DEDICACION

Este es un trabajo que tiene como finalidad, terminar con una carrera, Pero el motivo principal es estar cada vez mas cerca de la producción matematica. -

Hablar de producción es hablar de libertad. Nuestro país será libre solamente cuando se transforme de consumidor de cultura, tecnología y ciencia en un genuino productor

Es pues mi deseo que en Guatemala, haya pronto un gran desarrollo cientifico.

En sintesis esta dedicada a nuestra nación; GUATEMALA.

INDICE

INTRODUCCION

Haremos un estudio de los grupos locales con un parametro de difeomorfismos y su relación con los campos de Vectores en una $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-Variedad X, separada

Para ello comenzamos con un parrafo que plantea las definiciones y condiciones más útiles aquí, tomados del curso de Geometría Diferencial

Luego damos las definiciones de grupo y grupo local para luego hacer la comparación de grupo con un parametro con campo de Vectores, también de campo de Vectores a grupo local con un parametro. El § 4 da una idea geométrica del producto interior de dos campos de Vectores. Para rematar con el § 5 que nos da las condiciones nesesarias y suficientes para que el campo de Vectores sea diferenciable.

Guatemala Febrero 1974

0.0 PRELIMINARES

0.1 ESTRUCTURA DE VARIEDAD.

En el presente trabajo se consideraran estructuras de variedad C_∞ diferenciables de dimensión "n" en un espacio Hausdorff X.

0.2 CAMPO DE VECTORES.

Sea X una $C_\infty(\mathbb{R}^n)$- variedad y TX su fibrado vectorial. Llamamos campo de vectores ξ a toda aplicación

$$\xi : X \longrightarrow TX$$
$$a \longmapsto \xi_a \in T_a X$$

0.2.1 Nota.

ξ es una sección relativa a las proyecciones.

Esto es:

$$p : TX \longrightarrow X$$
$$T_a X \longmapsto a$$
$$\therefore \; p \circ \xi = id_X$$

0.3 SISTEMA DE COORDENADAS LOCALES

Sea (U_i, ϕ_i) una carta de un atlas A para la $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ – variedad X

El sistema de funciones $x^1 \circ \phi_i, \ldots, x^n \circ \phi_i$ definido en U_i es llamado un sistema de coordenadas locales. Con

$$x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y \longmapsto y_i$$

la i-esima función coordenada.

0.3.1 Nota:

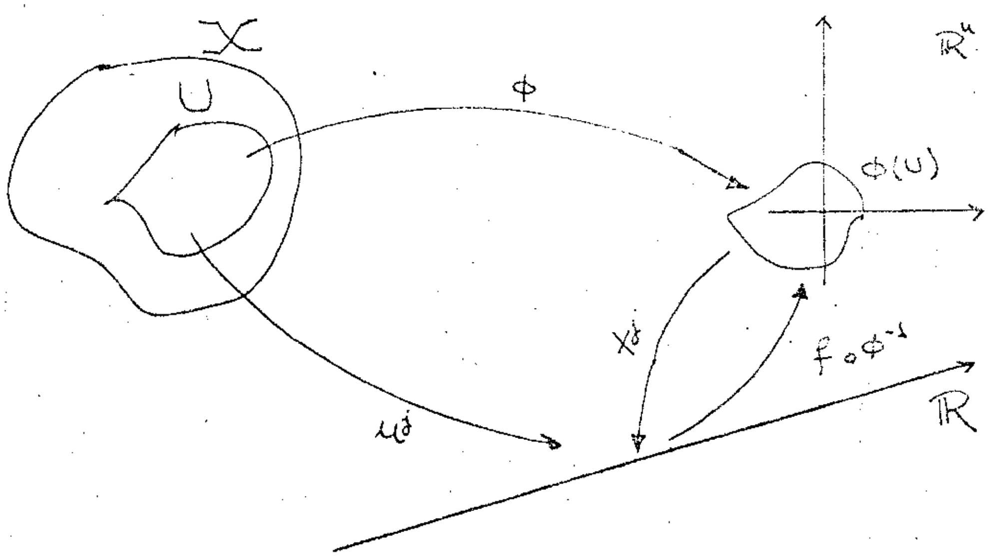
En términos de un sistema de coordenadas locales $u^1, \ldots, u^n$, un campo de vectores ξ puede expresarse por:

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\frac{\delta}{\delta u^j} \right)$$

donde ξ_j són funciones, definidas en una vecindad del sistema de coordenadas, llamadas las componentes de ξ con respecto a $u^1, \ldots, u^n$.
donde

$$u^j = x^j \circ \phi \qquad \text{y sea } f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi_j(x) = \xi x^j(a)$$



Entonces

$$\frac{\delta}{\delta u^j} : U \longrightarrow TX$$
$$a \longmapsto \left(\frac{\delta}{\delta u^j}\right)_a$$

Y

$$\left(\frac{\delta}{\delta u^j}\right)_a : C_\infty(U) \longrightarrow C_\infty(U)$$
$$f \longmapsto \frac{\delta}{\delta x^j}\left(f \circ \phi^{-1}\right)$$

0.4 CURVA

Una curva es una aplicación diferenciable

$$c: I \longrightarrow X, \text{ con } I \subset \mathbb{R}$$

.0.5 CURVA INTEGRAL

Sea ξ un campo de vectores en una $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-variedad X.

Una curva $x: t \longmapsto x(t) \in X$ se llama curva integral de ξ si, para cada valor del parámetro t_0 el vector $\xi_{x(t_0)}$ es tangente a la curva $x: t \mapsto x(t)$ en $x(t_0)$.

0.5.1 PROPOSICIONES

Para cada punto p_0 de X, existe una unica curva integral $x: t \mapsto x(t)$ de ξ definida por $|t| < \varepsilon$ para algun $\varepsilon > 0$, tal que $p_0 = x(0)$

En efecto:

Sea $u^1, \ldots, u^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad U de p_0 y sea

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \left(\frac{\delta}{\delta u^j} \right) \quad \text{en } U$$

Entonces una curva integral de ξ es una solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{du^j}{dt} = \xi_j(u^1(t), \ldots, u^n(t)), \; j=1, \ldots, n$$

Con lo cual la existencia y unicidad estan garontizadas por el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales lineales, el cual enunciamos a continuación

0.6 TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES ORDINARIAS

Sea $f(t, y, a)$ una familia de "n" funciones definidas en $|t| < \delta$ y $(y, a) \in D$, donde D es un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$. Si $f(t, y, a)$ es continua en t y diferenciable de clase C_1 en y, entonces existe una única familia $\phi(t, y, a)$ de "n" funciones defenidas en $|t| < \delta'$ y $(y, a) \in D'$ donde $0 < \delta' < \delta$ y D' es un abierto de D, tal que:

1) $\phi(t, y, a)$ es diferenciable de clase C_1 en t y en y

2) $$\frac{d\phi(t, y, a)}{dt} = f(t, \phi(t, y, a), a)$$

3) $\phi(0, y, a) = y$

con $y = (y^1, \dots, y^n)$, $\quad \eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$
$f = (f^1, \dots, f^n)$, $\quad \phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$
$\partial = (\partial^1, \dots, \partial^m)$

Para la demostración cf (1) y (2)

0.7 APLICACION TANGENTE.

Dada una aplicación f de una variedad X en otra variedad Y, la aplicación tangente de f en p es la aplicación lineal Tf de $T_p(X)$ en $T_{f(p)}(Y)$ definida como sigue: Para cada $\xi_p \in T_p(X)$, escogemos una curva $x: t \longmapsto x(t)$ en X tal que ξ_p sea el vector tangente de $x: t \longmapsto x(t)$ en $p = x(t_0)$, entonces $Tf(\xi)_p$ es el vector a la curva $f(x(t))$ y $f(p) = f(x(t_0))$.

Se sigue que si g es una función diferenciable en una vecindad de $f(p)$, entonces

$$(Tf(\xi))g = \xi(g \circ f)$$

0.8 RELATIVAMENTE COMPACTO

Un subconjunto en un espacio Topológico X se dice que es relativamente compacto en X si la cerradura es compacta cf (3)

§1 DEFINICIONES

1.1 GRUPO CON UN PARAMETRO

Sea X una $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-Variedad Hausdorff.
Un grupo con un parámetro de difeomorfismos de X es una aplicación

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$

$$(\quad (t, p) \longmapsto \phi_t(p) \in X$$

que satisface las condiciones siguientes:

1) $\forall t \in \mathbb{R}$, ϕ_t es un difeomorfismo de X en X

2) $\forall s, t \in \mathbb{R}$, $p \in X$, $\phi_{t+s}(p) = \phi_t(\phi_s(p))$

1.1.1 Nota
De aquí ϕ_0 es la aplicación identidad en X.

1.1.2 GRUPO LOCAL CON UN PARAMETRO

Sea I_ε el intervalo abierto $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ y
U un conjunto abierto de X.

Un grupo local con un parámetro de difeomorfismos, es una aplicación de $I_\varepsilon \times U$ en X, que satisface las condiciones siguientes:

1) $\forall t \in I_\varepsilon$, $\phi_t : p \longmapsto \phi_t(p)$ es un difeomorfismo de U sobre el abierto $\phi_t(U) \in X$

2) Si $t, a, t+a \in I_\varepsilon$ y si $p, \phi_a(p) \in U$ entonces:
$$\phi_{t+a}(p) = \phi_t(\phi_a(p))$$

§ 2 CAMPO DE VECTORES INDUCIDO POR UN GRUPO CON UN PARAMETRO

2.1 PROPOSICION:

Todo grupo con un parametro de difeomorfismos ϕ_t de X induce un campo de Vectores ξ sobre la variedad X.

DEMOSTRACION:

$\forall p \in X$, ξ_p es el vector tangente a la curva $x(t) = \phi_t(p)$ y $p = \phi_0(p)$, aplicando (0.5.1) tenemos que $\phi_t(p)$ es una curva integral de ξ en p.

§3 GRUPO CON UN PARAMETRO GENERADO POR UN CAMPO DE VECTORES ξ DE X

3.1 PROPOSICION

Sea ξ un campo de vectores en una variedad X, para cada punto $p_0 \in X$, existe una vecindad U de p_0, un número $\varepsilon > 0$ y un grupo local con un parametro de difeomorfismos $\phi_t : U \longrightarrow X$, $t \in I_\varepsilon$, que es el inducido por el campo ξ.

DEMOSTRACION:

Sea $u^1, \ldots, u^n$ un sistema de coordenadas locales en una vecindad W de p_0, tal que

$$u^1(p_0) = \ldots = u^n(p_0) = 0 \quad \text{Ver } (0.3)$$

$$\text{Sea } \xi = \sum_i \xi_i (u^1, \ldots, u^n) \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \text{ en } W$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{df^i}{dt} = \xi_i \left(f^1(t), \ldots, f^n(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

con $f^1(t), \ldots, f^n(t)$ funciones desconocidas..

Por el teorema de existencia y unicidad para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias (Ver (0.6)).

Existe un único conjunto de funciones $f^1(t,u),\dots,f^n(t,u)$ definidos para $u=(u^1,\dots,u^n)$ con $|u^i|<\delta_1$ y para $|t|<\varepsilon$ que forman una solución de la ecuación diferencial para cada u fijo y satisface las condiciones iniciales $f^i(0,u)=u^i$.-

Hacemos $\phi_t(u)=(f^1(t,u),\dots,f^n(t,u))$, para $|t|<\varepsilon_1$, y u en $U_1=\{u;\ |u^i|<\delta_1\}$. si $|t|,|s|,|t+s|$, son menores que ε_1 y $u,\phi_s(u)$ estan en U_1, entonces las funciones $g^i(t)=f^i(t+s,u)$, son solución de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales $g^i(0)=f^i(s,u)$. Por la unicidad de la solución tenemos que $g^i(t)=f^i(t,\phi_s(u))$ esto prueba que $\phi_t(\phi_s(u))=\phi_{t+s}(u)$

Como ϕ_0 es la aplicación identidad de U_1, existen $\delta>0$ y $\varepsilon>0$, tal que para $U=\{u;|u^i|<\delta\}$, $\phi_t(u)$ contenido en U_1, si $|t|<\varepsilon$, tenemos $\phi_t(\phi_{-t}(u))=\phi_{-t}(\phi_t(u))=\phi_0(u)=u$ $\forall u\in U$, y $|t|<\varepsilon$.-

Como la aplicación identidad es diferenciable y ademas la conmutatividad por la adición de reales (ya que $\phi_t(\phi_{-t}(u))=\phi_{t+(-t)}(u)$) nos prueba que ϕ_t es un difeomorfismo de U para $|t|<\varepsilon$.

Asi ϕ_t es un grupo local con un parametro de difeomorfismos, definido en $I_\varepsilon\times U$. Ahora, por la construcción, ϕ_t es el inducido por el campo de vectores ξ en X

3.1.1 Nota.

En la demostración anterior, se prueba que dos grupos locales con un parámetro de difeomorfismos φ_t y ψ_t definidos en $I_\varepsilon \times U$ inducidos por el mismo campo de vectores ξ, coinciden, esto por la unicidad de (0.6).

3.1.2 En particular dos curvas integrales definidos sobre un mismo intervalo I de $\mathbb{R}$ son iguales si ellos presentan el mismo valor en un punto de I.
En efecto sean x, y dos curvas integrales de ξ

$$x : I \longrightarrow X \quad y \quad y : I \longrightarrow X$$

Sea $k \in I$ tal que $x(k) = y(k)$, entonces el vector $\xi_{x(k)} = \xi_{y(k)}$ es tangente a la curva

$$x : I \longrightarrow X \quad \text{y también a} \quad y : I \longrightarrow X,$$ lo

cual es imposible por (0.5.1), entonces las curvas coinciden

3.2 CAMPO DE VECTORES COMPLETO

Sabemos que un campo de vectores ξ en X, genera un grupo <u>local</u> con un parametro. Ahora

3.2.1 DEFINICION

Si ξ campo de vectores en X, genera un grupo con un parámetro se dice que es completo.

3.3 CONDICIONES TOPOLOGICAS DE X, PARA QUE ξ SEA UN CAMPO DE VECTORES COMPLETO.

3.3.1 PROPOSICION:

En una variedad diferenciable X, compacta, cada campo de vectores ξ es completo.

DEMOSTRACION

$\forall p \in X$, sea $U(p)$ una vecindad de p y $\varepsilon(p)$ un número positivo, tal que el campo de vectores genera un grupo local con un parámetro de difeomorfismos ϕ_t en $I_{\varepsilon(p)} \times U(p)$..

Como X es compacto, la cubierta abierta $\{U(p); p \in X\}$ tiene una subcubierta finita $\{U(p_i); i = 1, \ldots, k\}$

Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p_1), \ldots, \varepsilon(p_k)\}$, entonces podemos extender ϕ_t de un abierto U en X, osea que ϕ_t esta definido en $I_\varepsilon \times X$ que todavia es un grupo local, pero de aqui veamos ci ϕ_t definido en $\mathbb{R} \times X$, con la ayuda del siguiente:

3.3.2 LEMA

Sea ξ un campo de vectores sobre una variedad X, y sea (U, ϕ) el mas grande grupo local con un parámetro de difeomorfismos de X, engendrado por ξ. Para todo $y \in X$, designamos por $]\alpha_y, \omega_y[$ al intervalo de $\mathbb{R}$, definido por

$$\mathbb{R} \times \{y\} \cap U =]\alpha_y, \omega_y[\times \{y\},$$

$$\text{y por } c_y^+ : [0, \omega_y[\longrightarrow X \qquad (c_y^- :]\alpha_y, 0] \to X)$$

la curva integral $t \longmapsto \phi_t(y)$ de ξ. Si la imagen de c_y^+ (c_y^-) es relativamente compacta se tiene que $\omega_y = +\infty$ ($\alpha_y = -\infty$)

DEMOSTRACION

Suponemos que la imagen de c_y^+ sea relativamente compacta (ver (0.8)) y que ω_y sea finito.-

Sea z un punto de acumulación de la curva c_y^+ para $t \longrightarrow \omega_y$ y sea W una vecindad abierta de z, $\varepsilon > 0$ y sea $\psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times W \longrightarrow X$ una aplicación diferenciable con las propiedades

i) $t \longmapsto \phi_t(z)$ es una curva integral de ξ

ii) $\phi_T(z) = z$

Sea T en el intervalo $]\omega_y - \varepsilon, \omega_y[$ tal que $\phi_T(y)$ en W. Se puede encontrar una vecindad abierta V de y tal que $\{T\} \times V$ este contenida en U, y $\phi_T(V)$ contenida en W.

Sea entonces $U' = U \cup \,]\omega_y - \varepsilon, \omega_y + \varepsilon[\, \times V$ se puede prolongar ϕ a un grupo local (U', ϕ') planteando $\phi'(t,x) = \psi(t-\tau, \phi(\tau,x))$, $x \in V$ y $|t-\omega_y| < \varepsilon$ lo cual es absurdo, puesto que (U, ϕ) es maximal. -

3.3.3 COROLARIO

Un campo de Vectores con soporte compacto es completo.

DEMOSTRACION

Sea ξ un campo de Vectores en X y $\mathrm{SOP}\,\xi = \overline{\{x \mid \xi(x) \neq 0\}}$. Sabemos que la imagen continua de un compacto es compacta, entonces aplicando (3.3.1) tenemos que ξ es completo.

3.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE $[\xi, \eta]$

Se dara una interpretación geometrica del producto interior $[\xi, \eta]$, con ξ y η dos campos de Vectores en la $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-Variedad X. Para ella necesitamos un teorema un corolario y dos Lemas; y de 4.4 en adelante lo haremos.

4.1 TEOREMA:

Sea ϕ un difeomorfismo de X en X, si un campo de Vectores ξ genera a un grupo local con un parámetro de difeomorfismos ϕ_t, entonces el campo de Vectores $T\phi(\xi)$ genera a $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$ que ademas es un grupo local con un parametro

DEMOSTRACION

1) $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$ es un grupo local con un parámetro puesto que:

i) $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$ es un difeomorfismo, por ser composicion de difomorfismo

ii) como $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, por ser ϕ_t grupo local con un parámetro, entonces $\phi \circ \phi_{t+s} \circ \phi^{-1} = \phi \circ (\phi_t \circ \phi_s) \circ \phi^{-1}$

$$= \phi \circ \phi_t \circ \phi_s \circ \phi^{-1}$$

Por lo tanto es un grupo local con un parámetro.-

2) Demostraremos que es el grupo local con un parámetro inducido por el campo de vectores $T\phi(\xi)$

Sea $p \in X$, arbitrario y $q = \phi^{-1}(p)$
Como ϕ_t es el inducido por ξ, el vector $\xi_q \in T_q(X)$ es tangente a la curva $x: t \longmapsto x(t) \in X$, con $x(t) = \phi_t(q)$ y $q = x(0)$

$$\xi : q \longmapsto \xi_q \in T_q(X)$$

$$T\phi : \xi_q \in T_q(X) \longmapsto T\phi(\xi_q) \in T_{\phi(q)}(X) = T_p(X)$$

Ya que $q = \phi^{-1}(p)$. Se sigue que el vector

$$(T\phi(\xi))_p = T\phi(\xi_q) \in T_p(X) \text{ es tangente}$$

a la curva $y: t \longmapsto y(t)$, con

$$y(t) = (\phi \circ \phi_t)(q) = (\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1})(p)$$

entonces por (0.5.1) es la única curva integral

Por lo tanto 1) y 2) hacen que $\phi \circ \phi_t \circ \phi^{-1}$ sea un grupo local con un parámetro inducido por el campo de vectores $T\phi(\xi)$.

4.2 COROLARIO:

Un campo de vectores ξ es invariante por ϕ, es decir $T\phi(\xi) = \xi$, si y solo si ϕ conmuta con ϕ_t

4.3.1 LEMA

Si $f(t,p)$ es una función en $I_\varepsilon \times X$, tal que $f(0,p) = 0 \quad \forall p \in X$, entonces existe una función $g(t,p)$ en $I_\varepsilon \times X$ tal que $f(t,p) = t.g(t,p)$, y además:

$$g(0,p) = \left.\frac{df(t,p)}{dt}\right|_{t=0} \quad \forall p \in X$$

Para la demostración es suficiente definir

$$g(t,p) = \int_0^1 \frac{df(ts,p)}{dt}\, ds$$

y entonces

$$f(t,p) = \int_0^1 t\,\frac{df(ts,p)}{dt}\, ds$$

4.3.2 LEMA

Sea ξ campo de vectores que genera a ϕ_t grupo local con un parámetro. Para cualquier función $f \in C_\infty(X)$ existe una función $g_t(p) = g(t,p)$ tal que $f \circ \phi_t = f + t \cdot g_t$ y $g_0 = \xi f$ en $C_\infty(X)$.

La función $g_t(p)$ está definida para cada punto fijo $p \in X$, en $|t| < \varepsilon$, para algún ε

DEMOSTRACION

Considérese $f(t,p) = f(\phi_t(p)) - f(p)$ aplicando (4.3.1) entonces:

$$f(\phi_t(p)) = f(p) + f(t,p)$$
$$(f\circ\phi_t)(p) = f(p) + t\cdot g_t(p)$$

o sea que $f\circ\phi_t = f + t\cdot g_t$

ahora

$$(\xi f)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[f(\phi_t(p)) - f(p)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(t,p) \text{ nuevamente}$$

por (4.3.1) $\qquad = \lim_{t\to 0} g_t(p) = g_0(p)$

4.4 PROPOSICION

Sean ξ y η campos de vectores en la $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-variedad X, si ξ genera a un grupo local con un parámetro de difeomorfismos ϕ_t, entonces

$$[\xi,\eta] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\eta - T\phi_t(\eta)\right]$$

mas presisamente

$$[\xi,\eta]_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\eta_p - (T\phi_t(\eta))_p\right],\ p\in X$$

DEMOSTRACION

Dada una función $f\in C_\infty(X)$, por (4.3.2) seleccionamos una función g_t tal que $f\circ\phi_t = f + t\cdot g_t$ y $\xi f = g_0$

Establecemos $p(t) = \phi_t^{-1}(p)$, entonces: por (0.7) tenemos que

$$(T\phi_t(\eta))_p f = (\eta(f\circ\phi_t))_{p(t)}$$

Ahora

$$(\eta(f\circ\phi_t))_{p(t)} = (\eta f)_{p(t)} + t(\eta g_t)_{p(t)}$$

O sea que

$$(T\phi_t(\eta))_p f = (\eta f)_{p(t)} + t(\eta g_t)_{p(t)}$$

muy bien. Entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\eta - T\phi_t(\eta)]_p f = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\eta f)_p - (\eta f)_{p(t)}] - \lim_{t\to 0}(\eta g_t)_{p(t)}$$
$$= \xi_p(\eta f) - \eta_p g_0$$
$$= \xi_p(\eta f) - \eta_p(\xi f)$$
$$= [\xi,\eta]_p f$$

4.5 COROLARIO

Sean ξ y η campos de vectores en X. Si ξ genera a un grupo local con un parámetro de difeomorfismos ϕ_t, entonces

$$T\phi_s[\xi,\eta] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_s(\eta) - T\phi_{s+t}(\eta)] \quad \forall s \in I_\varepsilon$$

DEMOSTRACION

Fijamos un valor s. Consideremos el campo de vectores $V = T\phi_s(\eta)$. Como $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$, tenemos, aplicando (4.2) que $T\phi_s \xi = \xi$, como $T\phi_s$ preserva el producto interior, entonces

$$T\phi_a[\xi,\eta] = [\xi, T\phi_a(\eta)] = [\xi, \nu]$$

Aplicando (4.4) tenemos

$$[\xi,\nu] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nu - T\phi_t(\nu)]$$ substituyendo

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_a(\eta) - T\phi_t(T\phi_a(\eta))]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_a(\eta) - (T\phi_t \circ T\phi_a)(\eta)]$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_a(\eta) - T\phi_{t+a}(\eta)]$$

4.5.1 Nota

La conclusión de (4.5) puede escribirse

$$\left.\frac{d\,T\phi_t(\eta)}{dt}\right|_{t=a} = -T\phi_a[\xi,\eta]$$

ya que:

$$T\phi_a[\xi,\eta] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_a(\eta) - T\phi_{a+t}(\eta)]$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[T\phi_{a+t}(\eta) - T\phi_a(\eta)]$$

$$= \left.\frac{-d\,T\phi_t(\eta)}{dt}\right|_{t=a}$$

4.6 COROLARIO

Sean ξ y η campos de vectores en la $C\infty(\mathbb{R}^n)$-Variedad X, que genera los grupos locales con un parámetro ϕ_t y ψ_t respectivamente. Entonces $\forall\, s \in I_{\varepsilon_\psi}$ y $\forall\, t \in I_{\varepsilon_\phi}$,

$$\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t \quad \text{si y solo si } [\xi, \eta] = 0$$

DEMOSTRACION

Si $\phi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \phi_t \ \forall s, t$; η es invariante para cada ϕ_t, por lo tanto, aplicando (4.2) tenemos: $T\phi_t(\eta) = \eta$ y ahora aplicando (4.3) tenemos que:

$$[\xi, \eta] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\eta - T\phi_t(\eta)] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\eta - \eta] = 0$$

Inversamente si $[\xi, \eta] = 0$, entonces por (4.5.1)

$$\frac{d\,T\phi_s(\eta)}{dt} = -T\phi_s[\xi, \eta] = 0 \quad \forall t$$

Por lo tanto $T\phi_s(\eta)$ es un vector constante $\forall\, p \in X$, así tenemos η es invariante para cada ϕ_t, entonces por (4.2) cada ψ_s conmuta con cada ϕ_t

§ 5 CONDICIONES NESESARIAS Y SUFICIENTES PARA QUE UN GRUPO LOCAL CON UN PARAMETRO DEFINA UN CAMPO DE VECTORES DIFERENCIABLES

5.1 DEFINICION

Se dice que un campo de vectores ξ es diferenciable si $\forall f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, la función

$$\xi f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a \longmapsto \xi f(a) = \xi_a f \quad \text{es diferenciable.}$$

5.1.1 En el § 2 vimos como un campo de vectores es inducido por un grupo con un parámetro, y en particular por un grupo local. Ademas en el § 3 se desarrolla la propiedad de que dado un campo de vectores, existe un grupo local con un parametro.

5.2 CONDICIONES

Hagamos un analisis. Tenemos de (4.5.1) que

$$\left(\frac{d\, T\phi_t(\eta)}{dt}\right) f \Big|_{t=a} = -\left(T\phi_a [\xi, \eta]\right) f$$

Lo cual implica que este campo de vectores es diferenciable. Ahora nos toca analizar las condiciones de (4.5) que son:

1) dos campos de vectores ξ y η en la $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-variedad X.

2) ξ genera a un grupo local con un parametro ϕ_t entonces, podemos hacer la siguiente proposicion que por cierto es la mas importante de este trabajo.

5.2.1 PROPOSICION

Sean ξ y η campos de vectores en la $C_\infty(\mathbb{R}^n)$-variedad X. Y ϕ_t grupo local con un parametro generado por ξ.

ξ es diferenciable si y solo si $T\phi_0[\xi,\eta]$ existe

DEMOSTRACION

1) Sabemos que ξ es diferenciable. ϕ_t es diferenciable
Sea $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $U \subset X$.
La composición $\xi \circ f \circ \phi_t = (\xi \circ f) \circ \phi_t$ es diferenciable entonces

$$\frac{d(\xi \circ f \circ \phi_t)}{dt}$$ existe, pero por (0.7)

$$\frac{d(\xi \circ f \circ \phi_t)}{dt} = \left(\frac{d\, T\phi_t(\eta)}{dt}\right) f$$ y por (4.5.1)

$$-\left(\frac{d\, T\phi_t(\eta)}{dt}\right) f = \left(T\phi_0\, [\xi,\eta]\right) f$$

2) Inversamente, se sigue de (4.5.1)
Con $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y $U \subset X$,

$$-\left(T\phi_0\,[\xi,\eta]\right) f = \left(\frac{d\, T\phi_t(\eta)}{dt}\right) f = \frac{d\, \xi(f \circ \phi_t)}{dt} \quad \text{(por (0.7))}$$

entonces como f es diferenciable, ϕ_t también,

$\dfrac{d\, \xi(f \circ \phi_t)}{dt}$ existe, además

$$\frac{d\, \xi(f \circ \phi_t)}{dt} = \frac{d\,(\xi \circ f \circ \phi_t)}{dt} = \frac{d\,(\xi \circ f) \circ \phi_t}{dt}$$

por lo tanto ξ es diferenciable

BIBLIOGRAFIA

1. Coddington, Earl A.
Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.
México, Cia. Editorial Continental S.A (CECSA), 1968

2. Lang, Serge
Differential Manifolds
Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1972

3. Lang, Serge
Analysis II
Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1969

4. Godbillon, Claude
Geométrie différentielle et mécanique analytique
Paris, Hermann Editeur, 1969

5. Kobayashi, Shoschichi & Nomizu, Katzumi
Foundations of Differential Geometry, Vol. 1
New York, Interscience-Wiley, 1963

6. Sternberg, Schlomo Z.
Lectures on differential geometry
Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc., 1964

7. Morales, BERNARDO
Notas de clase del curso "GEOMETRIA DIFERENCIAL"
UNIVERSIDAD DEL VALLE de GUATEMALA.
Segundo Semestre, 1973.