3)} > \dots$ ya que además se está suponiendo que la serie es convergente. Entonces, como se dijo anteriormente, entre más términos se tomen de la serie, la aproximación será mejor, pero para el propósito del trabajo, basta con conocer el orden de corrección con el menor orden de g , no nulo, el cual representará la transición más probable.

Entonces, considérese el decaimiento de una partícula C en dos partículas, A y B . El estado inicial $|i\rangle$ consiste en una partícula C con un 4-momentum p_C y el estado final consiste en una partícula A y una B con 4-momentum p_A y p_B respectivamente.

Entonces los coeficientes están dados por

$$S_{fi} \langle p_A, p_B | \hat{S} | p_C \rangle \quad (\text{VI.77})$$

$$S_{fi}^{(0)} = \langle p_A, p_B | p_C \rangle = 0 \quad (\text{VI.78})$$

al ser ortonormales.

$$\begin{aligned}
 S_{fi}^{(1)} \equiv \mathcal{A}_{fi} &= \langle p_A, p_B | -ig \int T[\hat{\mathcal{H}}'(x_1)] d^4x_1 | p_C \rangle \\
 &= -ig \langle p_A, p_B | \int d^4x T[\hat{\phi}_A(x)\hat{\phi}_B(x)\hat{\phi}_C(x)] | p_C \rangle
 \end{aligned}
 \tag{VI.79}$$

Tal y como se vio en el capítulo IV,

$$|p_i\rangle = N \hat{a}^\dagger(p_i) |0\rangle \tag{VI.80}$$

donde N es una constante de normalización. Elíjase a esta constante como $N = \sqrt{2E_i}$ donde $E_i = \sqrt{m_i^2 + p_i^2}$. Obsérvese que debido a que se está trabajando en la base de momentum, la relación de completitud es

$$\int \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} |p_i\rangle \langle p_i| = 1 \tag{VI.81}$$

Para resolver la ecuación (VI.79), primero se debe de notar que

$$\begin{aligned}
 [\hat{\phi}_i^-, \hat{a}_i^\dagger] &= [\hat{\phi}_i^+, \hat{a}_i] = [\hat{\phi}_i^\pm, \hat{a}_j^\dagger] = [\hat{\phi}_i^\pm, \hat{a}_j] = 0 \\
 [\hat{\phi}_C^+, (\sqrt{2E_C}) \hat{a}_C^\dagger] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \hat{a}_C(k) e^{-ik \cdot x} \sqrt{2E_C} \hat{a}_C^\dagger(p_C) \\
 &\quad - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{2E_C}}{\sqrt{2E_k}} \hat{a}_C^\dagger(p_C) \hat{a}_C(k) e^{-ik \cdot x} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \delta^3(p_C - k) (2\pi)^3 e^{-ik \cdot x} \\
 &= e^{-ip_C \cdot x}
 \end{aligned}
 \tag{VI.82}$$

con $p_C = (\sqrt{p_C^2 + m_C^2}, \vec{p}_C)$ y donde $i \neq j$. Entonces la ecuación (VI.79) se puede reescribir como

$$\langle 0 | \sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \sqrt{2E_C} \hat{a}_A(p_A) \hat{a}_B(p_B) T \left[(\hat{\phi}_A^+ + \hat{\phi}_A^-) (\hat{\phi}_B^+ + \hat{\phi}_B^-) (\hat{\phi}_C^+ + \hat{\phi}_C^-) \right] \hat{a}_C^\dagger(p_C) | 0 \rangle
 \tag{VI.83}$$

Por el teorema de Wick desarrollado en el capítulo V, se tiene que

$$T[\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C] = : \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C : + \sum_{perm} \langle 0 | T(\hat{\phi}_A \hat{\phi}_B) | 0 \rangle \hat{\phi}_C = : \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C : \quad (VI.84)$$

donde la última igualdad fue posible debido a las ecuaciones (V.57), (V.58) y a las relaciones que presenta la ecuación (VI.82) (los conmutadores se hacen cero). Entonces,

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \sqrt{2E_C} \langle 0 | \hat{a}_A(p_A) \hat{a}_B(p_B) : \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{\phi}_C : \hat{a}_C^\dagger(p_C) | 0 \rangle \\ &= \sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \langle 0 | \hat{a}_A(p_A) \hat{a}_B(p_B) : \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B : e^{-ip_C \cdot x} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (VI.85)$$

donde de nuevo se utilizó las relaciones mostradas en la ecuación (VI.82). Utilizando un resultado análogo a dichas ecuaciones se obtiene que

$$\sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \langle 0 | \hat{a}_A(p_A) \hat{a}_B(p_B) : \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B : e^{-ip_C \cdot x} | 0 \rangle = e^{ip_A \cdot x} e^{ip_B \cdot x} e^{-ip_C \cdot x} = e^{i(p_A + p_B - p_C) \cdot x} \quad (VI.86)$$

Entonces,

$$\mathcal{A}_{fi} = -ig \int d^4x e^{i(p_A + p_B - p_C) \cdot x} = -ig(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C) \quad (VI.87)$$

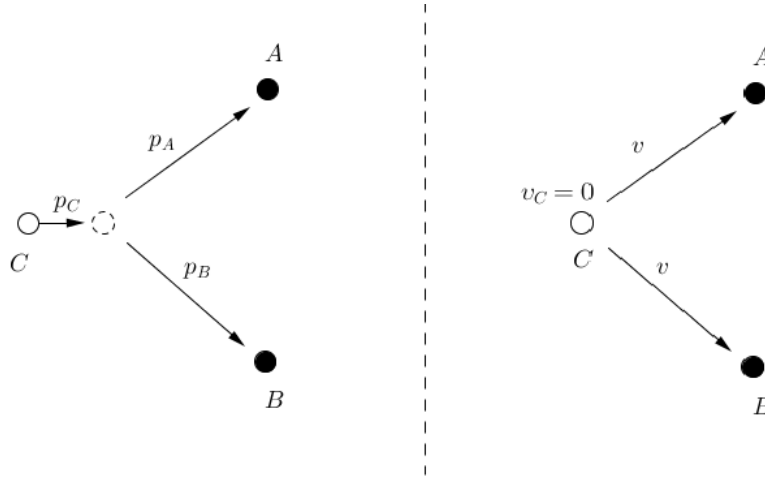
Es importante notar que a menos que $p_C = p_A + p_B$ el coeficiente es cero lo cual concuerda con lo que se esperaría. Ahora, situándose en el marco de referencia de C, Figura No. 5.7, se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{p}_A + \vec{p}_B &= 0 \\ \sqrt{m_C^2} &= \sqrt{m_A^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2} \end{aligned} \quad (VI.88)$$

con lo cual se observa que $m_C > m_A + m_B$.

Sin embargo, debido a que se utilizó la solución de onda plana se tiene algunos inconvenientes, sobre todo al calcular la probabilidad de transición ya que se debe elevar al cuadrado la delta de Dirac. Es por esto que se tomará la estrategia desarrollada en el libro de (Weinberg, 1996) en donde se supone que las partículas están confinadas en una "caja" de una dimensión muy grande en comparación con las partículas. Además, con esta estrategia se dice que la interacción ocurre solamente para un tiempo t . Dicha normalización no se efectuará en este trabajo pero se recomienda ver el libro de (Weinberg, 1996) sección 3.4.

Figura VI.7: Izquierda: marco de referencia arbitrario. Derecha: marco de referencia de C



Entonces, debido a esta estrategia, se observa que la probabilidad por unidad de tiempo de transición a un estado final $|f\rangle$ es

$$\dot{P}_{fi} = \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{Vt} = (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (\text{VI.89})$$

donde \mathcal{M}_{fi} es la amplitud invariante y se define como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} \quad (\text{VI.90})$$

En este caso, se tiene que

$$\mathcal{A}_{fi} = S_{fi}^{(1)} = (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_C) i \mathcal{M}_{fi} \quad \text{con } i \mathcal{M}_{fi} = -ig \quad (\text{VI.91})$$

Ahora bien, si se quisiese conocer la tasa de decaimiento, primero se debe notar que los estados finales $A + B$ forman un espectro continuo con lo que se debe de integrar a \dot{P}_{fi} sobre todo este espectro (sobre todo los posibles valores de momentum). Para esto se define el diferencial de tasa de decaimiento como

$$d\Gamma = \dot{P}_{fi} dN_f \quad (\text{VI.92})$$

donde dN_f es el número de estados finales por partícula (Aitchison & Hey, 2003). Este diferencial se encuentra en el espacio de momentum $3N$ dimensional con lo que

$$dN_f = \frac{d^3 p_A}{(2\pi)^3 2E_A} \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \quad (\text{VI.93})$$

donde se agregó la respectivas constantes de normalización a cada diferencial. Entonces regresando a la ecuación (VI.92), se tiene que

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{1}{2E_C} (2\pi)^4 \int \delta^4(p_A + p_B - p_C) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p_A}{(2\pi)^3 2E_A} \frac{d^3 p_B}{(2\pi)^3 2E_B} \quad (\text{VI.94})$$

Situándose una vez más en el marco de referencia de C,

$$\begin{aligned} \vec{p}_A + \vec{p}_B &= 0 = \vec{p}_C \\ \delta^4(p_A + p_B - p_C) &\Rightarrow \delta(E_A + E_B - E_C) \\ \text{pero } E_C &= m_C \\ &= \delta(E_A + E_B - m_C) \end{aligned} \quad (\text{VI.95})$$

Si $E = \sqrt{m_A^2 + \vec{p}^2} + \sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2} = E_A + E_B$, entonces $\delta(E_A + E_B - m_C) = \delta(E - m_C)$.
Con lo que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2m_C} (2\pi)^4 \int \int \delta(E - m_C) \delta^3(\vec{p}_A + \vec{p}_B) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_A} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_B} \\ &= \frac{g^2}{2m_C} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \int \delta(E - m_C) \frac{d^3 p_A}{(2\pi)^3 4E_A E_B} \end{aligned} \quad (\text{VI.96})$$

De la relación pasada se tiene que

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{2} [m_A^2 + \vec{p}^2]^{-\frac{1}{2}} (2|\vec{p}|) d|\vec{p}| [m_B^2 + \vec{p}^2]^{-\frac{1}{2}} (2|\vec{p}|) d|\vec{p}| \\ &= \left(\frac{2|\vec{p}|}{[m_B^2 + \vec{p}^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{2|\vec{p}|}{[m_B^2 + \vec{p}^2]^{\frac{1}{2}}} \right) d|\vec{p}| \\ &= \left(\frac{|\vec{p}|}{E_A} + \frac{|\vec{p}|}{E_B} \right) d|\vec{p}| \\ &= \frac{|\vec{p}| E}{E_A E_B} d|\vec{p}| \end{aligned} \quad (\text{VI.97})$$

Entonces, tomando en cuenta el ángulo sólido de todo el espacio, se obtiene

$$\begin{aligned} d^3p &= 4\pi|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| = 4\pi|\vec{p}|\frac{E_A E_B}{E} dE \\ \Rightarrow dE &= \frac{E}{E_A E_B} d^3p \frac{1}{4\pi|\vec{p}|} \end{aligned} \quad (\text{VI.98})$$

La integral resulta entonces

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{g}{2m_C} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \delta(E - m_C) 4\pi|\vec{p}|\frac{E_A E_B}{E} dE \\ &= \frac{g^2}{8\pi m_C} |\vec{p}| \int \frac{\delta(E - m_C)}{E} dE \\ &= \frac{g^2}{8\pi m_C^2} |\vec{p}| \end{aligned} \quad (\text{VI.99})$$

donde $|\vec{p}|$ se puede determinar a partir que $E_C = E_A + E_B$ y que $E_C = m_C$ con lo que se obtiene

$$|\vec{p}| = \frac{(m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_B^2 m_C^2 - 2m_C^2 m_A^2)^{1/2}}{2m_C} \quad (\text{VI.100})$$

2. Proceso No. 2, la deflexión de trayectorias de dos partículas $A+B \rightarrow A+B$:

Considérese el proceso de dos partículas en el cual se tienen inicialmente 4-momenta p_A, p_B y 4-momenta finales p'_A, p'_B de tal manera que $p_A + p_B = p'_A + p'_B$. De nuevo, se procederá a calcular el coeficiente no nulo de menor grado de g .

Entonces,

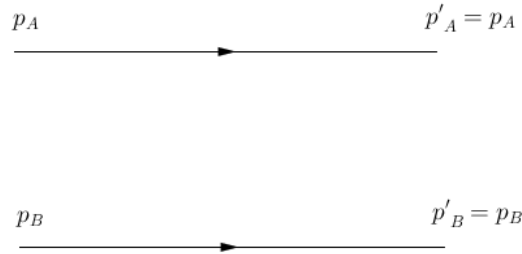
$$\langle p'_A, p'_B | \hat{S} | p_A, p_B \rangle = \langle p'_A, p'_B | 1 - ig \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}(x_1) + \dots | p_A, p_B \rangle \quad (\text{VI.101})$$

El primer término,

$$\begin{aligned} \langle p'_A, p'_B | 1 | p_A, p_B \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \sqrt{2E'_A} \sqrt{2E'_B} \sqrt{2E_A} \sqrt{2E_B} \\ &= (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \\ &= (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^3(p'_A - p_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \\ &= (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} (2\pi)^3 \delta^3(p'_A - p_A) \delta^3(p'_B - p_B) \end{aligned} \quad (\text{VI.102})$$

Esta expresión es cero a menos que $p_A = p'_A$ y $p_B = p'_B$, con lo cual se ve que este coeficiente describe a dos partículas que no interactúan. De hecho, esto se puede ver también notando que no incluye términos de g , el estado permanece igual que al inicio y por ende $p_A = p'_A$ y $p_B = p'_B$. Esta contribución puede representarse con el diagrama que muestra la Figura No.VI.8.

Figura VI.8: Interpretación gráfica del primer orden de corrección



Considerando el siguiente término, el cual incluye a g con orden 1, es posible notar que este término fue el que se usó en el decaimiento en la sección pasada, el cual es

$$-ig \int d^4x \langle p'_A, p'_B | \hat{\phi}_A(x) \hat{\phi}_B(x) \hat{\phi}_C(x) | p_A, p_B \rangle \quad (\text{VI.103})$$

No obstante, no existen partículas C en el estado final o inicial con lo que

$$\begin{aligned} &= (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B (\hat{\phi}_C^+ + \hat{\phi}_C^-) \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \\ &= (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \left[\langle 0 | \hat{\phi}_C^- \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \right] \\ &+ (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \left[\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_A \hat{\phi}_B \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) \hat{\phi}_C^+ | 0 \rangle \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.104})$$

Entonces esto indica que se debe de considerar el término con g^2 . Este término es

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-ig)^2}{2} (16E_A E_B E'_A E'_B)^{1/2} \\
&* \int \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2)) \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{VI.105}$$

Por el teorema de Wick se tiene que

$$\begin{aligned}
T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2)) &= : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ \sum_{perm} \langle 0 | T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1)) | 0 \rangle : \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ \sum_{perm} \langle 0 | T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2)) | 0 \rangle : \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ \sum_{perm} \langle 0 | T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{VI.106}$$

Dadas las relaciones de conmutatividad mencionadas en la ecuación (VI.82), se obtiene que

$$\begin{aligned}
&= : \hat{\phi}_A(x_1) \dots \hat{\phi}_C(x_2) : + [\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2)] : \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_B(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2)] : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2)] : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2)] [\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2)] : \hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2)] [\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2)] : \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_B(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2)] [\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2)] : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) : \\
&+ [\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2)] [\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2)] [\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2)]
\end{aligned} \tag{VI.107}$$

Notando que $\hat{\phi}_C(x_1)$ conmuta con todos los operadores menos con $\hat{\phi}_C(x_2)$ todos los términos que tengan como producto un orden normal que contenga a $\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)$ son igual a cero al calcular su valor esperado. Esto es porque el orden normal se puede expandir, luego dado que los $\hat{\phi}_C$ conmutan con los otros operadores es posible arreglarlos de tal forma en que $\hat{\phi}_C^+(x_1)$ o $\hat{\phi}_C^+(x_2)$ esté al lado derecho o bien algún $\hat{\phi}_C^-(x_1)$ o $\hat{\phi}_C^-(x_2)$ esté al lado izquierdo y ya que $\langle 0 | \hat{\phi}_C^- = \hat{\phi}_C^+ | 0 \rangle = 0$,

cualquier término que contenga algún $\hat{\phi}_C$ en su orden normal es cero. Con esto únicamente quedan los siguientes términos

$$\begin{aligned}
&= \langle 0 | \left[\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2) \right] | 0 \rangle : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \\
&+ \langle 0 | \left[\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2) \right] | 0 \rangle \langle 0 | \left[\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2) \right] | 0 \rangle : \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_B(x_2) : \\
&+ \langle 0 | \left[\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2) \right] | 0 \rangle \langle 0 | \left[\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2) \right] | 0 \rangle : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) : \\
&+ \langle 0 | \left[\hat{\phi}_A^+(x_1), \hat{\phi}_A^-(x_2) \right] | 0 \rangle \langle 0 | \left[\hat{\phi}_B^+(x_1), \hat{\phi}_B^-(x_2) \right] | 0 \rangle \langle 0 | \left[\hat{\phi}_C^+(x_1), \hat{\phi}_C^-(x_2) \right] | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{VI.108}$$

Debido a que los cálculos se vuelven muy extensos al aplicar el bra $\langle p'_A, p'_B |$ y el ket $| p_A, p_B \rangle$ a los órdenes normales únicamente se escribirán los resultados. Sin embargo, en la sección de Anexos se puede encontrar el desarrollo completo del cálculo de $\langle p'_A, p'_B | : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : | p_A, p_B \rangle$. Por otro lado, es importante mencionar que estos cálculos pueden efectuarse por medio de combinaciones. El problema se reduce a encontrar las diferentes formas de agrupar los operadores que dependen de A e igualmente los operadores que dependen de B . A continuación se resolverá un ejemplo para aclarar mejor la idea.

Para el caso de $\langle p'_A, p'_B | : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : | p_A, p_B \rangle$ se tiene que hay cuatro formas de agrupar estos términos los cuales son

$$\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \tag{VI.109}$$

$$\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \tag{VI.110}$$

$$\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \tag{VI.111}$$

$$\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_B(p'_B) : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : \hat{a}_A^\dagger(p_A) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \tag{VI.112}$$

Luego, el significado que se le debe dar a "□" es el siguiente (Peskin, 1995)

$$\langle 0 | \overline{\hat{a}_i \hat{\phi}_i(x)} = \langle 0 | [\hat{a}_i(p_i), \hat{\phi}_i(x)] \quad y \quad \overline{\hat{\phi}_i(x) \hat{a}_i^\dagger} | 0 \rangle = [\hat{a}_i^\dagger(p_i), \hat{\phi}_i(x)] \quad (\text{VI.113})$$

La ecuación (VI.113) representa la forma intuitiva de lo que comúnmente en la literatura se conoce como *contracción*. Al calcular las contracciones de las cuatro formas anteriores y sumarlas, se debe notar que se obtiene el mismo resultado que en el apéndice.

Al calcular el resto de contracciones para todos los términos de la ecuación (VI.108) se obtienen los siguientes cinco términos, los cuales pueden representarse por medio de diagramas. El resto del capítulo se discutirá cómo transformar estos términos en sus respectivos diagramas. Estos diagramas se llaman "*Diagramas de Feynman*", los cuales son de suma importancia ya que permiten representar las trayectorias de las partículas. Además, por medio de lo que se conoce como "*Reglas de Feynman*", las cuales también se desarrollarán más adelante, es posible derivar el lagrangiano subyacente al sistema a partir de dichos diagramas. Sin más preámbulos, los términos resultantes son

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_B(x_1) | 0 \rangle \\ & * \langle 0 | \hat{\phi}_A(x_2) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}_B(x_2) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle + x_1 \leftrightarrow x_2 \end{aligned} \quad (\text{VI.114})$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_B(x_2) | 0 \rangle \\ & * \langle 0 | \hat{\phi}_A(x_2) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{\phi}_B(x_1) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle + x_1 \leftrightarrow x_2 \end{aligned} \quad (\text{VI.115})$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_B(p'_B) \hat{\phi}_B(x_1) | 0 \rangle \\ & * \langle 0 | \hat{\phi}_B(x_2) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_A(x_2)) | 0 \rangle + x_1 \leftrightarrow x_2 \end{aligned} \quad (\text{VI.116})$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_B(p'_B) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle \\ & * \langle 0 | \hat{\phi}_B(x_2) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_B(x_2)) | 0 \rangle + x_1 \leftrightarrow x_2 \end{aligned} \quad (\text{VI.117})$$

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_B(p'_B) \hat{a}_B^\dagger(p_B) | 0 \rangle \\
& * \langle 0 | T(\hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_A(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_B(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle + x_1 \leftrightarrow x_2 \\
& \hspace{15em} \text{(VI.118)}
\end{aligned}$$

Donde $+x_1 \leftrightarrow x_2$ significa que se debe sumar el mismo término pero intercambiando x_1 por x_2 y viceversa.

Nótese que las cantidades $\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle$ son proporcionales a $\delta^3(p_A - p'_A)$ las cuales corresponden a una partícula A que viaja de un punto a otro. Por otro lado, las cantidades de la forma $\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle$ conducen a

Figura VI.9: Diagrama No. 1 asociado a la ecu. (VI.114)

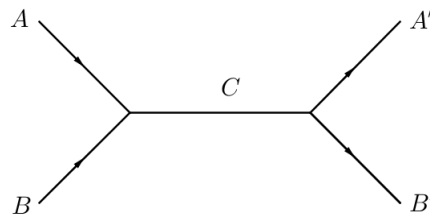


Figura VI.10: Diagrama No. 2 asociado a la ecu. (VI.115)

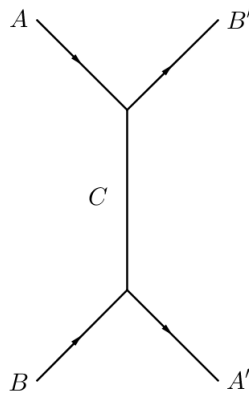


Figura VI.11: Diagrama No. 3 asociado a la ecu. (VI.116)

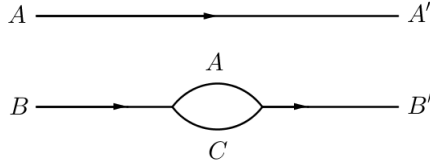


Figura VI.12: Diagrama No. 4 asociado a la ecu. (VI.117)

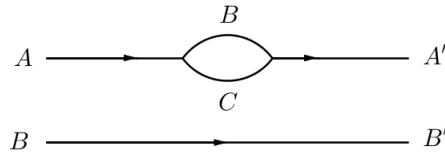
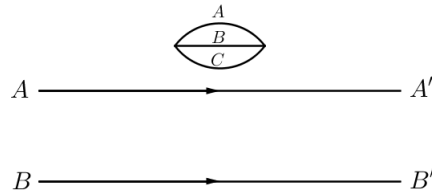


Figura VI.13: Diagrama No. 5 asociado a la ecu. (VI.118)



$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[\hat{a}_A(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_A^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left[\hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A(k) e^{-ik \cdot x} \right] | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | \left[\hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \delta^3(k - p'_A) e^{ik \cdot x} | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2E'_A}} e^{ip'_A \cdot x}
\end{aligned} \tag{VI.119}$$

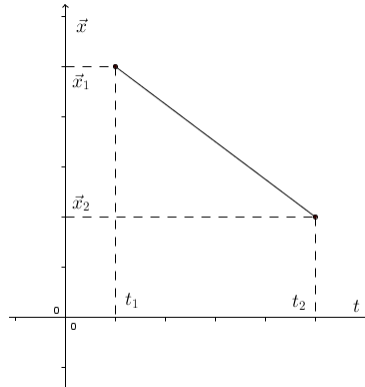
Pero el término $\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{a}_A^\dagger(p_A) | 0 \rangle \propto \delta^3(p_A - p'_A)$ implica que $E'_A = E_A$, con lo que

$$\langle 0 | \hat{a}_A(p'_A) \hat{\phi}_A(x_1) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_A}} e^{ip'_A \cdot x} \quad (\text{VI.120})$$

Por otro lado, se debe notar que el término $\langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle$ describe la creación y aniquilación de una partícula C. Es decir, $\hat{\phi}_C(x_1)$ describe la creación de una partícula en un tiempo t_1 y luego, para un tiempo t_2 (suponiendo que $t_2 > t_1$) $\hat{\phi}_C(x_2)$ aniquila a esta partícula, con lo cual el término $\langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle$ para un tiempo mayor a t_2 .

En otras palabras $\langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle$ dice que existe la posibilidad de encontrar una partícula C entre t_1 y t_2 . Esta cantidad recibe el nombre de *Propagador de Feynman* para partículas C de espín 0 y es que de hecho, si se considera la Figura No. VI.14, el nombre hace sentido, ya que describe cómo la partícula C se está *propagando* durante todo el proceso (Aitchison & Hey, 2003).

Figura VI.14: Descripción gráfica del operador \hat{S}



Lo que resta ahora es poder describir esta amplitud (Propagador de Feynman) matemáticamente. Para esto, primero se debe notar que este propagador es una función de Green del operador $(\square^2 + m_C^2)$, es decir, tal y como se vio en el capítulo V, este propagador cumple con

$$(\square_{x_1}^2 + m_C^2) \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle = -i\delta^4(x_1 - x_2) \quad (\text{VI.121})$$

Para probarlos, se debe de considerar un operador de campo escalar $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ el cual satisface la

ecuación

$$(\square_{x_1}^2 + m_C^2) \hat{\phi}(\vec{x}, t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \hat{\phi}(\vec{x}, t) = 0 \quad (\text{VI.122})$$

En la ecuación (VI.122) se consideró por simplicidad una coordenada espacial. Entonces, en el capítulo V se vio que

$$T(\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)) = \theta(t_1 - t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1) \quad (\text{VI.123})$$

Por otro lado, tal y como se definió la función Heaviside en el capítulo V, es fácil notar que

$$\frac{d}{dx}\theta(x - a) = \delta(x - a) \quad (\text{VI.124})$$

Con lo cual se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(T(\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)) \right) &= \frac{\partial}{\partial t_1} [\theta(t_1 - t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)] + \frac{\partial}{\partial t_1} [\theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1)] \\ &= \delta(t_1 - t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_1 - t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) \\ &\quad - \delta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\hat{\phi}(x_1, t_1) + \theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \end{aligned} \quad (\text{VI.125})$$

Pero $\delta(t_1 - t_2) = \delta(t_2 - t_1)$ y además, se sabe que $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(y, t)] = 0$ para tiempos iguales con lo que la expresión anterior toma la forma de

$$\theta(t_1 - t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \quad (\text{VI.126})$$

Finalmente, considerando

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(T(\hat{\phi}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)) \right) = \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_1 - t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_2 - t_1)\hat{\phi}(x_2, t_2)\dot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \quad (\text{VI.127})$$

Sin embargo, se debe de recordar que $\hat{\phi}$ satisface $(\square^2 + m_C^2)$ la cual es la ecuación de Klein-Gordon. Entonces se puede sustituir $\hat{\phi}(x_1, t_1)$ por $\hat{\Pi}(x_1, t_1)$, relación que se probó en el capítulo IV, con lo que

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_1 - t_2) \hat{\Pi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) + \frac{\partial}{\partial t_1} \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \hat{\Pi}(x_1, t_1) \\
&= \delta(t_1 - t_2) \hat{\Pi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_1 - t_2) \dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \\
&\quad - \delta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1) + \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1)
\end{aligned} \tag{VI.128}$$

Por otro lado, debido que $[\hat{\phi}(x, t), \hat{\Pi}(y, t)] = i\delta(x - y)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&= \theta(t_1 - t_2) \dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1) - i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) \\
&= T(\dot{\hat{\Pi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) - i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) \\
&= -i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) + T(\ddot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2))
\end{aligned} \tag{VI.129}$$

Con la ayuda de la ecuación (VI.129) es posible probar que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + m^2 \right) T(\hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} T(\hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T(\hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) \\
&\quad + m^2 T(\hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2))
\end{aligned} \tag{VI.130}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) + T(\ddot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) - T\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)\right) + m^2 T(\hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2)) \\
&= -i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) + \theta(t_1 - t_2) \ddot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \ddot{\hat{\phi}}(x_1, t_1) \\
&\quad - \theta(t_1 - t_2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) - \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \hat{\phi}(x_1, t_1) \\
&\quad + m^2 \theta(t_1 - t_2) \hat{\phi}(x_1, t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) + m^2 \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \hat{\phi}(x_1, t_1) \\
&= -i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2) + \theta(t_1 - t_2) \left[(\square_x^2 + m^2) \hat{\phi}(x_1, t_1) \right] + \theta(t_2 - t_1) \hat{\phi}(x_2, t_2) \left[(\square_x^2 + m^2) \hat{\phi}(x_1, t_1) \right] \\
&= -i\delta(x_1 - x_2) \delta(t_1 - t_2)
\end{aligned} \tag{VI.131}$$

La generalización para cuatro dimensiones es inmediata puesto que sigue la misma lógica. Nótese por último que el operador $(\square_x^2 + m^2)$ es la generalización del operador de Helmholtz para cuatro

dimensiones con lo que se espera que la función de Green tenga una forma parecida.

A continuación se procederá a encontrar esta función de Green. Para esto se analizará, por el momento, únicamente los dos primeros diagramas anteriormente escritos (ecuación (VI.114) y ecuación (VI.115)). Posteriormente se regresará a los otros. Se realizará de esta forma debido a que estos casos son los que muestran una interacción entre ambas partículas. Si se observa, en los otros diagramas solamente interactúa una partícula o ninguna. Entonces considérese el segundo diagrama. Al regresar a la ecuación (VI.79) considerando la ecuación (VI.115), conocida como el intercambio de Yukawa, se tiene que

$$(-ig) \int \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ip'_A - p'_B \cdot x_1} e^{ip'_B - p'_A \cdot x_2} \langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle \quad (\text{VI.132})$$

donde se usó las relaciones de la ecuación (VI.82). Defínase entonces, $\langle 0 | T(\hat{\phi}_C(x_1) \hat{\phi}_C(x_2)) | 0 \rangle \equiv G_F(x_1 - x_2)$. En el capítulo V se vio que es posible sustituir $x = x_1 - x_2$, con lo cual

$$(\square^2 + m_C^2) G_F(x) = -i\delta^4(x) \quad (\text{VI.133})$$

donde $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Si se expande $G_F(x)$ y $\delta^4(x)$ en integrales de Fourier, se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^4} (\square^2 + m_C^2) \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{ik' \cdot x} \tilde{G}(k') &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{ik' \cdot x} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_\mu \partial^\mu e^{ik' \cdot x} + m_C^2 e^{ik' \cdot x}) \tilde{G}(k') &= \int_{-\infty}^{\infty} -i e^{ik' \cdot x} d^4k' \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (-(k'^0)^2 + (\vec{k}')^2 e^{ik' \cdot x} + m_C^2 e^{ik' \cdot x}) \tilde{G}(k') &= \int_{-\infty}^{\infty} -i e^{ik' \cdot x} d^4k' \end{aligned} \quad (\text{VI.134})$$

Sea $-(k'^0)^2 + (\vec{k}')^2 = -(k')^2$, entonces

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} (-(k')^2 + m_C^2) e^{ik' \cdot x} \tilde{G}(k') = \int_{-\infty}^{\infty} -i e^{ik' \cdot x} d^4k' \\ \Rightarrow (-(k')^2 + m_C^2) \tilde{G}(k') &= -i \\ \Rightarrow \tilde{G}(k') &= \frac{-i}{-(k')^2 + m_C^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.135})$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} G_F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{ik' \cdot x} \frac{-i}{-(k')^2 + m_C^2} \\ \Rightarrow G_F(x_1 - x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{ik' \cdot (x_1 - x_2)} \frac{-i}{-(k')^2 + m_C^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.136})$$

Sea $k' = -k \Rightarrow dk' = -dk$ y $d^4k' = d^4k$, con lo que

$$G_F(x_1 - x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{-ik' \cdot (x_1 - x_2)} \frac{-i}{-(k')^2 + m_C^2} \quad (\text{VI.137})$$

Esta última sustitución se hizo por convención, dado que en la mayoría de libros de texto aparece de esta forma. No obstante, nótese que debido a que la integral va de $-\infty$ a ∞ y a que k aparece al cuadrado en el denominador, da igual trabajar con $-k$ o con $+k$.

Sin embargo, esta integral tiene dos polos, justo cuando $k = \pm m_C$, tal y como en el caso del operador de Helmholtz con lo que es necesario desplazar estos polos y convertir la integral anterior (integral impropia) en una integral de contorno.

Para esto, considérese $(k^2 - m_C^2) = (k + m_C)(k - m_C) \Rightarrow (k + m_C - i\epsilon)(k - m_C + i\epsilon)$, donde ϵ es una pequeña cantidad positiva. Con esto el polo de la derecha se desplaza hacia arriba, y el polo de la izquierda hacia abajo, tal y como el caso del operador de Helmholtz.

Por último, se puede efectuar la siguiente aproximación binomial para simplificar la integral

$$(k + m_C - i\epsilon)(k - m_C + i\epsilon) = (k^2 - (m_C - i\epsilon)^2) \approx (k^2 - m_C^2 - 2im_C\epsilon) \quad (\text{VI.138})$$

pero ϵ es una cantidad tan pequeña como se desee, con lo que la cantidad $2im_C\epsilon$ es posible reescribirla solamente como $i\epsilon$ con lo que

$$G_F(x_1 - x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d^4k' e^{-ik' \cdot (x_1 - x_2)} \frac{-i}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - m_C^2 - i\epsilon} \quad (\text{VI.139})$$

donde se sustituyó $k^2 = (k^0)^2 - \vec{k}^2$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (VI.132), se obtiene

que

$$\begin{aligned}
&= (-ig)^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p'_A - p_B) \cdot x_1} e^{i(p'_B - p_A) \cdot x_2} \int d^4k e^{-ik(x_1 - x_2)} \frac{-i}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - m_C^2 - i\epsilon} \\
&= (-ig)^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p'_A - p_B) \cdot x_1 + i(p'_B - p_A) \cdot x_2} \int d^4k e^{-ik(x_1 - x_2)} \frac{-i}{(k^0)^2 - \vec{k}^2 - m_C^2 - i\epsilon}
\end{aligned} \tag{VI.140}$$

Nótese que $G_F(x_1 - x_2)$ es una función de $x_1 - x_2$, entonces sea $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$ y $x = x_1 - x_2$,

$$\begin{aligned}
X + \frac{x}{2} &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} = x_1 \\
X - \frac{x}{2} &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = x_2
\end{aligned} \tag{VI.141}$$

El jacobiano es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X}{\partial x_1} & \frac{\partial X}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{VI.142}$$

entonces haciendo dicha sustitución se tiene que

$$\begin{aligned}
&= (-ig)^2 \int \int d^4x d^4X e^{i(p'_A - p_B) \cdot (X + \frac{x}{2})} e^{i(p'_B - p_A) \cdot (X - \frac{x}{2})} G_F(x) \\
&= (-ig)^2 \int \int d^4x d^4X e^{i(p'_A - p_B + p'_B - p_A)X} e^{i(p'_A - p_B - p'_B + p_A) \cdot x/2} G_F(x) \\
&= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B) \int d^4x e^{i(p'_A - p_B - p'_B + p_A) \cdot x/2} G_F(x)
\end{aligned} \tag{VI.143}$$

Dado que $\delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B)$ obliga a que $p_A + p_B = p'_A + p'_B$ (de lo contrario es igual a cero) $\Rightarrow p_A - p'_B = p'_A - p_B$. Siguiendo con el desarrollo de la integral se tiene que

$$\begin{aligned}
&= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4x e^{i[(p'_A - p_B) + (p_A - p'_B)]x/2} G_F(x) \\
&= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4x e^{i2q \cdot x/2} G_F(x) \\
&= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4x e^{iq \cdot x} G_F(x)
\end{aligned} \tag{VI.144}$$

donde $q = p_A - p'_B = p'_A - p_B$, luego sustituyendo $G_F(x)$,

$$\begin{aligned}
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot x} \frac{i}{k^2 - m_C^2 + i\epsilon} \\
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4k \frac{i}{k^2 - m_C^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{i(q-k) \cdot x} \\
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \int d^4k \frac{i}{k^2 - m_C^2 + i\epsilon} \delta^4(q - k) \\
 &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - (p'_A + p'_B)) \frac{i}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon}
 \end{aligned} \tag{VI.145}$$

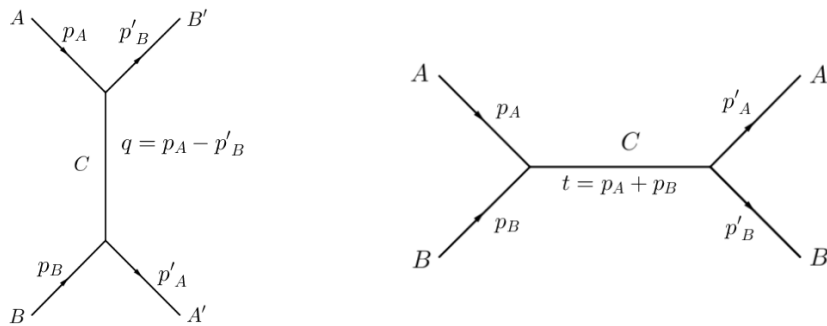
El término $\frac{i}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon}$ representa una "transferencia de momentum" atribuida a una partícula C. Análogamente, el primer término de la ecuación (VI.114) da como resultado

$$(-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B) \frac{i}{s^2 - m_C^2 + i\epsilon} \tag{VI.146}$$

donde $s = p_A + p_B = p'_A + p'_B$.

Con estas expresiones parece más natural entonces atribuirles a diagramas de la forma en la que la Figura No. VI.15 los muestra.

Figura VI.15: Diagramas asociados a las ecuaciones (VI.115) y (VI.114), respectivamente, en donde se muestra un *intercambio* de momentum



Las flechas muestran como el momentum "fluye" o viaja y en cada vértice (unión de tres o más líneas) el momentum se conserva; es decir, todo momentum que "entra" al vértice "sale" de él. Habiendo identificado dichos diagramas, es oportuno escribir las reglas de Feynman para la teoría ABC, la cual permite asociar una expresión matemática proveniente de la amplitud con un diagrama de Feynman tal y como las Figuras anteriores.

Para esto, considérese los dos diagramas anteriores en donde existe una interacción de partículas A y B. Nótese que en ambas amplitudes se tiene el factor $\delta(p_A + p_B - p'_A - p'_B)$ (ecuaciones (VI.145) y (VI.146)). Usualmente este factor se utiliza para escribir la amplitud invariante, la cual se definió como

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi} \quad (\text{VI.147})$$

Contar con esta amplitud es muy útil ya que $|\mathcal{M}_{fi}|^2 \propto \dot{P}_{fi}$, con lo cual es posible conocer la probabilidad de transición sin efectuar las expansiones de Wick y los cálculos anteriores. Para el caso de intercambio de Yukawa,

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B) \frac{i}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon} \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B) \frac{(-ig)^2}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon} \\ &= i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p'_A - p'_B) \mathcal{M}_{fi} \end{aligned} \quad (\text{VI.148})$$

con $\mathcal{M}_{fi} = \frac{(-ig)^2}{q^2 - m_C^2 + i\epsilon}$ y donde $q = p_A - p'_B = p'_A - p_B$

Entonces, las reglas de Feynman ayudan a construir la amplitud invariante a partir de algún diagrama de la siguiente manera.

3. Primera y segunda Regla de Feynman para la teoría ABC: A continuación se presentan las primeras reglas de Feynman para dicha teoría.

(I) Se le atribuye a cada vértice un factor de

$$(-ig)$$

(II) Por cada línea interna, es decir trazo que una dos vértices, (el cual representa transferencia de momentum) se le atribuye un factor de

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon}$$

Para $j = A, B, C$ y donde q_j es el momentum transferido de dicha línea. Como se dijo anteriormente, este factor se denomina el propagador de Feynman en el espacio de momentum para la partícula escalar j.

Vale la pena hacer énfasis nuevamente que estas reglas, al igual que estos diagramas, son de suma importancia, ya que muestra que la probabilidad de que ocurra cierto tipo de transición depende de el número de vértices que posee el diagrama y el número de líneas internas.

Para finalizar esta sección, conviene introducir un tipo de variables cinemáticas las cuales son importantes en el estudio de diagramas. Estas variables se conocen como las variables de *Mandelstan* y son

$$s = (p_A + p_B)^2 \quad t = (p_A - p'_A)^2 \quad u = (p_A - p'_B)^2 \quad (\text{VI.149})$$

con lo cual los propagadores de los diagramas que presenta la Figura No. VI.15 se pueden reescribir como $\frac{i}{u-m_C^2+i\epsilon}$ y $\frac{i}{s-m_C^2+i\epsilon}$, respectivamente. Procesos que contengan la variable cinemática s , se les llama *proceso de canal s*, las que contienen a u , *proceso de canal u* y las que contienen a t , *proceso de canal t*. Principalmente, los procesos con amplitud de la forma $(t - m^2)^{-1}$ o $(u - m^2)^{-1}$, se tratan del intercambio de algún cuanto, mientras que los que presentan una forma de $(s - m^2)^{-1}$, tienen otra interpretación la cual se discutirá a continuación.

Primero, es posible notar que s es una cantidad invariante de Lorentz por lo que es posible evaluarla en cualquier marco de referencia. Si se elige el marco de referencia de la partículas C, en el cual $\vec{p}_A + \vec{p}_B = 0$ y $p_C = (m_C, 0, 0, 0)$, se obtiene lo siguiente. Dado a que el momentum se conserva, la partícula C que se está propagando, debe de contar con un 4-momentum $p_C = p_A + p - B$ con lo que en este marco de referencia esta relación toma la forma de

$$p_C^2 = (p_A + p_B)^2 \Rightarrow m_C^2 = (E_A + E_B)^2 \quad (\text{VI.150})$$

donde $E_A = \pm\sqrt{m_A^2 + \vec{p}^2}$ y $E_B = \pm\sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2}$. Entonces,

$$m_C^2 = \left(\pm\sqrt{m_A^2 + \vec{p}^2} \pm \sqrt{m_B^2 + \vec{p}^2} \right)^2 \quad (\text{VI.151})$$

De la ecuación (VI.151) se observa que si $m_C < m_A + m_B$, se dice que el cuanto interno C es *virtual*. Las partículas virtuales son muy importantes en muchos procesos físicos y es que tal y como se observa, estas no necesariamente poseen la misma masa que las partículas "reales" al inicio del proceso, pero estas siempre conservan la energía y el momentum. Tal y como las partículas reales, las partículas virtuales son excitaciones de un campo subyacente pero estas existen únicamente

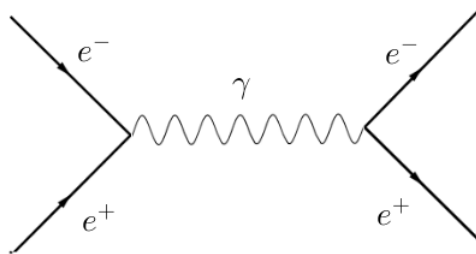
”temporalmente” de manera que aparecen en los cálculos de interacción pero nunca en los estados finales. En otras palabras, las partículas virtuales únicamente son un formalismo de la teoría que aparecen de los cálculos efectuados, sin embargo, experimentalmente únicamente puede medirse los estados iniciales y finales, en donde estas partículas virtuales no aparecen, debido a esto es que se les llama virtuales. (Aitchison & Hey, 2003)

Algunos ejemplos de procesos en donde aparecen partículas virtuales independientemente si son procesos de canal s, u o t, es en electrodinámica cuántica. Por mencionar alguno, el proceso

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- \quad (\text{VI.152})$$

De este proceso se pueden obtener un diagrama de ”aniquilación” como lo muestra la Figura No. VI.16. O bien, si se considerará mayores órdenes de corrección de los coeficientes S_{fi} se pueden obtener diagramas con intercambio de dos o más fotones, como se puede observar en la Figura No. VI.17.

Figura VI.16: Diagrama de aniquilación



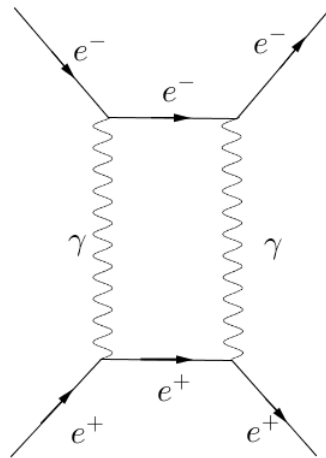
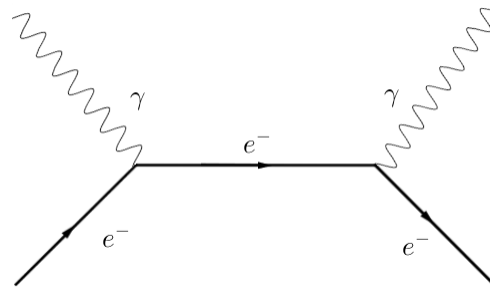
Otro ejemplo puede ser un proceso de la forma

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (\text{VI.153})$$

el cual puede interpretarse como la absorción y la reemisión de un fotón γ y pueden aparecer diagramas como el que muestra la Figura No. VI.18. Estos procesos se retomarán en el capítulo VII.

Ahora bien, para el caso en que $m_C > m_A + m_B$, la ecuación $(p_A + p_B)^2 = m_C^2$ puede ser satisfecha por lo que se podría pensar que existe un resultado infinito cuando $s = (p_A + p_B)^2$ es igual a m_C^2 (dado que ϵ es una cantidad infinitesimalmente pequeña).

Figura VI.17: Posible diagrama si se considera más órdenes de corrección

Figura VI.18: Diagrama de absorción y reemisión de un fotón γ 

Sin embargo, tal y como se vio anteriormente, si $m_C > m_A + m_B$ la partícula C es inestable y decae a $A+B$, con lo que el proceso de canal s para este caso se debe de interpretar como un proceso de decaimiento transitorio o también llamado resonancia. Este proceso generalmente tiene la forma $A + B \rightarrow C \rightarrow D + E$ y un ejemplo clásico es el de una absorción y reemisión de algún fotón por un átomo con un estado atómico excitado intermedio. Dichos procesos son mucho más complejos por lo que en este trabajo no se abordarán.

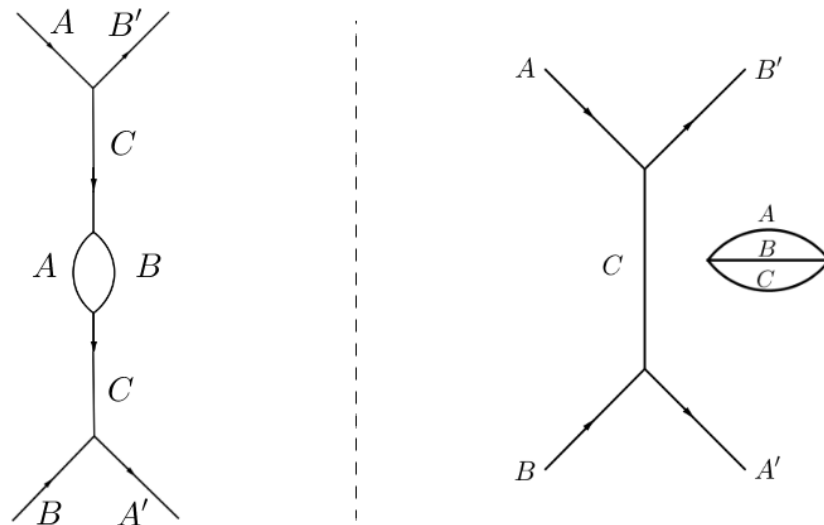
4. Proceso $A + B \rightarrow A + B$, extremos sueltos: En esta sección se retomarán los diagramas que quedaron pendientes, las ecuaciones (VI.116), (VI.117) y (VI.118). Primero considere la Figura No. VI.11.

En dicha Figura se puede ver que la partícula A continúa su trayectoria sin haber interactuado,

mientras que la partícula B hizo una transición virtual al estado $A + C$, el cual volvió al estado original B. Por otro lado, considerando a la Figura No. VI.13, donde de nuevo es posible observar que ni A ni B interactúan, ambos diagramas están desconectados. Tal y como se dijo, estos términos no se asocian a un proceso de deflexión de trayectorias con lo cual no deberían de contribuir a \mathcal{M}_{fi} y de hecho no lo hacen (Aitchison & Hey, 2003). Para corroborar esto se debe de considerar términos de corrección de mayor orden, por ejemplo de g^4 , y derivar una tercera Regla de Feynman para dichos diagramas. Desafortunadamente, los cálculos para dicho orden de corrección son demasiado extensos y caen fuera del objetivo al cual pretende llegar este trabajo. Debido a esto solo se enunciarán algunos resultados para su discusión. No obstante, una forma intuitiva de verlo es que en dichos diagramas esta falta de interacción se ve reflejada en que no hay vértices ni líneas internas que unan las partículas iniciales o finales, con lo que por las dos primeras Reglas de Feynman no se le da ningún valor a esta amplitud y por lo tanto no contribuye; de nuevo esta es solo una manera intuitiva de verlo.

Algunos de los diagramas que se obtienen al considerar un orden de corrección del orden de g^4 son los que presenta la Figura No. VI.19.

Figura VI.19: Posibles interacciones al considerar correcciones de g^4



En tal situación, es claro que existe una interacción de las partículas A y B con lo que estas transiciones virtuales sí aportan a la amplitud invariante \mathcal{M}_{fi} , lo cual da como resultado alteraciones

o variaciones de la masa de la partícula. Este resultado se puede pensar como si la partícula carga una "nube" de partículas virtuales, las cuales están interactuando con ella continuamente, lo cual se evidencia por un efecto sobre la masa de la partícula (Aitchison & Hey, 2003). Es importante notar que en la Figura anterior (Figura No. VI.19), afirmar que se conserva el momentum en todos los vértices no es suficiente para determinar el momentum individual de las partículas en la trayectoria $A + C$, solamente es posible determinar la suma de sus momenta. De esto se deriva la tercera regla de Feynman la cual es útil para describir este tipo de diagramas.

5. Tercera Regla de Feynman para la teoría ABC: La tercera regla de Feynman para dicha teoría es:

(III) Para cada momentum interno k , el cual no esté sujeto por una conservación de momentum definitiva, se le asocia una integral de la forma

$$\int d^4k \frac{1}{(2\pi)^4}$$

Tal integral ocurre para cada "loop" cerrado.

Entonces, aplicando esta regla a la Figura No. VI.13, se tendría que hacer una integral de la siguiente forma

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k^2 - m_A^2)} \frac{i}{((p_B - k)^2 - m_C^2)} \quad (\text{VI.154})$$

De forma práctica, esta tercera regla dice que se debe de sumar respecto de todos los valores posibles que puede tomar el momentum de la partícula A y el momentum de la partícula B (para el caso analizado de la Figura No. VI.13), lo cual se hace por medio del parámetro k .

Lo que resta a continuación es poder aplicar los conceptos vistos al mundo "real" y es que ninguno de estos procesos, desafortunadamente, sucede físicamente debido a que no se conoce ninguna interacción física escalar "ABC". En vez de esto, la mayoría de interacciones son similares a las electromagnéticas, las cuales se denominan interacciones de gauge.

VII. CUANTIZACIÓN DE CAMPOS CON SIMETRÍA $U(1)$

En los capítulos anteriores se desarrolló el formalismo de teoría cuántica de campos relativista para el caso del Campo Escalar Real, el cual obedecía la ecuación de Klein-Gordon. Luego, se hizo que este campo escalar real interactuara con otros campos escalares reales, con lo cual se obtuvo representaciones gráficas de las amplitudes de probabilidad de dichos procesos, los cuales se llaman diagramas de Feynman y por último, se desglosaron de dichos diagramas las reglas de Feynman, las cuales decían que la probabilidad que sucediera un proceso dependía de cuántos vértices y cuántas líneas internas poseía el diagrama que representaba al proceso.

Sin embargo, tal y como se comentó en el capítulo anterior, el mundo físico que se conoce hoy en día se comporta un tanto más complicado y es que tal y como se pudo ver en el capítulo IV, este tipo de campos al ser excitados únicamente podía crear un tipo de partícula de espín cero. Debido a esto, únicamente se tenía un solo operador de aniquilación, lo cual se puede representar como que si la partícula era su misma antipartícula.

Debido a que en este capítulo se quiere llegar a la introducción de las interacciones electromagnéticas, es necesario profundizar un poco más en los conceptos anteriormente desarrollados, con lo que se propone primero dotar al campo escalar de otro grado de libertad, de tal manera que uno corresponda a las partículas y el otro que corresponda a las antipartículas. Para esto, se puede considerar el mismo campo escalar pero extendido al plano complejo, de tal forma que se pueda proporcionar números cuánticos a las partículas y números cuánticos con el valor opuesto a las antipartículas. Este campo recibe el nombre de Campo Escalar Complejo. No obstante, antes de ahondar en este campo, es bueno discutir algunos formalismos previos.

A. Teoría electromagnética y transformaciones gauge

Un buen punto de partida es el de considerar la teoría electromagnética, ya que esta exhibe una invarianza de gauge. Esta simetría de gauge es de suma importancia en la física y se utilizará fre-

cuentemente en las siguientes secciones. Entonces, recordando algunos hechos relevantes de teoría electromagnética, se tiene que las ecuaciones de Maxwell que rigen el mundo electromagnético son

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{E} &= \rho_{em} \\
 \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \nabla \times \vec{B} &= \vec{j}_{em} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{VII.1}$$

las cuales están escritas en el sistema de unidades de "Lorentz-Heaviside". ρ_{em} se refiere a la densidad de carga y \vec{j}_{em} a la densidad de corriente. Por otro lado, los campos \vec{E} y \vec{B} pueden reescribirse en base a el potencial electromagnético V y el potencial vectorial \vec{A} , con lo cual

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
 \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}
 \end{aligned}
 \tag{VII.2}$$

El origen de la invarianza de gauge en la electrodinámica clásica recae en el hecho de que los potenciales \vec{A} y V no son únicos para campos \vec{E} y \vec{B} dados. Estas transformaciones que se pueden aplicar a \vec{A} y V sin cambiar las ecuaciones de Maxwell son

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi
 \tag{VII.3}$$

donde χ es una función arbitraria escalar. Luego V debe cambiar simultáneamente a

$$V \rightarrow V' = V - \frac{\partial \chi}{\partial t}
 \tag{VII.4}$$

para preservar a \vec{E} .

Estas transformaciones pueden expresarse con el tetravector $A^\mu = (V, \vec{A})$ de la siguiente manera

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi
 \tag{VII.5}$$

Escribiendo todas las ecuaciones de forma covariante de Lorentz, se obtiene

$$\partial_\mu j_{em}^\mu = 0 \quad (\text{ecu. de continuidad})
 \tag{VII.6}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_{em}^\nu \quad (\text{ecu. 1 y 4 de Maxwell}) \quad (\text{VII.7})$$

$$\partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{ecu. 2 y 3 de Maxwell}) \quad (\text{VII.8})$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el símbolo de Levi-Civita, el cual es 1 para permutaciones par, -1 para permutaciones impares y 0 en cualquier otro caso. El tensor $F^{\mu\nu}$ se llama el tensor de Faraday o tensor electromagnético y se define como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{VII.9})$$

Aplicando la transformación de gauge a A^μ , se tiene que

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \quad (\text{VII.10})$$

Con lo cual se ve que bajo transformaciones gauge, las leyes de Maxwell permanecen invariantes (Aitchison & Hey, 2003). Por último, de las ecuaciones (VII.10) y (VII.7) se obtiene una ecuación importante que se utilizará posteriormente,

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= j_{em}^\nu \\ \Rightarrow \square^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= j_{em}^\nu \end{aligned} \quad (\text{VII.11})$$

B. Simetría U(1)

Una simetría puede considerarse como una función o transformación que tras ser aplicada a un objeto, este permanece igual. Por ejemplo, en el capítulo 1 se vio que la fuerza propuesta por Newton, $F = m \cdot a$, es simétrica bajo una rotación del eje de coordenadas. No obstante, cualquier fuerza es simétrica bajo una rotación, por lo que esta simetría no tiene ninguna conexión especial con alguna fuerza en particular. Ahora bien, ¿será posible establecer alguna simetría específica de tal manera que solo algún tipo de fuerza sea simétrica a esta?

Para responder esta pregunta es necesario introducir algunas definiciones. Considérese entonces una densidad lagrangiana de la forma

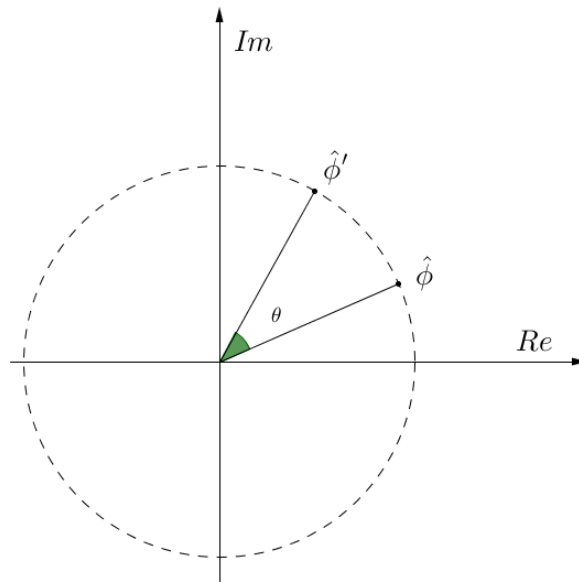
$$\mathcal{L} = \partial^\mu \hat{\phi}^* \partial_\mu \hat{\phi} \quad (\text{VII.12})$$

donde $\hat{\phi} = \hat{\phi}_{Re} + i\hat{\phi}_{Im}$ y $\hat{\phi}^* = \hat{\phi}_{Re} - i\hat{\phi}_{Im}$ su conjugado complejo. Esta densidad posee una simetría llamada simetría $U(1)$ (Aitchison & Hey, 2003), la cual consiste en transformaciones unitarias de la forma $e^{i\theta}$, tal que

$$\hat{\phi}' = e^{i\theta} \hat{\phi} \quad (\text{VII.13})$$

Si se observa con detenimiento, este tipo de transformación puede verse como rotaciones en el plano complejo (Figura No. VII.1).

Figura VII.1: Transformación $U(1)$ (global)



Asimismo se tiene que

$$\hat{\phi}^{*'} = e^{-i\theta} \hat{\phi}^* \quad (\text{VII.14})$$

Entonces la simetría $U(1)$ de la densidad lagrangiana puede probarse de la siguiente manera.

Supóngase que θ es constante, entonces

$$\begin{aligned}\partial_\mu \hat{\phi}^{*'} &= e^{-i\theta} \partial_\mu \hat{\phi}^* \\ \partial^\mu \hat{\phi} &= e^{i\theta} \partial^\mu \hat{\phi} \\ \Rightarrow \partial_\mu \hat{\phi}^{*'} \partial^\mu \hat{\phi} &= e^{-i\theta} e^{i\theta} \partial_\mu \hat{\phi}^* \partial^\mu \hat{\phi} = \partial_\mu \hat{\phi}^* \partial^\mu \hat{\phi}\end{aligned}\tag{VII.15}$$

Nótese que se supuso que θ es constante. Dado esta suposición, este tipo de simetría recibe el nombre de simetría global $U(1)$ y se define como una única transformación $U(1)$ aplicada a todos los puntos.

Por otro lado, se denomina simetría local a una transformación que puede variar punto a punto, en otras palabras, que θ dependa de x^μ que por simplicidad se escribirá como $\theta(x)$.

Tanto la simetría global $U(1)$ como la simetría local $U(1)$ conforman parte de lo que generalmente se conoce como simetría de gauge. Para definir correctamente una simetría de gauge, se debe desarrollar una teoría matemática en paralelo asociada con grupos de Lie, pero debido a que para los objetivos de este trabajo no es necesario, sin contar que se estaría desviando al lector mucho del tema, únicamente se aclarará el concepto intuitivamente. Para esto, considerando la densidad lagrangiana anterior, es fácil ver que dicha densidad lagrangiana ya no permanecería invariante si la transformación $U(1)$ fuese local. En otras palabras, \mathcal{L} no es invariante ante una simetría local $U(1)$ por sí sola.

La simetría de gauge (o ser invariante de gauge) pretende poner ciertas condiciones de tal forma en que algunas transformaciones locales, como la anteriormente mencionada, deje invariante la densidad lagrangiana. Es decir, propone algunas modificaciones (se verá más adelante) y condiciones, de tal forma en que si \mathcal{L} es invariante de gauge, entonces será invariante ante alguna simetría local.

Entonces, cuando se considera un campo ϕ por ejemplo, y se incluye otros campos distintos, supóngase el potencial electromagnético A^μ , se debe de hallar cómo se transforman estos campos distintos cuando se realiza la operación de simetría de ϕ (ecuación [VII.13](#)) para el caso de simetría $U(1)$.

Por otro lado, debido a que \mathcal{L} deberá permanecer invariante, se debe redefinir las densidades lagrangianas a densidades que sean invariante de gauge, lo cual constituye a las modificaciones

anteriormente mencionadas. Esto se puede realizar sustituyendo todas las derivadas que aparecen en ella, por derivadas covariantes de gauge, las cuales se definirán en la siguiente sección.

C. Simetría de gauge en mecánica cuántica

A continuación se probará como ejemplo que la ecuación de Schrödinger es covariante de gauge al tomar en cuenta el hamiltoniano electromagnético $H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV$ donde q representa la carga. Aplicándole una cuantización canónica a este hamiltoniano, es posible sustituirlo en la ecuación de Schrödinger, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2 + qV \right) \Psi(\vec{x}, t) &= i \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{x}, t) &= \left(i \frac{\partial}{\partial t} - qV \right) \Psi(\vec{x}, t) \\ \Rightarrow \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{x}, t) &= i \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} qV \right) \Psi(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Entonces, al aplicar una transformación gauge se tiene que, $\Psi'(\vec{x}, t) = e^{iq\chi(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t)$ y el potencial $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi$. Por último, se debe notar que del lado izquierdo de la ecuación (VII.16) se tiene $-i\nabla - q\vec{A}$ con lo que si se sustituye $\vec{D} = \nabla - iqA$ se obtendrá $-i\nabla - q\vec{A} = -i(\vec{D} + iq\vec{A}) - q\vec{A} \Rightarrow -i\nabla - q\vec{A} = -i\vec{D}$. Ahora bien, del lado derecho se tiene que $\frac{\partial}{\partial t} + iqV$, con lo que si se sustituye $\mathcal{D}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + iqV$ se obtiene que el lado derecho de la ecuación es $i\mathcal{D}^0$, con lo que toda la ecuación tendría la forma de

$$-\frac{\vec{D}}{2m}\Psi(\vec{x}, t) = i\mathcal{D}^0\Psi(\vec{x}, t) \quad (\text{VII.17})$$

similar a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre (Aitchison & Hey, 2003). El operador \mathcal{D}^μ es la derivada covariante de gauge para el caso electromagnético y se definió con

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad (\text{VII.18})$$

Entonces teniendo que la transformación de gauge es

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t) &\rightarrow \Psi'(\vec{x}, t) = e^{iq\chi(\vec{x}, t)}\Psi(\vec{x}, t) \\ A^\mu &\rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu\chi \\ \partial_\mu &\rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu\end{aligned}\tag{VII.19}$$

con lo que se probará que la ecuación (VII.16) es covariante de gauge.

Para empezar, nótese que

$$\begin{aligned}-i\vec{\mathcal{D}}'\Psi' &= (-i\nabla - q\vec{A}')\Psi' = [-i\nabla - q\vec{A} - q(\nabla\chi)](e^{iq\chi}\Psi) \\ &= q(\nabla\chi)e^{iq\chi}\Psi + e^{iq\chi}(-i\nabla\Psi) + e^{iq\chi}(-q\vec{A}\Psi) - q(\nabla\chi)e^{iq\chi}\Psi \\ &= e^{iq\chi}(-i\nabla\Psi) + e^{iq\chi}(-q\vec{A}\Psi) \\ &= e^{iq\chi}[-i\nabla - q\vec{A}]\Psi \\ &= e^{iq\chi}(-i\vec{\mathcal{D}})\Psi\end{aligned}\tag{VII.20}$$

Además,

$$\begin{aligned}i\mathcal{D}'^0\Psi' &= i\left[\frac{\partial}{\partial t} + iqV'\right]\Psi' = i\left[\frac{\partial}{\partial t} + iqV - iq\frac{\partial\chi}{\partial t}\right]e^{iq\chi}\Psi \\ &= i\left[iqe^{iq\chi}\Psi\frac{\partial\chi}{\partial t} + e^{iq\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Psi + iqVe^{iq\chi}\Psi - iqe^{iq\chi}\Psi\frac{\partial\chi}{\partial t}\right] \\ &= i\left[e^{iq\chi}\frac{\partial}{\partial t}\Psi + iqVe^{iq\chi}\Psi\right] \\ &= ie^{iq\chi}\left[\frac{\partial}{\partial t} + iqV\right]\Psi \\ &= e^{iq\chi}(i\mathcal{D}^0)\Psi'\end{aligned}\tag{VII.21}$$

Por último nótese que

$$\begin{aligned}[\vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{D}}'] &= \vec{\mathcal{D}}\vec{\mathcal{D}}'\Psi - \vec{\mathcal{D}}'\vec{\mathcal{D}}\Psi = (\nabla - iq\vec{A})(\nabla - iq\vec{A}')\Psi - (\nabla - iq\vec{A}')(\nabla - iq\vec{A})\Psi \\ &= \nabla^2\Psi - iq\nabla(\vec{A}'\Psi) - iq\nabla(\vec{A}\Psi) - q^2\vec{A}\vec{A}'\Psi - \nabla^2\Psi + iq\nabla(\vec{A}'\Psi) + iq\nabla(\vec{A}\Psi) + q^2\vec{A}'\vec{A}\Psi = 0\end{aligned}\tag{VII.22}$$

Entonces, utilizando las propiedades anteriores,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(-i\vec{D}')^2\Psi' = iD^{0'}\Psi' &\Rightarrow \frac{e^{iq\chi}}{2m}(-i\vec{D})^2\Psi = e^{iq\chi}iD^0\Psi \\ &\Rightarrow \frac{1}{2m}(-i\vec{D})^2\Psi = iD^0\Psi \end{aligned} \quad (\text{VII.23})$$

Las simetrías locales son muy importantes en la física, pues a ellas se le atribuyen todas las fuerzas que se conocen hoy en día (Aitchison & Hey, 2003).

Tal y como se puede observar, una consecuencia de tratar de preservar esta simetría local fue introducir la derivada covariante, la cual posee términos que involucran al potencial electromagnético A^μ . Posteriormente se verá que debido a estos términos es que se deben las interacciones electromagnéticas. Otra importancia de estas transformaciones de gauge, es que como se observará más adelante, estas simetrías también conllevan a que ciertas cantidades se conserven, en el caso electromagnético es el hecho que la carga se conserva localmente.

La ruta que se tomará el resto del capítulo será trabajar la simetría global para los dos campos que se han venido trabajando a lo largo del trabajo, el campo de Klein-Gordon y el campo de Dirac. Por último, se considerará la simetría local de este último y con esto se estudiará una breve introducción a interacciones electromagnéticas.

D. Simetría global $U(1)$ del Campo Escalar Complejo: Partículas y anti-partículas

Como se discutió anteriormente, el Campo Escalar Real no posee una simetría $U(1)$. Si se le otorga otro grado de libertad a este campo de tal manera que tenga una simetría global $U(1)$, propiedades interesantes salen a la luz. Para esto, considérese la densidad lagrangiana de dos campos escalares cuyos cuantos tienen la misma masa M

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_1\partial^\mu\hat{\phi}_1 - \frac{1}{2}M^2\hat{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}_2\partial^\mu\hat{\phi}_2 - \frac{1}{2}M^2\hat{\phi}_2^2 \quad (\text{VII.24})$$

donde $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$ son campos escalares.

Esta densidad lagrangiana representa dos campos reales independientes, es decir que no interaccionan entre sí. Lo que se debe de hacer a continuación es definir un campo $\hat{\phi}$, tal que sus componentes sean $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$. Esto es

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\phi}_1 - i\hat{\phi}_2) \\ \hat{\phi}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2)\end{aligned}\tag{VII.25}$$

donde $\hat{\phi}^\dagger$ es la conjugada hermítica de $\hat{\phi}$.

Con esta sustitución, la densidad lagrangiana toma la forma de

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}} &= \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \hat{\phi}_1)^2 - (\partial_1 \hat{\phi}_1)^2 - (\partial_2 \hat{\phi}_1)^2 - (\partial_3 \hat{\phi}_1)^2 \right] - \frac{1}{2} M^2 (\hat{\phi}_1^2 + \hat{\phi}_2^2) \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \hat{\phi}_2)^2 - (\partial_1 \hat{\phi}_2)^2 - (\partial_2 \hat{\phi}_2)^2 - (\partial_3 \hat{\phi}_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left[(\partial_0 \hat{\phi}_1)^2 + (\partial_0 \hat{\phi}_2)^2 \right] - \left[(\partial_1 \hat{\phi}_1)^2 + (\partial_1 \hat{\phi}_2)^2 - \dots \right] - M^2 (\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2) (\hat{\phi}_1 - i\hat{\phi}_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\partial_0 \hat{\phi}_1 + i\partial_0 \hat{\phi}_2) (\partial_0 \hat{\phi}_1 - i\partial_0 \hat{\phi}_2) - (\partial_1 \hat{\phi}_1 + i\partial_1 \hat{\phi}_2) (\partial_1 \hat{\phi}_1 - i\partial_1 \hat{\phi}_2) - \dots \right] - M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\partial_0 (\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2) \partial_0 (\hat{\phi}_1 - i\hat{\phi}_2) - \partial_1 (\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2) \partial_1 (\hat{\phi}_1 - i\hat{\phi}_2) - \dots \right] - M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \\ &= \left[\partial_0 \hat{\phi}^\dagger \partial_0 \hat{\phi} - \partial_1 \hat{\phi}^\dagger \partial_1 \hat{\phi} - \dots \right] - M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \\ &= \partial_\mu \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi}\end{aligned}\tag{VII.26}$$

Nótese que ahora $\hat{\mathcal{L}}$ tiene un término de interacción ($M\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}$). Además, partiendo de cómo se definió $\hat{\phi}$ para el Campo Escalar Real en el capítulo IV, se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{a}_1^\dagger(k)e^{ik\cdot x}) - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2(k)e^{-ik\cdot x} + \hat{a}_2^\dagger(k)e^{ik\cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left([\hat{a}_1(k) - i\hat{a}_2(k)] e^{-ik\cdot x} + [\hat{a}_1^\dagger(k) - i\hat{a}_2^\dagger(k)] e^{ik\cdot x} \right)\end{aligned}\tag{VII.27}$$

Sea $\hat{a}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(k) - i \hat{a}_2(k))$ y $\hat{b}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger(k) - i \hat{a}_2^\dagger(k))$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left(\hat{a}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right) \\ \hat{\phi}^\dagger &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left(\hat{b}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right)\end{aligned}\quad (\text{VII.28})$$

Nótese que en el caso real $\hat{\phi}$ estaba descrito por \hat{a} y \hat{a}^\dagger debido a que $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$ con lo que $\hat{a}^\dagger = \hat{b}^\dagger$. En este caso, la conjugada hermítica de $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1(k) - i \hat{a}_2(k))$ es $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger(k) + i \hat{a}_2^\dagger(k)) \neq \hat{b}^\dagger$.

Por otro lado, se tiene que

$$\hat{\Pi}_\phi = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \hat{\phi})} = \partial_0 \hat{\phi}^\dagger, \quad \hat{\Pi}_{\phi^\dagger} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \hat{\phi}^\dagger)} = \partial_0 \hat{\phi}\quad (\text{VII.29})$$

Entonces, para un mismo tiempo t , se tiene que

$$\begin{aligned}\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\phi(\vec{x}', t) \right] &= \left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}', t) \right] = i\delta(\vec{x}, \vec{x}') \\ \left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}, t) \right] &= \left[\hat{\Pi}_\phi(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_{\phi^\dagger}(\vec{x}, t) \right] = 0\end{aligned}\quad (\text{VII.30})$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k') \right] &= \left[\hat{b}(k), \hat{b}^\dagger(k') \right] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \\ \left[\hat{a}(k), \hat{b}^\dagger(k') \right] &= \left[\hat{a}(k)^\dagger, \hat{b}(k') \right] = \left[\hat{a}(k)^\dagger, \hat{b}^\dagger(k') \right] = \left[\hat{a}(k), \hat{b}(k') \right] = 0\end{aligned}\quad (\text{VII.31})$$

A continuación se probará que $\hat{\mathcal{L}}$ tiene una simetría global $U(1)$.

Para este caso se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &\rightarrow \hat{\phi}' = \hat{\phi} e^{i\alpha} \\ \hat{\phi}^\dagger &\rightarrow \hat{\phi}'^\dagger = \hat{\phi}^\dagger e^{-i\alpha}\end{aligned}\quad (\text{VII.32})$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}' &= \partial_\mu \hat{\phi}'^\dagger \partial^\mu \hat{\phi}' - M^2 \hat{\phi}'^\dagger \hat{\phi}' \\ &= \partial_\mu \left(\hat{\phi}^\dagger e^{-i\alpha} \right) \partial^\mu \left(\hat{\phi} e^{i\alpha} \right) - M^2 \hat{\phi}^\dagger e^{-i\alpha} \hat{\phi} e^{i\alpha} \\ &= e^{-i\alpha} e^{i\alpha} \partial_\mu \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - e^{-i\alpha} e^{i\alpha} M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \\ &= \partial_\mu \hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - M^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \\ &= \hat{\mathcal{L}}\end{aligned}\quad (\text{VII.33})$$

En mecánica clásica de campos existe una versión del teorema de Noether, el cual dice que si una densidad lagrangiana \mathcal{L} es invariante bajo una transformación continua entonces existe un operador de *simetría de corriente*. Este teorema es un tanto fuerte para el objetivo del trabajo por lo que solamente se deja el enunciado sin hacer dicha demostración. Sin embargo, si se quiere ahondar más en el tema, se recomienda dirigirse a (Tong, 2007). Por otro lado, se hace la pregunta, ¿qué es el operador de simetría de corriente?

El operador de simetría de corriente es un operador asociado a alguna simetría (global o local) la cual representa alguna cantidad física que se conserva (Aitchison & Hey, 2003). Estos operadores de simetría, aunque un tanto abstractos, son de suma importancia y su utilidad se verá inmediatamente después de encontrarlo. Para esto, considérese el parámetro ε el cual es positivo y $\varepsilon \ll 1$. Entonces, la transformación $U(1)$ es

$$\hat{\phi}' = e^{i\varepsilon} \hat{\phi} \quad (\text{VII.34})$$

la cual puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'_1 &= \cos(\varepsilon)\hat{\phi}_1 - i \sin(\varepsilon)\hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}'_2 &= \cos(\varepsilon)\hat{\phi}_2 + i \sin(\varepsilon)\hat{\phi}_1 \end{aligned} \quad (\text{VII.35})$$

Dado que $|\varepsilon| \ll 1 \Rightarrow \sin(\varepsilon) \approx \varepsilon$ y $\cos(\varepsilon) \approx 1$, con lo que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'_1 &= \hat{\phi}_1 - i\varepsilon\hat{\phi}_2 \\ \hat{\phi}'_2 &= \hat{\phi}_2 + i\varepsilon\hat{\phi}_1 \end{aligned} \quad (\text{VII.36})$$

Por otro lado, se define una variación de $\hat{\phi}$ como $\delta\hat{\phi}$, donde

$$\begin{aligned} \delta\hat{\phi}'_1 &\equiv \hat{\phi}'_1 - \hat{\phi}_1 = -i\varepsilon\hat{\phi}_2 \\ \delta\hat{\phi}'_2 &\equiv \hat{\phi}'_2 - \hat{\phi}_2 = +i\varepsilon\hat{\phi}_1 \end{aligned} \quad (\text{VII.37})$$

Entonces, dado que $\hat{\mathcal{L}}$ es invariante ante la transformación $e^{i\varepsilon}$ de igual manera $\delta\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}' - \hat{\mathcal{L}} = 0$,

calculando $\delta\hat{\mathcal{L}}$, se obtiene que

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_1) + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_2) + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\hat{\phi}_1}\delta\hat{\phi}_1 + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\hat{\phi}_2}\delta\hat{\phi}_2 \quad (\text{VII.38})$$

de la ecuación de Euler-Lagrange se tiene que

$$\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial\hat{\phi}_i} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_i)} \right) \quad (\text{VII.39})$$

con lo que

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_1) + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)}\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_2) + \partial_\mu \left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)} \right) \delta\hat{\phi}_1 + \partial_\mu \left(\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)} \right) \delta\hat{\phi}_2 \quad (\text{VII.40})$$

Ahora bien, dado que $\delta(\partial_\mu\hat{\phi}_i) = \partial_\mu(\delta\hat{\phi}_i)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{L}} &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)} \right] \delta\hat{\phi}_1 + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)} \partial_\mu(\delta\hat{\phi}_1) + \partial_\mu \left[\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)} \right] \delta\hat{\phi}_2 + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)} \partial_\mu(\delta\hat{\phi}_2) \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)} \delta\hat{\phi}_1 + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)} \delta\hat{\phi}_2 \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.41})$$

Nótese que la ecuación (VII.41) es general y puede utilizarse para calcular el operador de corriente de simetría de un campo arbitrario. Ahora bien, sustituyendo $\delta\hat{\phi}_1$ y $\delta\hat{\phi}_2$ se obtiene

$$\delta\hat{\mathcal{L}} = \partial_\mu \left[\frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_1)} (-i\varepsilon\hat{\phi}_2) + \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\hat{\phi}_2)} (i\varepsilon\hat{\phi}_1) \right] = i\varepsilon \left[(\partial^\mu\hat{\phi}_2) \hat{\phi}_1 - (\partial^\mu\hat{\phi}_1) \hat{\phi}_2 \right] = 0 \quad (\text{VII.42})$$

Sea $\hat{N}_\phi^\mu = i (\hat{\phi}_1 \partial^\mu \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2 \partial^\mu \hat{\phi}_1)$, entonces es posible escribir

$$\partial_\mu \hat{N}_\phi^\mu = 0 \quad (\text{VII.43})$$

El tensor \hat{N}_ϕ^μ es en efecto el operador de simetría de corriente, el cual tal y como muestra la ecuación (VII.43), es una cantidad que se conserva. Para hallar el operador de simetría se procede con

$$\partial_\mu \hat{N}_\phi^\mu = \frac{\partial \hat{N}_\phi^0}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{\vec{N}}_\phi = 0 \quad (\text{VII.44})$$

El operador de simetría de corriente puede reducirse a un operador de una sola componente. Esto se hace integrando respecto a todo el espacio de ambos lados de la ecuación,

$$\frac{d}{dt} \int_{V \rightarrow \infty} \hat{N}_\phi^0 d^3x + \int_{V \rightarrow \infty} \nabla \cdot \hat{\vec{N}}_\phi d^3x = 0 \quad (\text{VII.45})$$

Usando el teorema de la divergencia, se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{V \rightarrow \infty} \hat{N}_\phi^0 d^3x + \int_{S \rightarrow \infty} \hat{\vec{N}}_\phi \cdot ds = 0 \quad (\text{VII.46})$$

Debido a que se supone que los campos se desvanecen en el infinito, la segunda integral tiende a cero con lo que

$$\hat{N}_\phi = \int \hat{N}_\phi^0 d^3x \quad (\text{VII.47})$$

el cual recibe el nombre de operador de simetría. Para ver cómo este es de utilidad en la teoría, primero considérese el hamiltoniano del Campo Escalar Complejo,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right] \omega \quad (\text{VII.48})$$

el cual se puede obtener a través de un proceso similar utilizado en el capítulo IV y ordenando normalmente. Por otro lado, dado que

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_\phi &= \int \hat{N}_\phi^0 d^3x \\
 &= \int i \left(\hat{\phi}_1 \partial^0 \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2 \partial^0 \hat{\phi}_1 \right) d^3x \\
 &= \int i \left(\hat{\phi}^\dagger \partial^0 \hat{\phi} - \hat{\phi} \partial^0 \hat{\phi}^\dagger \right) d^3x
 \end{aligned} \tag{VII.49}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \partial^0 \hat{\phi} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-i\omega) \left(\hat{a}(k) e^{-ik \cdot x} - \hat{b}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right) \\
 \Rightarrow \partial^0 \hat{\phi}^\dagger &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-i\omega) \left(\hat{b}(k) e^{-ik \cdot x} - \hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right)
 \end{aligned} \tag{VII.50}$$

Sustituyendo la ecuación (VII.50) en la ecuación (VII.49) e integrando respecto de d^3x con la ayuda de la función δ - Dirac se obtiene (Aitchison, 2003)

$$\hat{N}_\phi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right] \tag{VII.51}$$

En donde se puede ver que \hat{N}_ϕ está normalmente ordenado ya que

$$\hat{N}_\phi |0\rangle = 0 \tag{VII.52}$$

Obsérvese que si se define al operador numérico para las partículas tipo A como $\hat{n}_A = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ y similarmente $\hat{n}_B = \hat{b}^\dagger \hat{b}$, entonces el hamiltoniano es la suma de \hat{n}_A y \hat{n}_B mientras que el operador de simetría es su resta. Puesto de otra manera, el hamiltoniano \hat{H} cuenta cuantas partículas A y B hay mientras que \hat{N}_ϕ cuenta +1 por cada partícula A y -1 por cada partícula B, con lo cual se puede intuir que las partículas B representan las antipartículas de A (o viceversa, solamente es cuestión de convención). Para ver esto mejor, considérese el estado $|N_\phi\rangle$ el cual es eigenestado de \hat{N}_ϕ . Si se opera $\hat{N}_\phi |N_\phi\rangle = N_\phi |N_\phi\rangle$ donde N_ϕ es un eigenvalor de \hat{N}_ϕ . Entonces, dado que \hat{N}_ϕ es como un operador numérico (definido en el capítulo IV) más general, debido a que involucra partículas A y B (un operador numérico global), entonces se usará este para contar cuántas partículas existen tras

operar $\hat{\phi} |N_\phi\rangle$. Esto es,

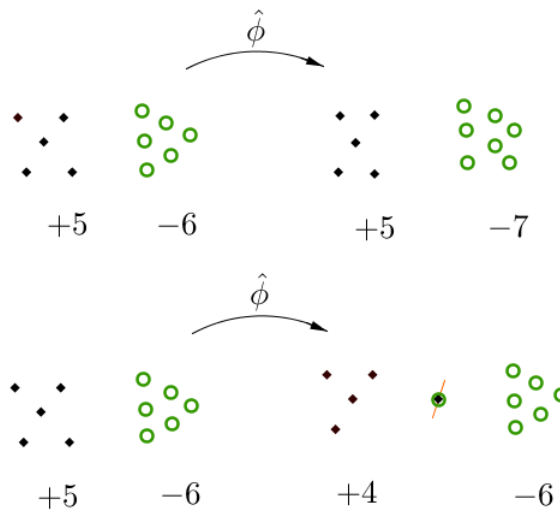
$$\begin{aligned}
 \hat{N}_\phi \hat{\phi} |N_\phi\rangle &= (\hat{\phi} \hat{N}_\phi - \hat{\phi}) |N_\phi\rangle \\
 &= (-\hat{\phi} + \hat{\phi} \hat{N}_\phi) |N_\phi\rangle \\
 &= -\hat{\phi} + \hat{\phi} N_\phi |N_\phi\rangle \\
 &= \hat{\phi} (N_\phi - 1) |N_\phi\rangle
 \end{aligned}
 \tag{VII.53}$$

en donde se usó que $[\hat{N}_\phi, \hat{\phi}] = -\hat{\phi}$, relación que se probará a continuación, pero antes, nótese que $\hat{\phi}$ bajó una cantidad al eigenvalor N_ϕ , lo cual puede ser interpretado como si $\hat{\phi}$ creó una partícula B. De igual manera, si se toma que $[\hat{N}_\phi, \hat{\phi}^\dagger] = \hat{\phi}^\dagger$, entonces

$$\hat{N}_\phi \hat{\phi}^\dagger |N_\phi\rangle = \hat{\phi}^\dagger (N_\phi + 1) |N_\phi\rangle
 \tag{VII.54}$$

lo cual puede interpretarse como si se creó una partícula A, o bien, como si se aniquiló una partícula B, con lo cual se observa que las partículas B son las antipartículas de A. La Figura No. VII.2 es una interpretación gráfica en donde se puede ver que ambos sistemas las partículas terminan sumando -2 .

Figura VII.2: Las partículas A y las antipartículas B



Antes de realizar la prueba a las relaciones que quedaron pendientes, se debe mencionar que la

definición de vacío (en el cual no hay partículas) se sigue sosteniendo con lo cual

$$\hat{a}(k) |0\rangle = \hat{b}(k) |0\rangle = 0, \quad \forall k \quad (\text{VII.55})$$

Ahora bien, las relaciones de conmutación mencionadas anteriormente pueden probarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} [\hat{N}_\phi, \hat{\phi}] &= \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right) \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \hat{a}(k') e^{-ik' \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x} \right) \\ &\quad - \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \hat{a}(k') e^{-ik' \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x} \right) \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right) \end{aligned} \quad (\text{VII.56})$$

Los únicos operadores que no se cancelan con la resta son los operadores que no conmutan, con lo que

$$\begin{aligned} &= \int \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^6 \sqrt{2\omega}} [\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}(k')] \hat{a}(k) e^{-ik' \cdot x} - \hat{b}^\dagger(k) [\hat{b}(k), \hat{b}^\dagger(k')] e^{ik' \cdot x} \\ &= \int \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-\delta(k - k')) (\hat{a}(k) e^{-ik' \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k) e^{ik' \cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (-\hat{a}(k) e^{-ik \cdot x} - \hat{b}^\dagger(k) e^{ik \cdot x}) \\ &= -\hat{\phi} \end{aligned} \quad (\text{VII.57})$$

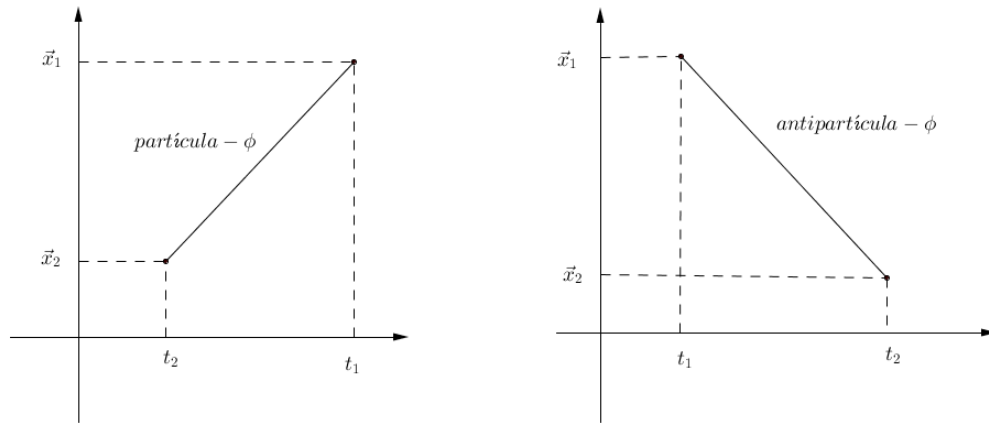
De igual manera,

$$\begin{aligned} [\hat{N}_\phi, \hat{\phi}^\dagger] &= \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k) \hat{b}(k) - \hat{a}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right) \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \hat{a}(k') e^{-ik' \cdot x} + \hat{b}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x} \right) \\ &\quad - \left(\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \hat{b}(k') e^{-ik' \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k') e^{ik' \cdot x} \right) \left(\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}^\dagger(k) \hat{b}(k) \right) \\ &= \int \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \delta(k - k') (\hat{b}(k) e^{-ik' \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik' \cdot x}) \\ &= \int \frac{d^3 k d^3 k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} (\hat{b}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik \cdot x}) \\ &= \hat{\phi}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{VII.58})$$

Por último, es importante mencionar que tras el desarrollo del capítulo anterior, las reglas de Feynman para el campo escalar complejo son análogas. No obstante, vale la pena discutir acerca del propagador, el cual tiene la forma de $\langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}^\dagger(x_2)) | 0 \rangle$.

Debido a cómo se definió el vacío, los términos $T(\hat{\phi}\hat{\phi})$ y $T(\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi}^\dagger)$ deben ser cero al calcular el valor esperado del vacío. Además nótese que para $t_1 > t_2$ se tiene que se crea una partícula tipo A en (\vec{x}_2, t_2) y esta es aniquilada en (\vec{x}_1, t_1) . Ahora bien, para $t_2 > t_1$ se obtiene que una partícula B es creada en (\vec{x}_1, t_1) y es aniquilada en (\vec{x}_2, t_2) . Esto puede resumirse diciendo que para $t_1 > t_2$ una partícula se propaga de x_2 a x_1 y para $t_2 > t_1$ una antipartícula se propaga de x_1 a x_2 . La Figura No. VII.3 muestra una descripción gráfica de esto. Es importante notar que debido a que el propagador de Feynman está escrito en términos del operador T , el propagador de Feynman incluye ambos casos, es decir ambos procesos se llevan a cabo. Sin embargo, al considerar los diagramas de Feynman, no se debe de indicar que orden de tiempo se está usando, sino solamente recordar que ambos órdenes de tiempo están incluidos en cada línea de propagación (Aitchison & Hey, 2003).

Figura VII.3: Casos incluidos en el propagador de Feynman.



Por otro lado, dado la similitud que se tiene al caso desarrollado en el capítulo IV ($\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ satisfacen la ecuación de Klein-Gordon) la función de Green $\langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}^\dagger(x_2)) | 0 \rangle = G_F(x_1 - x_2)$ asociada al operador $(\square^2 + m^2)$ es

$$G_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (\text{VII.59})$$

E. El campo de Dirac y la conexión con el teorema de estadística de espín

La primera parte de esta sección se basará en cuantizar el campo de Dirac, con lo cual se debe de partir de la densidad lagrangiana respectiva. Anteriormente, se definió la ecuación de Dirac en términos de matrices las cuales se denominaron por *matrices alfa*. Sin embargo, en la literatura es común encontrar estas mismas matrices bajo el nombre de *matrices gama*, lo que para ir acorde a la literatura se usarán las mismas matrices α pero se usará el símbolo de γ para denotarlas.

Luego, la segunda y parte final de esta sección, se estudiará a grandes rasgos la conexión que existe entre el campo de Dirac y el teorema de estadística de espín, el cual dice de forma resumida que si se intercambia la posición de dos partículas con espín entero (espín idéntico para ambas), su función de onda permanece igual (es simétrica) y que si se intercambia la posición de dos partículas con espín no-entero (también idéntico para ambas partículas), su función de onda cambia de signo (es antisimétrica). Las partículas de onda con función de onda simétrica se les llama *bosones* y a las partículas con función de onda antisimétrica se les llama *fermiones*. Sin más que agregar, se empezará a desarrollar la primera parte de esta sección.

La densidad lagrangiana respectiva a la ecuación de Dirac es

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (\text{VII.60})$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ es el spinor conjugado.

Recordando el desarrollo del capítulo II, el Dirac-spinor ψ tiene 4 componentes, 2 de ellas con energía positiva y las otras 2 con energía negativa. Entonces los resultados encontrados en (II.97) pueden escribirse por medio de una función u que dependa del espín, con lo cual $\psi_{1,2} = e^{-itmc^2/\hbar}u(s)$. Esta función $u(s)$ se llama spinor de energía. De igual manera, los resultados encontrados en la ecuación (II.98) pueden escribirse mediante $v(s)$ con lo que se puede reescribir $\psi_{3,4} = e^{+itmc^2/\hbar}v(s)$, donde s es el espín. Esta función se denomina spinor de energía negativa.

No obstante, un análisis más detallado, el cual puede ser encontrado en (Aitchison & Hey, 2003) capítulo 4 o bien, (Aitchison, 1972) capítulo 8, muestra que el Dirac spinor, solución general de la ecuación de Dirac, siempre puede ser escrito en términos del spinor de energía positiva $u(s)$ y del spinor de energía negativa $v(s)$.

Entonces, debido a esto, es posible expandir a $\hat{\psi}$ como

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s(k) u(k, s) e^{-ik \cdot x} + \hat{d}_s^\dagger v(k, s) e^{ik \cdot x} \right] \quad (\text{VII.61})$$

donde $\omega = (m^2 + k^2)^{1/2}$. La expresión anterior es análoga a las expresiones que se han venido desarrollando, con la diferencia que $\hat{\psi}$ tiene cuatro componentes en lugar de 1 (como es el caso de $\hat{\phi}$ y que la expansión posee una suma respecto a los 2 valores distintos de espín que pueden tomar $u(k, s)$ y $v(k, s)$). Nótese que para el caso especial que se analizó en el capítulo II, la partículas en reposo, $u(k, s) \rightarrow u(s)$ y $v(k, s) \rightarrow v(s)$.

Tal y como se interpretó para el caso del campo escalar complejo, se esperaría que $\hat{c}_s^\dagger(k)$ fuese el operador creación para una partícula del campo de Dirac con espín s y momentum k , mientras que $\hat{d}_s^\dagger(k)$ fuese el operador creación de la antipartícula de c , con espín s y momentum k . Después de todo, haría sentido ya que $\hat{c}_s(k)$ acompaña al spinor de energía positiva y $\hat{d}_s^\dagger(k)$ al spinor de energía opuesta y las partículas se diferencian de las antipartículas justamente por eso, por ser idénticas pero con energías opuestas.

Igualmente, el vacío se define como

$$\hat{c}_s(k) |0\rangle = \hat{d}_s^\dagger(k) |0\rangle = 0, \quad \forall k \text{ y } \forall s = 1, 2 \quad (\text{VII.62})$$

Ahora bién, de igual forma que el Campo Escalar Complejo, el Campo de Dirac cuenta con una simetría $U(1)$ con lo que

$$\hat{\psi} \rightarrow \hat{\psi}' = e^{-i\alpha} \hat{\psi} \quad (\text{VII.63})$$

Esta simetría puede probarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}'_D &= \hat{\bar{\psi}}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\psi}' \\ &= \hat{\bar{\psi}} e^{i\alpha} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-i\alpha} \hat{\psi} \\ &= \hat{\bar{\psi}} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \hat{\psi} \\ &= \hat{\mathcal{L}}_D \end{aligned} \quad (\text{VII.64})$$

Siguiendo un procedimiento análogo al caso del Campo Escalar Complejo se tiene que

$$\hat{N}_\psi^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\psi})} i\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\bar{\psi}})} i\psi = \hat{\bar{\psi}} \gamma^\mu \psi \quad (\text{VII.65})$$

con lo que el operador de simetría asociado es

$$\hat{N}_\psi = \int \hat{\bar{\psi}} \gamma^0 \hat{\psi} d^3x = \int \hat{\psi}^\dagger (\gamma^0 \gamma^0) \hat{\psi} d^3x = \int \hat{\psi}^\dagger \psi d^3x \quad (\text{VII.66})$$

Sustituyendo la expresión de $\hat{\psi}$ y de $\hat{\bar{\psi}}$ en la ecuación (VII.66) se obtiene que

$$\hat{N}_\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s^\dagger(k) \hat{c}_s(k) + \hat{d}_s(k) \hat{d}_s^\dagger(k) \right] \quad (\text{VII.67})$$

Y similarmente,

$$\hat{H}_D = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s^\dagger(k) \hat{c}_s(k) - \hat{d}_s(k) \hat{d}_s^\dagger(k) \right] \omega \quad (\text{VII.68})$$

Nótese que en la ecuación (VII.67) se tiene que el operador de simetría tiene una suma de partículas c y d . Esto no es conveniente, ya que si se desea que d sean las antipartículas de c , estas deben de tener un valor opuesto en el operador \hat{N}_ψ , tal y como se obtuvo para el caso del Campo Escalar Complejo. Por otro lado, el hamiltoniano posee un signo menos en él, con lo que contradice el supuesto que esta cantidad es siempre positiva (Aitchison & Hey, 2003). Como se puede ver, existen problemas si se interpreta este campo exactamente igual que como el caso anterior del Campo Escalar Complejo. Tal vez esta ecuación no describe las mismas partículas que las que describe el Campo Escalar Complejo, después de todo estas partículas sí cuentan con un espín diferente de cero. Dirac hayó que el problema que se presenta en las ecuaciones (VII.67) y (VII.68) se debe a un argumento de simetría y antisimetría y para solucionar este problema encontró que se debía de cumplir que

$$|k_1, s_1; k_2, s_2\rangle = -|k_2, s_2; k_1, s_1\rangle \quad (\text{VII.69})$$

tal y como (Aitchison & Hey, 2003) lo discute. De mecánica estadística y el teorema de estadística de

espín, se conoce que las partículas que obedecen la ecuación (VII.69) son los fermiones. Entonces, debido a que

$$|k_1, s_1; k_2, s_2\rangle \propto \hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)|0\rangle \quad (\text{VII.70})$$

la condición que impone la ecuación (VII.69) se puede interpretar como

$$\begin{aligned} \hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2) &= -\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1) \\ \hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1)\hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2) + \hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.71})$$

Esta relación se le denomina por relación de anticonmutación y se define como

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (\text{VII.72})$$

donde \hat{A} y \hat{B} son operadores.

Luego, se procede a sustituir todos los conmutadores (los cuales son simétricos) por anticonmutadores (los cuales son antisimétricos) (Aitchison & Hey, 2003). Esto es

$$\begin{aligned} \{\hat{c}_{s_1}(k_1), \hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)\} &= (2\pi)^3\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\delta_{s_1, s_2} \\ \{\hat{c}_{s_1}(k_1), \hat{c}_{s_2}(k_2)\} &= \{\hat{c}_{s_1}^\dagger(k_1), \hat{c}_{s_2}^\dagger(k_2)\} = 0 \\ \{\hat{d}_{s_1}(k_1), \hat{d}_{s_2}^\dagger(k_2)\} &= (2\pi)^3\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\delta_{s_1, s_2} \\ \{\hat{d}_{s_1}(k_1), \hat{d}_{s_2}(k_2)\} &= \{\hat{d}_{s_1}^\dagger(k_1), \hat{d}_{s_2}^\dagger(k_2)\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.73})$$

De igual manera se tiene que en lugar de tener un conmutador fundamental, se tiene un anticonmutador fundamental de la forma

$$\{\hat{\psi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_D(\vec{y}, t)\} = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{VII.74})$$

donde,

$$\Pi_D = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_D}{\partial \dot{\hat{\psi}}} = i\hat{\psi}^\dagger \quad (\text{VII.75})$$

Es importante recordar que $\hat{\psi}$ y $\hat{\Pi}_D$ son objetos de cuatro componentes con lo que la relación de la ecuación (VII.74) se puede escribir como

$$\left\{ \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta_{\alpha\beta} \quad \text{con } \alpha = 1, 2, 3, 4 \text{ y } \beta = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{VII.76})$$

Haciendo estas sustituciones, los problemas en las ecuaciones (VII.67) y (VII.68) desaparecen, con lo cual se obtiene

$$\hat{N}_\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k) - \hat{d}_s(k)\hat{d}_s^\dagger(k) \right] \quad (\text{VII.77})$$

$$\hat{H}_D = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{s=1,2} \left[\hat{c}_s^\dagger(k)\hat{c}_s(k) + \hat{d}_s(k)\hat{d}_s^\dagger(k) \right] \omega \quad (\text{VII.78})$$

con lo cual es posible interpretar a los cuantos d como antipartículas y a los cuantos c como partículas, o viceversa. Con este hecho es que se puede observar que la ecuación de Dirac describe a fermiones, mientras que la ecuación de Klein-Gordon describe a bosones. Además, se puede concluir que los operadores bosónicos obedecen relaciones de conmutación, mientras que los operadores fermiónicos obedecen relaciones de anticonmutación.

Por último, el propagador de Dirac tiene la forma de $\langle 0 | T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)) | 0 \rangle$. Más adelante, en las secciones siguiente se mirará por qué tiene esta forma, pero en esta sección vale la pena mencionar que dado que los campos $\hat{\psi}$ anticonmutan, el operador T para el campo de Dirac es

$$\begin{aligned} T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)) &= \hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2) && \text{para } t_1 > t_2 \\ &= -\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_1) && \text{para } t_2 < t_1 \end{aligned} \quad (\text{VII.79})$$

El propagador de Dirac es también una función de Green del operador $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)$, con lo que por analogía a la teoría desarrollada en el capítulo VI,

$$\langle 0 | T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)) | 0 \rangle = G_D(x_1 - x_2) \propto \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} \quad (\text{VII.80})$$

donde $\not{k} = \gamma^\mu k_\mu$ y se pronuncia *k-slash*. Sin embargo, se debe notar con detenimiento que la diferencia entre $G_F(x_1 - x_2)$ y $G_D(x_1 - x_2)$ es que este último es una matriz de 4×4 (Aitchison & Hey, 2003). Para escribir esto de forma más explícita, es posible escribir un elemento de esta matriz como $\langle 0 | T(\hat{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2)) | 0 \rangle$ donde α y β pueden tomar valores entre 1 y 4, haciendo referencia a las 4 componentes del Dirac-spinor, con lo que la ecuación (VII.80) puede reescribirse como

$$\langle 0 | T(\hat{\psi}_\alpha(x_1)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x_2)) | 0 \rangle = G_D(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{(\not{k} - m + i\epsilon)_{\alpha\beta}} \quad (\text{VII.81})$$

F. El campo de Maxwell $A^\mu(x)$

Antes de tratar de cuantizar el campo electromagnético es recomendable hacer un pequeño análisis previo de dicho campo, el cual también recibe el nombre de campo de Maxwell.

Primero que todo, las ecuaciones de Maxwell pueden reescribirse en dos ecuaciones usando los potenciales V y \vec{A} y en una ecuación usando el tetravector A^μ , la cual es

$$\square^2 A_\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j_{em}^\nu \quad (\text{VII.82})$$

El lagrangiano electromagnético que tras aplicarle la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene la ecuación anterior, está dado por

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_{em}^\nu A_\nu \quad (\text{VII.83})$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Si se considera que se está en el vacío el lagrangiano toma la forma de

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{VII.84})$$

con lo que la ecuación (VII.82) tiene la forma de

$$\square^2 A_\nu - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0 \quad (\text{VII.85})$$

lo cual también es posible escribirlo como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{VII.86})$$

Tal y como se vio al inicio de este capítulo, el potencial A_μ tiene una simetría de gauge con lo cual

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi. \quad (\text{VII.87})$$

Por lo que es posible imponer restricciones sobre χ , sin cambiar los campos \vec{E} y \vec{B} y transformar las ecuaciones de Maxwell presentadas en la ecuación (VII.1). Una selección conveniente de transformación de gauge con tal de simplificar la ecuación (VII.85) es

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 \quad (\text{VII.88})$$

la cual se llama la condición de Lorenz (distinto a Henry Lorentz). En otras palabras, esta condición dice que se debe tomar un χ tal que $\square^2 = \partial_\mu A^\mu$. De manera más explícita,

$$\begin{aligned} \partial_\mu A'^\mu &= 0 \\ \Rightarrow \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \chi &= 0 \\ \Rightarrow \partial_\mu A^\mu &= \square^2 \chi \end{aligned} \quad (\text{VII.89})$$

Sin embargo, nótese que esta restricción que muestra la ecuación (VII.88) recae sobre la derivada de A'^μ y no sobre A'^μ directamente con lo cual A'^μ no está restringida completamente. Esto se puede observar mejor si se toma una segunda modificación

$$A'^\mu \rightarrow A''^\mu = A'^\mu - \partial^\mu \bar{\chi} \quad (\text{VII.90})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \partial_\mu A''^\mu &= \partial A'^\mu - \partial^\mu \bar{\chi} = \partial_\mu A^\mu - \square^2 \chi - \square^2 \bar{\chi} = 0 \\ &\Rightarrow \square^2 \bar{\chi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.91})$$

La ecuación (VII.91) representa la segunda condición complementaria a la ecuación (VII.88). Por otro lado, a pesar que se trabajará con A''^μ al cual se le aplicaron las dos transformaciones de gauge (con la cual cumple con las ecuaciones (VII.88) y (VII.91)) por simplicidad se escribirá como A^μ .

Con estas dos condiciones que se muestran, la ecuación (VII.85) se convierte en

$$\square^2 A^\mu = 0 \quad (\text{VII.92})$$

Si se resuelve la ecuación se obtiene una solución de la forma

$$A^\mu = N^\mu e^{-ikx} \quad (\text{VII.93})$$

donde es fácil notar que $k_0^2 = \vec{k}^2$ (introducir la ecuación (VII.93) en la ecuación (VII.92) y se obtiene tal restricción), lo cual era de esperarse, ya que la radiación electromagnética (i.e. fotones) no posee masa.

Por otro lado, se debe de recordar que las ondas electromagnéticas son transversales a diferencia de ondas como el sonido, los cuales son longitudinales. Debido a esto, es posible reescribir la amplitud de la onda N^μ en la ecuación (VII.93) como

$$A^\mu = N \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} \quad (\text{VII.94})$$

donde N es un factor de normalización y ϵ^μ es el vector de polarización. Un desarrollo más detallado de este vector puede encontrarse en (Griffiths, 2013).

Entonces, las condiciones que muestran las ecuaciones (VII.88) y (VII.91) pueden representarse en la solución obtenida en la ecuación (VII.94) como

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= \partial_\mu N \epsilon^\mu e^{-i\beta x} = -iN \epsilon^\mu k_\mu e^{-ikx} = 0 \\ &\Rightarrow \epsilon^\mu k_\mu = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.95})$$

Para la condición que muestra la ecuación (VII.91), dado que $\square^2 \bar{\chi} = 0 \Rightarrow \bar{\chi} = A e^{-ik \cdot x}$ y $A^\mu + \partial \bar{\chi} = N \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} + ik^\mu A e^{-ik \cdot x} \Rightarrow (\epsilon^\mu + \beta k^\mu) N e^{-ik \cdot x}$. Entonces tómese $\epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \beta k^\mu$, con lo cual se obtiene la representación de la segunda condición en términos de ϵ . Nótese que se sigue cumpliendo con la ecuación (VII.95).

$$\epsilon'^\mu k_\mu = 0 \quad (\text{VII.96})$$

ya que $k^2 = 0$.

Esta última condición es muy importante ya que dice que es posible sumar (o restar) múltiplos de k^μ a ϵ^μ sin modificar las ecuaciones de Maxwell. Debido a esto, obsérvese que es posible seleccionar un β adecuado de tal forma que se puede hacer cero alguna componente de ϵ^μ (únicamente puede hacerse cero una componente de esta forma ya que si se hace para dos componentes, β no sería constante). Eligiendo que sea la componente temporal k^0 la que sea 0, la condición que muestra la ecuación (VII.96) toma la forma de

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \quad (\text{VII.97})$$

Una vez más por simplicidad se escribe ϵ en lugar de ϵ'

Esta última ecuación quiere decir que únicamente existen dos vectores de polarización, ambos ortogonales a k y cuya combinación lineal forma un plano.

Sin pérdida, supongase que \vec{k} apunta en dirección z

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, k^0) \quad (\text{VII.98})$$

con lo que los vectores de polarización independientes serían

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 &= (1, 0, 0) \\ \vec{\epsilon}_2 &= (0, 1, 0) \end{aligned} \quad (\text{VII.99})$$

Esta elección de componentes es arbitraria. Por ejemplo una elección alternativa frecuente es

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \\ \vec{\epsilon}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \end{aligned} \quad (\text{VII.100})$$

En resumen, lo importante que se pudo notar en esta sección es que a pesar que $A^\mu(x)$ posee cuatro componentes, se mostró que únicamente existen dos componentes independientes. La condición (VII.88) nos permitió reducir el número de componentes en 1 y la condición de la ecuación (VII.91) redujo esta cantidad en 1 una vez más.

Dado este análisis, por analogía al capítulo IV y al campo de Dirac, es posible expandir el campo clásico $A^\mu(x)$ como

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} \left[\epsilon^\mu(k, \lambda) \alpha(k, \lambda) e^{-ikx} + \epsilon^{\mu*}(k, \lambda) \alpha^*(k, \lambda) e^{-ikx} \right] \quad (\text{VII.101})$$

donde la suma es sobre los dos posibles estados de polarización los cuales se llamó λ ; $\alpha(k, \lambda)$ y $\alpha^*(k, \lambda)$ representan las amplitudes de la expansión de Fourier.

Pareciera que lo que resta hacer es una cuantización tal y como se hizo en el capítulo IV, sustituyendo α y α^* por $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}^\dagger$. No obstante, existen algunos problemas que impiden que esta cuantización sea tan simple, se verán a continuación estos problemas.

G. Cuantización del campo de Maxwell $A^\mu(\mathbf{x})$

Tal y como se pudo ver en la sección pasada, el campo de Maxwell tiene cuatro componentes, pero únicamente 2 son independientes y conforman grados de libertad del campo. Estas restricciones conllevan a que el campo presente varios problemas en el momento de cuantizarlo. Comúnmente, en lugar de usar el método de cuantización canónico se prefiere en usar el método de integrales de Feynman mencionado en el capítulo III. No obstante, para ser consistente con todo el desarrollo que se ha venido haciendo a lo largo del trabajo se tratará de cuantizar este campo como se ha venido haciendo para los campos anteriores. Para esto, es necesario encontrar el momentum conjugado Π , pero para este caso

$$\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \dot{A}^0} = 0 \quad (\text{VII.102})$$

Con lo que es posible observar que no existe el momentum conjugado Π^0 . De hecho tiene otro problema y es que se esperaba que de algún modo se obtuviese el propagador de Feynman $\langle 0 | T(\hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2)) | 0 \rangle$ el cual describe la propagación de un fotón de x_1 a x_2 . En el capítulo VI

se vio que este propagador es una función de Green con lo cual,

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0 \\
& = \partial_\mu \partial^\mu A_\mu g^{\mu\nu} - \partial^\nu (\partial^\mu A_\mu) = 0 \\
& \Rightarrow [g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial^\mu - \partial^\nu \partial^\mu] A_\mu = 0
\end{aligned} \tag{VII.103}$$

donde $g^{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. Repitiendo el procedimiento que se hizo en dicho capítulo se obtiene que para este operador

$$\begin{aligned}
& [g^{\mu\nu} \square^2 - \partial^\nu \partial^\mu] G_p(x) = -i\delta^4(x) \\
& \frac{1}{(2\pi)^4} [g^{\mu\nu} \square^2 - \partial^\nu \partial^\mu] \int d^4k e^{ikx} \tilde{G}_F(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx} \\
\Rightarrow & \int d^4k e^{ikx} \tilde{G}_F(x) g^{\mu\nu} (-k^2) - \int d^4k e^{ikx} \tilde{G}_F(x) (-k^\nu k^\mu) = -i \int d^4k e^{ikx} \\
& \Rightarrow (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\nu k^\mu) \tilde{G}_p(x) = -i
\end{aligned} \tag{VII.104}$$

Sea

$$M^{\mu\nu} = (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\nu k^\mu) \tag{VII.105}$$

Para conocer $\tilde{G}_F(x)$ es necesario encontrar la inversa de $M^{\mu\nu}$, es decir a $(M^{-1})^{\mu\nu}$.

Para hallar esta inversa nótese que $M^{\mu\nu}$ es un tensor de segundo orden, por lo que $(M^{-1})^{\mu\nu}$ también debe ser un tensor de segundo orden. Además, dado que $M^{\mu\nu}$ depende de $g^{\mu\nu}$ y $k^\nu k^\mu$ tensores de segundo orden, $(M^{-1})^{\mu\nu}$ debe ser una combinación lineal de estos tensores con lo cual

$$(M^{-1})^{\mu\nu} = B_1(k^2) g^{\nu\mu} + B_2(k^2) k^\nu k^\mu \tag{VII.106}$$

Para encontrar los coeficientes $B_1(k^2)$ y $B_2(k^2)$, úsese la definición de inversa, con lo cual

$$\begin{aligned}
& (M^{-1})^{\mu\nu} (M_{\mu\sigma}) = g_\sigma^\nu \\
\Rightarrow & [B_1(k^2) g^{\nu\mu} + B_2(k^2) k^\nu k^\mu] [-k^2 g^{\mu\sigma} + k^\sigma k^\mu] = g_\sigma^\nu \\
\Rightarrow & -k^2 B_1(k^2) g^{\mu\nu} g^{\mu\sigma} B_1(k^2) g^{\mu\nu} k^\sigma k^\mu - k^2 B_2(k^2) k^\nu k^\mu + B_2(k^2) k^\nu k^\mu k^\sigma k^\mu = g_\sigma^\nu \\
\Rightarrow & -k^2 B_1(k^2) g^{\nu\sigma} + B_1(k^2) g^{\mu\nu} k^\nu k^\mu - k^2 B_2(k^2) g^{\mu\sigma} k^\nu k^\mu + B_2(k^2) k^2 k^\nu k^\sigma = g_\sigma^\nu \\
& \Rightarrow -k^2 B_1(k^2) g^{\nu\sigma} + B_1(k^2) g^{\nu\mu} k^\sigma k^\mu = g_\sigma^\nu
\end{aligned} \tag{VII.107}$$

Pero esta última ecuación nunca puede ser satisfecha.

Estos problemas surgen debido a que se partió de la ecuación (VII.85) a la cual todavía no se había aplicado la elección de gauge. Estos problemas se solucionan si se parte de la ecuación (VII.92) a la cual se aplicó el gauge de Lorenz (Aitchison & Hey, 2003). Entonces, dicha ecuación, tras aplicarle una cuantización canónica, se obtiene que

$$\square^2 \hat{A}^\nu = 0 \quad (\text{VII.108})$$

y, siguiendo un procedimiento similar al capítulo anterior, se tiene que el propagador de Feynman para el fotón es proporcional a $g_{\mu\nu}/k^2$.

El lagrangiano de la ecuación (VII.108) está dado por

$$\hat{\mathcal{L}}_L = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{A}^\mu)^2 \quad (\text{VII.109})$$

donde $\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu$. El momentum conjugado es entonces

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}^0 &= \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_L}{\partial \dot{\hat{A}}^0} = -\partial_\mu \hat{A}^\mu \\ \hat{\Pi}^i &= -\dot{\hat{A}}^i + \partial^i \hat{A}^0 \end{aligned} \quad (\text{VII.110})$$

Dado que ahora se tiene un momentum conjugado con todas sus componentes diferentes de cero, es posible escribir las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{A}_\mu(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\nu(\vec{y}, t) \right] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{VII.111})$$

$$\left[\hat{A}_\mu(\vec{x}, t), \hat{A}_\nu(\vec{y}, t) \right] = \left[\hat{\Pi}_\mu(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\nu(\vec{y}, t) \right] = 0 \quad (\text{VII.112})$$

Nótese que la condición $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ no puede volver a usarse en el lagrangiano (ecuación (VII.109)) primero debido a que ya se utilizó para llegar a la ecuación (VII.108) y segundo, debido a que ahora se tienen operadores, con lo cual el término $\partial_\mu \hat{A}^\mu$ de la densidad lagrangiana (ecuación (VII.109)) es diferente de cero.

Trabajando un poco más la ecuación (VII.111), es posible reescribir tal expresión en una relación de conmutación más simple. Dicho procedimiento no se desarrollará aquí pero puede ser encontrado en (Aitchison & Hey, 2003). Esta relación de conmutación equivalente es

$$\left[\hat{A}_\mu(\vec{x}, t), \hat{A}_\nu(\vec{y}, t) \right] = -ig_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{VII.113})$$

Entonces, por analogía al caso del Campo de Dirac, es posible expandir \hat{A}^μ como

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} [\epsilon^\mu(k, \lambda) \hat{\alpha}_\lambda(k) e^{-ikx} + \epsilon^{*\mu}(k, \lambda) \hat{\alpha}_\lambda^\dagger(k) e^{ikx}] \quad (\text{VII.114})$$

donde 2 de los tetravectores de polarización son transversales, uno es longitudinal y otro se llama "escalar" o bien polarización tipo tiempo. Una vez más, sin pérdida, sea \vec{k} en dirección de z , entonces los transversales son

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(\lambda = 1) &= (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon^\mu(\lambda = 2) &= (0, 0, 1, 0) \end{aligned} \quad (\text{VII.115})$$

donde λ denota los estados de polarización.

El longitudinal es

$$\epsilon^\mu(\lambda = 3) = (0, 0, 0, 1) \quad (\text{VII.116})$$

y el escalar es

$$\epsilon^\mu(\lambda = 0) = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{VII.117})$$

Usando la condición (VII.113) se obtiene las respectivas relaciones para los operadores $\hat{\alpha}_\lambda$ y $\hat{\alpha}_\lambda^\dagger$, los cuales son

$$\left[\hat{\alpha}_\lambda(k), \hat{\alpha}_{\lambda'}^\dagger(k') \right] = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{VII.118})$$

Sin embargo, existe un problema. Considérese el caso en el que se desea calcular un factor de normalización de la forma $\langle k', \lambda | k, \lambda \rangle$, y suponga que $\lambda = 0$, entonces debido a la ecuación (VII.118)

se obtendría un valor negativo, con lo cual se estaría obteniendo amplitudes de probabilidad negativa y se estaría afectando la probabilidad total.

Para solucionar este problema se debe de utilizar la condición de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$, únicamente que para operadores (Aitchison & Hey, 2003). Esta condición según como lo presentan los físicos Gupta y Bleuler es que

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \langle 0 | \partial_\mu \hat{A}^\mu | 0 \rangle = 0 \quad (\text{VII.119})$$

con lo que si $\hat{A}^\mu = \hat{A}^{\mu+} + \hat{A}^{\mu-}$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{A}^{\mu+} | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | \partial_\mu \hat{A}^{\mu-} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.120})$$

Dado que \vec{k} apunta en dirección de z y que $(k^0)^2 = \vec{k}^2$, sea $k = (|\vec{k}|, 0, 0, |\vec{k}|)$. Tomando la expansión de $\hat{A}^\mu(x)$ (ecuación (VII.114)), se tiene que la ecuación (VII.120) toma la forma de

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-i) \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2w}} k_\mu \epsilon^\mu(k, \lambda) \hat{\alpha}_\lambda(k) e^{-ikx} | 0 \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2w}} (-i) |\vec{k}| (\hat{\alpha}_0(k) - \hat{\alpha}_3(k)) e^{-ikx} | 0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.121})$$

con lo que

$$(\hat{\alpha}_0(k) - \hat{\alpha}_3(k)) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{VII.122})$$

Para observar cómo esto soluciona el problema, considérese el hamiltoniano del sistema

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2w}} \left(\hat{\alpha}_1^\dagger \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2^\dagger \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_0^\dagger \hat{\alpha}_0 \right) \omega \quad (\text{VII.123})$$

Nótese que para cualquier estado $|\psi\rangle$, se tiene que

$$\langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_0^\dagger \hat{\alpha}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_3 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{\alpha}_0^\dagger \hat{\alpha}_0 | \psi \rangle \quad (\text{VII.124})$$

Pero $\langle \psi | \hat{\alpha}_0^\dagger = \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger$ debido a la ecuación (VII.122), entonces

$$\begin{aligned}
 &= \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_3 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_0 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_3^\dagger \hat{\alpha}_0 | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | \hat{\alpha}_3^\dagger (\hat{\alpha}_3 - \hat{\alpha}_0) | \psi \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{VII.125}$$

Por lo que se puede observar que la contribución de la componente escalar nunca contribuye pues esta se cancela con la contribución longitudinal. Por último, el propagador de Feynman que se obtiene es

$$G_F(x_1 - x_2) \propto \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \tag{VII.126}$$

tal y como si se resolviese para la ecuación de Klein-Gordon en cada componente para partículas sin masa.

El procedimiento que se llevó a cabo para lograr la cuantización de este campo se llama *cuantización de Gupta-Bleuler* y de hecho la densidad lagrangiana que se tomó (ecuación (VII.109)) es solamente un caso de un lagrangiano más general (Aitchison & Hey, 2003). El lagrangiano más general es de la forma

$$\hat{\mathcal{L}}_\xi = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu \hat{A}^\mu \right)^2 \tag{VII.127}$$

De esta densidad lagrangiana se obtiene, tras aplicar la ecuación de Euler-Lagrange, que la ecuación de movimiento es

$$\left(\square^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu \right) \hat{A}^\nu = 0 \tag{VII.128}$$

Con lo cual se obtiene un propagador de Feynman de la forma

$$G_{F_\xi}(x_1 - x_2) \propto \frac{i \left[-g^{\mu\nu} + \frac{(1+\xi)k^\mu k^\nu}{k^2} \right]}{k^2 + i\epsilon} \tag{VII.129}$$

De esto último propagador es posible notar que si $\xi = 1$, se obtiene el propagador de Feynman anterior. La elección $\xi = 1$ se llama el gauge de Feynman, sin embargo existen otros como por ejemplo el gauge de Landau (Aitchison & Hey, 2003). Lo importante de notar aquí es que el propagador depende de la elección de gauge lo cual es la desventaja de usar este método y razón por la cual se suele cuantizar a este campo por medio de integrales de camino de Feynman. En lo que resta del capítulo se hará una breve introducción a interacciones electromagnéticas.

H. Introducción a interacciones electromagnéticas

Para introducir interacciones electromagnéticas se hará uso de la teoría desarrollada al inicio del capítulo. Anteriormente se vio que el Campo Escalar Complejo y el Campo de Dirac poseen una simetría global $U(1)$. En este capítulo se tratará de convertir esta simetría global en local. Para esto, se vio que se debe de aplicar una transformación gauge al campo de tal forma que

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &\rightarrow \hat{\psi}' = e^{-iq\chi(x)}\hat{\psi} \\ \partial^\mu &\rightarrow \hat{\mathcal{D}}^\mu = \partial^\mu + iq\hat{A}^\mu \\ \hat{A}^\mu &\rightarrow \hat{A}'^\mu = \hat{A}^\mu + \partial^\mu\hat{\chi}\end{aligned}\tag{VII.130}$$

Entonces, esta invarianza $U(1)$ para el campo de Dirac debería de ser

$$\hat{\mathcal{L}}_{D \text{ local}} = \hat{\bar{\psi}}(i\gamma^\mu\hat{\mathcal{D}}_\mu - m)\hat{\psi}\tag{VII.131}$$

Es fácil probar que este lagrangiano es invariante de gauge si se toman en cuenta las propiedades probadas anteriormente, con lo que

$$\hat{\bar{\psi}}'(i\gamma^\mu\hat{\mathcal{D}}'_\mu - m)\hat{\psi}' = \hat{\bar{\psi}}e^{iq\chi(x)}e^{-iq\chi(x)}(i\gamma^\mu\hat{\mathcal{D}}_\mu - m)\hat{\psi} = \hat{\bar{\psi}}(i\gamma^\mu\hat{\mathcal{D}}_\mu - m)\hat{\psi}\tag{VII.132}$$

Debido a que se introdujo la derivada covariante de gauge, la densidad lagrangiana ganó un

término

$$\hat{\mathcal{L}}_D \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_D \text{ local} = \hat{\mathcal{L}}_D + \hat{\mathcal{L}}_{int} \quad (\text{VII.133})$$

donde $\hat{\mathcal{L}}_{int} = -q\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu$. Sin embargo, el momentum conjugado sigue igual, por lo que el hamiltoniano toma la forma de

$$\hat{H} = \hat{H}_D + \hat{H}'_D \quad (\text{VII.134})$$

donde

$$H'_D = -\hat{\mathcal{L}}_{int} = q\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi}\hat{A}_\mu = q\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\hat{A}_0 - q\hat{\bar{\psi}}\gamma^i\hat{\psi}\hat{A}^i \quad (\text{VII.135})$$

Esta ecuación posee la forma de la ecuación de continuidad en electrodinámica ($\rho A_0 - \vec{j}\vec{A}$). Si se define a $q\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$ como el operador de densidad de carga y al operador de densidad de corriente como $\hat{\bar{\psi}}\gamma^i\hat{\psi}$, el tetravector de corriente j_{em}^μ se puede definir como

$$j_{em}^\mu = q\hat{\bar{\psi}}\gamma^\mu\hat{\psi} \quad (\text{VII.136})$$

Nótese que j_{em}^μ es q -veces el operador \hat{N}_ψ^μ que se encontró al cuantizar el campo de Dirac, por lo que j_{em}^μ es el operador de simetría de corriente asociado a la transformación local de gauge efectuada. Nótese también que este operador, j_{em}^μ , determina de manera específica cómo el campo \hat{A}^μ , se acopla al campo de materia $\hat{\psi}$.

Añadiéndole al lagrangiano el término \hat{A}^μ , se completa la teoría de un campo fermiónico (o de fermiones) eléctricamente cargado el cual interactúa con el campo de Maxwell.

Se debe observar que $\hat{\mathcal{L}}_{int}$ se parece mucho al término de interacción del capítulo VI para la teoría ABC, $g\hat{\phi}_A\hat{\phi}_B\hat{\phi}_C$, con lo que ya se sabe que los posibles diagramas que se pueden obtener para un orden de corrección de g^2 y para un proceso $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ (donde γ representa a un fotón) son los que muestra las Figuras No. VII.4 y VII.5.

Dado este análisis, el significado que se le da a la constante q es la de, naturalmente, la carga. Por otro lado, nótese que en \hat{H}'_D el operador que acompaña a $\hat{\psi}$ es $\hat{\bar{\psi}}$, con lo que el propagador

Figura VII.4: Diagrama de Feynman para intercambio de Yukawa

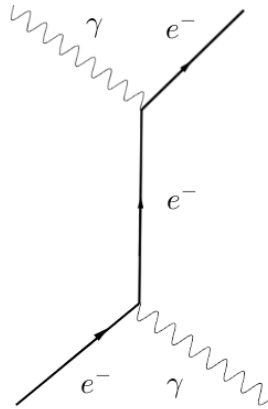
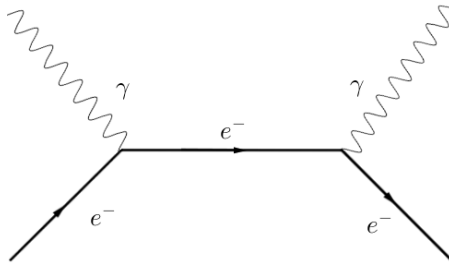


Figura VII.5: Diagrama de Feynman de absorción y reemisión.



tendría la forma de $\langle 0 | T(\hat{\psi}(x_1)\hat{\bar{\psi}}(x_2) | 0 \rangle$, lo cual explica la elección que se hizo en la discusión de la cuantización del campo de Dirac.

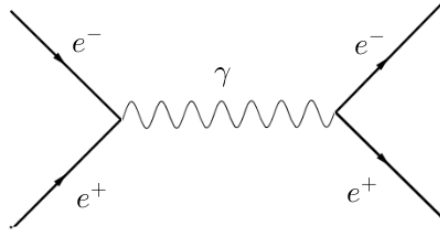
Por otro lado, para un proceso, por ejemplo $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ se obtiene diagramas como el que presenta la Figura No. VII.6, donde el propagador tendría la forma de $\langle 0 | T(\hat{A}^\mu(x_1)\hat{A}^\nu(x_2) | 0 \rangle$, el cual describe la propagación de un fotón.

De la misma manera, el campo Escalar Complejo puede generalizarse mediante una transformación local $U(1)$, incorporando al campo electromagnético

$$\hat{\mathcal{L}}_{KG} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_{KG} + \hat{\mathcal{L}}_{int} \quad (\text{VII.137})$$

Sin embargo, tal y como se discutió anteriormente, hacer este tipo de generalización es un tanto artificial, pues no se conoce que suceda en el mundo físico, es decir que los bosones interactúen

Figura VII.6: Diagrama de Feynman de aniquilación y reemisión.



electromagnéticamente entre ellos mismos. Sin embargo, vale la pena notar que para el caso de los bosones, tomando $\partial_\mu \rightarrow \hat{D}_\mu$, se tiene que

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = -iq(\hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - (\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger) \hat{\phi}) \hat{A}_\mu + q^2 \hat{A}^\mu \hat{A}_\mu \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \quad (\text{VII.138})$$

con lo cual

$$j_{em}^\mu = -\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_{int}}{\partial \hat{A}_\mu} \quad (\text{VII.139})$$

Además, para ese caso se tiene que

$$j_{em}^\mu = iq(\hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - (\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger) \hat{\phi}) - 2q \hat{A}^\mu \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \quad (\text{VII.140})$$

lo cual no es simplemente q veces \hat{N}_ϕ , como fue en el caso de los fermiones.

Para finalizar, se escribirán las primeras Reglas de Feynman para las interacciones de fermiones, las cuales son análogas a las encontradas en el capítulo anterior, pero considerando que ahora las partículas poseen espín diferente de cero.

1. Primeras Reglas de Feynman en Electrodinámica Cuántica: Para las líneas externas se tiene que:

- Partículas de espín $\frac{1}{2}$:

Para cada fermión o antifermión en el proceso, se representará por una línea externa. Si esta línea

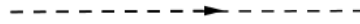
externa está entrando se le asocia a esta línea externa el spinor $u(p, s)$ ó $v(p, s)$. Si esta línea externa está saliendo, entonces se se le asocia el spinor $\bar{u}(p', s')$ ó $\bar{v}(p', s')$. (Aitchison & Hey, 2003)

• Partículas de espín 1 - *fotones*:

Para cada línea externa que represente a un fotón se le asocia el vector de polarización $\epsilon_\mu(k, \lambda)$. Si esta línea está saliendo, se le asocia el vector de polarización $\epsilon_\mu^*(k', \lambda')$. (Aitchison & Hey, 2003)

Para los propagadores se tiene que:

Figura VII.7: Propagador - Espín 0



Se le asocia:

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{VII.141})$$

Figura VII.8: Propagador - Espín $\frac{1}{2}$



Se le asocia:

$$\frac{i}{\not{p} - m} \quad (\text{VII.142})$$

Figura VII.9: Propagador - Fotón

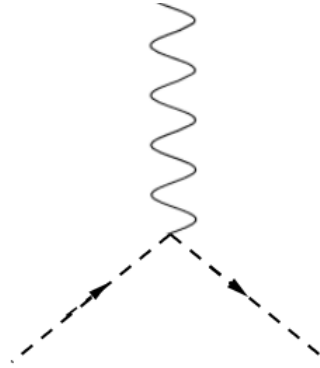


Se le asocia:

$$\frac{i}{k^2} \left(-g^{\mu\nu} + (1 - \epsilon) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \xrightarrow{\text{Feynman gauge}} i \frac{(-g^{\mu\nu})}{k^2 + i\epsilon} \quad (\text{VII.143})$$

Finalmente, para los vértices se tiene que:

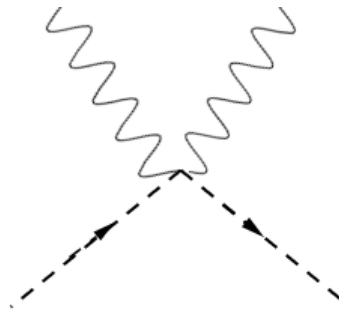
Figura VII.10: Vértice - Espín 0 (tipo 1)



Se le asocia:

$$-ie(p + p')_{\mu}(\text{para carga } +e) \quad (\text{VII.144})$$

Figura VII.11: Vértice - Espín 0 (tipo 2)



Se le asocia:

$$2ie^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{VII.145})$$

Figura VII.12: Vértice - Espín $\frac{1}{2}$ 

Se le asocia:

$$-ie\gamma_{\mu}(\text{para carga } +e) \quad (\text{VII.146})$$

VIII. RADIACIÓN OSCURA

A. Introducción al Modelo Estándar

El Modelo Estándar es una teoría desarrollada en los años 70, la cual pretendía unificar las leyes de la física en base las cuatro interacciones conocidas, electromagnética, interacciones fuertes, interacciones débiles y gravitacional, atribuyéndole a cada interacción una simetría en particular.

Según esta teoría, toda la materia está compuesta por tres diferentes partículas: leptones, quarks y mediadores o partículas portadoras. Entre estas partículas, existen seis diferentes tipos de leptones y seis diferentes tipos de antileptones, los cuales se distinguen por su carga, su número electrónico, su número muónico y su número tau. Estas seis diferentes partículas son: electrón/positrón (e^-/e^+), muon/antimuon (μ^-/μ^+), tau/antitau (τ^-/τ^+), neutrino eléctrico/antineutrino eléctrico (ν_e^-/ν_e^+), neutrino muónico/antineutrino muónico (ν_μ^-/ν_μ^+), tau neutrino/tau antineutrino (ν_τ^-/ν_τ^+). (Griffiths, 2010)

Similarmente, esta teoría predice seis diferentes tipos de quarks, o como se conoce comunmente, seis diferentes *sabores*, los cuales se diferencian por ser *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* y *bottom*. (Griffiths, 2010)

Por último, las partículas portadoras son las partículas resultantes de las interacciones de los campos. Estas son: el fotón γ asociadas a interacciones electromagnéticas; los bosones W y Z , asociados a las interacciones débiles; el gluón g , asociada a las interacciones fuertes.

B. Posible interacción con fotones oscuros

En la física actual existen varios problemas sin resolver, los cuales han llevado a los físicos hoy en día a desarrollar nuevas teorías para tratar de describir estos fenómenos. Uno de estos problemas abiertos es el de predecir cuán rápido se mueve una estrella en alguna galaxia.

Para resolver este problema se ha intentado tomar la masa de la galaxia, la cual se le atribuye a toda la materia luminescente que se observa en ella, e introducirla en las ecuaciones de Relatividad General.

Sin embargo, de estas ecuaciones se obtienen resultados muy discrepantes con los datos que se obtienen experimentalmente y debido a que no se conoce otra manera de calcular esta velocidad, se piensa que la teoría está incompleta, o bien, que existe materia que no se pueda "ver" y por lo tanto no se haya tomado en cuenta en los cálculos.

Este tipo de materia se le ha atribuido el nombre de *Materia Oscura*, y el nombre se debe a que, si esta existe, interactúa electromagnéticamente con las partículas del modelo estandar tan levemente que prácticamente ha estado oculta de todos los experimentos que se han hecho.

Algunos físicos proponen que debe de existir un boson oscuro, llamado *Bosón-U* o *Fotón Oscuro*, proveniente de una simetría $U_D(1)$, básicamente es la simetría $U(1)$ vista anteriormente, únicamente que se le agrega el subíndice D para indicar que esa simetría está asociada a materia oscura. Luego, según (Reece & Wang, 2010), se especula que este bosón sea proveniente de un campo, cuyo lagrangiano esté dado por

$$\mathcal{L}_{mix} = -2\epsilon F_D^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (\text{VIII.1})$$

donde ϵ es una constante que debe ser más pequeña del orden de 10^{-2} , ya que de lo contrario ya se hubiesen detectado estas interacciones, pero mayor al orden de 10^{-6} para poder detectar este tipo de interacción experimentalmente con los aceleradores de partículas tal y como se discute en (Reece & Wang, 2010). Por otro lado, el término $F_D^{\mu\nu}$ se refiere a un campo parecido al electromagnético pero aplicado a materia oscura. En base a esto, es posible acoplar este Bosón-U a las interacciones electromagnéticas haciendo una redefinición del campo electromagnético A^μ , de la siguiente manera

$$\hat{A}^\mu \rightarrow \hat{A}_{SM}^\mu + \epsilon \hat{A}_D^\mu \quad (\text{VIII.2})$$

Es decir, que el campo electromagnético con el que se trabaja experimentalmente, sea igual a la suma de un campo electromagnético teórico propuesto por el modelo estándar A_{SM}^μ , más un campo *oscuro*, parecido al electromagnético. Después de todo ambos campos poseen simetría $U(1)$. To-

mando esta redefinición, es posible tomar las ecuaciones (VII.131), (VII.132) y (VII.136) y notar que

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = \hat{j}_{em}^{\mu} \hat{A}^{\mu} \quad (\text{VIII.3})$$

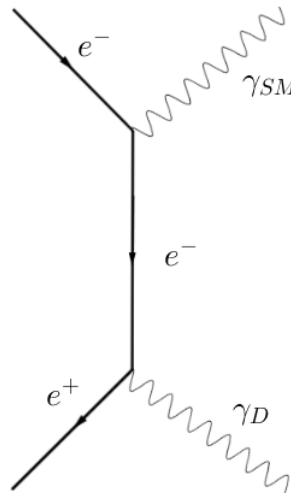
Usando la redefinición propuesta en la ecuación (VIII.2) se tiene que

$$\hat{\mathcal{L}}_{int} = \hat{j}_{em}^{\mu} \hat{A}^{\mu} \rightarrow \hat{j}_{em}^{\mu} \hat{A}_{SM}^{\mu} + \epsilon \hat{j}_{em}^{\mu} \hat{A}_D^{\mu} \quad (\text{VIII.4})$$

Con lo cual este último término indica una supuesta interacción con fermiones ponderada por una constante ϵ (Reece & Wang, 2010). Por otro lado, los físicos también predicen que este Bosón-U también se acopla a las interacciones débiles del Modelo Estándar, con lo cual se piensa que este bosón puede decaer en más partículas oscuras representando así una especie de portal a partículas oscuras no predichas por el Modelo Estándar (Essig & Toro, 2009).

Para aclarar mejor estas ideas, considérese un proceso $e^{-}\gamma \rightarrow e^{-}\gamma$. Entonces por los capítulos anteriormente desarrollados se sabe que un posible caso de interacción esta dado por el diagrama que se observa en la Figura No. VIII.1.

Figura VIII.1: Posible diagrama para proceso $e^{-}e^{+} \rightarrow \gamma_{SM}\gamma_D$



En la Figura No. VIII.1, se puede observar que existe una corriente eléctrica \hat{j}_{em}^{μ} la cual está in-

teractuando con un fotón del modelo estándar y un fotón oscuro, el cual se denotó por símbolo γ_D .

Por las reglas de Feynman escritas en el capítulo anterior, es posible conocer la amplitud invariante relacionada a la amplitud de probabilidad de dicho proceso, la cual es

$$\mathcal{M}_{fi} = u(p, s)(ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu^*(k, \lambda)\frac{i}{\not{p} - m}(ie\epsilon\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(k', \lambda')\bar{v}(p', s') \quad (\text{VIII.5})$$

Cabe mencionar que hasta el momento no se ha encontrado resultados de la existencia de este fotón oscuro pero la búsqueda continúa en varios laboratorios alrededor del mundo.

IX. CONCLUSIONES

Tras el desarrollo de esta teoría se puede concluir que fue posible explicar en este trabajo el formalismo de la teoría cuántica de campos relativista para campos escalares libres y campos en interacción. Se pudo observar explícitamente que las interacciones electromagnéticas son atribuidas a una simetría local $U(1)$ del campo de Dirac. Tal campo se observó que describía el comportamiento de fermiones, dado que se tuvo que sustituir todas las relaciones de conmutación por relaciones de anticonmutación. Por último, se concluye que fue posible el desarrollo teórico y explícito de los diagramas de Feynman, con los cuales se vio que junto con las respectivas Reglas de Feynman era posible reconstruir la amplitud invariante, la cual es directamente proporcional a la amplitud de probabilidad del proceso descrito. Además, usando el uso de estas reglas, se calculó la amplitud invariante de un proceso, el cual involucraba una interacción con un fotón oscuro, tema que se sigue investigando actualmente alrededor del mundo, pues no se tiene todavía suficiente evidencia.

Una posible recomendación para las personas interesadas a dirigir su trabajo de graduación en esta línea, es el de estudiar teoría de grupos con el fin de explicar el formalismo de las interacciones débiles, ya que es necesario trabajar con una simetría local diferente a la $U(1)$.

X. BIBLIOGRAFÍA

Aitchison, I. J. R. (1972). *Relativistic Quantum Mechanics*. Department of Theoretical Physics, University of Oxford, 242 págs.

Aitchison, I. J. R. & Hey, A. J. G. (2003). *Gauge theories in particle physics*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 402 págs.

Vogel, H. Redondo, J. (2014). *Dark Radiation constrains on minicharged particles in models with hidden photon..* arXiv: 1311.2600

Vogel, H. & Redondo, J. (2015). *Dark Radiation from a hidden $U(1)$* . arXiv: 1504.06222

Griffiths, D. (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 408 págs.

Griffiths, D. (2010). *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH Verlag, 421 págs.

Griffiths, D. (2013). *Introduction to Electrodynamics*. Pearson, 599 págs.

Ho, J. Kim, C.S. (2016). *Light Dark Matter and Dark Radiation*. arXiv: 1504.00773

de Vries, Hans. (2009). *Understanding Relativistic Quantum Field Theory*, 588 págs.

Tong, D. (2006). *Lectures on quantum field theory*. Cambridge University Mathematics Tripos, Michaelmas, 149 págs.

Randjbar-Daemi. (2007). *Lecture notes "Quantum Electrodynamics: Introduction to Quantum Field Theory"*. International Centre for Theoretical Physics, 124 págs.

Jaeckel, J. (2013). *A force beyond the Standard Model - Status of the quest for hidden photons*. arXiv:1303.1821

Peskin, M. E. (1995). *An introduction to quantum field theory*. Westview Press, 863 págs.

Hewett, J. Weerts et al. (2012). *Fundamental Physics at the Intensity Frontier*, arXiv:1205.2671.

Maggiore, M. (2005). *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 308 págs.

Ramond, P. (1997). *Field theory: A Modern Primer*. Westview Press, 412 págs.

Cheng, T. (2010). *Relativity, Gravitation and Cosmology*. New York, Oxford University Press, 435 págs.

Das, A. (2008). *Quantum Field Theory* University of Rochester, World Scientific, 412 págs.

Seiden, A. (2004). *Particle Physics: A Comprehensive Introduction*. Addison Wesley, 478 págs.

Mulders, P. J. (2003). *Introduction To Quantum Field Theory*. Universidad de Amsterdam, 121 págs.

Roman, P. (1965). *Advanced Quantum Theory: An Outline of the Fundamentals Ideas*. Boston University, Addison-Wessley, 747 págs.

D'Auria, R. & Trigiante, M. (1965). *From Special Relativity to Feynman Diagrams*. Springer-Verlag, Italia, 550 págs.

Kaku, M. (1993). *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*. Oxford University Press, New York, 802 págs.

van Hees, H. (2003). *Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Universidad de Bielefeld, 288 págs.

Weinberg, S. (1996). *The Quantum Theory of Fields*. Universidad de Austin, Texas. Cambridge University Press. Volumen I, 634 págs.

Maurette, M. (2009). *Función de Green*. 6 págs.

Sone, J. (2002). *Introduction to Relativistic Quantum Mechanics*. 8 págs.

Burcham, W. E. & Jobes, M. (1995). *Nuclear and Particle Physics*. Pearson. págs. 285-321.

Srednicki, M. (2006). *Quantum Field Theory*. University of California, Santa Barbara. 616 págs.

Term, M. (2010). *Introduction to Quantum Field Theory*. 67 págs.

- Churchill, R. (2009). *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, Nueva York, 482 págs.
- Stetz, A. W. (2007). *A Very Short Introduction to Quantum Field Theory*. 145 págs.
- Bañados, M. & Reyes, I. (2017). *A short review on Noether's theorems, gauge symmetries and boundary terms*. arXiv:1601.03616v3
- Pospelov, M. (2008). *Bosonic super-WIMPs as keV-scale dark matter*. arXiv:0807.3279v4
- Redondeo, J. & Postma, M. (2008). *Massive Hidden Photons as Lukewarm Dark Matter*. arXiv:0811.0326v1
- Essig, R. & Toro, N. (2009). *Probing Dark Forces and Light Hidden Sectors at Low-Energy ee Colliders*. arXiv:0903.3941v2
- Curciarello, F. (2016). *Review on Dark Photon*. DOI:10.1051/epjconf/201611801008
- Reece, M. & Wang, L. (2010). *Searching for the light dark gauge boson in GeV-scale experiments*. arXiv:0904.1743v3

XI. ANEXOS

A. Expansión explícita de la ecuación (VI.108)

Teniendo en cuenta las relaciones de conmutación de la ecuación (VI.82) se tiene que

$$\begin{aligned}
 & : \hat{\phi}_A(x_1) \hat{\phi}_B(x_1) \hat{\phi}_A(x_2) \hat{\phi}_B(x_2) : = \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) \\
 & + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) + \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) + \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_2) \\
 & + \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_2) \\
 & + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) + \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_2) + \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \\
 & + \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_2) \\
 & + \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_A^+(x_1) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^-(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_1) + \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^-(x_2)
 \end{aligned} \tag{XI.1}$$

Del primer término y del décimo sexto se obtiene resultados similares,

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}_A^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger | 0 \rangle = 0 \tag{XI.2}$$

Del segundo, tercer, cuarto, quinto, décimo segundo, décimo tercero, décimo cuarto y décimo quinto término, se obtienen resultados similares.

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_A^+(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_2) \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger | 0 \rangle = [\hat{a}'_A, \hat{\phi}_A^-(x_1)] \langle 0 | \hat{\phi}_B^+(x_1) \dots | 0 \rangle = 0 \tag{XI.3}$$

Del séptimo y décimo término se obtienen resultados similares

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}_A^-(x_1) \hat{\phi}_A^-(x_2) \hat{\phi}_B^+(x_1) \hat{\phi}_B^+(x_2) \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger | 0 \rangle = [\hat{a}'_B, \hat{\phi}_B^+(x_2)] \langle 0 | \dots \hat{a}'_B | 0 \rangle = 0 \tag{XI.4}$$

Del sexto término se obtiene

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B + \hat{\phi}^-_A(x_1) \hat{\phi}^-_B(x_1) \hat{\phi}^+_A(x_2) \hat{\phi}^+_B(x_2) \hat{a}^\dagger_A \hat{a}^\dagger_B | 0 \rangle = [\hat{a}^\dagger_A, \hat{\phi}^+_A(x_2)] [\hat{a}^\dagger_B, \hat{\phi}^+_B(x_2)] [\hat{a}'_B, \hat{\phi}^-_B(x_1)] [\hat{a}'_A, \hat{\phi}^-_A(x_1)] \quad (\text{XI.5})$$

Del octavo término se obtiene

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}^-_A(x_1) \hat{\phi}^-_B(x_2) \hat{\phi}^+_B(x_1) \hat{\phi}^+_A(x_2) \hat{a}^\dagger_A \hat{a}^\dagger_B | 0 \rangle = [\hat{a}^\dagger_A, \hat{\phi}^+_A(x_2)] [\hat{a}^\dagger_B, \hat{\phi}^+_B(x_1)] [\hat{a}'_B, \hat{\phi}^-_B(x_2)] [\hat{a}'_A, \hat{\phi}^-_A(x_1)] \quad (\text{XI.6})$$

Del noveno término se obtiene

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}^-_B(x_1) \hat{\phi}^-_A(x_2) \hat{\phi}^+_A(x_1) \hat{\phi}^+_B(x_2) \hat{a}^\dagger_A \hat{a}^\dagger_B | 0 \rangle = [\hat{a}^\dagger_A, \hat{\phi}^+_A(x_1)] [\hat{a}^\dagger_B, \hat{\phi}^+_B(x_2)] [\hat{a}'_B, \hat{\phi}^-_B(x_1)] [\hat{a}'_A, \hat{\phi}^-_A(x_2)] \quad (\text{XI.7})$$

Del undécimo término se obtiene

$$\langle 0 | \hat{a}'_A \hat{a}'_B \hat{\phi}^-_A(x_2) \hat{\phi}^-_B(x_2) \hat{\phi}^+_A(x_1) \hat{\phi}^+_B(x_1) \hat{a}^\dagger_A \hat{a}^\dagger_B | 0 \rangle = [\hat{a}^\dagger_A, \hat{\phi}^+_A(x_1)] [\hat{a}^\dagger_B, \hat{\phi}^+_B(x_1)] [\hat{a}'_B, \hat{\phi}^-_B(x_2)] [\hat{a}'_A, \hat{\phi}^-_A(x_2)] \quad (\text{XI.8})$$